

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ
METRİK UZAYLARDAKİ ÖZELLİKLERİ VE
UYGULAMALARI

Zehra DOĞAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2024
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR danışmanlığında, Zehra DOĞAN tarafından hazırlanan bu çalışma 17/05/2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK

İmza:

Üye : Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin Genelleştirilmiş Metrik Uzaylardaki Özellikleri ve Uygulamaları” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 17/05/2024

(İmza)

Zehra DOĞAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ METRİK UZAYLARDAKİ ÖZELLİKLERİ VE UYGULAMALARI

Zehra DOĞAN

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

Bu tezde $\mathcal{F}$ metrik ve modüler metrik kavramlarından yola çıkılarak modüler $\mathcal{F}$ metrik kavramı tanımlanmış, bazı sabit nokta teoremlerinin modüler $\mathcal{F}$ metrik çerçevesinde özellikleri incelenmiştir. Banach Büzülme Dönüşümü ilkesinden hareketle büzülme, modüler $\mathcal{F}$ metrik uzaylarda verilmiştir. Bu çalışmada modüler $\mathcal{F}$ metrik uzaylarda çeşitli çakışık ve ortak sabit nokta teoremleri sağlatılmıştır. Banach Büzülme İlkesi ile dönüşümlerin ortak sabit noktalarının olabildiği gösterilmiştir. Uygulama olarak dinamik programlamada kullanılan fonksiyonel eşitlikler sisteminin çözümlenmesi verilmiştir.

2024, ... 38

Anahtar Kelimeler: Banach Büzülme Prensibi, Çakışık sabit nokta, Modüler metrik, Modüler $\mathcal{F}$ metrik, Ortak sabit nokta, Sabit Nokta Teoremi, $\mathcal{F}$ metrik.

ABSTRACT

MSc Thesis

SOME FIXED POINT THEOREMS CHARACTERISTICS AND THEIR APPLICATIONS IN GENERALIZED METRIC SPACES

Zehra DOĞAN

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Nesrin MANAV TATAR

In this thesis, the concept of modular $\mathcal{F}$ metric is defined based on the concepts of $\mathcal{F}$ metric and modular metric, and the properties of some fixed point theorems are examined within the framework of modular $\mathcal{F}$ metric. Based on the Banach Contraction Principle, contraction is given in modular $\mathcal{F}$ metric spaces. In this thesis, various coincidence and common fixed point theorems are provided in modular $\mathcal{F}$ metric spaces. With the Banach Contraction Principle, it has been shown that mapping can have common fixed points. As an application, analysis of the system of functional equations used in dynamic programming is given.

2024, ... 38

Keywords: Banach Contraction Principle, Coincidence and common fixed point, Fixed Point Theory, modular metric , modular $\mathcal{F}$ metric, $\mathcal{F}$ metric.

TEŞEKKÜR

Tüm yüksek lisans sürecim boyunca yol göstermeleri ve sağladığı kaynaklar ile yanımda olan ve her koşulda bana zaman ayıran danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR' a teşekkür ederim. Sayın Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ ve sayın Doç. Dr. Vildan ÖZTÜRK hocalarıma incelemeleri ve katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim. Bu dünyada var olmamı ve eğitimli bir birey olarak hayatıma devam etmemi sağlayan annem Naime ERGÜN ve babam Erkan ÖZDEN'e, her yorulduğumda ihtiyacım olan motivasyonu bulduğum çocuklarım Özgüç DOĞAN ve Piraye Zerya DOĞAN' a, desteklerini esirgemeyen kardeşlerim Belfin ÖZDEN, Diren ÖZDEN ve Neslin Selin TEPE' ye, üstün emekleri ve desteği için Sevgi ÖZDEN' e, ellerini her an omzumda hissettiğim eşim Barış DOĞAN ve çok kıymetli anne babasına en güzel cümlelerle teşekkür ederim.

Zehra DOĞAN

Mayıs, 2024

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	v
TABLolar LİSTESİ.....	vi
SİMGELER ve KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. KURAMSAL TEMELLER.....	6
3.1. Metrik Uzaylar	6
3.2 Modüler Uzaylar.....	9
3.3 $\mathcal{F}$ -Metrik Uzaylar	17
4. MATERYAL ve YÖNTEM.....	23
4.1. Modüler $\mathcal{F}$ -Metrik Uzayların Bazı Özellikleri.....	23
4.2. Modüler $\mathcal{F}$ - Metrik Uzaylarda Bazı Teoremler.....	25
5. BULGULAR	26
5.1. Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin Modüler F-Metrik Uzaylarda Özellikleri	26
5.2. Uygulama	30
6. SONUÇ	33
KAYNAKLAR	35

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1.1. $\sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları 4



TABLÖLAR LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.3.5.1 Verilen elemanların fonksiyon altındaki değeri.....	21
---	----



SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

(X, d)	Metrik Uzay
$d(a,b)$	a ile b arasındaki fark
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\{a_n\}$	Dizi
$x_n \rightarrow x$	x_n dizisi x ' e yakınsar
Tx	x noktasının T dönüşümü altındaki görüntüsü
$T: X \rightarrow X$	T, X ' den X ' e dönüşüm
$\in$	Elemanıdır

Kısaltmalar

BBP	Banach Büzölme Prensibi
SNT	Sabit Nokta Teoremi

1. GİRİŞ

1906 yılında yayınlanan Frechet' in makalesinde ilk defa metrik uzay teorisinden bahsedilmiştir. (Frechet,1906). Daha sonrasında ise Hausdorff 1914 yılında yayınladığı çalışmalarla bu teoriye önemli katkılar sağlamıştır. (Hausdorff,1914). Metrik, belirli bir küme üzerinde tanımlanan uzaklık fonksiyonudur. Üzerinde uzaklık fonksiyonu tanımlanan bu kümeye ise metrik uzay denir. Metrik uzayın sahip olabileceği en önemli özelliği tamlıktır. Analizde (Φ, d) bir metrik uzay olmak üzere, elemanları Φ ' de olan her Cauchy dizisinin yine Φ ' de bir limiti varsa veya Φ ' deki her Cauch dizisi yine Φ 'de yakınsaksa (Φ, d) metrik uzayına *tam (Cauchy) uzay* denilmektedir.

Sabit nokta teorileri, 19. Yüzyılın sonlarında matematiğin yeni ve önemli araştırma alanlarından biri oldu. Sabit nokta teorisinin diferansiyel geometri ve cebirsel topoloji alanlarında önemli uygulamaları mevcuttur. Metrik uzaylar üstünde çalışılan sabit nokta teorisi (Goebel ve Kirk, 1990) ve (Kirk ve Sims(Eds),2001) tarafından oldukça ayrıntılı bir biçimde irdelenmiştir. Tam metrik uzaylar üstünde sabit nokta teorisi çalışmaları ise 1920 yılında Stefan Banach tarafından başlatılmıştır.

Banach Sabit Nokta Teoremi aynı zamanda büzülme teoremi olarakta bilinir. Bu teorem sabit noktanın varlığı ve tekliği için gerekli koşulları belirtir. Metrik uzaylarda büzülme prensibi birbirinden farklı iki noktanın görüntüleri arasındaki mesafenin bu iki nokta arasındaki uzaklıktan daha küçük olduğunu söyler. Buradan her büzülme dönüşümünün sürekli olduğu görülebilir. Büzülme dönüşüm ilkesi matematikte bir çok önemli problemin çözümünün varlığı ve tekliğini incelemek için iyi bir araçtır. Bu öneminden dolayı bu prensip bir çok matematikçi tarafından genişletilmiş ve geliştirilmiştir. Bunların en önemlileri 1968 yılından Kannan; 1971 yılında Reich; 1974 yılında Ciric; 1976 yılında Caristi tarafından geliştirilmiştir. Daha sonrasında ise 2014 yılında Berinde; 2008 yılında Suziki; 2012 yılında ise Samet ve arkadaşları tarafından geliştirilmeleri yapılmıştır.

Φ boştan farklı bir küme olmak üzere $\lambda: \Phi \rightarrow \Phi$ ' ye bir dönüşüm olsun. $\gamma \in \Phi$ için; $\lambda\gamma = \gamma$ ise γ bu dönüşümün sabit noktasıdır. Bu konu üzerinde ayrıntılı düşünebilmek için bazı örneklendirmeler yapmak gerekirse;

Örnek: $\mathbb{R}$ ' de $x \rightarrow x^2$ dönüşümünün 0 ve 1 olmak üzere iki sabit noktası vardır.

Örnek: Bir düzlemin dönmesinin tek bir sabit noktası vardır o da dönme merkezidir.

Örnek: $\mathbb{R}^2$ ' de $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)$ ikili dönüşümünün $(x, 0)$ formunda sonsuz çoklukta sabit noktası vardır.

Banach Sabit Nokta Teoremi ise var olan bu noktanın varlığını ve tekliğini inceler.

Büzülme teoremine bakılacak olursa; (Φ, d) bir metrik uzay, $\lambda: \Phi \rightarrow \Phi$ ye bir dönüşüm, $0 < \xi < 1$, $\forall \gamma, \mu \in \Phi$ olmak üzere;

$$d(\lambda(\gamma), \lambda(\mu)) \leq \xi d(\gamma, \mu) \quad (1.1)$$

Olacak şekilde bir ξ sabiti varsa λ ' ya büzülme dönüşümü denir. Bu tanım ve örnek hazırlıklarından sonra Banach Sabit Nokta Teoremi' nin ifadesi şu şekildedir;

(Φ, d) bir metrik uzay, $\lambda: \Phi \rightarrow \Phi$ ye bir büzülme dönüşümü olsun. λ ' nın tek bir sabit noktası vardır. ($\lambda\gamma = \gamma$). Banach büzülme şartı düzenlemelerle farklı uzaylar üzerinde de çalışılabilecek şekilde uyarlanmıştır.

Banach' ın oluşturduğu sabit nokta teorisinin temelini büzülme şartı oluşturur. Bu şart için ardışık yaklaşım teoreminin soyut bir halidir denilmektedir. Çok eski zamanlardan beri bu teorem denklem çözmek amacıyla kullanılmıştır. Gezegenlerin konumu belirlenirken kullanılan ve temel bir unsur olan Kepler eşitliğini çözerken bu yöntemden yararlanılmıştır.

Birçok bilim insanı uzun zamandır klasik fonksiyon uzayları L^p 'nin genelleştirilmesi üzerine çalışmalar yapmaktadırlar. Bu konudaki ilk çalışmalar Orlicz ve Birnbaum (Birnbaum ve Orlicz, 1931) tarafından başlatılmıştır. Modüler uzaylar Lebesgue, Riesz ve Orlicz uzaylarının devamı niteliğindedir. Vektör uzayında modüler kavramı ise Nakano (Nakano, 1950) tarafından meydana çıkarılmış, Turpin, Mazur, Luxemburg, Musielac ve Orlicz tarafından geliştirilmiştir. (Luxemburg, 1955), (Mazur ve Orlicz, 1958), (Musielac ve Orlicz, 1959), (Turpin, 1978), (Orlicz, 1988). 2006 yılında ise son zamanlarda oldukça ilgi çeken bir çalışma alanı haline gelen, küme üzerinde modüler kavramı Chistyakov tarafından verilmiştir. (Chistyakov V., 2006). Bu kavram Nakano

tarafından verilen fonksiyon uzayındaki klasik lineer modüllerinden yola çıkılarak elde edilmiştir. (Nakano,1950). Modüler kavramını daha somut bir örnekle açıklamak gerekirse, dünya yüzeyindeki suyun tüm noktalarını Φ ile ifade edilecek olursak λ ve μ , Φ kümesinin elemanı olmak üzere $v_t(\lambda, \mu)$ fonksiyonu λ ' dan μ ' ye bir t zamanda karadan direkt olarak seyahat edebilmek için gereken ortalama hız olarak kabul edilir. Bu fonksiyonun λ ve μ için negatif değerler almayacağı açıktır ayrıca $v_t(\lambda, \mu)$, bir t zamanda artmayandır. Bu fonksiyon seçilen noktalara göre simetriktir. Bu noktada akıllara λ ve μ noktalarının farklı kara parçaları üzerinde olma ihtimali gelecektir ve kara yolu ile hareket edildiği varsayıldığından λ ' dan μ ' ye ulaşmak imkansız bir hal alacaktır. Ne kadar hızlı gidildiğinin bir önemi yoktur. Hız fonksiyonu her koşulda tanımlanmak zorunda olduğundan genişletilmiş reel değerlere izin vermek ve $v_t(\lambda, \mu) = \infty$ olarak belirlemek mantıklı olacaktır. Burada örnek olarak verilen ortalama hız fonksiyonu Chistyakov' a göre modüllere bir örnek teşkil etmektedir. (Abobaker ve Ryan, 2022).

