



**BAZI ÖZEL SERRET-FRENET VEKTÖR ALANLARININ FERMİ-
WALKER VE NORMAL FERMİ-WALKER TÜREVLERİ**

Sefa Yunus TIRAŞCI

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

AĞRI-2025

(Her hakkı saklıdır.)

T.C.

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL SERRET-FRENET VEKTÖR ALANLARININ FERMİ-
WALKER VE NORMAL FERMİ-WALKER TÜREVLERİ

SEFA YUNUS TIRAŞCI

TEZ YÖNETİCİSİ

Prof. Dr. ALİ ÇAKMAK

Jüri: Doç. Dr. Abdulgani ŞAHİN

Prof. Dr. Haşim ÇAYIR

Prof. Dr. ALİ ÇAKMAK

AĞRI-2025

(Her hakkı saklıdır)

03/07/2025

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğine göre hazırlamış olduğum "**BAZI ÖZEL SERRET-FRENET VEKTÖR ALANLARININ FERMİ-WALKER VE NORMAL FERMİ-WALKER TÜREVLERİ**" adlı yüksek lisans tezinin bilimsel ve etik kurallara riayet edilerek tarafımdan hazırlandığını taahhüt eder, tezimin basılı ve elektronik nüshalarının Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivlerinde saklanmasına ve tamamının erişime açılmasına izin verdiğimi beyan ederim.

Lisansüstü Eğitim-Öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

☒ Tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

☐ Tezim sadece Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi yerleşkelerinden erişime açılabilir.

☐ Teziminyıl süreyle erişime açılmasını istemiyorum. Bu sürenin sonunda uzatma için başvuruda bulunmadığım takdirde, tezimin tamamı her yerden erişime açılabilir.

03/07/2025

Sefa Yunus TIRAŞCI

TEZ KABUL VE ONAY TUTANAĞI

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK danışmanlığında, Sefa Yunus TIRAŞÇI tarafından hazırlanan bu çalışma, .../.../... tarihinde aşağıda isimleri belirtilen jüri tarafından değerlendirilmiş olup Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalında yüksek lisans tezi olarak **oybirliği / oy çokluğu (.../...)** ile kabul edilmiştir.

Başkan : Prof. Dr. Haşim ÇAYIR

İmza:

Üye : Doç. Dr. Abdulgani ŞAHİN

İmza:

Üye : Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

İmza:

Yukarıdaki sonuç;

Enstitü Yönetim Kurulu .../.../... tarih ve / numaralı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Mehmet TEYFUR

Enstitü Müdürü

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI ÖZEL SERRET-FRENET VEKTÖR ALANLARININ FERMİ-WALKER VE NORMAL FERMİ-WALKER TÜREVLERİ

Sefa Yunus TIRAŞCI

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

2025, 62 sayfa

Jüri: Doç. Dr. Abdulgani ŞAHİN

Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Prof. Dr. Haşim ÇAYIR

Bu tez çalışmasında, 3 –boyutlu Öklid uzayında Bertrand ve Mannheim eğri çiftleri ayrı ayrı tanımlanıp Serret-Frenet vektör alanları boyunca Fermi-Walker ve Normal Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır. Daha sonra aynı vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olup olmadığı durumları incelenmiştir.

Tez beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde giriş kısmı yer almaktadır. İkinci bölümde, temel tanım, teorem ve özelliklere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, tez çalışmasında bulgular için gerekli olan materyal ve yöntemlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde, Bertrand eğrileri ile Mannheim eğrilerinde Fermi-Walker türevi ve Normal Fermi-Walker türevi ile ilgili bulgulara yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise bulgulardan yola çıkarak elde edilen veriler ile ilgili değerlendirmelerde bulunulmuştur.

2025, 62 sayfa

Anahtar kelimeler: Eğri, Fermi-Walker anlamında paralellik, Fermi-Walker türevi, Normal Fermi-Walker türevi, Bertrand eğrileri, Mannheim eğrileri.

ABSTRACT

Master Thesis

FERMİ-WALKER AND NORMAL FERMİ-WALKER DERIVATIVES OF SOME SPECIAL SERRET-FRENET VECTOR FIELDS

Sefa Yunus TIRAŞCI

AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN UNIVERSITY

POSTGRADUATE EDUCATION INSTITUTE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

2025, 62 pages

Jury: Assoc. Doç. Dr. Abdulgani ŞAHİN

Assoc. Prof. Dr. Ali ÇAKMAK

Assoc. Prof. Dr. Haşim ÇAYIR

In this thesis, Bertrand and Mannheim curve pairs in 3 –dimensional Euclidean space are defined separately and Fermi-Walker and Normal Fermi-Walker derivatives are calculated along Serret-Frenet vector fields. Then, it is investigated whether the same vector fields are parallel in the Fermi-Walker sense.

The thesis consists of five main parts. First part is includes an introduction. In the second part, basic definitions, theorems, and features are included. In the third part, the materials and methods used in the preparation of the thesis are mentioned. In the fourth part, findings related to Fermi-Walker derivative and Normal Fermi-Walker derivative in Bertrand curves and Mannheim curves are presented. In the fifth part, evaluations are made regarding the datas obtained based on the findings.

2025, 62 pages

Keywords: Curve, Fermi-Walker parallelism, Fermi-Walker derivative, Normal Fermi-Walker derivative, Bertrand curves, Mannheim curves.

TEŞEKKÜR

İlk günden itibaren Yüksek Lisans öğrenimimde ve tez çalışmamda bana her zaman örnek olan, değerli birikimi ve tecrübeleriyle yolumu aydınlatan, sabırla ve özveriyle beni dinleyen ve çalışmama yön veren, süreç boyunca beraber çalışmış olmaktan onur duyduğum ve keyif aldığım, desteğini ve anlayışını her zaman gördüğüm, emeklerinden dolayı minnet duyacağım, sevgi ve saygıyla hatırlayacağım çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Ali ÇAKMAK'a teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Eğitim süresince ve tez çalışmamda bana inanan, güvenen, tüm desteklerini ve fedakarlıklarını hissettiğim, tüm zorlukları beraber aştığım başta yol arkadaşım canım eşime ve geniş aileme sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

03/07/2025

Sefa Yunus TIRAŞÇI

İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xii
1.GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1 Afın Uzayı.....	3
2.2. n –Boyutlu Öklid Uzayı.....	7
2.3. Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri	9
3. MATERYAL YÖNTEM	15
3.1. Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler.....	15
3.2. Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çifti	17
3.3. Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti.....	20
3.4. Fermi-Walker Türevi.....	22
3.5. Normal Fermi-Walker Türevi.....	24
4.ARAŞTIRMA BULGULARI	26
4.1. Bertrand Eğri Çiftinin ve Mannheim Eğri Çiftinin Serret-Frenet Vektör Alanlarının Fermi-Walker Türevleri	26
4.1.1. Bertrand Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	26
4.1.2. Bertrand Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	29
4.1.3. Bertrand Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	31

4.1.4. Mannheim Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	35
4.1.5. Mannheim Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	37
4.1.6. Mannheim Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi	39
4.2. Bertrand Eğri Çiftinin ve Mannheim Eğri Çiftinin Serret-Frenet Vektör Alanlarının Normal Fermi-Walker Türevleri	42
4.2.1. Bertrand Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Normal Fermi- Walker Türevi	43
4.2.2. Bertrand Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Normal Fermi- Walker Türevi	45
4.2.3. Bertrand Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Normal Fermi- Walker Türevi	47
4.2.4. Mannheim Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Normal Fermi- Walker Türevi	49
4.2.5. Mannheim Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Normal Fermi- Walker Türevi	52
4.2.6. Mannheim Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Normal Fermi- Walker Türevi	54
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	58
KAYNAKLAR.....	59
ÖZGEÇMİŞ.....	62

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}$	: Gerçek(Reel) Sayılar Kümesi
$\mathbb{E}^n$	: n –Boyutlu Öklid Uzayı
I	: $\mathbb{R}$ de Bir Aralık
$\ \cdot \ $	: Norm Operatörü
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: İç Çarpım Operatörü
g	: Riemann Metriği
β	: $\mathbb{E}^n$ Uzay Eğrisi
$\beta^*(s^*)$	: $\beta(s)$ Birim Hızlı Eğrisinin Bertrand Eğri Çifti
$\mathcal{M}$	: $\mathbb{E}^n$ Uzay Eğrisi
$\mathcal{M}^*$	: $\mathcal{M}(s)$ Birim Hızlı Eğrisinin Mannheim Eğri Çifti
κ	: Eğrinin Eğriliği
τ	: Eğrinin Burulması (Torsiyonu)
$\mathcal{T}$	: β ve $\mathcal{M}$ Eğrilerinin Teğet Vektör Alanı
$\mathcal{N}$	: β ve $\mathcal{M}$ Eğrilerinin Normal Vektör Alanı
$\mathcal{B}$	: β ve $\mathcal{M}$ Eğrilerinin Binormal Vektör Alanı
$\mathcal{T}^*$	: β^* ve $\mathcal{M}^*$ Eğrilerinin Teğet Vektör Alanı
$\mathcal{N}^*$	: β^* ve $\mathcal{M}^*$ Eğrilerinin Normal Vektör Alanı
$\mathcal{B}^*$	: β^* ve $\mathcal{M}^*$ Eğrilerinin Binormal Vektör Alanı
$\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$	: β ve $\mathcal{M}^*$ Eğrilerinin Serret-Frenet Üçlüsü
$\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$	: β^* ve $\mathcal{M}^*$ Eğrilerinin Serret-Frenet Üçlüsü
$\mathcal{W}$	: Darboux Vektörü

$\mathcal{W}^*$	: Fermi-Walker Anlamında Darboux Vektörü
$\dot{\mathcal{X}}$	: $\mathcal{X}$ Vektör Alanının Öklid Türevi
∇	: Levi-Civita Konneksiyonu
$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X}$	: $\mathcal{X}$ Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi
$\frac{\tilde{\mathcal{D}}\mathcal{X}}{\tilde{\mathcal{D}}s}$	: $\mathcal{X}$ Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. Bertrand Eğri Çifti.....	17
Şekil 3.2. Mannheim Eğri Çifti	20



1.GİRİŞ

Matematiği oluşturan konular ele alındıkları dönemin koşulları ve ihtiyaçları ile bağlantılı olup ilgi ve anlamlandırma açısından dönüşüm, gelişim göstermektedir. Örnek olarak Miken(Antik Yunan) uygarlığında geometri, yön ve mesafe bağlantılarını inceleyen matematiğin dalı kabul edilirken; bugünkü hesaplamalı geometri, diferansiyel geometri, cebirsel geometri, ayrık geometri, cebirsel topoloji ve projektif geometri gibi alt dallarına ayrılmıştır.

Geometrinin alt dallarından biri olan diferansiyel geometri için de benzer durum geçerlidir. Modern yaklaşımda, geometri ve diferansiyel geometri arasındaki çizginin giderek kaybolduğu görülmektedir. Diferansiyel hesap, integral hesap ve lineer cebir tekniklerini kullanarak diferansiyellenebilir manifoldları inceleyen klasik diferansiyel geometri, özel olarak eğrilerin ve yüzeylerin genel ve yerel olan özelliklerini incelemektedir. Yerel özellikler ile anlatılmak istenen, eğrinin veya yüzeyin bir nokta etrafındaki davranışı anlaşılmaktadır. Daha genel bir ifade ile manifoldların geometrik yapısını yani boyut, mesafe, şekil, hacim gibi kavramlarını araştıran diferansiyel geometri, manifoldların izometrilere altında değişmez kalanları ile ilgilidir. Bundan dolayı diferansiyel geometrinin tanımı, modern geometrinin tanımına yakındır.

Diferansiyel geometrinin temel çalışma alanı olan veya gerçek dünya problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan kavramlar arasında yer alan eğriler ve eğrilikler hem kuramsal açıdan hem de uygulamaları itibarı ile güncelliğini koruyan bir çalışma sahasıdır (Ersoy, Akyiğit, Yıldız 2023).

Bertrand eğrileri iyi tanımlanan eğrilerdendir. Bu eğriler ilk defa 1850’de Joseph Louis François Bertrand tarafından tanımlanmıştır. Asli normalleri paralel olan bu eğriler J.Bertrand tarafından Bertrand eğrileri olarak ifade edilmiştir (Bertrand 1850). Son zamanlarda, Bertrand eğrileri bilgisayar destekli geometrik tasarımlarda (CAD) ve bilgisayar destekli üretimlerde (CAM) önemli bir yer almaktadır (O’Neill 1983; Ünal, Kişi, Tosun 2013).