Modüler fonksiyonları uzaklık ile eşleştiremeyiz, eşleştirebilmemiz ancak fonksiyonun Δ_2 şartını sağlaması ile mümkün olabilir. Bu konu ile ilgili daha detaylı bilgi için (Khamisi, Kozłowski, Reich, 1990) ve (Khamisi, Kozłowski, Chen, 1991) kaynakları incelenebilir. Modüler bir kümenin metrik uzaya dönüşümü için onu bir metrikle donatmak gerekmektedir. Modüler metrik kavramı lineer uzaylarda klasik bir modüler kavramından farklıdır fakat bazı benzerlikler gösterir. Bir küme üzerinde modüler metrik, negatif olmayan (çoğunlukla sonsuz değerli) hızların bir alanı olarak ifade edilebilir. Modüler metrik uzaylar ise modüler fonksiyon uzaylarının lineer olmayan hali olarak yorumlanabilir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

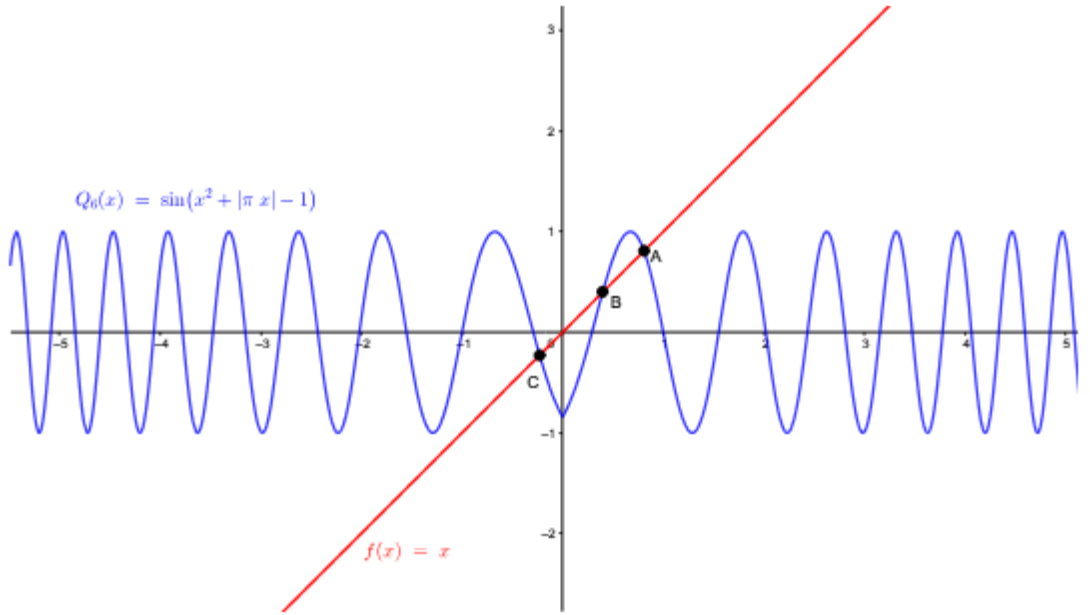
Φ boştan farklı bir küme ve $\lambda: \Phi \rightarrow \Phi$ bir fonksiyon olsun. $\lambda\gamma = \gamma$ eşitliğini sağlayan $\gamma \in \Phi$ elemanına λ nın bir sabit noktasıdır denir. Matematğin önemli konu başlıklarından biri olan Sabit nokta teori topoloji, lineer olmayan fonksiyonel analiz, operatör teori gibi matematiğin farklı dalları ile bağlantılıdır. Bu bağlantı sadece matematikle sınırlı değildir. Sabit nokta teori birçok alanda uygulama alanına sahiptir. Diferansiyel denklemlerden oyun teorisine, istatistikten mühendisliğe, fizikten ekonomiye birçok uygulama alanına sahiptir.

Tarihsel açıdan bakıldığında sabit nokta teori çalışmaları 19.yüzyılın sonlarına doğru matematiğin önemli araştırma alanlarından biri olmuştur. Sabit nokta teorisinin topoloji ile tanışması ise Poincare' in lineer olmayan problemlerin çözümünde sabit nokta teorisini kullanmasıyla başlamıştır. Bir örnek yardımıyla sabit noktaların varlığını şekil üstünde incelemek mümkündür.

Örnek 2.1

$S = \mathbb{R}$ ve $i = 1,2,3,4,5$ için $Q_i: S \rightarrow S$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $Q_6(x) = \sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktalarının kümesi yani $y = f(x) = x$ doğrusu ile kesim noktaları aşağıdaki grafikte belirtilen A, B, C noktalarından oluşur.



Şekil 2.1.1 $\sin(x^2 + |\pi x| - 1)$ fonksiyonunun sabit noktaları (Büyükkaya, 2022, s.10)

Genel anlamda sabit nokta teori iki tarafta gelişmiştir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde büzülme ve genelleştirilmiş büzülme dönüşümleri için sabit nokta teori çalışmalarıdır ve bu çalışmalar 1922 yılında Banach ile başlamıştır. Banach, tam metrik

uzaylarda sabit noktanın varlığı, tekliği ile ilgilenmiş ve Banach sabit nokta teoremini ortaya koymuş ve tam metrik uzay üzerinde tanımlı her büzölme dönüşümün tek bir sabit noktasının olduğunu ispatlamıştır. Banach'ın bu teoremi sabit noktanın nasıl bulunacağını yanı sıra bu noktanın tekliğini de ifade eder (Banach, 1922). Bu özelliğinden dolayı Banach'ın teoremi oldukça önemlidir ve bir çok matematikçiye ilham olmuştur.

İkinci ise lineer uzaylardaki sabit nokta teori çalışmalarıdır ve bu çalışmalar 1910 yılında Brouwer ile başlamıştır (Brouwer, 1910). Brouwer $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını ispatlamıştır (Brouwer, 1910). Ardında Sabit nokta ile ilgili çalışmalar küme değerli dönüşümler için de incelenmiştir. Bu doğrultuda Nadler, 1969 yılında Banach'ın sabit nokta teoremini küme değerli dönüşümler için genelleştirmiştir (Nadler, 1969).

Son dönemde bazı yazarlar metrik uzayların çeşitli genelleştirmelerini tanıttılar. Bu durum yeni çalışma alanlarının ortaya çıkmasını sağladı. Czerwik, b-metrik yapısını tanıttı.(Czerwik,1993). Khamsi ve Hussain, b-metrik yapısını tekrar tanımladı ve metric-type adını verdi. (Khamsi and Hussain, 2010). Fagin et al, s-relax d_p metriğini sundu.(Fagin vd., 2003). b-metrik yapısı s-relax d_p yapısından daha geneldir. G..ahler, 2-metrik yapısını sundu. (G..ahler,1963,1964). Bu yapı $X \times X \times X$ kümesinde tanımlandı. 2-metrik fikri, genel metriğin daha genelleştirilmiş halidir. Mustafa ve Sims, G-metrik fikrini tanıttı. (Mustafa and Sims, 2006). Bu fikir genel metrikten daha kapsamlıdır. Jleli ve Samet, JS-metrik yapısını tanıttı. (Jleli and Samet, 2018). Metriğin üçüncü koşulunu limsup koşulu ile verdi. Ve son dönemde Jleli ve Samet, $\mathcal{F}$ metrik konseptini tanıttı. Alnaser et al ise bu uzaylarda teorik büzölme ilişkisini tanımladı. (Alnaser vd.,2019). Bazı genelleştirilmiş sabit nokta teoremlerini bu uzayda ispatladı. Birçok yazar bazı çakışık ve ortak sabit nokta teoremlerini $\mathcal{F}$ metrik uzaylarda yeniden çalıştılar.

3. KURAMSAL TEMELLER

3.1. Metrik Uzaylar

Tanım 3.1.1

$\Phi \neq \emptyset$ olan bir küme ve $d: \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}^+$ ye bir fonksiyon olsun. Eğer $d, \forall \gamma, v \in \Phi$ için;

$$(D1) \gamma = v \Leftrightarrow d(\gamma, v) = 0,$$

$$(D2) d(\gamma, v) = d(v, \gamma)$$

$$(D3) d(\gamma, v) \leq d(\gamma, \varphi) + d(\varphi, v)$$

koşullarını sağlıyorsa d ' ye Φ üzerinde bir *metrik* (Φ, d) ikilisine ise *metrik uzay* denir.

Eğer $d: \Phi \times \Phi \rightarrow \mathbb{R}$ (d.2), (d.3) ve

$$(D1') \forall \gamma \in \Phi \text{ için } d(\gamma, \gamma) = 0$$

özelliklerini sağlıyorsa d ' ye Φ üzerinde *psuedometrik* denir.

Bir (Φ, d) metrik uzayı tüm elemanları arasındaki uzaklığın belirlenmiş olduğu uzaydır.

Bir d metriğinin negatif değerler almadığı açıktır ve sonlu değerler alır. Yani $\gamma, v \in \Phi$ için γ ile v arasındaki mesafe $0 \leq d(\gamma, v) \leq \infty$ tır.

Eğer Φ en az iki elemana sahipse $d \not\equiv 0$ dır. (d.1)-(d.3) özelliklerini sağlayan d metriği eğer sonsuz değerler alıyorsa d 'ye Φ üzerinde genişletilmiş metrik ve (Φ, d) ikilisine de genişletilmiş metrik uzay denir.

Örnek 3.1.2

$(\mathbb{R}, d)$ çiftini göz önüne alacak olursak burada,

$$d(\gamma, v) = |\gamma - v|$$

Buna $\mathbb{R}$ üzerinde *Öklid Metriği* adı verilir. (d.1)-(d.3) şartlarını sağladığı açıktır.

Örnek 3.1.3

Bir metrik uzayın tüm mesafeleri belli bir pozitif sabit sayı ile çarpılırsa yine bir metrik uzay elde edilmiş olunur. Bir önceki örnek dikkate alındığında;

$$d'(\gamma, v) = 5 \cdot d(\gamma, v)$$

İfadesi bir metrik'tir.

Örnek 3.1.4

$[(\gamma, v)]$, $\mathbb{R}$ üzerinde kapalı bir aralık ve

$\delta = C[(\gamma, v)] = \{w: (\gamma, v) \rightarrow \mathbb{R}, w \text{ sürekli fonksiyon} \}$ olsun. Her $\omega, \varphi \in \delta$ için $d_\infty: \delta \times \delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu

$d_\infty(\omega, \varphi) = \sup_{t \in [(\gamma, v)]} |\omega(t) - \varphi(t)|$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda (δ, d_∞) bir

metrik uzaydır ve d_∞ metriği ise $C[(\gamma, v)]$ üzerinde bir supremum metriğidir, düzgün metrik olarak adlandırılabilir. (Büyükkaya, 2022).

Özellik 3.1.5

- Yakınsak bir dizinin limiti tektir. Ayrıca bir dizinin yakınsaklığı uzayda tanımlanan metriğe ve içinde bulunduğu uzaya göre değişir.
- Yakınsak her dizi Cauchy bir dizisidir fakat tersi her zaman doğru değildir.
- Yakınsak bir dizinin herhangi bir alt dizisi de aynı noktaya yakınsar.
- Tam metrik uzayların her alt uzayının tam olması gerekmez. Gerçekten $\mathbb{R}$ alışılmış metriğe göre tam uzaydır fakat $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metriğe göre tam değildir.
- Tam metrik uzayların kapalı her alt uzayı tamdır. (Büyükkaya, 2022).

Örnek 3.1.6

Örnek 3.1.4 ' te tanımlanan $(C[(\gamma, v)], d_\infty)$ fonksiyon uzayı tam uzaydır. (Büyükkaya, 2022).