İyi tanımlanan diğer bir eğri de Mannheim olduğu bilinmektedir. Bu eğri λ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere, $\kappa = \lambda / (\kappa^2 + \tau^2)$ denklemini sağlar. Burada κ

eğrinin eğriliği ve τ eğrinin burulmasıdır (Mannheim 1878; Blum 1966). Literatürde Öklid ve Minkowski uzayı gibi farklı uzaylarda Mannheim eğrilerini kapsayan çalışmalar vardır (Liu ve Wang 2008; Lee 2011).

Diferansiyel geometrideki Serret-Frenet formülleri Öklid uzayında bir eğri boyunca hareket eden parçacığın kinematik özelliklerini açıklar. $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ çatısı olarak ifade edilen bu çatı sırasıyla teğet vektör, asli normal vektör ve binormal vektörden oluşur. Serret-Frenet çatısı diğer çatı çalışmalarının yapıtaşını oluşturur. Ayrıca, günümüze kadar eğrilerin özelliklerinin incelenmesinde çeşitli alternatif çatılar oluşturulmuştur (Sevinç ve Kuşak Samancı 2022).

Fermi 1922 yılında, Fermi türevini hızlanan gözlemcilere göre tanımlamıştır. Sonrasında 1932 yılında Walker, herhangi bir α eğrisi (gözlemcinin üzerinde hareket ettiği eğri-çizdiği rota) için tanımlanmış hiperyüzeyler üzerindeki Fermi türevini uzay eğrilerinde daha geniş haliyle Fermi-Walker türevini tanımlamıştır. (Benn ve Tucker 1989; Dandoloff 1989; Balakrishnan 2005).

Fermi-Walker türevi yapılan çalışmaların birçoğunda fiziksel olarak açıklanıp, yapılan çalışmalarda geometrik değerlendirmelere fazla yer verilmemiştir. Bundan dolayı Karakuş ve Yaylı Fermi-Walker türevinin geometrik anlamına ve değerlendirmelerine 2012 ve 2018 yılları arasındaki çalışmalarında yer vermişlerdir (Uçar 2019).

Bu tez çalışmasında 3 –boyutlu Öklid uzayında Bertrand ve Mannheim eğrileri ayrı ayrı tanımlanıp Bertrand ve Mannheim eğri çiftlerinin Serret-Frenet vektör alanları boyunca Fermi-Walker ve Normal Fermi-Walker türevleri hesaplanmıştır. Daha sonra aynı vektör alanlarının Fermi-Walker ve Normal Fermi-Walker anlamında paralel olup olmadığı durumları incelenmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde tez çalışmasında kullanılan tanım ve teoremler gösterilmiştir.

2.1 Afin Uzayı

Tanım 2.1.1. (Afin Uzay): A boştan farklı cümleyi ve V , bir K cisminin üzerindeki vektör uzayını gösterebilir. Aşağıdaki önermeleri doğru olarak ifade eden bir

$$f : A \times A \rightarrow V$$

fonksiyonu belirtilirse, A cümlesine V uzayı ile birleşen **Afin Uzay** denir.

(i) $\forall P, Q, R \in A$ için

$$f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

(ii) $\forall P \in A$ ve $\alpha \in V$ için

$$f(P, Q) = \alpha$$

olan bir tane $Q \in A$ noktası vardır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.2. (Afin Çatı): A nokta kümesi, V vektör uzayı ile birleşen n boyutlu afin uzayı gösterebilir. $P_0, P_1, \dots, P_n \in A$ olmak üzere, n tane vektörden oluşan

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

kümesi, V uzayının bir tabanını belirtiyorsa, $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesine A afin uzayının bir **Afin Çatısı** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.3. (Afin Koordinat Sistemi): V , K cismi üzerindeki bir vektör uzayını, A kümesi de V vektör uzayının birleştiği n boyutlu afin uzayını gösterebilir. $S = \{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ kümesi, A afin uzayındaki afin çatısını belirtmek üzere, herhangi bir $Q \in A$ noktası için;

$$\overrightarrow{P_0Q} = \sum_{k=1}^n q_k \overrightarrow{P_0P_k}$$

olmak üzere $q_k \in K$ skaler sayıları vardır. Bu durumda $(q_1, q_2, \dots, q_n)$ sıralı n lisine, Q noktasının, $\{P_0, P_1, P_2, \dots, P_n\}$ çatısına göre **afin koordinatları** denir.

$$x_i: A \rightarrow K, \quad Q \rightarrow x_i(Q) = q_i$$

şeklinde tanımlanan, x_i fonksiyonlarına da, A afin uzayının $\mathcal{S}$ afin çatısına göre, **koordinat fonksiyonları** denir. x_i koordinat fonksiyonlarının oluşturduğu $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sistemine **Afin koordinat sistemi** denir. $x_i(Q) = q_i$ değerine Q noktasının **i -inci afin koordinatı** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.4. (İç Çarpım Uzayı): A kümesi ile birleşen V vektör uzayı bir afin uzayı gösterebilir.

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \rightarrow \langle , \rangle(x, y) = \langle x, y \rangle$$

ile ifade edilen fonksiyon $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için;

(i) Simetrik:

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$

(ii) Pozitif tanımlılık:

$$\langle x, x \rangle \geq 0 ; \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

(iii) Bilineerlik:

$$\langle ax + y, z \rangle = a\langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, y + bz \rangle = \langle x, y \rangle + b\langle x, z \rangle$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona **iç çarpım** veya **skaler çarpım** denir. Böylelikle V ye de **iç çarpım uzayı** denir (Ekici 2021).

Tanım 2.1.5. (Vektörel Çarpım): $\mathbb{E}^3$ uzayında $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ve $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

biçiminde tanımlanır. $\vec{u} \times \vec{v}$ vektörü hem $\vec{u}$ hem de $\vec{v}$ vektörüne dik olan bir vektördür (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.6. (Karma Çarpım): $\mathbb{E}^3$ uzayında $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vektörlerinin karma çarpımı,

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanır. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ veya $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ biçiminde yazılır (Özdemir 2020).

Tanım 2.1.7. (Diferensiyellenebilir Manifold): $\mathfrak{M}$, topolojik bir n –manifoldu gösterebilir. $\mathfrak{M}$ manifoldu üzerinde $\mathcal{C}^k$ sınıfından diferensiyellenebilir yapı tanımlanıyorsa $\mathfrak{M}$ ye $\mathcal{C}^k$ sınıfından bir diferensiyellenebilir manifold denir (Salimov ve Mağden 2008).

Tanım 2.1.8. (Riemann Manifoldu): $\mathfrak{M}$ diferensiyellenebilir manifoldu belirtmek üzere, $\chi(\mathfrak{M})$; bu manifold üzerindeki $\mathcal{C}^\infty$ vektör alanlarının uzayını gösterebilir.

$$g: \chi(\mathfrak{M}) \times \chi(\mathfrak{M}) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{M}, \mathbb{R})$$

belirtecek şekilde tanımlı olan simetrik, pozitif ve 2 –lineer g Riemann metriği ile beraber $\mathfrak{M}$ ye **Riemann manifoldu** denir. $(\mathfrak{M}, g)$ ile gösterilir (Kobayashi *et al.* 1996).

Tanım 2.1.9. (Afin Konneksiyon): $\mathfrak{M}$, n –boyutlu diferensiyellenebilir manifoldu göstermek üzere, $\chi(\mathfrak{M})$; bu manifold üzerindeki $\mathcal{C}^\infty$ vektör alanlarının uzayını gösterebilirsin.

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(\mathfrak{M}) \times \chi(\mathfrak{M}) &\xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(\mathfrak{M}) \\ (\mathcal{X}, \mathcal{Y}) &\rightarrow \nabla(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} \end{aligned}$$

ifadesi $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \chi(\mathfrak{M})$ ve $\forall f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathfrak{M}, \mathbb{R})$ belirtmek üzere;

$$(i) \nabla_{\mathcal{X}}(\mathcal{Y} + \mathcal{Z}) = \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} + \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Z}$$

$$(ii) \nabla_{f\mathcal{X}+g\mathcal{Y}}\mathcal{Z} = f(\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Z}) + g(\nabla_{\mathcal{Y}}\mathcal{Z})$$

$$(iii) \nabla_{\mathcal{X}}(f\mathcal{Y}) = f\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} + \mathcal{X}(f)\mathcal{Y}$$

özellikleri sağlandığında ∇ ya $\mathfrak{M}$ de bir **Afin Konneksiyon** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.1.10. (Levi-Civita Konneksiyonu): $(\mathfrak{M}, g)$ n –boyutlu Riemann manifoldu, ∇ da $\mathfrak{M}$ de bir afin konneksiyonu gösterebilirsin. $\forall \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in \chi(\mathfrak{M})$ olmak üzere;

$$(i) \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y} - \nabla_{\mathcal{Y}}\mathcal{X} = [\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$$

$$(ii) \mathcal{X}g(\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) = g(\nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Y}, \mathcal{Z}) + g(\mathcal{Y}, \nabla_{\mathcal{X}}\mathcal{Z})$$

özellikleri sağlanıyor ise ∇ ya $\mathfrak{M}$ de sıfır torsiyonlu Riemann Konneksiyonu veya $\mathfrak{M}$ nin **Levi-Civita Konneksiyonu** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

2.2. n –Boyutlu Öklid Uzayı

Tanım 2.2.1. (Öklid Uzayı): A reel afin uzayı ve V , A nın birleştiği vektör uzayını gösterebilir. $r = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$ ve $s = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ belirtmek üzere, V vektör uzayında $\forall r, s \in V$ için,

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(r, s) \rightarrow \langle r, s \rangle = \sum_{i=1}^n r_i s_i$$

biçiminde tanımlanan iç çarpımında, A afin uzayına **Öklid Uzayı** denir ve $\mathbb{E}^n$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.2.2. (Metrik): X kümesi boştan farklı olmak üzere,

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \rightarrow d(x, y)$$

ile verilen fonksiyonda $\forall x, y, z \in X$ için;

- (i) $d(x, y) \geq 0$
- (ii) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (iii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

şeklinde ifade edilen özellikler sağlanıyorsa X kümesi üzerindeki d fonksiyonu **metrik** olarak ifade edilir. Burada oluşan (X, d) ye **metrik uzay** denir (Ekici 2021).

Tanım 2.2.3. (Öklid Metriği):

$$d: \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{R} ,$$

$$(P, Q) \rightarrow d(P, Q) = |PQ| = \|Q - P\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona $\mathbb{E}^n$ de **Öklid Metriği** veya **uzaklık fonksiyonu** denir. $P, Q \in \mathbb{E}^n$ noktaları arasındaki uzaklık $d(P, Q)$ reel sayısına eşittir (Özdemir 2020).

Tanım 2.2.4. (Öklid Çatısı): $\mathbb{R}^n$ uzayında, $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ nokta $n + 1$ lisine, n –boyutlu Öklid uzayında eşdeğer olan,

$$\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}\}$$

vektör n lisi n –boyutlu Öklid uzayının bir **ortonormal** tabanını belirtiyorsa, bu tabana $\mathbb{R}^n$ in P_0 noktasındaki **dik çatısı** veya **Öklid çatısı** denir. $\mathbb{E}^n$ uzayında,

$$e_i = (\delta_{1i}, \delta_{2i}, \dots, \delta_{ni}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

olmak üzere, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ çatısına **Standart Öklid Çatısı** denir. $\mathbb{E}^n$ uzayında herhangi bir

$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ vektörünü, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ standart çatısına göre,

$$\vec{u} = \sum_{k=1}^n u_k e_k$$

biçiminde yazabiliriz (Özdemir 2020).

Tanım 2.2.5. (Öklid Koordinat Fonksiyonları): $\mathbb{R}^n$ de verilen bir $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ noktası için,

$$x_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_i(\mathcal{P}) = p_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

biçiminde tanımlanan x_i fonksiyonlarına **Öklid koordinat fonksiyonları** denir (Özdemir 2020).

Tanım 2.2.6. (Norm): n –boyutlu Öklid uzayında $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ vektör değerli fonksiyonun normu;

$$\|f(t)\| = \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t) + \dots + f_n^2(t)}$$

eşitliği ile tanımlanır (Özdemir 2020).

2.3. Öklid Uzayında Eğriler ve Frenet Formülleri

Tanım 2.3.1. (Eğri): n –boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ ve $I, \mathbb{R}$ nin bağlantılı olan açık alt cümlesini belirtsin. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ ifadesi diferensiyellenebiliyorsa $\beta(I)$ cümlesine $\mathbb{E}^n$ de bir **eğri** denir ve $s \in I$ değişkeni de β eğrisinin parametresidir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.2. (Skaler Hız Fonksiyonu ve Skaler Hız): $\mathfrak{J}$, $\mathbb{E}^n$ uzayında bir eğri olsun ve (I, β) koordinat komşuluğunu göstereyin.

$$\begin{aligned}\|\beta'\|: I &\rightarrow \mathbb{R} \\ s &\rightarrow \|\beta'\|(s) = \|\beta'(s)\|\end{aligned}$$

eşitliğindeki fonksiyon eğrinin **skaler hız fonksiyonu** olarak isimlendirilir ve $\mathfrak{J}$ eğrisinin $\beta(s)$ noktasındaki **skaler hızı** ise $\|\beta'(s)\|$ reel sayısıdır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.3. (Birim Hızlı Eğri): $\mathcal{M}$ eğrisi, (I, β) koordinat komşuluğu ile verilmiş olsun. Eğer $\forall s \in I$ için,

$$\|\beta'(s)\| = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa $\mathcal{M}$ eğrisine, (I, β) koordinat komşuluğuna göre **birim hızlı eğri** denir. Burada eğrinin $s \in I$ parametresi **yay parametresini** ifade eder (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.4. (Regüler Eğri): $\beta: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi ifade edilsin. $\forall s \in I$ olduğunda,

$$\beta'(s) \neq 0$$

sağlanıyorsa β ye **regüler eğri** denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.5. (Yay Uzunluğu): $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olacak şekilde bir eğri kabul edilsin. Burada $a, b \in I$ olmak üzere β nın $\beta(a)$ ile $\beta(b)$ arasındaki uzunluğu

$$\int_a^b \|\beta'(t)\| dt, t \in I$$

şeklinde ifade edilen reel sayıdır (O'Neill 1966).

Tanım 2.3.6. (Vektör Alanı): $\mathcal{G}$, $\mathbb{R}^n$ uzayında açık alt küme belirtsin. $\mathcal{G}$ nin q noktasının her birinden q noktasında bir teğet vektör oluşturan fonksiyona, $\mathcal{G}$ üzerinde tanımlanan **vektör alanı** denir. $\chi(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde yer alan vektör alanlarının cümlesi olarak belirtilir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.7. (Birim Teğet Vektör): $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde β , birim hızlı kabul edilsin.

$$\mathfrak{T}(s) = \beta'(s)$$

şeklinde verilen $\mathfrak{T}(s)$ e, belirtilen birim hızlı β eğrisinde $\beta(s)$ noktasında bulunan **birim teğet vektörü** denir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.8. (Frenet Vektörü): (I, β) koordinat komşuluğu ile ifade edilen bir $\mathcal{M}$ eğrisi verilsin. Burada $\varphi = \{\beta', \beta'', \dots, \beta^{(r)}\}$ lineer bağımsız olan bir sistem ve $\forall \beta^{(\rho)}, \rho > r$ olduğunda $\beta^{(\rho)} \in \mathcal{S}\varphi$ için φ sisteminden oluşturulan $\{\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_r\}$ ortonormal sistemine, $\mathcal{M}$ eğrisinin **Frenet r -ayaklı alanı** ve $m \in \mathcal{M}$ için $\{\mathcal{V}_1(m), \dots, \mathcal{V}_r(m)\}$ ye de $m \in \mathcal{M}$ noktasındaki **Frenet r -ayaklısı** denir. $\mathcal{V}_i$ nin her birine, $1 \leq i \leq r$ için **Frenet vektörü** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.9. (Frenet 3 -ayaklısı): $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi s - yay parametrelili eğriyi gösterip, $\forall s \in I$ durumunda bu eğrinin teğet vektör alanı

$$\mathcal{T}(s) = \beta'(s)$$

asli normal vektör alanı

$$\mathcal{N}(s) = \frac{\beta''(s)}{\|\beta''(s)\|} \quad (2.1)$$

ve binormal vektör alanı

$$\mathcal{B}(s) = \mathcal{T}(s) \times \mathcal{N}(s)$$

eşitliklerini belirtiyorsa, $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ üçlüsüne **Frenet 3 –ayaklısı** denir. Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ sisteminin ortonormal çatısıdır (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.10. (I, β) koordinat komşuluğu ile ifade edilen bir $\mathcal{M}$ eğrisi gösterilsin. $s \in I$ ya karşılık gelen $\beta(s)$ noktasındaki Frenet r –ayaklısı $\{\mathcal{V}_1(s), \dots, \mathcal{V}_r(s)\}$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \rho_i &: I \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq r \\ s &\rightarrow \rho_i(s) = \langle \mathcal{V}'_i(s), \mathcal{V}_{i+1}(s) \rangle \end{aligned}$$

tanımlanan ρ_i fonksiyonu $\mathcal{M}$ eğrisinin **i –yinci eğrilik fonksiyonu** ve $\rho_i(s)$ reel sayısı $s \in I$ için $\beta(s)$ noktasında $\mathcal{M}$ nin **i –yinci eğriliğini** gösterir (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.3.1. (I, β) koordinat komşuluğunda bir $\mathcal{M} \subset \mathbb{E}^n$ eğrisi gösterilsin. $\beta(s)$ noktasında ifade edilen i –yinci eğrilik $\rho_i(s)$ ve s yay parametrelili Frenet r –ayaklısı $\{\mathcal{V}_1(s), \dots, \mathcal{V}_r(s)\}$ ile tanımlı,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}'_1(s) &= \rho_1(s). \mathcal{V}_2(s) \\ \mathcal{V}'_i(s) &= -\rho_{i-1}(s). \mathcal{V}_{i-1}(s) + \rho_i(s). \mathcal{V}_{i+1}(s), 1 < i < r \\ \mathcal{V}'_r(s) &= -\rho_{r-1}(s). \mathcal{V}_{r-1}(s) \end{aligned}$$

olur (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 2.3.11. (Frenet Formülleri): n –boyutlu Öklid uzayında (I, β) koordinat komşuluğunda bir β eğrisi verilsin.

$$s \rightarrow \beta(s) = (\beta_1(s), \beta_2(s), \beta_3(s))$$

ile ifade edilen β eğrisinin s yay parametresine göre $\beta(s)$ noktasındaki Frenet çatısı $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ yi gösterebilir.

$$\mathcal{T}'(s) = \rho_1(s)\mathcal{N}(s)$$

$$\mathcal{N}'(s) = -\rho_1(s)\mathcal{T}(s) + \rho_2(s)\mathcal{B}(s) \quad (2.2)$$

$$\mathcal{B}'(s) = -\rho_2(s)\mathcal{N}(s)$$

eşitliklerine **Frenet formülleri** denir (Hacısalıhoğlu 2000). Eşitliklerdeki $\rho_1 = \kappa, \rho_2 = \tau$ yi gösterir.

Tanım 2.3.12. 3 –boyutlu Öklid uzayında (I, β) koordinat komşuluğunda bir β eğrisi için;

$$\kappa(s) = \rho_1(s) = \|\beta''(s)\|$$

eşitliğine $\beta(s)$ in s –**noktasındaki eğriliği** denir (Do Carmo 1976).

Tanım 2.3.13. 3 –boyutlu Öklid uzayında yay parametresi ile gösterilen (I, β) koordinat komşuluğundaki bir β eğrisi verilsin. $\beta''(s) \neq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{B}'(s) = -\tau(s)\mathcal{N}(s)$$

ifadesine göre tanımlanan $\tau(s)$ değerine $\beta(s)$ eğrisinin s –**noktasındaki burulması** denir. $\rho_2(s) = \tau(s)$ düzlemden ne kadar saptığını ölçen eğrinin torsiyonudur (Hacısalıhoğlu 2000).

Teorem 2.3.2. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde β regüler bir eğri olarak ele alınsın. Burada β eğrisinin Serret-Frenet vektör alanları $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olarak kabul edilsin.

$$\kappa = \frac{\|\beta' \times \beta''\|}{\|\beta'\|^3}$$

değeri eğrinin eğriliği

$$\tau = \frac{(\beta', \beta'', \beta''')}{\|\beta' \times \beta''\|^2}$$

değeri ise eğrinin torsiyonu ya da burulması olarak ifade edilir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.14. β eğrisi, 3 –boyutlu Öklid uzayında yay parametresi ile gösterilen (I, β) koordinat komşuluğundaki birim hızlı bir eğriyi gösterebilir. β eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun. Burada;

$$\begin{bmatrix} \mathcal{T}' \\ \mathcal{N}' \\ \mathcal{B}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{T} \\ \mathcal{N} \\ \mathcal{B} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

olarak ifade edilir (Aldossary and Gazwani 2020).

Tanım 2.3.15. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde β , s yay parametrelili ve birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. β eğrisinin Serret-Frenet üçlüsü $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ olsun.

$$\mathcal{Sp}\{\mathcal{T}(s), \mathcal{N}(s)\}$$

düzlemine $\beta(s)$ noktasının **oskulator düzlemi** veya dokunum düzlemi;

$$\mathcal{Sp}\{\mathcal{T}(s), \mathcal{B}(s)\}$$

düzlemine $\beta(s)$ noktasındaki **rektifiyan düzlemi** veya doğrultma düzlemi;

$$\mathcal{Sp}\{\mathcal{N}(s), \mathcal{B}(s)\}$$

düzlemine ise $\beta(s)$ noktasındaki **normal düzlemi** veya dik düzlem denir (Sabuncuoğlu 2010).

Teorem 2.3.3. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde β , birim hızlı bir eğri olarak kabul edilsin. β eğrisinin eğriliği yani κ değeri sıfır ise $\beta(I)$ kümesi $\mathbb{E}^3$ teki bir doğruya ait olan alt kümedir. Bu durumun tersinde $\beta(I)$ kümesi $\mathbb{E}^3$ teki bir doğruya ait alt kümesi ise β eğrisinin κ değeri yani eğriliği sıfıra eşittir (Sabuncuoğlu 2010).

Teorem 2.3.4. $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ olacak şekilde β eğrisi düzlemsel ise β eğrisinin torsiyonu yani τ değeri sıfıra eşit ve eğrinin içinde bulunduğu düzlem, eğriye ait her noktadaki oskulator düzlemidir. Bu durumun tersi olan τ değeri sıfıra eşit ise $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi düzlemseldir (Sabuncuoğlu 2010).

Tanım 2.3.16. (Darboux Vektörü): β eğrisi, 3 –boyutlu Öklid uzayında yay parametresi ile gösterilen birim hızlı bir eğriyi gösterebilir. $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ Frenet üçlüsünün eğride her s anında ani olan helis hareketini bir eksen etrafında yaptığı kabul edilir. Eğrinin $\beta(s)$ noktasında bulunan eksenine **Darboux(ani dönme) eksen**i denir. Bu eksenin yönü ve doğrultusu ifade edilen vektörün,

$$\mathcal{W} = \tau \mathcal{T} + \kappa \mathcal{B}$$

eşitliği eğrinin $\beta(s)$ noktasındaki **Darboux vektörü** olarak isimlendirilir (Hacısalıhoğlu 2000).

3. MATERYAL YÖNTEM

3.1. Öklid Uzayında Bazı Özel Eğriler

Tanım 3.1.1. (Helis): $\mathcal{T}$, $\mathbb{E}^3$ uzayında eğriliği sıfırdan farklı bir β eğrisinin teğet vektör alanını gösterip, sabit olan $\mathcal{U}$ vektörü $\mathcal{T}$ vektör alanı ile sabit bir açı oluşturuyorsa, β eğrisine **helis** denir. Buna göre 3 –boyutlu Öklid uzayında yay parametresi ile gösterilen (I, β) koordinat komşuluğundaki bir β eğrisi ifade edilsin. $\forall t \in I$ durumunda,

$$(i) \mathcal{U}' = 0$$

$$(ii) \langle \mathcal{T}(t), \mathcal{U} \rangle = \cos \theta, \quad (\theta = \text{sabit})$$

koşullarını sağlayan bir $\mathcal{U}$ vektörü varsa, β eğrisine **helis** denir. Bir helis eğrisinin hem eğriliği hem de burulması sıfırdan farklı ve sabit ise, bu helise **dairese helis** denir (Özdemir 2020).

Teorem 3.1.1. (Lancret Teoremi): Bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisinin helis eğrisini belirtmesinin gerek ve yeter koşulu;

$$\frac{\tau}{\kappa} = \text{sabit}$$

olmasıdır (Özdemir 2020).

Tanım 3.1.2. (Salkowski Eğrisi): Bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ ile belirtilen eğrinin s –noktasındaki torsiyonu

$$\tau(s) \neq 0$$

ve s –noktasındaki eğriliği

$$\kappa(s) = \text{sabit}$$

ise $\beta(s)$ eğrisine **Salkowski eğrisi** denir (Salkowski 1909).