Tanım 3.1.7 (Metrik Yakınsama): (Chistyakov, 2015) $\odot$ bir $\Phi_{\odot}$ kümesi üzerinde modüler, $\{\gamma_n\} \subset \Phi_{\odot}$ bir dizi ve $\gamma \in \Phi_{\odot}$ olsun.

a) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\odot}^0(\gamma_n, \gamma) = 0$ ise $\{\gamma_n\}$ dizisi γ ' ya metrik yakınsar denir ve $\gamma_n \rightarrow \gamma$ ($n \rightarrow \infty$) biçiminde gösterilir.

b) Eğer $\lim_{n, m \rightarrow \infty} d_{\odot}^0(\gamma_n, \gamma_m) = 0$ ise $\{\gamma_n\}$ dizisine $\Phi_{\odot}$ kümesi üzerinde Cauchy dizisi denir.

Örnek 3.1.8

(Φ, d) bir metrik uzay $\{\gamma_n\}$, Φ ' de bir dizi ve;

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(\gamma_n, \gamma_{n+1}) < \infty$$

olsun. Bu durumda $\{\gamma_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

İspat

$m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$ için;

$$\begin{aligned} d(\gamma_n, \gamma_m) &\leq d(\gamma_n, \gamma_{n+1}) + \dots + d(\gamma_{m-1}, \gamma_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} d(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(\gamma_n, \gamma_{n+1}) < \infty \text{ ve } \sum_{i=n}^{\infty} d(\gamma_i, \gamma_{i+1})$$

verilen serinin kalan terimi olduğu için; $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\gamma_n, \gamma_m) = 0$ elde edilir. Bu da $\{\gamma_n\}$ +

dizisinin Cauchy olduğunu gösterir.

3.2 Modüler Uzaylar

Tanım 3.2.1

Φ bir lineer uzay olsun. Eğer $\Phi \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyoneli;

$$(P1) \quad p(0) = 0,$$

$$(P2) \quad \text{Bir } \gamma \in \Phi \text{ verildiğinde her } \alpha > 0 \text{ için } p(\alpha\gamma) = 0 \text{ ise } \gamma = 0,$$

$$(P3) \quad \text{Her } \gamma \in \Phi \text{ için } p(-\gamma) = p(\gamma),$$

$$(P4) \quad \text{Her } \gamma, v \in \Phi \text{ ve } \alpha + \beta = 1 \text{ koşulunu sağlayan her } \alpha, \beta \geq 0 \text{ için}$$

$$p(\alpha\gamma + \beta v) \leq p(\gamma) + p(v) \tag{3.1}$$

Koşullarını sağlıyorsa p 'ye Φ üzerindeki (klasik) *modüler* denir.

Eğer (P4) yerine (P5) $p(\alpha\gamma + \beta v) \leq \alpha p(\gamma) + \beta p(v)$ alınırsa o zaman p fonksiyoneline (klasik) *konveks modüler* denir.

Bir Φ kümesi üzerindeki *modüler* kavramı özel olarak fiziksel terimlerle doğal olarak aşağıdaki biçimde açıklanabilir.

Bir küme üzerindeki metrik, sezgisel anlamda, küme üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki negatif olmayan sonlu uzaklığı temsil eder. Bir küme üzerindeki $\odot$ modülleri de herhangi bir $t > 0$ parametresi için t zaman olarak düşünüldüğünde $\gamma, v \in \Phi$ için

$$0 \leq \odot_t(\gamma, v) \leq \infty \tag{3.2}$$

Olmak üzere t zamanında γ ile v arasındaki hız olarak yorumlanabilir. Daha fazla açıklamak gerekirse,

$$\odot_t(\gamma, v) = \frac{d(\gamma, v)}{t} \tag{3.3}$$

örneği için $\odot_t$, $d(\gamma, v)$ uzaklığında, t zamanında γ' den v' ye hareket ederkenki ortalama hızı verecektir.

Örnek 3.2.2

Bir Φ reel lineer uzayı üzerindeki $\|\cdot\| = R \rightarrow [0, \infty)$ normu Φ üzerinde bir konveks modülerdir.

Bir küme üzerinde tanımlanan metrik ve modüler arasındaki temel fark modülerin bir t pozitif parametresine bağlı olması ve sonsuz değerler alması olarak açıklanabilir. Modülerin $\odot_t(\gamma, v) = \infty$ olacak biçimde sonsuz değerler alma durumunda γ' ten v' ye bir t zamanında hareketin imkansız olması ihtimali gerçekleşecektir. Ek olarak $\odot_t(\gamma, v)$, $t > 0$ zamanında fonksiyon olarak artmayandır. Her $t > 0$ ve $\gamma, \mu \in \Phi$ için $\odot_t(\gamma, v)$ yani ortalama hızı bilmek γ ve v arasındaki $d(\gamma, v)$ uzaklığından daha fazla bilgi vermektedir.

$$d(\gamma, v) = \inf\{t > 0: \odot_t(\gamma, v) \leq 1\} \quad (3.4)$$

İfadesi yardımıyla, γ ile v arasındaki mesafe $d(\gamma, v)$ 'nin limit durumu ile düzenlenebilir.

Tanım 3.2.3

(Chistyakov 2006, Chistyakov 2010) Φ boştan farklı bir küme olmak üzere bir $\odot : (0, \infty) \times \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$ 'a fonksiyonu verilsin. Eğer $\odot$, her $\gamma, v, \varphi \in \Phi$ için;

- (i) $\gamma = v \Leftrightarrow$ her $t > 0$ için $\odot_t(\gamma, v) = 0$,
- (ii) Her $t > 0$ için $\odot_t(\gamma, v) = \odot_t(v, \gamma)$,
- (iii) Her $t, s > 0$ için $\odot_{t+s}(\gamma, v) \leq \odot_t(\gamma, \varphi) + \odot_s(\varphi, v)$

Özelliklerini sağlanıyorsa $\odot$ 'ye Φ üzerinde bir *modüler metrik* (basitçe modüler) denir. $t > 0$ ve $\gamma, v \in \Phi$ için modüler metrik $\odot_t(\gamma, v) = \odot(t, \gamma, v)$ şeklinde gösterilebilir. $\odot$ fonksiyonu (i) yerine

(1) Her $t > 0$ ve $\gamma \in \Phi$ için $\odot_t(\gamma, \gamma) = 0$ özelliğini sağlıyorsa $\odot$ 'ye Φ üzerinde *pseudomodüler metrik* denir.

(2) Her $t > 0$ ve $(\gamma \neq v)$, $\gamma, v \in \Phi$ için $\odot_t(\gamma, v) > 0$ ise $\odot$ ' ye Φ üzerinde *mutlak modüler* denir.

Eğer $\odot$ fonksiyonu (iii) özelliği yerine;

(3) Her $t, s > 0$ ve $\gamma, v, \varphi \in \Phi$ için;

$$\odot_{t+s}(\gamma, v) \leq \frac{t}{t+s} \odot_t(\gamma, \varphi) + \frac{s}{t+s} \odot_s(\varphi, v) \quad (3.5)$$

özelliğini sağlıyorsa $\odot$ ' ye *konvektir* denir. (Öz, 2019).

Örnek 3.2.4

(Φ, d) bir metrik uzay olsun. $k > 0$ ve $\gamma, \mu \in \Phi$ için;

$k < d(\gamma, \mu)$ ise $\omega_k(\gamma, \mu) = \infty$ ve $k \geq d(\gamma, \mu)$ ise $\omega_k(\gamma, \mu) = 0$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda ω , Φ üzerinde konveks modülerdir.

Gerçekten;

$\gamma = \mu$ ise $d(\gamma, \mu) = 0 < k$ olduğundan $\omega_k(\gamma, \mu) = 0$ olur. Tersine $\omega_k(\gamma, \mu) = 0$ olsun. O halde her $k > 0$ için $k \geq d(\gamma, \mu)$ olacaktır. Bu ise ancak $d(\gamma, \mu) = 0$ olması ile mümkün olabilmektedir. d metrik olduğundan $\gamma = \mu$ olur.

Her $k > 0$ ve $\gamma, \mu \in \Phi$ için $\omega_k(\gamma, \mu) = \omega_k(\mu, \gamma)$ olduğu açıktır. Son olarak ω ' nın konveksliğini inceleyelim. $k, s > 0$ ve $\gamma, \mu, \sigma \in \Phi$ olsun. Eğer $\omega_k(\gamma, \mu) = \infty$ ise ω ' nın tanımından $k + s < d(\gamma, \mu)$ olur. Metriğin üçgen eşitsizliği özelliği kullanılırsa;

$k + s < d(\gamma, \mu) \leq d(\gamma, \sigma) + d(\sigma, \mu)$ bulunur. Bu durumda $k < d(\gamma, \sigma)$ veya $s < d(\sigma, \mu)$ ' dir. Gerçekten $k \geq d(\gamma, \sigma)$ ise yukarıdaki eşitsizlikten;

$d(\gamma, \sigma) + s < d(\gamma, \sigma) + d(\sigma, \mu) \Rightarrow s < d(\sigma, \mu)$ olur. Bu durumda $\omega_s(\sigma, \mu) = \infty$ olur. Benzer durum diğeri içinde sağlatılabilir. Böylece konvekslik özelliği sağlanır, ω , Φ üzerinde konveks modülerdir.

Tanım 3.2.5

Φ bir soyut küme olsun. $\odot: (0, +\infty) \times \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$ ' a bir fonksiyon.

$$\odot(\theta, \gamma, v) = \odot_\theta(\gamma, v) \quad (3.6)$$

şeklinde yazabiliriz.

$\odot: (0, +\infty) \times \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$, fonksiyonu için;

- (i) $\gamma = v \Leftrightarrow \odot_\theta(\gamma, v) = 0, \quad \exists \theta > 0;$
- (ii) $\odot_\theta(\gamma, v) = \odot_\theta(v, \gamma) \quad \forall \theta > 0, \gamma, v \in M;$
- (iii) $\odot_{\theta+\mu}(\gamma, v) \leq \odot_\theta(\gamma, z) + \odot_\mu(z, v), \quad \forall \theta, \mu > 0 \text{ ve } \gamma, v, z \in \Phi.$

$\odot$ fonksiyonu yukarıda verilen şartları sağladığında bu fonksiyona Φ üzerinde *regüler modüler metrik* denir. $\gamma_0 \in \Phi$ alalım.

$$\Phi_\odot = \Phi_\odot(\gamma_0) = \{\gamma \in \Phi: \odot_\theta(\gamma, \gamma_0) \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty\}$$

$$\Phi_\odot^* = \Phi_\odot^*(\gamma_0) = \{\gamma \in \Phi: \exists \theta = \theta(\gamma) > 0, \text{ öyle ki } \odot_\theta(\gamma, \gamma_0) < \infty\}$$

bu iki kümeye (seçili γ_0 etrafında) modüler uzaylar denir. Açıkça $\Phi_\odot \subset \Phi_\odot^*$ olduğu görülür. $\Phi_\odot$, modüler metrik uzay olsun. $(\exists \theta > 0)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ olsa bile $(\forall \theta > 0)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ olmayabilir. Öyleyse Modüler Vektör Uzaylarında olduğu gibi $\odot, \Delta_2$ koşulunu sağlar. Bu durumda $(\exists \theta > 0)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ ise $(\forall \theta > 0)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ olur. Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ ise $(\exists \theta > 0)$ $\Phi_\odot$ ' deki $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisine $\odot$ -yakınsaktır denir. Eğer, herhangi $v \in \Phi_\odot$ ve $(\exists \theta > 0)$ için $\{\gamma_n\}$ vardır, öyle ki;

$$\odot_\theta(\gamma, v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, v) \quad (3.7)$$

Önerme 3.2.6

(Modülerin Temel Özelliği)(Chistyakov,2010) $\odot, \Phi$ üzerinde bir modüler (pseudomodüler) olsun.

- (a) Herhangi $\gamma, v \in \Phi$ için $t \rightarrow \odot_t(\gamma, v)$, $(0, \infty)$ ' dan $[0, \infty]$ ' a artmayan bir fonksiyondur.
- (b) Sağdan limit $\odot_{t+0}(\gamma, v)$ ve soldan limit $\odot_{t-0}(\gamma, v)$ vardır ve
- $$\odot_{t+0}(\gamma, v) \leq \odot_t(\gamma, v) \leq \odot_{t-0}(\gamma, v)$$
- eşitsizliği doğrudur.