Tanım 3.1.3. $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0$, $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ olarak verilsin. 3 –boyutlu Öklid uzayında $s \in \left[-\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2n}\right]$ olmak üzere Salkowski eğrisinin parametrik denklemi;

$$\begin{aligned} \beta_m(s) = & \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \left(-\frac{1-n}{4(1+2n)} \sin((1+2n)s) - \frac{1+n}{4(1-2n)} \sin((1-2n)s) \right. \\ & - \frac{1}{2} \sin(s), \frac{1-n}{4(1+2n)} \cos((1+2n)s) + \frac{1+n}{4(1-2n)} \cos((1-2n)s) \\ & \left. + \frac{1}{2} \cos(s), \frac{1}{4m} \cos(2ns) \right) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Monterde 2008).

Tanım 3.1.4. (Anti-Salkowski Eğrisi): Bir $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ ile belirtilen eğrinin s –noktasındaki torsiyonu

$$\tau(s) = \text{sabit}$$

ve s –noktasındaki eğriliği

$$\kappa(s) \neq 0$$

ise $\beta(s)$ eğrisine **Anti-Salkowski eğrisi** denir (Salkowski 1909).

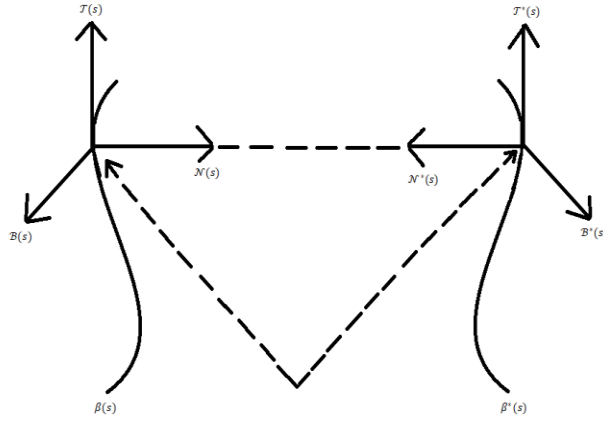
Tanım 3.1.5. $\forall m \in \mathbb{R}, m \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0$ ve $n = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}}$ olarak verilsin. 3 –boyutlu Öklid uzayında $s \in \left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ olmak üzere Anti-Salkowski eğrisinin parametrik denklemi;

$$\begin{aligned} \beta_m(s) = & \frac{1}{2(4n^2-1)m} (n(1-4n^2+3\cos(2ns))\cos(s) \\ & + (2n^2+1)\sin(s)\sin(2ns), \frac{1}{2(4n^2-1)m} (n(1-4n^2 \\ & + 3\cos(2ns))\sin(s) \\ & - (2n^2+1)\cos(s)\sin(2ns), \frac{n^2-1}{4n^2} (2ns+\sin(2ns))) \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilir (Monterde 2008).

3.2. Öklid Uzayında Bertrand Eğri Çifti

Tanım 3.2.1. (Bertrand Eğri Çifti): $\mathbb{E}^3$ uzayında verilen β ve β^* eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenmek üzere, β ve β^* eğrilerinin karşılıklı eşlenen noktalarında normalleri aynı doğrultuyu gösteriyorsa, β eğrisi Bertrand eğrisi, β^* eğrisi de β eğrisinin Bertrand eş eğrisidir. $\{\beta, \beta^*\}$ eğri çiftine de **Bertrand eğri çifti** denir (Özdemir 2020).



Şekil 3.1. Bertrand Eğri Çifti (Hacısalıhoğlu,2000).

Teorem 3.2.1. $\{\beta, \beta^*\}$ çifti Bertrand eğri çiftini gösterebilir. $\beta(s)$ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}(s)$ olmak üzere, bu iki eğri arasında, $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ olmak üzere;

$$\beta^*(s) = \beta(s) + \lambda \mathcal{N}(s) \quad (3.1)$$

eşitliği yazılabilir. β ve β^* eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklığı sabittir (Özdemir 2020).

İspat. $\beta(s)$ birim hızlı bir eğri olsun. Bu iki eğri arasında, $\lambda(s) \neq 0$ olmak üzere,

$$\beta^*(s) = \beta(s) + \lambda(s) \mathcal{N}(s)$$

ifadesi oluşturulabilir. $\beta^*(s)$ eğrisi birim hızlı olmayabilir. $v^* = \|(\beta^*)'(s)\|$ olsun.

Bu durumda, yukarıdaki eşitliğin türevi s parametresine göre hesaplanırsa, $\mathcal{T}^*(s)$, $\beta^*(s)$ eğrisinin teğet vektör alanını gösteriyorsa,

$$v^*T^*(s) = T(s) + \lambda'(s)\mathcal{N}(s) + \lambda(-\kappa T(s) + \tau \mathcal{B}(s))$$

elde edilir. Eşitliğin iki tarafında da $\mathcal{N}(s) = \pm \mathcal{N}^*(s)$ ile iç çarpımını alırsak, $\lambda'(s) = 0$ olur ki, bu $\lambda \in \mathbb{R}$ olması demektir. Böylece, $\beta(s)$ ve $\beta^*(s)$ arasındaki uzaklık,

$$d = \|\beta^*(s) - \beta(s)\| = \|\lambda \mathcal{N}(s)\| = |\lambda| = \text{sabit}$$

olarak belirlenir.

Teorem 3.2.2. Bertrand eğrilerinin karşılıklı taraflarında bulunan teğet vektörlerinin oluşturduğu açı ölçüsünün değeri sabit değere eşittir (Izumiya and Takeuchi 2001).

İspat. $\langle T, T^* \rangle' = 0$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned} \langle T^*, T \rangle' &= \langle (T^*)', T \rangle + \langle T^*, T' \rangle \\ &= \langle v^* \kappa^* \mathcal{N}^*, T \rangle + \langle T^*, \kappa \mathcal{N} \rangle \\ &= v^* \kappa^* \langle \mathcal{N}^*, T \rangle + \kappa \langle T^*, \mathcal{N} \rangle \end{aligned}$$

dır. $\mathcal{N}^*(s) // \mathcal{N}(s)$ ve $\mathcal{N}(s) \perp T(s)$ belirttiğinden, $\langle \mathcal{N}^*, T \rangle = 0$ dır. $T^* \perp \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{N}^* // \mathcal{N}$ ifade ettiğinden $\langle T^*, \mathcal{N} \rangle = 0$ a eşittir. Buradan $\langle T^*, T \rangle' = 0$ olur.

Teorem 3.2.3. Bir β eğrisinin eğriliği κ ve torsiyonu τ ile ifade edilsin. β eğrisinin Bertrand eğrisini belirtmesinin gerek ve yeter koşulu;

$$\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda \kappa + \mu \tau = 1$$

eşitliğini sağlamasıdır (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 3.2.4. β eğrisi, 3 –boyutlu Öklid uzayında yay parametresi ile gösterilen birim hızlı bir eğriyi göstermek üzere, Bertrand eğri çifti $\beta^*: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisini belirtsin. $\{T^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ Frenet üçlüsü β^* eğrisine ait olduğuna göre;

$$T^* = (\cos \theta)T - (\sin \theta)\mathcal{B}$$

$$\mathcal{N}^* = \mathcal{N} \tag{3.2}$$

$$\mathcal{B}^* = (\sin \theta)T + (\cos \theta)\mathcal{B}$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\cos \theta = \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{T} \rangle$ dir (Izumiya and Takeuchi 2001).

3.1. denkleminde;

$$\beta^*(s) = \beta(s) + \lambda(s)\mathcal{N}(s)$$

$$\frac{d\beta^*}{ds} = \frac{d\beta^*}{ds^*} \frac{ds^*}{ds} = \frac{d\beta}{ds} + \lambda \frac{d\mathcal{N}}{ds} + \frac{d\lambda}{ds} \mathcal{N}$$

ve

$$\mathcal{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \mathcal{T} + \lambda \mathcal{N}' + \lambda' \mathcal{N}$$

$$\mathcal{T}^* \frac{ds^*}{ds} = \mathcal{T} + \lambda(-\kappa \mathcal{T} + \tau \mathcal{B})$$

dir. Son denklemini $\mathcal{T}^*$ ile iç çarparsak,

$$\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \frac{ds^*}{ds} = \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}^* \rangle - \lambda \kappa \langle \mathcal{T}, \mathcal{T}^* \rangle + \lambda \tau \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}^* \rangle$$

elde edilir. Buradan;

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - \lambda \kappa}{D} - \frac{\lambda \kappa (1 - \lambda \kappa)}{D} + \frac{\lambda \tau (\lambda \tau)}{D}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{1 - 2\lambda \kappa + \lambda^2 \kappa^2}{D} + \frac{\lambda^2 \tau^2}{D}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{(1 - \lambda \kappa)^2}{D} + \frac{(\lambda \tau)^2}{D}$$

$$\frac{ds^*}{ds} = \frac{(1 - \lambda \kappa)^2 + (\lambda \tau)^2}{\sqrt{(1 - \lambda \kappa)^2 + (\lambda \tau)^2}} = \sqrt{(1 - \lambda \kappa)^2 + (\lambda \tau)^2}$$

$$\mathcal{T}^* = \frac{\beta^*(s)}{\|\beta^*(s)\|} = \frac{(1 - \lambda \kappa)\mathcal{T} + \lambda \tau \mathcal{B}}{\sqrt{(1 - \lambda \kappa)^2 + (\lambda \tau)^2}} = \frac{(1 - \lambda \kappa)\mathcal{T} + \lambda \tau \mathcal{B}}{D}$$

$$D = \sqrt{(1 - \lambda \kappa)^2 + (\lambda \tau)^2}$$

dir (Tanrıöver, 1986).

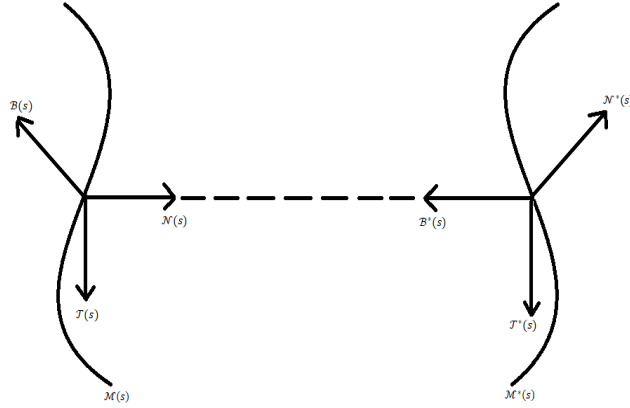
Buradan;

$$\frac{ds}{ds^*} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \lambda\kappa)^2 + (\lambda\tau)^2}} = k \quad (3.3)$$

yazabiliriz.

3.3. Öklid Uzayında Mannheim Eğri Çifti

Tanım 3.3.1. (Mannheim Eğri Çifti): $\mathbb{E}^3$ uzayında verilen $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}^*$ eğrilerinin karşılıklı noktaları birebir eşlenmek üzere, $\mathcal{M}$ eğrisinin $\mathcal{M}(s)$ noktasındaki asli normal vektörünün doğrultusu ile, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{M}^*(s)$ noktasındaki binormalinin doğrultusu aynı ise, $\mathcal{M}$ eğrisine Mannheim eğrisi, $\mathcal{M}^*(s)$ eğrisine de $\mathcal{M}$ eğrisinin Mannheim eş eğrisi denir. $\mathbb{E}^3$ uzayında verilen $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^*\}$ eğrilerine **Mannheim eğri çifti** denir (Özdemir 2020).



Şekil 3.2. Mannheim Eğri Çifti (Wang and Liu,2007).

Teorem 3.3.1. $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^*\}$ bir Mannheim eğri çifti olsun. $\mathcal{M}(s)$ eğrisinin $\mathcal{N}(s)$ asli normal vektör alanı ile ifade edilen bu iki eğri arasında, $\lambda \in \mathbb{R}/\{0\}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^*(s) \\ &= \mathcal{M}(s) + \lambda \mathcal{N}(s) \end{aligned} \quad (3.4)$$

eşitliği yazılabilir. $\mathcal{M}$ ve $\mathcal{M}^*$ eğrilerinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklık sabittir (Özdemir 2020).

Teorem 3.3.2. $\mathbb{E}^3$ uzayında bir $\mathcal{M}$ eğrisinin Mannheim eğrisi olabilmesinin gerek ve yeter koşulu $\lambda \neq 0$ sabit bir değeri belirtmek üzere $\mathcal{M}$ eğrisinde κ ve τ nun;

$$= \lambda(\kappa^2 + \tau^2) \quad \kappa \quad (3.5)$$

denklemini sağlamasıdır (Mannheim,1878).