İspat

- (a) $0 < s < t$ olsun. Sırasıyla (iii) ve (ii) özellikleri kullanıldığında
- $$\odot_t(\gamma, v) = \odot_{(t-s)+s}(\gamma, v) \leq \odot_{t-s}(\gamma, \gamma) + \odot_s(\gamma, v) = \odot_s(\gamma, v)$$
- bulunur.
- (b) $\gamma, v \in \Phi$ ve $t > 0$ için ;
- $$\odot_{t+0}(\gamma, v) = \lim_{s \rightarrow t+0} \odot_s(\gamma, v) = \sup\{\odot_s(\gamma, v) : s > t\}$$
- $$\odot_{t-0}(\gamma, v) = \lim_{s \rightarrow t-0} \odot_s(\gamma, v) = \inf\{\odot_s(\gamma, v) : 0 < s < t\}$$
- olur. $\odot$, t ' ye göre artmayan olduğundan (b)' deki eşitsizlik sağlanır.

Önerme 3.2.7 (Chistyakov, 2010) $\odot$, Φ üzerinde bir modüler olsun.

- (a) $\gamma, v \in \Phi$ ve $t > 0$ için $\widehat{\odot}_t$, $\widehat{\odot}_t(\gamma, v) = t \odot_t(\gamma, v)$ şeklinde tanımlansın. O halde;
- (i) $\widehat{\odot}_t$, t ' ye göre $(0, \infty)$ ' da artmayan bir fonksiyondur.
- (ii) $\odot$ ' nin konveks modüler olması için gerekli ve yeterli koşul $\widehat{\odot}_t$ ' nin modüler olmasıdır.
- (b) $\odot$, Φ üzerinde konveks modüler ise $\gamma, v \in \Phi$ ve $t \geq s > 0$ için;
- $$\odot_t(\gamma, v) \leq \frac{s}{t} \odot_s(\gamma, v) \leq \odot_s(\gamma, v) \quad (3.8)$$
- eşitsizliği doğrudur.
- (c) $\odot$ konveks modüler ve en az bir $t > 0$ için $\odot_t(\gamma, v)$ sonlu ise;
- $t \rightarrow \infty$ iken $\odot_t(\gamma, v) \rightarrow 0$ ve $t \rightarrow 0_+$ iken $\odot_t(\gamma, v) \rightarrow \infty$ olur.
- (d) $\odot$, konveks modüler ise (3) koşulu her $\rho, t, s > 0$ için , $t + s \geq \rho$ ve $\gamma, v, \mu \in \Phi$ için;
- $$(3)' \odot_\rho(\gamma, v) \leq \frac{t}{\rho} \odot_t(\gamma, \mu) + \frac{s}{\rho} \odot_s(v, \mu) \quad (3.9)$$
- eşitsizliğine denktir.

İspat

(a) $\odot$ ve $\widehat{\odot}_t$ 'nin tanımından kolayca gösterilebilir.

(b) $\widehat{\odot}_t$ artmayan olduğundan $t \geq s > 0$ için;

$$t \odot_t (\gamma, v) \leq s \odot_s (\gamma, v) \Rightarrow \odot_t (\gamma, v) \leq \frac{s}{t} \odot_s (\gamma, v) \leq \odot_s (\gamma, v) \text{ olur.}$$

(c) $\odot$ konveks modüler olduğundan (b)'den $\gamma, v \in \Phi$ ve $t > s$ için;

$$\odot_t (\gamma, v) \leq \frac{s}{t} \odot_s (\gamma, v) \text{ olur.}$$

$s, \odot_s (\gamma, v)$ sonlu olacak biçimde seçilsin. $t \rightarrow \infty$ için yukarıdaki eşitsizlikten $\odot_t (\gamma, v) \rightarrow 0$ olur. $t, \odot_t (\gamma, v)$ sonlu olacak biçimde seçildiğinde ise $s \rightarrow 0_+$ için $\odot_s (\gamma, v) \rightarrow \infty$ olur.

(d) (a) şıkkındaki $\widehat{\odot}_t$ modülerinin tanımından kolayca kanıtlanır.

Örnek 3.2.8

(Φ, d) bir metrik uzay olsun. Her $t > 0$ için w ,

$$\odot_t (\gamma, v) = d(\gamma, v)$$

şeklinde tanımlansın. $\odot$ 'nin modüler metrik olduğu açıktır. Ancak ;

$$\odot_{t+s} (\gamma, v) \leq \frac{t}{t+s} \odot_t (\gamma, z) + \frac{s}{t+s} \odot_s (z, v)$$

eşitliğinde $z = y$ ve $s = t$ alındığında $\odot$ 'nin konveks modüler olmadığı anlaşılır.

Örnek 3.2.9

(Φ, d) bir metrik uzay olsun. Her $\gamma, v \in \Phi$ ve $\theta > 0$ için $\odot$,

$$\odot_t (\gamma, v) = \frac{d(\gamma, v)}{\theta}$$

şeklinde tanımlansın. $\odot$ 'nin (i) ve (ii) şartlarını sağladığı kolayca görülebilir.

$\theta, s > 0$ ve $\gamma, v, z \in \Phi$ için d metriğinin üçgen eşisizliği özelliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\odot_{\theta+s}(\gamma, v) &= \frac{d(\gamma, v)}{\theta+s} \leq \frac{d(\gamma, z)}{\theta+s} + \frac{d(z, v)}{\theta+s} \\ &\leq \frac{d(\gamma, z)}{\theta} + \frac{d(z, v)}{s} \\ &\leq \odot_{\theta}(\gamma, z) + \odot_s(z, v) \quad \text{elde edilir.}\end{aligned}$$

Bu da $\odot$ 'nin Φ üzerinde bir modüler metrik olduğunu gösterir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\odot_{\theta+s}(\gamma, v) &\leq \frac{d(\gamma, z)}{\theta+s} + \frac{d(z, v)}{\theta+s} = \frac{\theta}{\theta+s} \cdot \frac{d(\gamma, z)}{\theta} + \frac{s}{\theta+s} \cdot \frac{d(z, v)}{s} \\ &\leq \frac{\theta}{\theta+s} \cdot \odot_{\theta}(\gamma, z) + \frac{s}{\theta+s} \cdot \odot_s(z, v)\end{aligned}$$

Olduğundan $\odot$ konveks modülerdir. Bu $\odot_t(\gamma, v)$ 'nin θ zamanında γ 'den v 'ye ortalama hızı temsil ettiği düşünülür. $\odot$ 'ye Φ üzerinde *doğal modüler* denir.

Ek olarak $0 \leq \zeta < \infty$ olmak üzere, her $\gamma, v \in \Phi$ ve $t > 0$ için;

$$\odot_{\theta}(\gamma, v) = \frac{d(\gamma, v)}{\theta^{\zeta}}$$

şeklinde tanımlanan $\odot$, Φ üzerinde bir modülerdir. Eğer $\zeta \geq 1$ ise $\odot$ bir konveks modülerdir. Gerçekten; $\theta, s > 0$, $\gamma, v, z \in \Phi$ için;

$$\begin{aligned}\odot_{\theta+s}(\gamma, v) &\leq \frac{d(\gamma, z)}{(\theta+s)^{\zeta}} + \frac{d(z, v)}{(\theta+s)^{\zeta}} = \frac{t}{(\theta+s)^{\zeta}} \cdot \frac{d(\gamma, z)}{\theta} + \frac{s}{(\theta+s)^{\zeta}} \cdot \frac{d(z, v)}{s} \\ &= \frac{\theta}{(\theta+s) \cdot (\theta+s)^{\zeta-1}} \cdot \frac{d(\gamma, z)}{\theta} + \frac{s}{((\theta+s) \cdot (\theta+s)^{\zeta-1})} \cdot \frac{d(z, v)}{s}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{\theta}{\theta+s} \cdot \frac{d(\gamma, z)}{\theta^\zeta} + \frac{s}{(\theta+s)} \cdot \frac{d(\gamma, v)}{s^\zeta} = \frac{\theta}{(\theta+s)} \cdot \odot_\theta(\gamma, z) + \frac{s}{(\theta+s)} \odot_s(z, v)$$

olur.

Tanım 3.2.10

(Chistyakov 2006, Chistyakov 2010) $\odot, \Phi$ kümesi üzerinde bir modüler metrik ve $\gamma_0 \in \Phi$ olsun. O zaman

$$\Phi_\odot \equiv \Phi_\odot(\gamma_0) = \{\gamma \in \Phi : t \rightarrow \infty \text{ iken } \odot_{t(\gamma, \gamma_0)} \rightarrow 0\} \quad (3.10)$$

ve

$$\Phi_\odot^* \equiv \Phi_\odot^*(\gamma_0) = \{\gamma \in \Phi : \exists t > 0 \exists \odot_{t(\gamma, \gamma_0)} < \infty\} \quad (3.10)$$

Kümelerine γ_0 komşuluğunda *modüler uzaylar* denir.

Tanım 3.2.11 (Modüler Yakınsaklık): (Chistyakov, 2010) $\odot, \Phi$ kümesi üzerinde bir modüler ve $\{\gamma_n\}, \Phi_\odot^*$ üzerinde bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_{t_0}(\gamma_n, \gamma) = 0$ olacak biçimde bir $t_0 > 0$ sayısı varsa $\{\gamma_n\}$ dizisi $\gamma \in \Phi'$ ye $\odot$ -yakınsak (modüler yakınsak) denir. γ' ya ise $\{\gamma_n\}$ ' nin $\odot$ -limiti denir.

$\odot'$ nin monoton özelliğinden her $t > t_0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_t(\gamma_n, \gamma) = 0$ dır. Metrik yakınsamanın modüler yakınsamayı gerektirdiği açıktır. Fakat modüler yakınsama metrik yakınsamayı gerektirmeyebilir.

Tanım 3.2.12

$\odot, \Phi$ kümesi üzerinde bir modüler olsun. $\{\gamma_n\}, \Phi'$ de bir dizi. $\gamma \in \Phi$ ve $\theta > 0$ var iken $\lim_{n \rightarrow \infty} \odot_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ ise $\{\gamma_n\}$ dizisine $\odot$ -Cauchy denir. Her $\odot$ -Cauchy dizisi $\odot$ -yakınsaksa Φ' e $\odot$ -tam denir.

Tanım 3.2.13 (Modüler Cauchy): (Chistyakov, 2013) $\odot, \Phi$ kümesi üzerinde bir modüler ve $\{\gamma_n\} \subset \Phi_\odot^*$ olsun. $n, m \rightarrow \infty$ iken $\odot_\theta(\gamma_n, \gamma_m) \rightarrow 0$ olacak biçimde $\theta > 0$ sayısı varsa $\{\gamma_n\}$ dizisine modüler Cauchy (veya $\odot$ -Cauchy) denir. Yani;

$\{\gamma_n\}$, $\odot$ -Cauchy $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni$ her $n, m > n_0$ için $\odot_\theta(\gamma_n, \gamma_m) \leq \varepsilon$ olacak biçimde bir $\varepsilon > 0$ vardır.

Tanım 3.2.14

$\odot, \Phi$ kümesi üzerinde bir modüler olsun. $\Phi_\odot^*$ ise bir modüler küme. $k \in (0,1)$ ve $\theta_0 > 0$ vardır öyle ki, tüm $0 < \theta < \theta_0$ ve tüm $\gamma, v \in \Phi_\odot^*$ için;

$$\odot_{k\theta}(T_\gamma, T_v) \leq \odot_\theta(\gamma, v) \quad (3.11)$$

ise $T: \Phi_\odot^* \rightarrow \Phi_\odot^*$ dönüşümüne *modüler büzülme* ya da $(\odot)$ -büzülme) denir.

3.3 $\mathcal{F}$ -Metrik Uzaylar

Tanım 3.3.1

$\mathcal{F}$, fonksiyonlar kümesi,

$V: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, aşağıdaki şartları sağlasın:

$(\mathcal{F}_1)$ V , azalmayandır. Başka bir deyişle $0 < \gamma < v \Rightarrow V(\gamma) \leq V(v)$.