Teorem 3.3.3. $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında Mannheim eğri çifti $\{\mathcal{M}, \mathcal{M}^*\}$ ile gösterilsin. Buradaki $\mathcal{T}$ ve $\mathcal{T}^*$ teğet vektörlerinin oluşturduğu açı θ yı belirtmek üzere bu eğri çiftinin Frenet üçlüsü arasında;

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^* &= (\cos \theta)\mathcal{T} - (\sin \theta)\mathcal{B} \\ \mathcal{N}^* &= (\sin \theta)\mathcal{T} + (\cos \theta)\mathcal{B} \\ \mathcal{B}^* &= \mathcal{N} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ilişkisi mevcuttur (Orbay ve Kasap, 2009).

Lemma 3.3.1. Salkowski eğrisini belirten Mannheim eğrisi yoktur (Eisenhart, 1960).

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisinin Salkowski eğrisi olduğunu kabul edelim. Tanım 3.1.2. gereğince;

$$\kappa = \text{sabit} = \ell, \quad \tau = \tau(s) \quad (3.7)$$

dir. (3.7) ile (3.5) birlikte ifade edilirse $\mathcal{M}$ nin burulması sabit olur. Bu durum bir çelişkiyi gösterir.

Lemma 3.3.2. Anti-Salkowski eğrisini gösteren Mannheim eğrisi yoktur (Eisenhart, 1960).

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisinin anti-Salkowski eğrisi olduğunu kabul edelim. Tanım 3.1.4. gereğince;

$$\tau = \text{sabit} = \ell, \quad \kappa = \kappa(s) \quad (3.8)$$

dir. (3.8) ile (3.5) birlikte alınırsa $\mathcal{M}$ nin eğriliği sabit olur. Bu durum bir çelişkiyi gösterir.

Lemma 3.3.3. Eğer $\mathcal{M}$ Mannheim eğrisi genel helis belirtiyorsa $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helisi ifade eder ve eğriliği ile burulması;

$$\kappa = \frac{1}{\lambda(1 + \ell^2)},$$

$$\tau = \frac{\ell}{\lambda(1 + \ell^2)}$$

eşitlikleri ile sağlanır (Eisenhart, 1960).

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisi genel helis belirtsin. Burada $\mathcal{M}$ nin eğriliği κ ve burulması τ yu göstermek üzere Tanım 3.1.1. den;

$$\frac{\tau}{\kappa} = \ell \quad (3.9)$$

ifadesi elde edilir. (3.9) eşitliği;

$$\tau = \ell \kappa \quad (3.10)$$

eşitliğine dönüştürülebilir. $\mathcal{M}$ eğrisi Mannheim eğrisini belirttiğinden (3.5) eşitliğini sağlar. (3.10) eşitliği (3.5) eşitliğinde yerine yazılıp hesaplanırsa;

$$\kappa = \frac{1}{\lambda(1 + \ell^2)},$$

$$\tau = \frac{\ell}{\lambda(1 + \ell^2)}$$

elde edilir. κ ve τ sabit değerleri ifade ettiğinden $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helisi gösterir.

3.4. Fermi-Walker Türevi

Tanım 3.4.1. (Öklid Anlamında Paralel Olma): n –boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de bir parametre eğrisi boyunca $\frac{d\mathcal{X}}{dt}$, $\mathcal{X}$ vektör alanındaki Öklid türevini belirtmek üzere;

$$\dot{\mathcal{X}} = \frac{d\mathcal{X}}{dt} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa $\mathcal{X}$ vektör alanına β eğrisi boyunca **Öklid anlamında paraleldir** denir (Hacısalıhoğlu 2000).

Tanım 3.4.2. (Fermi-Walker Türevi): $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere s yay parametrelili $\beta(s)$ eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ herhangi bir vektör alanını göstereyin.

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X} = \nabla_{\mathcal{T}}\mathcal{X} - \langle \mathcal{T}, \mathcal{X} \rangle A + \langle A, \mathcal{X} \rangle \mathcal{T} \quad (3.11)$$

eşitliği ile tanımlanan $\beta(s)$ eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ vektör alanındaki $\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X}$ türevine **Fermi-Walker türevi** denir. Burada $\mathcal{T} = \frac{d\beta}{ds}$, $A = \frac{d\mathcal{T}}{ds}$ olarak ifade edilir (Benn and Tucker 1989).

Tanım 3.4.3. (Fermi-Walker Anlamında Paralel Olma): $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ olmak üzere s yay parametrelili $\beta(s)$ eğrisi boyunca $\mathcal{X}$ herhangi bir vektör alanını gösterip bu vektör alanındaki Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{X} = 0 \quad (3.12)$$

ise $\mathcal{X}$ vektör alanı $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca **Fermi-Walker anlamında paraleldir** denir (Benn and Tucker 1989).

Tanım 3.4.4. (Dönmeyen Çatı): s yay parametrelili olan $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca U , V ve W ortonormal vektörleri göstereyin.

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}U = 0$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}V = 0 \quad (3.13)$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}W = 0$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $\{U, V, W\}$ çatısına **non-rotating (dönmeyen) çatı** denir (Balakrishnan 2005).

Tanım 3.4.5. (Fermi-Walker Anlamında Darboux Vektörü): n –boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^n$ de s yay parametrelili $\beta(s)$ eğrisi boyunca;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{T} = \omega^* \times \mathcal{T}$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{N} = \omega^* \times \mathcal{N}$$

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}}\mathcal{B} = \omega^* \times \mathcal{B}$$

olacağından,

$$\omega^* = \tau\mathcal{T}$$

eşitliğindeki vektöre $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$ ye göre **Fermi-Walker anlamında Darboux vektörü** denir (Karakuş ve Yaylı 2012).

3.5. Normal Fermi-Walker Türevi

Tanım 3.5.1. $\mathcal{X}$, $\mathbb{R}^3$ te bir vektör alanı olsun ve $\beta(s)$ uzayda bir birim hızlı eğri olsun.

$$\frac{\tilde{D}\mathcal{X}}{\tilde{D}s} = \frac{d\mathcal{X}}{ds} - \langle \mathcal{N}, \mathcal{X} \rangle \mathcal{N}' + \langle \mathcal{N}', \mathcal{X} \rangle \mathcal{N} \quad (3.14)$$

$\frac{\tilde{D}\mathcal{X}}{\tilde{D}s}$ olarak tanımlanan türev, **normal Fermi-Walker türevi** olarak adlandırılır. Bu durumda, $\mathcal{N} = \frac{\mathcal{T}'}{\|\mathcal{T}'\|}$ Frenet çatısının birim normal vektörüdür. Eğer;

$$\frac{\tilde{D}\mathcal{X}}{\tilde{D}s} = 0 \quad (3.15)$$

oluyorsa $\mathcal{X}$ vektör alanı, $\beta(s)$ eğrisi boyunca normal Fermi-Walker anlamında paraleldir denir (Keskin ve Yaylı 2017).

Tanım 3.5.2. s yay parametrelili olan $\beta(s)$ uzay eğrisi boyunca U , V ve W ortonormal vektörleri gösterebilir.

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{D}U}{\tilde{D}s} &= 0 \\ \frac{\tilde{D}V}{\tilde{D}s} &= 0 \\ \frac{\tilde{D}W}{\tilde{D}s} &= 0 \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa $\{U, V, W\}$ çatısına **normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı** denir.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde tanım ve teoremlerden yararlanılıp oluşturulan ve tez çalışmasının temelini oluşturan Bertrand ve Mannheim eğri çiftlerinin Frenet vektör alanlarının Fermi-Walker türevleri ve normal Fermi-Walker türevleri hesaplanarak elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

4.1.Bertrand Eğri Çiftinin ve Mannheim Eğri Çiftinin Serret-Frenet Vektör Alanlarının Fermi-Walker Türevleri

4.1.1. Bertrand Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi ele alınmıştır. β eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten β^* eğrisinin $\mathcal{T}^*$ teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi verilsin. β eğrisi ile Bertrand eğri çifti olan β^* eğrisi ele alınsın. β eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$, β^* eğrisinin teğet vektör alanı ise $\mathcal{T}^*$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.11) denklemleri kullanılarak $\beta(s)$ birim hızlı eğrisini Bertrand eğri çiftini belirten $\beta^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* - \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{T}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle = 1$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{T}^* \quad (4.1)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \frac{d\mathcal{T}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{T}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*}$$

$$= [\mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{T}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) + \mathcal{B}'(-k \sin \theta)] \quad (4.2)$$

ifadesi bulunur. (4.2) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) \quad (4.3)$$

bulunur. (3.2) ile (4.3) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle = 0 \quad (4.4)$$

elde edilir. (4.4) eşitliği (4.1) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0 \quad (4.5)$$

bulunur. Böylece;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = 0 \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) ifadesi ile $\beta^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.1.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{T}^*$ vektör alanı $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere Fermi-Walker anlamında paraleldir.

İspat. (4.6) eşitliğinden $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır.

Sonuç 4.1.1.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. β eğrisinin eğriliği κ olmak üzere $\kappa = \text{sabit}$ için β^* Bertrand eğri çiftinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olup aynı zamanda $\tau \neq 0$ olduğunda β eğrisi Salkowski eğrisi olur.

İspat. (4.5) ve (4.6) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\kappa = \text{sabit}$ ve $\tau \neq 0$ alınırsa Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Öte yandan β eğrisinin κ değeri sabit iken τ değeri sıfırdan farklı olduğunda β eğrisi Tanım 3.1.2. de ifade edildiği üzere Salkowski eğrisi olur.

Sonuç 4.1.1.2. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. β eğrisinin burulması τ olmak üzere $\tau = \text{sabit}$ için β^* Bertrand eğri çiftinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olup aynı zamanda $\kappa \neq 0$ olduğunda β eğrisi anti-Salkowski eğrisi olur.

İspat. (4.5) ve (4.6) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = \text{sabit}$ ve $\kappa \neq 0$ alınırsa Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Öte yandan β eğrisinin τ değeri sabit iken κ değeri sıfırdan farklı olduğunda β eğrisi Tanım 3.1.4. de ifade edildiği üzere anti-Salkowski eğrisi olur.

Sonuç 4.1.1.3. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini göstereyin. β eğrisinin burulması τ olmak üzere $\tau = 0$ alınırsa $\mathcal{T}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olup β eğrisi düzlem eğrisi olur.

İspat. (4.5) ve (4.6) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = 0$ alınırsa Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada β eğrisinin τ değeri sıfır olduğundan β eğrisi Teorem 2.3.4. te ifade edildiği üzere düzlem eğrisi olur.

Sonuç 4.1.1.4. β eğrisi dairesel helis olması durumunda $\beta^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. (4.5) ve (4.6) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = \text{sabit}$ ve $\kappa = \text{sabit}$ alınır. Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada β eğrisinin τ ve κ değeri sabit olduğundan β eğrisi Teorem 3.1.1. de ifade edildiği üzere dairesel helis olur.

4.1.2. Bertrand Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi ele alınmıştır. β eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten β^* eğrisinin $\mathcal{N}^*$ normal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi verilsin. β eğrisi ile Bertrand eğri çifti olan β^* eğrisi ele alınsın. β eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}$, β^* eğrisinin normal vektör alanı ise $\mathcal{N}^*$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.11) denklemleri kullanılarak $\beta(s)$ birim hızlı eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten $\beta^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanındaki Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* - \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^*$$

eşitliği ile elde edilir. $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* \quad (4.7)$$

eşitliği bulunur. Burada (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \frac{d\mathcal{N}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{N}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \mathcal{N}' k \quad (4.8)$$

ifadesi bulunur. (4.8) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılır;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \mathcal{T}(-k\kappa) + \mathcal{B}(k\tau) \quad (4.9)$$

bulunur. (3.2) ile (4.3) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle = (k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) \quad (4.10)$$

elde edilir. (3.2) ile (4.10) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* \\ &= \mathcal{T}(k\kappa \cos^2 \theta + k\tau \cos \theta \sin \theta) + \mathcal{B}(-k\tau \sin^2 \theta - k\kappa \cos \theta \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir. Burada (4.9) ile (4.11) eşitlikleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* &= [\mathcal{T}(k\kappa(\cos^2 \theta - 1) \\ &+ k\tau \cos \theta \sin \theta) + \mathcal{B}(k\tau(1 - \sin^2 \theta) - k\kappa \cos \theta \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.12)$$

ifadesi ile $\beta^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.2.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{N}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter koşul $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere β eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır.

İspat. $\mathcal{N}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.4.3. gereği (4.7) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Böylece;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

yazabiliriz. (4.9), (4.11) ve (4.12) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.12) eşitliğinde $k \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$\begin{cases} k\kappa(\cos^2 \theta - 1) + k\tau \cos \theta \sin \theta = 0 \\ k\tau(1 - \sin^2 \theta) - k\kappa \cos \theta \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.13)$$

olur. $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.13) denkleminde;

$$-\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta = 0 \quad (4.14)$$

eşitliğinde tek bir denklem olarak elde edilir. (4.14) denkleminde $\frac{\tau}{\kappa} = \hbar = \text{sabit}$ olup β eğrisi bir helistir. Bu durumda (4.12) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{N}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Tersine β bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \hbar$ olup $\tau = \hbar \kappa$ ve $\sin \theta = \hbar \cos \theta$ eşitlikleri (4.7) ve (4.12) denklemlerinde kullanıldığında (4.12) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{N}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2.1. β eğrisi dairesel helis olması durumunda $\beta^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. β eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1. de bulunan tanım gereği κ ve τ değerleri sabit olur. (4.14) denkleminin bir çözümü olan $\kappa = \frac{1}{\sin \theta}$ ve $\tau = \frac{1}{\cos \theta}$, (4.12) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

eşitliği sağlanır. Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

4.1.3. Bertrand Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi ele alınmıştır. β eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten β^*

eğrisinin $\mathcal{B}^*$ binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi verilsin. β eğrisi ile Bertrand eğri çifti olan β^* eğrisi ele alınsın. β eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}$, β^* eğrisinin binormal vektör alanı ise $\mathcal{B}^*$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.11) denklemleri kullanılarak $\beta(s)$ birim hızlı eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten $\beta^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* - \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^*$$

eşitliği ile elde edilir. $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* \quad (4.15)$$

denklemini bulunur. Burada (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* &= \frac{d\mathcal{B}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{B}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}'(k \sin \theta) + \mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{B}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.16)$$

bulunur. (4.16) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılır;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = [\mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \quad (4.17)$$

bulunur. (3.2) ile (4.3) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle = -k \quad (4.18)$$

elde edilir. (3.2) ile (4.18) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılır;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \cos \theta) + \mathcal{B}(k \sin \theta) \quad (4.19)$$

elde edilir. Burada (4.17) ile (4.19) eşitlikleri kullanılarak;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*}\mathcal{B}^* = \mathcal{N}(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) \quad (4.20)$$

elde edilir ve böylece $\beta^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.3.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{B}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olmasının gerek ve yeter koşulu $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere β eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır.

İspat. $\mathcal{B}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.4.3. gereği (4.15) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*}\mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*}\mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

yazabiliriz. (4.17), (4.19) ve (4.20) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.20) eşitliğinde $k \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) = 0 \quad (4.21)$$

olur. $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.21) denklemi;

$$\kappa \sin \theta - \tau \cos \theta = 0 \quad (4.22)$$

eşitliğinde tek bir denklem olarak elde edilir. (4.22) denkleminde $\frac{\tau}{\kappa} = \hbar = \text{sabit}$ olup β eğrisi bir helistir. Bu durumda (4.20) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{B}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Tersine β bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \hbar$ olup $\tau = \hbar\kappa$ ve $\sin \theta = \hbar \cos \theta$ eşitlikleri (4.15) ve (4.20) denklemlerinde kullanıldığında (4.20) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{B}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3.1. β^* eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}^*$ ’ın Fermi-Walker türevi $\mathcal{N}$ yönlü bir vektördür.

İspat. (4.20) denklemi ile ispat açıktır.

Sonuç 4.1.3.2. β eğrisi dairesel helis olması durumunda $\beta^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. β eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1. de bulunan tanım gereği κ ve τ değerleri sabit olur. (4.22) denkleminin bir çözümü olan $\kappa = \frac{1}{\sin \theta}$ ve $\tau = \frac{1}{\cos \theta}$, (4.20) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

eşitliği sağlanır. Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{B}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

$\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*$ vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olduğuna dair teorem ve sonuçlar dikkate alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.3.3. (β, β^*) birim hızlı ve s yay parametrelili Bertrand eğri çifti olsun. β^* eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere β eğrisinin helis eğrisi olması durumunda $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

İspat. β^* eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere Teorem 4.1.1.1. ışığında β^* eğrisinin $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Teorem 4.1.2.1. ışığında β^* eğrisinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Teorem 4.1.3.1. ışığında β^* eğrisinin $\mathcal{B}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Böylece Tanım 3.4.4. gereği $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü β eğrisinin helis eğrisi olması durumunda bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

4.1.4. Mannheim Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olarak tanımlı $\mathcal{M}$ eğrisi ele alınmıştır. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{T}^*$ teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\mathcal{M}$ eğrisi $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisi ele alınsın. $\mathcal{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin teğet vektör alanı ise $\mathcal{T}^*$ olarak verilsin. (3.6) ve (3.11) denklemleri kullanılarak $\mathcal{M}(s)$ birim hızlı eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* - \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{T}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle = 1$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{T}^* \quad (4.23)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.3) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* &= \frac{d\mathcal{T}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{T}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{T}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) + \mathcal{B}'(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.24)$$

ifadesi bulunur. (4.24) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılır;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) \quad (4.25)$$

bulunur. (3.6) ile (4.25) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle = 0 \quad (4.26)$$

elde edilir. (4.26) eşitliği (4.23) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0 \quad (4.27)$$

bulunur. Böylece;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* = 0 \quad (4.28)$$

ifadesi ile $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.4.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{T}^*$ vektör alanı $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere Fermi-Walker anlamında paraleldir.

İspat. (4.28) eşitliğinden $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır.

Sonuç 4.1.4.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çiftini gösterebiliriz. $\mathcal{M}$ eğrisinin torsiyonu τ olmak üzere $\tau = 0$ alınırsa $\mathcal{T}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olup $\mathcal{M}$ eğrisi düzlem eğrisi olur.

İspat. (4.27) ve (4.28) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = 0$ alınırsa Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada $\mathcal{M}$ eğrisinin τ değeri sıfır olduğunda $\mathcal{M}$ eğrisi Teorem 2.3.4. te ifade edildiği üzere düzlem eğrisi olur.

Sonuç 4.1.4.2. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. (4.27) ve (4.28) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = \text{sabit}$ ve $\kappa = \text{sabit}$ alınırsa Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada $\mathcal{M}$ eğrisinin τ ve κ değeri sabit olduğunda $\mathcal{M}$ eğrisi Teorem 3.1.1. de ifade edildiği üzere dairesel helis olur.

4.1.5. Mannheim Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olarak tanımlı $\mathcal{M}$ eğrisi ele alınmıştır. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{N}^*$ normal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\mathcal{M}$ eğrisi $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisi ele alınsın. $\mathcal{M}$ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin normal vektör alanı ise $\mathcal{N}^*$ olarak verilsin. (3.6) ve (3.11) denklemleri kullanılarak $\mathcal{M}(s)$ birim hızlı eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanındaki Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* - \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^*$$

eşitliği ile elde edilir. $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* \quad (4.29)$$

eşitliği sağlanır. Burada (3.3) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* &= \frac{d\mathcal{N}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{N}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}'(k \sin \theta) + \mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{B}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.30)$$

ifadesi bulunur. (4.30) eşitliğinde (2.3) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = [\mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \quad (4.31)$$

bulunur. (3.6) ile (4.25) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle = -k \quad (4.32)$$

elde edilir. (3.6) ile (4.32) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \cos \theta) + \mathcal{B}(k \sin \theta) \quad (4.33)$$

elde edilir. Burada (4.31) ile (4.33) eşitlikleri kullanılarak;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \mathcal{N}(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) \quad (4.34)$$

ifadesi ile $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.1.5.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}, \{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{N}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter koşul $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır.

İspat. $\mathcal{N}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.4.3. gereği (4.29) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

yazabiliriz. (4.31), (4.33) ve (4.34) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.34) eşitliğinde $k \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) = 0 \quad (4.35)$$

olur. $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.35) denkleminde;

$$\kappa \sin \theta - \tau \cos \theta = 0 \quad (4.36)$$

eşitliğinde tek bir denklem olarak elde edilir. (4.36) denkleminde $\frac{\tau}{\kappa} = h = \text{sabit}$ olup $\mathcal{M}$ eğrisi bir helistir. Bu durumda (4.34) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{N}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Tersine $\mathcal{M}$ bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \hbar$ olup $\tau = \hbar \kappa$ ve $\sin \theta = \hbar \cos \theta$ eşitlikleri (4.29) ve (4.34) denklemlerinde kullanıldığında (4.34) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{N}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5.1. $\mathcal{M}^*$ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}^*$ ’ın Fermi-Walker türevi $\mathcal{N}$ yönlü bir vektördür.

İspat. (4.34) denklemi ile ispat açıktır.

Sonuç 4.1.5.2. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1. de bulunan tanım gereği κ ve τ değerleri sabit olur. (4.36) denkleminin bir çözümü olan $\kappa = \frac{1}{\sin \theta}$ ve $\tau = \frac{1}{\cos \theta}$, (4.34) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

elde edilir. Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

4.1.6. Mannheim Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olarak tanımlı $\mathcal{M}$ eğrisi ele alınmıştır. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{M}^*$ binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\mathcal{M}$ eğrisi $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisi ele alınsın. $\mathcal{M}$ eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin binormal vektör alanı ise $\mathcal{B}^*$ olarak verilsin. (3.6) ve (3.11)

denklemleri kullanılarak $\mathcal{M}(s)$ birim hızlı eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* - \langle \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^*$$

eşitliği ile elde edilir. $\langle \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* \quad (4.37)$$

denklemini bulunur. Burada (3.3) ve (3.6) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \frac{d\mathcal{B}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{B}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \mathcal{N}' k \quad (4.38)$$

bulunur. (4.38) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \mathcal{T}(-k\kappa) + \mathcal{B}(k\tau) \quad (4.39)$$

bulunur. (3.6) ile (4.25) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle = (k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) \quad (4.40)$$

elde edilir. (3.6) ile (4.40) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* \\ &= \mathcal{T}(k\kappa \cos^2 \theta + k\tau \cos \theta \sin \theta) + \mathcal{B}(-k\tau \sin^2 \theta - k\kappa \cos \theta \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.41)$$

denklemini bulunur. Burada (4.39) ile (4.41) denklemleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \\ & [\mathcal{T}(k\kappa(\cos^2 \theta - 1) + k\tau \cos \theta \sin \theta) + \mathcal{B}(k\tau(1 - \sin^2 \theta) - k\kappa \cos \theta \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir ve böylece $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının Fermi-Walker türevi hesaplanmış olunur.

Teorem 4.1.6.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{B}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter koşul $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır.

İspat. $\mathcal{B}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.4.3. gereği (4.37) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

yazabiliriz. (4.39), (4.41) ve (4.42) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.42) eşitliğinde $k \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$\begin{cases} k\kappa(\cos^2 \theta - 1) + k\tau \cos \theta \sin \theta = 0 \\ k\tau(1 - \sin^2 \theta) - k\kappa \cos \theta \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

olur. $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.43) denklemi;

$$-\kappa \sin \theta + \tau \cos \theta = 0 \quad (4.44)$$

eşitliğinde tek bir denklem olarak elde edilir. (4.44) denkleminde $\frac{\tau}{\kappa} = \hbar = \text{sabit}$ olup $\mathcal{M}$ eğrisi bir helistir. Bu durumda (4.42) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{B}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Tersine $\mathcal{M}$ bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\tau}{\kappa} = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \hbar$ olup $\tau = \hbar \kappa$ ve $\sin \theta = \hbar \cos \theta$ eşitlikleri (4.30) ve (4.35) denklemlerinde kullanıldığında (4.42) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{B}^*$ vektör alanı Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6.1. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}^*$, Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1. de bulunan tanım gereği κ ve τ değerleri sabit olur. (4.44) denkleminin bir çözümü olan $\kappa = \frac{1}{\sin \theta}$ ve $\tau = \frac{1}{\cos \theta}$, (4.42) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{T}^*} \mathcal{T}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{T}^* = 0$$

eşitliği sağlanır. Tanım 3.4.3. gereği $\mathcal{B}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

$\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*$ vektör alanlarının Fermi-Walker anlamında paralel olduğuna dair teorem ve sonuçlar dikkate alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.1.6.2. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı ve s yay parametrelili Mannheim eğri çifti olsun. $\mathcal{M}^*$ eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere $\mathcal{M}$ eğrisinin helis eğrisi olması durumunda $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

İspat. $\mathcal{M}^*$ eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere Teorem 4.1.4.1. ışığında $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{T}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Teorem 4.1.5.1. ışığında $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Teorem 4.1.6.1. ışığında $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{B}^*$ vektör alanının Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Böylece Tanım 3.4.4. gereği $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü $\mathcal{M}$ eğrisinin helis eğrisi olması durumunda bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

4.2. Bertrand Eğri Çiftinin ve Mannheim Eğri Çiftinin Serret-Frenet Vektör Alanlarının Normal Fermi-Walker Türevleri

Bu kısımda temel tanım ve teoremlerden yararlanılarak elde edilen Bertrand ve Mannheim eğri çiftlerinin Normal Fermi-Walker türevi ile ilgili bulgulara yer verilmiştir.