$(\mathcal{F}_2)$ Her $\{v_n\} \subset (0, \infty)$ dizisi için:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} V(v_n) = -\infty \quad (3.12)$$

Tanım 3.3.2

Φ , boş olmayan bir küme $\triangleright: \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty)$ ' a tanımlanan bir fonksiyon olsun. $(V, \triangleright) \in \mathcal{F} \times [0, \infty)$ vardır öyle ki;

$$(1) \triangleright(\gamma, v) = 0 \Leftrightarrow \gamma = v, \quad \forall (\gamma, v) \in \Phi;$$

$$(2) \triangleright(\gamma, v) = \triangleright(v, \gamma), \quad \forall (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi;$$

$$(3) \Gamma, \text{ doğal sayılar kümesi verilsin. Her } (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi, \zeta \in \Gamma, \zeta \geq 2 \text{ ve her } (v_i)_{i=1}^\zeta \subset \Phi, (v_1, v_\zeta) = (\gamma, v);$$

$$\triangleright (\gamma, v) > 0 \Rightarrow \triangleright V(\triangleright (\gamma, v)) \leq V(\sum_{j=1}^{\zeta-1} \triangleright (v_j, v_{j+1})) + \Delta \quad (3.13)$$

Yukarıda verilen şartlar sağlandığında $\triangleright'$ ye Φ üzerinde bir $\mathcal{F}$ -metrik denir. $(\Phi, \triangleright)$

ise $\mathcal{F}$ -metrik uzay olarak adlandırılır. (Jleli ve Samet, 2018).

Örnek 3.3.3

$\Phi = \mathbb{N}$ ve $D: \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty)$ ' a bir dönüşüm olsun ve aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $(\gamma, v) \in \Phi \times \Phi$ için;

$$(\gamma, v) \in [0, 3] \times [0, 3] \text{ ise } D((\gamma, v) = (\gamma - v)^2$$

$$(\gamma, v) \notin [0, 3] \times [0, 3] \text{ ise } D((\gamma, v) = |\gamma - v|$$

D' nin (1) ve (2) koşullarını sağladığı kolayca görülmektedir. Fakat,

$$D(1, 3) = 4 > 1 + 1 = D(1, 2) + D(2, 3)$$

olduğundan üçgen eşitsizliği koşulu sağlanmaz. Dolayısıyla D , Φ üzerinde metrik değildir. Üstelik $(\gamma, v) \in \Phi \times \Phi$ vardır öyle ki $D(\gamma, v) > 0$. $(t_i)_i^N \subset \Phi$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(t_1, t_N) = (\gamma, v)$.

$$I = \{i = 1, 2, \dots, N-1 : (t_i, t_{i+1}) \in [0, 3] \times [0, 3]\}$$

$$J = \{1, 2, \dots, N-1\} \setminus I$$

Olsun. Öyleyse;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N-1} D(t_i, t_{i+1}) &= \sum_{i \in I} D(t_i, t_{i+1}) + \sum_{j \in J} D(t_j, t_{j+1}) \\ &= \sum_{i \in I} (t_{i+1} - t_i)^2 + \sum_{j \in J} |t_{j+1} - t_j| \end{aligned}$$

Sonrasında iki muhtemel durum oluşmaktadır.

Durum 1: $(\gamma, v) \notin [0, 3] \times [0, 3]$ ise;

$$\begin{aligned}
D((\gamma, v)) &= |\gamma - v| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N-1} |t_{i+1} - t_i| \\
&= \sum_{i \in I} |t_{i+1} - t_i| + \sum_{j \in J} |t_{j+1} - t_j|.
\end{aligned}$$

Diğer bir taraftan da görülüyor ki;

$$|t_{i+1} - t_i| \leq (t_{i+1} - t_i)^2, \quad i \in I$$

Öyleyse;

$$\begin{aligned}
D(\gamma, v) &\leq \sum_{i \in I} (t_{i+1} - t_i)^2 + \sum_{j \in J} |t_{j+1} - t_j| \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} D(t_i, t_{i+1}).
\end{aligned}$$

Durum 2: $(\gamma, v) \in [0,3] \times [0,3]$ ise;

$$D(\gamma, v) = |\gamma - v|^2$$

$$\leq 3|\gamma - v|$$

$$\leq 3(\sum_{i \in I} |t_{i+1} - t_i| + \sum_{j \in J} |t_{j+1} - t_j|)$$

$$\leq 3(\sum_{i \in I} |t_{i+1} - t_i|^2 + \sum_{j \in J} |t_{j+1} - t_j|)$$

$$= 3 \sum_{i=1}^{N-1} D(t_i, t_{i+1}).$$

Yukarıda incelenmiş olan iki durum göz önüne alındığında her $(\gamma, v) \in \Phi \times \Phi$, her $(t_i)_i^N \subset \Phi$, $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$ ve $(t_1, t_N) = (\gamma, v)$ için;

$$D(\gamma, v) > 0 \Rightarrow D(\gamma, v) \leq 3 \sum_{i=1}^{N-1} D(t_i, t_{i+1})$$

sonucuna varılmaktadır. Buradan;

$$D(\gamma, v) > 0 \Rightarrow \ln \left(\sum_{i=1}^{N-1} D(t_i, t_{i+1}) \right) + \ln 3$$

$f(t) = \ln t$, $t > 0$ ve $\alpha = \ln 3$ olduğunda D , (3) koşulunu sağlar ve Φ üzerinde bir $\mathcal{F}$ metrik olur. (Jleli ve Samet, 2018).

Tanım 3.3.4

Φ boştan farklı bir küme, $\mathcal{F}_\theta: (0, \infty) \times \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$ a bir fonksiyon, $\theta > 0$. $(V, \Delta) \in \mathcal{F} \times [0, \infty)$ vardır, öyle ki;

$$(1) \quad \mathcal{F}_\theta(\gamma, v) = 0 \Leftrightarrow \gamma = v, \quad \text{her } (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi;$$

$$(2) \quad \mathcal{F}_\theta(\gamma, v) = \mathcal{F}_\theta(v, \gamma), \quad \text{her } (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi;$$

$$(3) \quad \text{Her } (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi, \zeta \in \Gamma, \zeta \geq 2 \text{ ve tüm } (v_i)_{i=1}^{\zeta} \subset \Phi, (v_1, v_\zeta) = (\gamma, v) \text{ ise};$$

$$\mathcal{F}_\theta(\gamma, v) > 0 \Rightarrow f(\mathcal{F}_\theta(\gamma, v)) \leq f\left(\sum_{j=1}^{\zeta-1} \frac{\mathcal{F}_\theta(v_j, v_{j+1})}{j}\right) + \Delta \quad (3.14)$$

Yukarıdaki şartlar sağlandığında $\mathcal{F}_\theta$ ' ya Φ üzerinde *modüler $\mathcal{F}$ -metrik* denir. $(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$ ' ya ise *modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzay* denir.

Örnek 3.3.5

Φ , boş olmayan bir küme ve $\mathcal{F}_\theta: (0, +\infty) \times \Phi \times \Phi \rightarrow [0, \infty]$ a bir fonksiyon olsun. $(V, \Delta) \in \mathcal{F} \times [0, \infty)$ vardır, öyle ki;

$$\mathcal{F}_\theta(\gamma, v) = \odot_\theta(\gamma, v)$$

$$(\mathcal{F}1) \quad \mathcal{F}_\theta(\gamma, v) = 0, \quad \forall (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi \text{ ise } \gamma = v,$$

$$(\mathcal{F}2) \quad \mathcal{F}_\theta(\gamma, v) = \mathcal{F}_\theta(v, \gamma), \quad \forall (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi;$$

$$(\mathcal{F}3) \quad \text{Her } (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi, \zeta \in \Gamma, \zeta \geq 2 \text{ ve tüm } (v_i)_{i=1}^{\zeta} \subset \Phi, (v_1, v_\zeta) = (\gamma, v).$$

$$\odot_{\theta}(\gamma, v) \leq \sum_{j=1}^{\zeta-1} \odot_{\frac{\theta}{j}}(v_j, v_{j+1}),$$

$$\odot_{\theta}(\gamma, v) > 0 \Rightarrow V(\odot_{\theta}(\gamma, v)) \leq V\left(\sum_{j=1}^{\zeta-1} \odot_{\frac{\theta}{j}}(v_j, v_{j+1})\right) + \Delta,$$

$$\mathcal{F}_{\theta}(\gamma, v) > 0 \Rightarrow V(\mathcal{F}_{\theta}(\gamma, v)) \leq V\left(\sum_{j=1}^{\zeta-1} \mathcal{F}_{\frac{\theta}{j}}(v_j, v_{j+1})\right) + \Delta,$$

açıkça görülmekteki her modüler metriğin Φ de $\mathcal{F}$ -metrik olduğu ispatlanır. Fakat bu sonucun tersi doğru değildir.

Örnek 3.3.6

$\Phi = \{1,2,3\}$ kümesini alalım. $\psi(\gamma, v) = (\gamma - v)^2$ dönüşümü her $\gamma, v \in \Phi$ için tanımlansın. d , metriğin özelliklerinden (M1) ve (M2)'yi sağlar fakat (M3)'ü yani üçgen eşisizliğini sağlamaz;

Tablo 3.3.6.1 Verilen elemanların fonksiyon altındaki değeri

Fonksiyon	Fonksiyon altındaki değer
$\psi(1,2)$	1
$\psi(2,3)$	1
$\psi(1,3)$	4
$\psi(1,3) = 4 \geq 1 + 1 = \psi(1,2) + \psi(2,3)$	

ψ , bir metrik değildir. $\gamma = 1$, $v = 3$, $z = 2$ ve $\theta = \mu = 1$ alındığında $(\odot_{\theta}(\gamma, v)) = e^{\frac{\psi(\gamma, v)}{\theta}}$, alındığında modüler metriğin (i) ve (ii) özellikleri sağlanırken (iii) sağlanmadı;

$$\odot_{\theta+\mu}(\gamma, v) = e^{\frac{(\gamma-v)^2}{\theta+\mu}} = e^2 \geq 2 \cdot e = e + e = e^{\frac{(\gamma-z)^2}{\theta}} + e^{\frac{(z-v)^2}{\mu}}.$$

$\beta > 0$ için $V(\beta) = \ln \beta$ fonksiyonu alındığında;

$$V(\mathcal{F}_\theta(\gamma, v)) = V(e^{\frac{(\gamma-v)^2}{\theta}}) \leq e^2 V\left(e^{\frac{(\gamma-v)^2}{2}}\right) \leq e^2 V\left(\sum_{j=1}^2 e^{\frac{(v_j-v_{j+1})^2}{2}}\right).$$

Sonrasında f , fonksiyonunun kuralı uygulanırsa;

$$\ln(\mathcal{F}_\theta(\gamma, v)) \leq \ln\left(\sum_{j=1}^2 e^{\frac{(v_j-v_{j+1})^2}{2}}\right) + 2.$$

Buradan, $\mathcal{F}_\theta$, $V(\beta) = \ln \beta$ ($\beta > 0$), $\Delta = 2$ olduğunda $(\mathcal{F}3)$ ' ü sağlar. Sonuç olarak, $\mathcal{F}_\theta, \Phi$ de modüler $\mathcal{F}$ -metrik'tir.

Örnek 3.3.7

Modüler $\mathcal{F}$ -metrik yapısı Φ ve Φ_θ de aynıdır. Φ_θ ' deki her $d_\odot$ metriği metrik tanımının (D1) ve (D2) şartlarını sağlar. Üçgen eşitsizliği için ise, her $(\gamma, v) \in \Phi_\theta \times \Phi_\theta$, her $\zeta \in \Gamma$, $\zeta \geq 2$ ve her $(v_i)_{i=1}^\zeta \subset \Phi$, $(v_1, v_\zeta) = (\gamma, v)$ olmak üzere;

$$d_\odot(\gamma, v) \leq \sum_{j=1}^{\zeta-1} d_\odot(v_j, v_{j+1}),$$

$$\mathcal{F}_\theta(\gamma, v) > 0 \Rightarrow \ln(\mathcal{F}_\theta(\gamma, v)) \leq \ln \sum_{j=1}^{\zeta-1} \mathcal{F}_\theta(v_j, v_{j+1}). (\beta) = \ln \beta \quad (\beta > 0), \Delta =$$

0 olduğunda $d_\odot$ ve $\mathcal{F}'_\theta$ nın (D3)' ü sağladığı kolayca görülmektedir.

Φ üzerindeki modüler metrik $\Phi'_\odot$ de modüler $\mathcal{F}$ - metriktir. $\Phi_\odot$ ' deki her $d_\odot$ metriği metrik tanımının (D1) ve (D2) koşullarını sağlar. Üçgen eşitsizliği için ise, her $(\gamma, v) \in \Phi_\odot \times \Phi_\odot$, her $\zeta \in \Gamma$, $\zeta \geq 2$ ve her $(v_i)_{i=1}^\zeta \subset \Phi_\odot$, $(v_1, v_\zeta) = (\gamma, v)$ olmak üzere;

$$d_{\odot}(\gamma, v) \leq \sum_{j=1}^{\zeta-1} d_{\odot}(v_j, v_{j+1}),$$

$$\mathcal{F}_{\theta}(\gamma, v) > 0 \Rightarrow \ln(\mathcal{F}_{\theta}(\gamma, v)) \leq \ln \sum_{j=1}^{\zeta-1} \frac{\mathcal{F}_{\theta}(v_j, v_{j+1})}{j} \cdot (\beta) = \ln \beta \quad (\beta > 0), \Delta = 0 \text{ olduğunda } d_{\odot} \text{ ve } \mathcal{F}'_{\theta} \text{ nın (D3)' ü sağladığı kolayca görülmektedir.}$$

4. MATERYAL ve YÖNTEM

4.1. Modüler $\mathcal{F}$ -Metrik Uzayların Bazı Özellikleri

Yukarıda da belirtildiği gibi modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin ispatında aşağıda belirtilen tanımlar kullanılarak Banach Büzülme Prensibi yardımıyla sonuçlar elde edilmektedir.

Tanım 4.1.1

$(\Phi, \mathcal{F}_{\theta})$ bir modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzay olsun.

- (1) Φ' deki $\{\gamma_n\}_{n \in \Gamma}$ dizisi $\gamma \in \Phi'$ e $\mathcal{F}$ -yakınsaktır, ancak ve ancak $\mathcal{F}_{\theta}(\gamma_n, \gamma) \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty), (\exists \theta > 0)$.
- (2) Eğer $\mathcal{F}_{\theta}(\gamma_n, \gamma_m) \rightarrow 0, (m, n \rightarrow \infty), (\exists \theta > 0)$ ise Φ' deki $\{\gamma_n\}_{n \in \Gamma}$ dizisine $\mathcal{F}$ -Cauchy denir.
- (3) C, Φ' in bir alt kümesi olmak üzere eğer C' den herhangi bir $\{\gamma_n\}$ dizisi $\gamma \in C'$ ye yakınsak ise Φ' in C alt kümesine $\mathcal{F}$ -kapalı denir.
- (4) C, Φ' in bir alt kümesi olmak üzere eğer C' deki herhangi bir $\{\gamma_n\}$ $\mathcal{F}$ -Cauchy dizisi vardır öyle ki; $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\theta}(\gamma_n, \gamma_m) = 0 \ (\exists \theta > 0)$, $\gamma \in C$ noktası vardır öyle ki; $\lim_{n, m \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{\theta}(\gamma_n, \gamma) = 0$ bu şartlar altında C kümesine $\mathcal{F}$ -tam denir.
- (5) C, Φ' in bir alt kümesi olmak üzere, aşağıdaki şart sağlandığında $(\exists \theta > 0)$ için C' ye $\mathcal{F}$ -sınırlı denir;

$$\delta_{\mathcal{F}, \theta}(C) = \sup\{\mathcal{F}_{\theta}(\gamma, v); \gamma, v \in C\} < \infty.$$

Genel olarak, eğer $(\exists \theta > 0)$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ olduğunda $\forall \theta > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0$ olduğu söylenemeyebilir. Öyleyse modüler fonksiyon uzaylarında yapıldığı gibi $\mathcal{F}_\theta$ 'nin Δ_2 koşulunu sağlaması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0 (\exists \theta > 0) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}_\theta(\gamma_n, \gamma) = 0 (\forall \theta > 0)$ olmasıdır.

Tanım 4.1.2

$(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$ bir modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzay ve $\Theta: \Phi \rightarrow \Phi$ e bir dönüşüm olsun. $\Upsilon \in (0,1)$ vardır öyle ki, herhangi $(\gamma, v) \in \Phi \times \Phi$ için;

$$\mathcal{F}_\theta(\Theta(\gamma), \Theta(v)) \leq \Upsilon \mathcal{F}_\theta(\gamma, v) \quad (4.1)$$

$\Theta(\gamma) = \gamma$ ise γ 'e Θ 'nin bir *sabit noktası* denir.

Teorem 4.1.3

$(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$ bir $\mathcal{F}$ -metrik uzay olsun ve $\Theta: \Phi \rightarrow \Phi$ dönüşümü verilsin.

- (i) $(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$, $\mathcal{F}$ -tam.
- (ii) $\Upsilon \in (0,1)$ vardır öyle ki;

$$\mathcal{F}_\theta(\Theta(\gamma), \Theta(v)) \leq \Upsilon \mathcal{F}_\theta(\gamma, v), (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi \quad (4.2)$$

Yukarıdaki şartlar sağlandığında Θ 'nin $\gamma^* \in \Phi$ olmak üzere tek bir sabit noktası vardır. Dahası, herhangi bir $\gamma_0 \in \Phi$ için $\gamma_{n+1} = \Theta(\gamma_n)$, $n \in \Gamma$ tarafından tanımlanan $\{\gamma_n\} \subset \Phi$ dizisi γ^* 'a $\mathcal{F}$ -yakınsaktır.

$$\mathcal{F}_\theta(\gamma_n, \gamma_\zeta) \leq \epsilon \quad (4.3)$$

Sonuç olarak, $\{\gamma_n\}$ modüler $\mathcal{F}$ -Cauchy' dir.

4.2. Modüler $\mathcal{F}$ - Metrik Uzaylarda Bazı Teoremler

Yukarıda verildiği gibi $(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$ bir modüler $\mathcal{F}$ - metrik uzay ve $\Theta: \Phi \rightarrow \Phi$ e bir dönüşüm olsun. $\Upsilon \in (0,1)$ vardır öyle ki, herhangi $(\gamma, v) \in \Phi \times \Phi$ için;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta(\gamma), \Theta(v)) \leq \Upsilon \mathcal{F}_\theta (\gamma, v) \quad (4.4)$$

$\Theta(\gamma) = \gamma$ ise γ 'e Θ ' nin bir sabit noktasıdır. Buradan modüler $\mathcal{F}$ - metrik uzaylarda kullanılacak teoremler aşağıdaki şekilde elde edilebilir.

Teorem 4.2.1

$(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$ bir $\mathcal{F}$ -metrik uzay olsun ve $\Theta: \Phi \rightarrow \Phi$ dönüşümü verilsin.

- (iii) $(\Phi, \mathcal{F}_\theta)$, $\mathcal{F}$ -tam.
- (iv) $\Upsilon \in (0,1)$ vardır öyle ki;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta(\gamma), \Theta(v)) \leq \Upsilon \mathcal{F}_\theta (\gamma, v), (\gamma, v) \in \Phi \times \Phi \quad (4.5)$$

Yukarıdaki şartlar sağlandığında Θ ' nin $\gamma^* \in \Phi$ olmak üzere tek bir sabit noktası vardır. Dahası, herhangi bir $\gamma_0 \in \Phi$ için $\gamma_{n+1} = \Theta(\gamma_n)$, $n \in \Gamma$ tarafından tanımlanan $\{\gamma_n\} \subset \Phi$ dizisi γ^* a $\mathcal{F}$ -yakınsaktır.

Lemma 4.2.2

$\{\gamma_n\}$, modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzaylarda bir dizi. $\forall n \in \Gamma, \Upsilon \in (0,1)$ vardır öyle ki;

$$V(\mathcal{F}_\theta (\gamma_n, \gamma_m)) \leq V\left(\sum_{j=n}^{m-1} \mathcal{F}_{\frac{\theta}{j}}(v_j, v_{j+1})\right) + \Delta \quad (4.6)$$

sağlandığında $\{\gamma_n\}$ dizisi modüler $\mathcal{F}$ -Cauchy dizisi olur.

5. BULGULAR

5.1. Bazı Sabit Nokta Teoremlerinin Modüler F-Metrik Uzaylarda Özellikleri

Teorem 5.1.1

Θ_1 ve Θ_2 , $((\Phi, \mathcal{F}_\theta))$ modüler $\mathcal{F}$ - metrik uzayının iki kendine tanımlı dönüşümü olsun.

Öyle ki, $\forall \gamma, v \in \Phi, \alpha \in (0,1)$ ve $b, c \in [0,1)$, $a + b + c < 1$ olmak üzere;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\gamma), \Theta_1(v)) \leq$$

$$\alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma), \Theta_2(v)) + b \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma), \Theta_1(\gamma)) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(v), \Theta_1(v)) \quad (4.7)$$

$\Theta_1(\Phi) \subset \Theta_2(\Phi)$ alındığında ve Θ_1, Θ_2 sürekli ise Θ_1 ve Θ_2 ' nin tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat

γ_0 , Φ kümesinden alınan keyfi bir eleman olsun. $\Theta_1(x_0) \in \Theta_2(X)$ olduğunda, Φ ' in başka bir elemanı x_1 vardır ve $\Theta_2(x_1) = \Theta_1(x_0)$ ' dir. $\Theta_2(x_{n+1}) = \Theta_1(x_n)$ tarafından $\{x_n\}$ tanımlanmalı. Önce, $\Theta_2(x_n)$ ' in modüler $\mathcal{F}$ -Cauchy olup olmadığı kontrol edilmelidir.

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_2(\gamma_{n+1})) = \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\gamma_{n-1}), \Theta_1(\gamma_n))$$

$$\leq \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_2(\gamma_{n-1})) + b \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_1(\gamma_n)) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_{n-1}), \Theta_1(\gamma_{n-1}))$$

$$= \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_2(\gamma_{n-1})) + b \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_2(\gamma_{n+1})) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_{n-1}), \Theta_2(\gamma_n))$$

Buradan;

$$\forall n \in \Gamma, Y = \frac{a+c}{1-b} \in (0,1);$$

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_{n+1}), \Theta_2(\gamma_n)) \leq Y \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_2(\gamma_{n-1})) \quad (4.8)$$

Bu aşamada iki farklı durum söz konusu olabilir; $\Theta_2(\gamma_n) = \Theta_2(\gamma_{n+1})$ veya $\Theta_2(\gamma_n) \neq \Theta_2(\gamma_{n+1})$, ($n \in \Gamma$). Eğer bazı $n \geq 0$ için $\Theta_2(\gamma_n) = \Theta_2(\gamma_{n+1})$ ise $\Theta_1(\gamma_n) = \Theta_2(\gamma_n) = \Omega$ ’ dir. Eğer Ω Θ_1 ve Θ_2 ’ nin tek bir sabit noktası ise $\Theta_1(\Omega) = \Theta_2(\Theta_1(\gamma_n)) = \Theta_1(\Theta_2(\gamma_n)) = \Theta_2(\Omega)$. $\mathcal{F}_\theta (\Omega, \Theta_1(\Omega)) > 0$ alındığında;

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\theta (\Omega, \Theta_1(\Omega)) &= \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\gamma_n), \Theta_1(\Omega)) \\ &= \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_2(\Omega)) + b \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma_n), \Theta_1(\gamma_n)) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\Omega), \Theta_1(\Omega)) \\ &= \alpha \mathcal{F}_\theta (\Omega, \Theta_1(\Omega)) + b \mathcal{F}_\theta (\Omega, \Omega) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\Omega), \Theta_1(\Omega)) \\ &= \alpha \mathcal{F}_\theta (\Omega, \Theta_1(\Omega)) < \mathcal{F}_\theta (\Omega, \Theta_1(\Omega)). \end{aligned}$$

Bu bir çelişkidir. $\Theta_1(\gamma_n) = \Theta_2(\gamma_n) = \Omega$, Θ_1 ve Θ_2 ’ nin ortak bir sabit noktasıdır. $\forall n \geq 0$ için $\Theta_2(\gamma_n) \neq \Theta_2(\gamma_{n+1})$ olduğunda lemma 2.4 ve (8) $\Theta_2(\gamma_n)$ ’ nin aynı tam uzaylarda modüler $\mathcal{F}$ -Cauchy olduğunu gösterir. Φ ’ te bir α vardır öyle ki;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_2(\gamma_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_1(\gamma_{n-1}) = \alpha \quad (4.9)$$

$$\Theta_2(\omega) = \Theta_2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_1(\gamma_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_2(\Theta_1(\gamma_n))$$