4.2.1. Bertrand Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi ele alınmıştır. β eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten β^* eğrisinin $\mathcal{T}^*$ teğet vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi verilsin. β eğrisi ile Bertrand eğri çifti olan β^* eğrisi ele alınsın. β eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$, β^* eğrisinin teğet vektör alanı ise $\mathcal{T}^*$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.14) denklemleri kullanılarak $\beta(s)$ birim hızlı eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten $\beta^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanındaki normal Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* - \langle \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^* \quad (4.45)$$

eşitliği elde edilir. Burada (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* &= \frac{d\mathcal{T}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{T}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{T}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) + \mathcal{B}'(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.46)$$

ifadesi bulunur. (4.46) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılsa;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) \quad (4.47)$$

bulunur. (3.2) ve (3.3) eşitlikleri kullanıldığında;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = \frac{d\mathcal{N}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{N}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \mathcal{N}'k \quad (4.48)$$

elde edilir. (4.48) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{N}^* = \mathcal{T}(-k\kappa) + \mathcal{B}(k\tau) \quad (4.49)$$

bulunur. (3.2) ile (4.49) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle = (-k\kappa \cos \theta - k\tau \sin \theta) \quad (4.50)$$

elde edilir. (3.2) ile (4.50) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^* = \mathcal{N}(-k\kappa \cos \theta - k\tau \sin \theta) \quad (4.51)$$

bulunur. Burada (4.47) ile (4.51) eşitlikleri kullanılarak;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*}\mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) \quad (4.52)$$

bulunur. (3.2) ile (4.52) eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*}\mathcal{T}^* = -k. \mathcal{B}^* \quad (4.53)$$

ifadesi ile $\beta^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.2.1.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{T}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel değildir.

İspat. (4.53) eşitliği k sabiti ile bir vektörün çarpımına eşit olup sıfırdan farklı olduğundan $\mathcal{T}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel değildir.

Sonuç 4.2.1.1. β^* eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$ in normal Fermi-Walker türevi $\mathcal{B}^*$ yönlü bir vektördür.

İspat. (4.53) denklemi ile ispat açıktır.

4.2.2. Bertrand Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi ele alınmıştır. β eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten β^* eğrisinin $\mathcal{N}^*$ normal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi verilsin. β eğrisi ile Bertrand eğri çifti olan β^* eğrisi ele alınsın. β eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}$, β^* eğrisinin normal vektör alanı da $\mathcal{N}^*$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.14) denklemleri kullanılarak $\beta(s)$ birim hızlı eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten $\beta^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* - \langle \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{N}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle = 1$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{N}^* \quad (4.54)$$

eşitliği sağlanır. (3.2) ile (4.49) eşitlikleri kullanılarak Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle = 0 \quad (4.55)$$

elde edilir. (4.55) eşitliği (4.54) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{N}^* = 0 \quad (4.56)$$

bulunur. Böylece;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = 0 \quad (4.57)$$

ifadesi ile $\beta^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.2.2.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{N}^*$ vektör alanı $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere normal Fermi-Walker anlamında paraleldir.

İspat. (4.57) eşitliğinden $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır.

Sonuç 4.2.2.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. β eğrisinin eğriliği κ olmak üzere $\kappa = \text{sabit}$ için β^* Bertrand eğri çiftinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olup aynı zamanda $\tau \neq 0$ olduğunda β eğrisi Salkowski eğrisi olur.

İspat. (4.56) ve (4.57) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\kappa = \text{sabit}$ ve $\tau \neq 0$ alınır. Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Öte yandan β eğrisinin κ değeri sabit iken τ değeri sıfırdan farklı olduğunda β eğrisi Tanım 3.1.2. de ifade edildiği üzere Salkowski eğrisi olur.

Sonuç 4.2.2.2. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çifti olsun. β eğrisinin burulması τ olmak üzere $\tau = \text{sabit}$ için β^* Bertrand eğri çiftinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olup aynı zamanda $\kappa \neq 0$ olduğunda β eğrisi anti-Salkowski eğrisi olur.

İspat. (4.56) ve (4.57) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = \text{sabit}$ ve $\kappa \neq 0$ alınır. Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Öte yandan β eğrisinin τ değeri sabit iken κ değeri sıfırdan farklı olduğunda β eğrisi Tanım 3.1.4. de ifade edildiği üzere anti-Salkowski eğrisi olur.

Sonuç 4.2.2.3. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çifti olsun. β eğrisinin burulması τ olmak üzere $\tau = 0$ alınır. $\mathcal{N}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olup β eğrisi düzlem eğrisi olur.

İspat. (4.56) ve (4.57) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = 0$ alınırsa Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada β eğrisinin τ değeri sıfır olduğunda β eğrisi Teorem 2.3.4. te ifade edildiği üzere düzlem eğrisi olur.

Sonuç 4.2.2.4. β eğrisi dairesel helis olması durumunda $\beta^*(s^*)$ eğrisinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. (4.56) ve (4.57) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = \text{sabit}$ ve $\kappa = \text{sabit}$ alınırsa Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada β eğrisinin τ ve κ değeri sabit olduğunda β eğrisi Teorem 3.1.1. de ifade edildiği üzere dairesel helis olur.

4.2.3. Bertrand Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi ele alınmıştır. β eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten β^* eğrisinin $\mathcal{B}^*$ binormal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\beta: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi birim hızlı s yay parametrelili olarak tanımlanan β eğrisi verilsin. β eğrisi ile Bertrand eğri çifti olan β^* eğrisi ele alınsın. β eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}$, β^* eğrisinin binormal vektör alanı ise $\mathcal{B}^*$ olarak verilsin. (3.2) ve (3.14) denklemleri kullanılarak $\beta(s)$ birim hızlı eğrisinin Bertrand eğri çiftini belirten $\beta^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* - \langle \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*}\mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^* \quad (4.58)$$

denklemini sağlanır. (3.2) ve (3.3) denklemleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{B}^* &= \frac{d\mathcal{B}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{B}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}'(k \sin \theta) + \mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{B}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.59)$$

ifadesi bulunur. (4.59) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{B}^* = [\mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \quad (4.60)$$

bulunur. (3.2) ile (4.49) eşitlikleri kullanılarak Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle = (-k\kappa \sin \theta + k\tau \cos \theta) \quad (4.61)$$

elde edilir. (3.2) ile (4.61) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*}\mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^* = \mathcal{N}(-k\kappa \sin \theta + k\tau \cos \theta) \quad (4.62)$$

bulunur. Burada (4.60) ile (4.62) eşitlikleri kullanılarak;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*}\mathcal{B}^* = \mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta) \quad (4.63)$$

bulunur. (3.2) ile (4.63) eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*}\mathcal{B}^* = k.\mathcal{T}^* \quad (4.64)$$

ifadesi ile $\beta^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.2.3.1. (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çiftini belirtsin. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{B}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel değildir.

İspat. (4.64) eşitliği k sabiti ile bir vektörün çarpımına eşit olup sıfırdan farklı olduğundan $\mathcal{B}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel değildir.

Sonuç 4.2.3.1. β^* eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}^*$ ’ın normal Fermi-Walker türevi $\mathcal{T}^*$ yönlü bir vektördür.

İspat. (4.64) denklemi ile ispat açıktır.

$\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*$ vektör alanlarının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğuna dair teorem ve sonuçlar dikkate alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.3.2. (β, β^*) birim hızlı ve s yay parametrelili Bertrand eğri çifti olsun. β^* eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü bir normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturmaz.

İspat. Teorem 4.2.1.1. ve Teorem 4.2.3.1. gereği β^* eğrisinin $\mathcal{T}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ vektör alanları normal Fermi-Walker anlamında paralel olmadığından dolayı Tanım 3.5.2. gereği $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü normal Fermi-Walker bir non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturmaz.

4.2.4. Mannheim Eğri Çiftinin Teğet Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olarak tanımlı $\mathcal{M}$ eğrisi ele alınmıştır. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{T}^*$ teğet vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\mathcal{M}$ eğrisi $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisi ele alınsın. $\mathcal{M}$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}$, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin teğet vektör alanı ise $\mathcal{T}^*$ olarak verilsin. (3.6) ve (3.14) denklemleri kullanılarak $\mathcal{M}(s)$ birim hızlı eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanındaki normal Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* - \langle \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^* \quad (4.65)$$

eşitliği sağlanır. (3.3) ve (3.6) denklemleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* &= \frac{d\mathcal{T}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{T}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{T}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) + \mathcal{B}'(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.66)$$

ifadesi bulunur. (4.66) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \mathcal{T}(-k \sin \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) + \mathcal{B}(-k \cos \theta) \quad (4.67)$$

bulunur. (3.3) ve (3.6) eşitlikleri kullanıldığında;

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* &= \frac{d\mathcal{N}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{N}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} \\ &= [\mathcal{T}'(k \sin \theta) + \mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{B}'(k \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \end{aligned} \quad (4.68)$$

elde edilir. (4.68) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = [\mathcal{T}(k \cos \theta) + \mathcal{N}(k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) + \mathcal{B}(-k \sin \theta)] \quad (4.69)$$

bulunur. (3.6) ile (4.69) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle = k \quad (4.70)$$

elde edilir. (3.6) ile (4.70) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^* = \mathcal{T}(k \sin \theta) + \mathcal{B}(k \cos \theta) \quad (4.71)$$

bulunur. Burada (4.67) ile (4.71) eşitlikleri kullanılarak;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \mathcal{N}(k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) \quad (4.72)$$

ifadesi ile $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.2.4.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}, \{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{T}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter koşul $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır.

İspat. $\mathcal{T}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.5.1. gereği (4.65) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^* = 0$$

yazabiliriz. (4.68), (4.71) ve (4.72) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.72) eşitliğinde $k \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$(k\kappa \cos \theta + k\tau \sin \theta) = 0 \quad (4.73)$$

olur. $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.73) denklemi;

$$\kappa \cos \theta + \tau \sin \theta = 0 \quad (4.74)$$

eşitliğinde tek bir denklem olarak elde edilir. (4.74) denkleminde $\frac{\kappa}{\tau} = -\tan \theta =$ *sabit* olup $\mathcal{M}$ eğrisi bir helistir. Bu durumda (4.72) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{T}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Tersine $\mathcal{M}$ bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\kappa}{\tau} = -\tan \theta = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ olup $\kappa = -\tau \tan \theta$ eşitliğini (4.67) ve (4.72) denklemlerinde kullandığında (4.72) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{T}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.4.1. $\mathcal{M}^*$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$ in normal Fermi-Walker türevi $\mathcal{N}$ yönlü bir vektördür.

İspat. (4.72) denklemi ile ispat açıktır.

Sonuç 4.2.4.2. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{T}^*$ normal Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1 de bulunan tanım gereği κ ve τ değerleri sabit olur. (4.74) denkleminin bir çözümü olan $\tau = \frac{1}{\sin \theta}$ ve $\kappa = -\frac{1}{\cos \theta}$, (4.72) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{T}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{T}^* \rangle \mathcal{N}^* = 0$$

elde edilir. Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{T}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

4.2.5. Mannheim Eğri Çiftinin Normal Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olarak tanımlı $\mathcal{M}$ eğrisi ele alınmıştır. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{N}^*$ normal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\mathcal{M}$ eğrisi $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisi ele alınsın. $\mathcal{M}$ eğrisinin normal vektör alanı $\mathcal{N}$, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin normal vektör alanı ise $\mathcal{N}^*$ olarak verilsin. (3.6) ve (3.14) denklemleri kullanılarak $\mathcal{M}(s)$ birim hızlı eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* - \langle \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{N}^*$$

ile ifade edilir. $\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle = 1$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{N}^* \quad (4.75)$$

eşitliği sağlanır. (4.69) ile (3.6) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle = 0 \quad (4.76)$$

eşitliği sağlanır. (4.76) eşitliği (4.75) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{N}^* \rangle \mathcal{N}^* = 0 \quad (4.77)$$

bulunur. Böylece;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* = 0 \quad (4.78)$$

ifadesi ile $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin normal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.2.5.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}$, $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{N}^*$ vektör alanı $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere normal Fermi-Walker anlamında paraleldir.

İspat. (4.78) eşitliğinden $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır.

Sonuç 4.2.5.1. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. (4.77) ve (4.78) eşitliği sıfıra eşit olduğundan (3.3) eşitliğinde bulunan k ifadesinde $\tau = \text{sabit}$ ve $\kappa = \text{sabit}$ alınır. Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir. Burada $\mathcal{M}$ eğrisinin τ ve κ değeri sabit olduğunda $\mathcal{M}$ eğrisi Teorem 3.1.1. de ifade edildiği üzere dairesel helis olur.

4.2.6. Mannheim Eğri Çiftinin Binormal Vektör Alanının Normal Fermi-Walker Türevi

Bu bölümde, $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı olarak tanımlı $\mathcal{M}$ eğrisi ele alınmıştır. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{B}^*$ binormal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir.

$\mathcal{M}$ eğrisi $\mathcal{M}: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğri olarak tanımlansın. $\mathcal{M}$ eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*$ eğrisi ele alınsın. $\mathcal{M}$ eğrisinin binormal vektör alanı $\mathcal{B}$, $\mathcal{M}^*$ eğrisinin binormal vektör alanı ise $\mathcal{B}^*$ olarak verilsin. (3.6) ve (3.14) denklemleri kullanılarak $\mathcal{M}(s)$ birim hızlı eğrisi ile Mannheim eğri çifti olan $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* - \langle \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^*$$

şeklinde ifade edilir. $\langle \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle = 0$ eşitliği göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^* \quad (4.79)$$

eşitliği sağlanır. (3.3) ve (3.6) denklemleri kullanıldığında;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = \frac{d\mathcal{B}^*}{ds^*} = \frac{d\mathcal{B}^*}{ds} \frac{ds}{ds^*} = \mathcal{N}' k \quad (4.80)$$

ifadesi bulunur. (4.80) eşitliğinde (2.2) eşitliğinde bulunan Serret-Frenet elemanları kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = \mathcal{T}(-k\kappa) + \mathcal{B}(k\tau) \quad (4.81)$$

bulunur. (4.69) ile (3.6) eşitlikleri Tanım 2.1.4. de ifade edilen tanım gereği hesaplanırsa;

$$\langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle = (k\kappa \sin \theta - k\tau \cos \theta) \quad (4.82)$$

elde edilir. (3.6) ile (4.82) eşitlikleri göz önüne alınarak gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^* \\ &= \mathcal{T}(k\kappa \sin^2 \theta - k\tau \cos \theta \sin \theta) + \mathcal{B}(-k\tau \cos^2 \theta + k\kappa \cos \theta \sin \theta) \end{aligned} \quad (4.83)$$

bulunur. Burada (4.81) ile (4.83) eşitlikleri kullanılarak;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = [\mathcal{T}(-k\kappa \cos^2 \theta - k\tau \cos \theta \sin \theta) + \mathcal{B}(k\tau \sin^2 \theta + k\kappa \cos \theta \sin \theta)] \quad (4.84)$$

ifadesi ile $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin binormal vektör alanının normal Fermi-Walker türevi hesaplanmış olur.

Teorem 4.2.6.1. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çifti olsun. Bu eğrilere ait olan Serret-Frenet üçlüsü sırasıyla $\{\mathcal{T}, \mathcal{N}, \mathcal{B}\}, \{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ olsun. $\mathcal{B}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olması için gerek ve yeter koşul $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\mathcal{M}$ eğrisinin bir helis eğrisi olmasıdır.

İspat. $\mathcal{B}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paralel olsun. O halde Tanım 3.5.1. gereği (4.79) eşitliğinin sıfır olması gerekir. Buradan;

$$\nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^* = 0$$

yazabiliriz. (4.81), (4.83) ve (4.84) eşitlikleri göz önüne alınarak (4.84) eşitliğinde $k \neq 0$ olduğundan Serret-Frenet katsayıları sıfır olmalıdır. Bu durumda;

$$\begin{cases} -k\kappa \cos^2 \theta - k\tau \cos \theta \sin \theta = 0 \\ k\tau \sin^2 \theta + k\kappa \cos \theta \sin \theta = 0 \end{cases} \quad (4.85)$$

olur. $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olduğu göz önüne alınarak (4.85) denklemi;

$$\kappa \cos \theta + \tau \sin \theta = 0 \quad (4.86)$$

eşitliğinde tek bir denklem olarak elde edilir. (4.86) denkleminde $\frac{\kappa}{\tau} = -\tan \theta =$ *sabit* olup $\mathcal{M}$ eğrisi bir helistir. Bu durumda (4.84) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{B}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paraleldir.

Tersine $\mathcal{M}$ bir helis eğrisi olsun. Bu durumda $\sin \theta \neq 0$ ve $\cos \theta \neq 0$ olmak üzere $\frac{\kappa}{\tau} = -\tan \theta = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ olup $\kappa = -\tau \tan \theta$ eşitliği (4.79) ve (4.84) denklemlerinde kullanıldığında (4.84) eşitliği sıfıra eşit olup $\mathcal{B}^*$ vektör alanı normal Fermi-Walker anlamında paraleldir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.6.1. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olması durumunda $\mathcal{M}^*(s^*)$ eğrisinin teğet vektör alanı $\mathcal{B}^*$ normal Fermi-Walker anlamında paralel olur.

İspat. $\mathcal{M}$ eğrisi dairesel helis olsun. Teorem 3.1.1. de bulunan tanım gereği κ ve τ değerleri sabit olur. (4.85) eşitliğindeki κ ve τ değerleri sabit olup (4.84) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\tilde{\nabla}_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* = \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{B}^* + \langle \nabla_{\mathcal{N}^*} \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^* \rangle \mathcal{N}^* = 0$$

elde edilir. Tanım 3.5.1. gereği $\mathcal{B}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu anlamına gelir.

$\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*$ vektör alanlarının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğuna dair teorem ve sonuçlar dikkate alındığında aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.2.6.2. $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı ve s yay parametrelili Mannheim eğri çifti olsun. $\mathcal{M}^*$ eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere $\mathcal{M}$ eğrisinin helis eğrisi olması durumunda $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü bir normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.

İspat. $\mathcal{M}^*$ eğrisi boyunca $\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*$ ve $\mathcal{B}^*$ ortonormal vektörler olmak üzere Teorem 4.2.4.1. ışığında $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{T}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Teorem 4.2.5.1. ışığında $\mathcal{M}^*$ eğrisinin $\mathcal{N}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Teorem 4.2.6.1. ışığında $\mathcal{M}^*$

eğrisinin $\mathcal{B}^*$ vektör alanının normal Fermi-Walker anlamında paralel olduğu açıktır. Böylece Tanım 3.5.2. gereği $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü $\mathcal{M}$ eğrisinin helis eğrisi olması durumunda bir normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturur.



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Araştırma bulguları kısmında (β, β^*) birim hızlı Bertrand eğri çifti ve $(\mathcal{M}, \mathcal{M}^*)$ birim hızlı Mannheim eğri çiftine ait Serret-Frenet çatısı altındaki vektör alanlarının Fermi-Walker ve normal Fermi-Walker türevleri hesaplanmış ve bu vektör alanlarının Fermi-Walker ve normal Fermi-Walker anlamında paralel olup olmadığı incelenmiştir.

3 –boyutlu Öklid uzayındaki Bertrand eğri çifti ile Mannheim eğri çiftlerinin Serret-Frenet çatısının vektör alanlarının Fermi-Walker ve normal Fermi-Walker türevleri hesaplandıktan sonra bu vektör alanlarının Fermi-Walker ve normal Fermi-Walker anlamında paralel olup olmadığı durumları incelenerek $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsünün Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı ve normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturup oluşturmadıkları incelenmiştir. Bertrand eğri çifti ve Mannheim eğri çiftinde $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluştururken, Mannheim eğri çiftinde $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturup Bertrand eğri çifti $\{\mathcal{T}^*, \mathcal{N}^*, \mathcal{B}^*\}$ üçlüsü normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşturmamıştır.

İsteyen araştırmacılar, başka uzay ve özel eğriler üzerinde çalışarak eğrilerin Serret-Frenet çatısına ait vektör alanlarının Fermi-Walker ve normal Fermi-Walker türevlerini hesaplayıp bu vektör alanlarının Fermi-Walker ve normal Fermi-Walker anlamında paralel olup olmadığı durumlarını inceleyerek Serret-Frenet çatısına ait vektör alanlarında Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı ve normal Fermi-Walker non-rotating (dönmeyen) çatı oluşumlarında yeni teorem ve sonuçlara ulaşabilirler.

KAYNAKLAR

Hasçelik, M., 2024. Fermi-Walker Türevi ve Paralel Eğriler. Yüksek Lisans Tezi, Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi, Ağrı.

Karakuş, F., 2012. Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Balakrishnan, R. 2005. Space curves, anholonomy and nonlinearity. *Pramana Journal of Physics*, 64(4), 607-615.

Kaymaz, F., 2016. Öklid Uzayında Mannheim Eğrileri Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kırşehir.

İsabeyoğlu, Z., 2021. Öklid Uzayında Mannheim Eğrileri ve Spinorlar. Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzincan.

Benn, I. M. and Tucker, R. W. 1989. Wave mechanics and inertial guidance. *The American Physical Society*, 39(6), 1594-1601.

Do Carmo, M., 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.

Ekici, C., 2021. Eğrilerin ve Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, s.350, Eskişehir.

Epik, P. E., 2023. 3 –Boyutlu Kompakt Lie Gruplarında Paralel Eğriler Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Bitlis Eren Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Bitlis.

Sevinç, M., Kuşak Samancı, H., 2022. Characterizations of The Ruled Surfaces due to N-Bishop Frame. *The Black Sea Journal of Sciences*.

Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt I. A.Ü. Fen Fakültesi, s.154-175, Ankara.

Hacısalıhoğlu, H. H., 2000. Diferensiyel Geometri, Cilt II. A.Ü. Fen Fakültesi, s. 54-68, Ankara.

Karakuş, F. and Yaylı, Y. 2012. On the Fermi-Walker Derivative and Non-rotating Frame. Int. Journal of Geometric Methods in Modern Physics, 9(8), 1250066-1-11.

Keskin, Ö. and Yaylı, Y., 2017. Normal Fermi- Walker Derivative. Mathematical Sciences and Applications E-Notes, 5(1), 1-8.

Kobayashi, S. and Nomizu, K. 1996. Foundations of differential geometry, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Sönmez, S. Ş., 2010. Bertrand Eğrileri ve Helislerin Genel Özellikleri Üzerine. Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

Monterde, J. 2008. Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion. Computer Aided Geometric Desing, 26(3),271-278.

Özçınar, M., 2007. Bertrand Eğrilerinin Karakteristik Özellikleri. Yüksek Lisans Tezi, Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sakarya.

O'Neill, B., 1966. Elementary Differential Geometry. Academic Press, New York.

Şenyurt, S., Ayvaci, K. H., Canlı, D., 2020. On the Surfaces with Common Mannheim D- Isogeodesic Curve. Ordu University Journal of Science and Technology, Ordu.

Özdemir, M., 2020. Diferensiyel Geometri. Altın Nokta Yayınevi, s.448, İzmir.

Ersoy, S., Akyiğit, M., Yıldız, Ö. G., 2023. Eğriler Teorisi. Nobel Yayınevi, Ankara.

Sabuncuoğlu, A., 2010. Diferensiyel Geometri. Nobel Yayınevi, Ankara.

Salimov A. and Mağden A., 2008. Diferensiyel Geometri. Aktif Yayınevi, Erzurum.

Masal, M., Azak, A. Z., 2017. 3 –Boyutlu Öklid Uzayında Bertrand Eğriler ve Bishop Çatısı. Sakarya University Journal of Science, Sakarya

Salkowski, E. 1909. Zur Transformation von Raumkurven. Mathematische Annalen, 66-4, pp. 517-557.

Uçar, A., 2019. Genelleştirilmiş Fermi-Walker Türevi ve Geometrik Uygulamaları. Doktora Tezi, Sinop Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Sinop.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı ve Soyadı	Sefa Yunus TIRAŞCI
Doğum Yeri ve Tarihi	
Eğitim Durumu	
Lisans Öğrenimi	İnönü Üniversitesi – İlköğretim Matematik Öğretmenliği (2011- 2016)
Yüksek Lisans Öğrenimi	Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi – Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Bölümü (2022-2025).
Bildiği Yabancı Diller	İngilizce
İş Deneyimi	
Çalıştığı Kurum	Gökoğlu Ortaokulu-Ağrı
İletişim	
E-Posta Adresi	
Mezuniyet Tarihi	