Θ_1 ve Θ_2 dönüşümleri alındığında;

$$\Theta_2(\alpha) = \Theta_2 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_1(\gamma_n) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_2(\Theta_1(\gamma_n)),$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\Theta_1(\Theta_2(\gamma_n))) = \Theta_1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \Theta_2(\gamma_n) \right) \quad (4.10)$$

$$= \Theta_1(\alpha)$$

$\zeta = \Theta_2(\alpha) = \Theta_1(\alpha)$, $\Theta_1(\zeta) = \Theta_1(\Theta_2(\alpha)) = \Theta_2(\Theta_1(\alpha)) = \Theta_2(\zeta)$ ve $\Theta_1(\alpha) \neq \Theta_1(\zeta)$ ise ;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\zeta), \Theta_1(\alpha)) \leq \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\zeta), \Theta_2(\alpha)) + b \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\alpha), \Theta_1(\alpha)) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\zeta), \Theta_1(\zeta))$$

$$= \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\zeta), \Theta_1(\alpha)) + b \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\alpha), \Theta_1(\alpha)) + c \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\zeta), \Theta_1(\zeta))$$

$$= \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\zeta), \Theta_1(\alpha))$$

$$< \mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\zeta), \Theta_1(\alpha)).$$

Bu bir çelişkidir. $\Theta_1(\alpha) = \Theta_1(\zeta)$ ve $\Theta_1(\zeta) = \Theta_2(\zeta) = \zeta$ yani Θ_1 ve Θ_2 ' nin ortak bir sabit noktası vardır ve bu noktalar benzersizdir.

Teorem 5.1.2

Θ , Φ modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzayında kendine tanımlı bir dönüşüm. $\forall \gamma, v \in \Phi$, $\Upsilon \in (0,1)$ olmak üzere;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta(\gamma), \Theta(v)) \leq \Upsilon \mathcal{F}_\theta (\gamma, v) \quad (4.11)$$

ise Θ ' nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat

Θ , sürekli bir dönüşüm olduğunda $b + c = 0$ ve $\Theta_2 = I$ şartları teorem 5.1.1. de yerine konulduğunda ispat sağlanır.

Teorem 5.1.3

(Reich): Θ, Φ modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzaylarında kendine tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall \gamma, v \in \Phi, \alpha \in (0,1), b, c \in [0,1), a + b + c < 1$ olmak üzere, öyle ki;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta(\gamma), \Theta(v)) \leq \alpha \mathcal{F}_\theta (\gamma, v) + b \mathcal{F}_\theta (\gamma, \Theta(\gamma)) + c \mathcal{F}_\theta (v, \Theta(v)) \quad (4.12)$$

Θ sürekli ise Θ ' nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat

Teorem 5.1.1' de $\Theta_2 = I$ kullanıldığında sonuç elde edilir.

Teorem 5.1.4

(Jungck) Θ_1 ve Θ_2, Φ tam modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzayında kendine tanımlı iki dönüşüm olsun.

$\forall \gamma, v \in \Phi, \alpha \in (0,1)$ için;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\gamma), \Theta_1(v)) \leq \alpha \mathcal{F}_\theta (\Theta_2(\gamma), \Theta_2(v)) \quad (4.13)$$

Eğer $\Theta_1(\Phi) \subset \Theta_2(\Phi)$ ve Θ_2 sürekli ise Θ_1 ve Θ_2 ' nin tek bir ortak sabit noktası vardır.

İspat

Θ_1 dönüşümünün sürekliliğini gerekir. Teorem 5.1.3' den açıkça görülür.

Teorem 5.1.5

Θ_1 ve Θ_2, Φ tam modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzayında kendine tanımlı iki dönüşüm. $\gamma, v \in \Phi, \alpha \in (0,1)$ ve $b \geq 0$ olmak üzere;

$$\mathcal{F}_\theta (\Theta_1(\gamma), \Theta_2(v)) \leq \alpha \cdot \max\{\mathcal{F}_\theta (\gamma, v), \mathcal{F}_\theta (\gamma, \Theta_1(\gamma)), \mathcal{F}_\theta (v, \Theta_2(v))\} +$$

$$b \cdot \min\{\mathcal{F}_\theta(\Theta_1(\gamma), v), \mathcal{F}_\theta(\gamma, \Theta_2(v))\}.$$

Aşağıdaki şartlardan en az bir tanesi sağlanırsa Θ_1 ve Θ_2 'nin Φ 'de ortak bir sabit noktası vardır denir.

(i) Θ_1 ve Θ_2 sürekli;

$(\mathcal{F}3)'$ ü doğrulayan $V \in \mathcal{F}'$ nin sürekli olduğu varsayılır. Ek olarak, $u \in (0, \infty)$ olmak üzere $V(u) > V(\alpha u) + \Delta$ olacak şekilde u seçilir. α aynı zamanda $(\mathcal{F}3)$ tarafından belirlidir. Dahası, $a + b < 1$ ise ortak sabit nokta tektir.

Örnek 5.1.6

$V(t) = \ln t, t > 0$ ve $\alpha = 2$ iken $\mathcal{F}_\theta$ $(\mathcal{F}3)'$ ü sağlar. Sonuç olarak, $\mathcal{F}_\theta, \Phi$ üzerinde modüler $\mathcal{F}$ -metriktir.

1. Burada $\alpha = \ln(3)$ seçildiğinde $V, (0, \infty)'$ da sürekli ve α üzerindeki şart $V(u) > V(\alpha u) + \Delta, (\forall u > 0), \ln(\alpha) + \alpha < 0$ olur. $0 < \alpha < \frac{1}{3}$
2. Eğer Teorem 2.3' da $\Theta_2 = \Theta_1$ ise modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzayların yeni halinde Berinde'nin ana sonuçları elde edilir.
3. Teorem 5.1.2' de $\Theta_2 = \Theta_1$ ve $b = 0$ ise $\mathcal{F}$ -metrik uzaylarda Ciric tip sabit nokta teoremi elde edilir.

5.2. Uygulama

Dinamik Programlama Denklem Sisteminin Çözümü

Örnek 5.2.1

Uygulama olarak, dinamik programlamadan bir denklem sistemi verilebilir. 1940'larda birbirini takip eden en iyi kararları bulma problemlerinin çözümünü tanımlamak için

Amerikalı Matematikçi Richard Bellman tarafından kullanılmıştır. Richard Bellman bu yaklaşımını 1953 yılında güncelleyerek optimizasyon problemlerini çözmek üzere Dinamik Programlamayı geliştirmiştir. Buradaki Programlama, planlama anlamındadır. Problemleri çözmek için genel bir yaklaşımdır, gerekli matematiksel bağıntılar her problem için ayrı ayrı geliştirilmelidir, bu nedenle hangi problemin Dinamik Programlama'ya uygun olduğu ve Dinamik Programlama'nın genel yapısını tespit etmek için özel yetenek gerekir. Dinamik Programlama, n değişkenli bir problemin optimum çözümünü n aşamaya ayırıştırarak bulur, her aşamada tek değişkenli bir alt problemi çözerek bulur. Dinamik Programlama'da hesaplamalar tekrarlanarak yapılır. Bu nedenle bir alt problemin çözümü bir sonraki alt problemin girdisidir. Son alt problem çözüldüğünde, problemin tamamının optimum çözümü bulunmuş olur. Dinamik Programlamadaki zorluklar iki kategoriye ayrılır. İlk sorun başlangıç, geçiş ve eylem durumları da dahil olmak üzere çeşitli durumları toplu olarak yansıtan bir dizi faktörlerden oluşur. Bu sorunların çözümüne yönelik alınan bir dizi karar ikinci bölüm konusudur. Dinamik programlamadaki bu sorunlar $\mathcal{F}$ -metrik'te fonksiyonel denklemleri içeren konulara dönüşüyor. Y_1, Y_2 iki Banach uzay'ı olsun. $Z_1 \subset Y_1$ durgun uzay, $Z_2 \subset Y_2$, karar uzayı. $\psi: Z_1 \times Z_2$, $V_1, V_2: Z_1 \times Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $G_1, G_2: Z_1 \times Z_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$\zeta(\gamma) = \sup_{v \in Z_2} \{V_1(\gamma, v) + G_1(\gamma, v, \zeta(\psi(\gamma, v)))\}, \gamma \in Z_1 \quad (4.14)$$

ve

$$\zeta(\gamma) = \sup_{\gamma \in Z_1} \{V_2(\gamma, v) + G_2(\gamma, v, \zeta(\psi(\gamma, v)))\}, v \in Z_2 \quad (4.15)$$

denklemleri dikkate alındığında amaç (4.14) ve (4.15) fonksiyonel denklem sistemini çözebilmek. $B(Z_1)$, Z_1 üzerinde reel değerli ve sınırlı fonksiyonlar kümesini belirtir. $s \in B(Z_1)$, $\|s\| = \sup_{\gamma \in Z_1} |s(\gamma)|$ dır. $(B(Z_1), \|\cdot\|)$ in Banach uzay' ı olduğu açıktır. $S_1, S_2 \in B(Z_1)$ in elemanları, $\mathcal{F}_\theta(S_1, S_2) = \sup_{\gamma \in Z_1} |S_1(\gamma) - S_2(\gamma)| = \|S_1 - S_2\|$ tarafından tanımlanan modüler $\mathcal{F}$ -metrik $(V(\beta) = \ln \beta, \Delta = 0$ ile) ve $B(Z_1)$ arasında ilişki kurulmalıdır. Ayrıca, $\Theta_1, \Theta_2: B(Z_1) \rightarrow B(Z_1)$, $S_1, S_2 \in B(Z_1)$ ve $\gamma \in Z_1$ olmak üzere , öyle ki;

$$\Theta_1(S_1)(\gamma) = \sup_{v \in Z_2} \{V_1(\gamma, v) + G_1(\gamma, v, \zeta(\psi(\gamma, v)))\}, \gamma \in Z_1 \quad (4.16)$$

ve

$$\Theta_2(S_2)(\gamma) = \sup_{v \in Z_1} \{V_2(\gamma, v) + G_2(\gamma, v, \zeta(\psi(\gamma, v)))\}, \gamma \in Z_1 \quad (4.17)$$

V_1, V_2, G_1 ve G_2 sınırlı, Θ_1, Θ_2 ise iyi tanımlı olmalıdır. Bu yöntem bir sonra verilecek olan teorem ile sonuçlanacaktır.

Teorem 5.2.2

$\forall (\gamma, v) \in Z_1 \times Z_2$, G_1, G_2 ve V_1, V_2 sınırlı fonksiyonlar. $\Theta_1(S_1)(\gamma)$ ve $\Theta_2(S_2)(\gamma)$ (4.16)-(4.17)' dan verilsin. $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}'$ ye ve a,b,c alınsın.

$$|G_1(\gamma, v, S_1(\psi(\beta))) - G_2(\gamma, v, S_2(\psi(\beta)))| \leq e^{-\lambda} T(S_1, S_2) \quad (4.18)$$

$\alpha \mathcal{F}_\theta(S_1, S_2) + b \mathcal{F}_\theta(S_1, \Theta_1(S_1)) + c \mathcal{F}_\theta(S_2, \Theta_2(S_2)) = T(S_1, S_2)$, $T(S_1, S_2) > 0$ ve $\mathcal{F}_\theta(\Theta_1(S_1), \Theta_2(S_2)) > 0$ olduğunda (4.16) ve (4.17)' den oluşan denklem sisteminin tek ve sınırlı çözümü elde edilir.

6. SONUÇ

Bu çalışmada ilk olarak metrik, metrik uzay, modüler uzaylar, tam metrik uzay, modüler, modüler metrik, $\mathcal{F}$ -metrik, modüler $\mathcal{F}$ -metrik, modüler $\mathcal{F}$ -metrik uzayda sabit nokta teoremi tanıtılarak önemliliği vurgulanmış ve çalışmaların tarihsel süreci ile ilgili temel bilgiler ayrıntılı bir biçimde verilmiştir. Çeşitli yazarların çalışmaları incelenmiş ve bu konu hakkında yapılan ilerlemeler özetlenmiştir. Bu tez çalışması, modüler $\mathcal{F}$ metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin ifadesi ve ispatında kullanılan çeşitli tanımları, lemmaları ve Banach büzülme ilkesi yardımıyla bu sonuçların nasıl genişletilebileceğini göstermektedir.

Çalışmanın katkıları ve sonuçları şu şekilde özetlenebilir; Bu tezde tanıtılan modüler $\mathcal{F}$ metrik uzay kavramı, bu uzaylar üzerinde çalışılan sabit nokta teorisine yeni bir bakış açısı kazandırmıştır. Bu uzay kavramı ile mevcut sabit nokta teoremlerinin genelleştirilmesine olanak sağlamaktadır. Tezde elde edilen teorik sonuçlar, mühendislik, ekonomi ve biyoloji gibi çeşitli disiplinlerdeki pratik problemlere uygulanabilir. Özellikle, Sabit Nokta Teorisi alanında yeni uzaylar üzerinde nasıl işlemler yapılabileceği üzerinde durulmuş ve benzer çalışmalar için yol gösterici olmuştur. Genel olarak kullanılan büzülme dönüşümleri yardımıyla genişletilen sonuçlar, klasik metrik uzayların yanı sıra daha genel uzaylar içinde geçerlidir. Bu, Sabit Nokta Teorisi' nin kapsamını genişletmekte ve daha karmaşık sistemlerde uygulanabilirliğini artırmaktadır.

Çalışmada ortaya konulan yeni yaklaşımlar ve elde edilen sonuçlar, gelecekte yapılacak araştırmalar için geniş bir perspektif sunmaktadır. Özellikle, modüler $\mathcal{F}$ metrik uzayların diğer matematiksel yapılar üzerinde nasıl genelleştirilebileceği ve farklı sabit nokta teoremleri ile nasıl ilişkilendirilebileceği konusunda daha fazla çalışma yapılması gerektiği vurgulanmaktadır. Bu tez, Türkçe literatürde bu alanda yeni ve önemli bir kaynak olarak yer almaktadır. Hem araştırmacılar için referans olabilecek nitelikte bir çalışma ortaya koymakta hem de bu alanda yapılacak olan gelecekteki araştırmalara temel oluşturmaktadır.

Sonuç olarak, sabit nokta teorisi ve büzülme tipi dönüşümler üzerine yapılan bu ve benzeri çalışmaların artması, hem teorik matematik hem de uygulamalı bilimler açısından önemli bir potansiyele sahiptir. Bu durum, sabit nokta teorisinin ve yeni tanımlanan

modüler uzayların daha geniş bir perspektifte ele alınmasına ve daha kapsamlı sonuçların elde edilmesine olanak sağlayacaktır.



KAYNAKLAR

- A.A. N. Abdou and M. A. Khamsi, (2014) "Fixed points of multivalued contraction mappings in modular metric spaces", *Fixed Point Theory and Appl.*, 2014:249,10. 9 <http://www.fixedpointtheoryandapplications.com/content/2014/1/249>.
- Abbas, M., Jungck, G. (2008) "Common fixed point results for non-commuting mappings without continuity in cone metric spaces", *J. Math. Anal. Appl.*, 341, 416-420. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.09.070>
- Abdurrahman, B. (2022) "Modüler metrik uzaylarda sabit nokta teorisi ve uygulamaları" *Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Trabzon*, 1-12.
- Abobaker, H. and Ryan, R. A., (2022), "Modular Metric Spaces". *Irish Math. Soc. Bulletin*, Number 0, Season 21XX,1-1, ISSN 0791-5578. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2203.12359>
- Almezel, S., Ansari, Q. H. and Khamsi, M.A. (2014) "*Topics in Fixed Point Theory*". Springer International Publishing Switzerland, 1-101.
- Alnaser, A. L., Lateef, D., Fouad, A. H., Ahmad, J. (2019) "Relation theoretic contraction results in F-metric spaces", *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 12, 337-344
- Banach, S. (1922) "Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrales". *Fundamenta Mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Chistyakov V.V. (2015) "Metric Modular Spaces Theory and Applications", *SpringerBriefs in Mathematics*, ISSN 2191-8198(electronic) Library of Congress Control Number:2015956774 73, <http://doi.org/10.1007/978-3-319-25283-4>.
- Chistyakov V.V. (2015) "Metric Modular Spaces Theory and Applications", *SpringerBriefs in Mathematics ISSN 2191-8198(electronic) Library of Congress Control Number:2015956771 73*, <http://doi.org/10.1007/978-3-319-25283-1>.
- Chistyakov V.V. (2010) "Modular metric spaces,I:Basic concepts", *Nonlinear Anal.*, 72(1), 1-14. Science Direct.
- Chistyakov V.V. ,(2010) "Modular metric spaces,II:Application to superposition operators, *Nonlinear Anal.*, 72(1), (2010),15-30.
- Czerwik, S. (1993) "Contraction mappings in b-metric spaces", *Acta Math. Univ. Ostrav*, 1(1), 5-11. <http://dml.cz/dmlcz/120469>

- D.Binbasioglu, (2020) "Coincidence and common fixed point theorems in F-metric spaces", *ICONTECH*, [https://doi.org/10.46291/ICONTECHvol4iss3pp43-49\(December\)](https://doi.org/10.46291/ICONTECHvol4iss3pp43-49(December)).
- E.Karapinar, D.O'Regan, A.F. Roldan Lopez de Hierro and N.Shahzad, (2016) "Fixed point theorems in new generalized metric spaces", *J.Fixed Point Theory Appl.*, 18645-671. <http://doi.org/10.1007/s11784-016-0301-4>
- Fagin, R., Kumar, R., Sivakumar, D. (2003) "Comparing top k lists. ", *SIAM J. Discret. Math.*, 17(1), 134-160. <https://doi.org/10.1137/S0895480102412856>
- Frechet, M., (1906) "Sur guelgues points du calcul fonctionnel." *Rend. Circ. Mat. Palermo*. 22(1), 1-72.
- G.Jungck (1986) "Compatible mappings and common fixed points", *Int. J. Math. Math.Sci.*,9(771-779).
- Gahler.V.S., (1964)"2-metrische Raume und ihre topologische struktur ", *Math.Nachr.*26,115-118(1963-1964).
- Goebel, K., Kirk, W., (1990) "Topics in metric fixed point theory, cambridge studies." *Cambridge Univ. Press*, Cambridge,, MR1074005 (92c:47070).
- Hausdorff, F. (1914) "Grundzüge der mengenlehre. Veit and Company." *Leipzig*.
- Hussain S. (2019) "Non-Unique Fixed Point Theorems in Modular Metric Spaces", *Symmetry* 2019,11,549, <http://doi.org/10.3390/sym11040549>
- H. Nakano (1950) "Modulared Semi-Ordered Linear Spaces", *Maruzen*,Tokyo.
- I.Altun, N.A.Arifi, M.Jleli, A.Lashin,B.Samet (2016) "Feng-Liu type fixed point results for multivalued mappings on JS-metric spaces", *J. of Nonlinear Sci. and Appl.*(9),3892-3897, <http://doi.org/10.22436/jnsa.009.06.36>
- Khamsi, M. A., Kozłowski, W. M. (2015) "Fixed point theory in modular function spaces". *Springer/Birkhauser*, New York.
- Khamsi, M. A., Hussain, N. (2010) " KKM mapping in metric type spaces", *Nonlinear Anal.* 7(9), 3123-3129. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.06.084>
- Kirk, W., Shahzad, N. (2014) " Fixed Point Theory in distance Spaces", *Springer, Cham*.
- Manav N. and Turkoglu D. (2019) "Common fixed point results on modular F-metric spaces", *AIP Conference Proceedings* 2183,060006; <https://doi.org/10.1063/1.5136161>.
- M.Jleli and B:Samet (2015) "A Generalized Metric Space and Related Fixed Point Theorems ", *Fixed Point Theory and Appl.*,2015:61,14. <http://dx.doi.org/10.1186/s13663-015-0312-7>

- M.Jleli and B.Samet, "On a new generalization of metric spaces", *J.Fixed Point Theory Appl.*, 20:128, <https://doi.org/10.1007/s11784-018-0606-6>
- M.A.Khamshi and W.A.Kirk (2001) "An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory", *John wiley*, New York.
- M.A.Khamshi, W.K.Kozłowski and S.Reich, (1990) "Fixed point theory in modular function spaces", *Nonlinear Analysis*, 14, 935-953. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(90\)90111-S](https://doi.org/10.1016/0362-546X(90)90111-S)
- M.A.Khamshi, W.K.Kozłowski (2015) "Fixed point theory in modular function spaces", *Birkhauser*, 245. [https://doi.org/10.1016/0362-546X\(90\)90111-S](https://doi.org/10.1016/0362-546X(90)90111-S)
- M.A.Khamshi and W.M.Kozłowski (2010) "On asymptotic pointwise contractions in modular function spaces", *Nonlinear Analysis*, 73 2957-2967. <https://doi.org/10.1016/j.na.2010.06.061>
- Matthews, S. G. (1994) "Partial metric topology, In Proceedings of the 8th Summer Conference on General Topology and Applications. ", *Annals of the New York Academy of Sciences*, vol. 728, pp. 183-197. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.1994.tb44144.x>
- Musielak, J. (1983) "Orlicz Spaces and Modular Spaces" *Lecture Notes in Math.*, vol. 1034, Springer, Berlin, 226.
- Mustafa, Z., Sims, B., (2006) "A new approach to generalized metric spaces.", *J.Non-linear Convex Anal.*, 7(2), 289-297.
- M. R. Alfuraidan, M. A. Khamshi, N. Manav (2017) "A Fixed Theorem for Uniformly Lipschitzian Mappings in Modular Vector Spaces", *Filomat* 31:17, 5435-5444, <https://doi.org/10.2298/FIL1717435A>
- N.Hussain, N.Yasmin, N.Shafqat (1953-1964) "Multi-Valued Ciric Contractions on Metric Spaces with Applications ", *Filomat* 28:9 (2014), <https://doi.org/10.2298/FIL1409953H>
- Öz, E. (2019) "Modüler Metrik Uzaylar Teorisi ve Sabit Nokta Teoremlerine Uygulamaları" (Yüksek Lisans), *Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi*, Edirne, 1-20.
- P.Borisut, K. Khammahawong and P. Kumam, "Fixed Point Theory Approach to Existence of Solutions with Differential Equations", <http://dx.doi.org/10.5772/intechopen>, 74560.
- Sam B. Nadler, Jr. (1969) "Multi-valued Contraction Mappings.", *Pacific Journal of Math*, vol. 30, No. 2, Springer, Berlin, 475-488.
- S.Reich, (1971) "Some remarks concerning contraction mappings", *Can. Math. Bull.*, 14 121-124.

- T. Dominguez Benavides, M.A.Khamssi and S. Samadi (2001) “Uniformly Lipschitzian mappings in modular function spaces”, *Nonlinear Anal.***46**(2),267-278.
- Turkoglu,D. And Kılinc,E. (2016) “Some Fixed Point Results for Caristi Type Mappings in Modular Metric Spaces with an Application”, *International Journal of Analysis and Applications*,ISSN 2291-8639 Volume 12,Number 1,15-21 <http://www.etamaths.com>.
- Turkoglu,D. and Manav,N. “Fixed Point Theorems in New Type of Modular Metric Spaces”, *Fixed Point Theory and Applications*(2018), <http://doi.org/10.1186/s13663-018-0650-3>.
- Y.Feng,S.Liu, (2006) “Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multivalued Caristi type mappings”, *J.Math.Anal.Appl.*, Science Direct, Elsevier, 317,103-112.
- Jleli, M., Samet, B.(2015) “ A generalized metric space and related fixed point theorems”, *Fixed Point Theory Appl.*, 2015, 14., <http://doi.org/10.1186/s13663-015-0312-7>.
- Jleli, M., Samet, B. (2018) “On a new generalization of metric spaces”, *J. Fixed Point Theory Appl.*,Springer Nature Switzerland AG 2018,20:128 <http://doi.org/10.1007/s11784-018-0606-6> .



