

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Emrah KORKMAZ

**BAZI SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ RANKI VE
KOMBİNATORİK**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA- 2023

ÖZ

DOKTORA TEZİ

BAZI SIRA-KORUYAN DÖNÜŞÜM YARIGRUPLARININ RANKI VE
KOMBİNATORİK

Emrah KORKMAZ

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Yıl: 2023, Sayfa: 59
Jüri : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Hamza MENKEN
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Doç. Dr. Leyla BUGAY

Doğal sıralı $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde tüm sıra-koruyan ve azalan dönüşümlerin yarıgrubunu C_n ve bu yarıgrubun tüm nilpotent elemanlarının kümesini $N(C_n)$ ile gösterelim. Herhangi bir $\alpha \in C_n$ dönüşümü için $\text{fix}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$ ve herhangi bir $Y \subseteq X_n$ için $C_{n,Y} = \{\alpha \in C_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$ olarak tanımlayalım. Bu tezde $N(C_n)$ ve $C_{n,Y}$ deki m -potentlerin sayısını veren formüller elde ettik. Ayrıca, C_n nin tüm maksimum nilpotent alt yarıgrupları ile onların kardinalitelerini ve ranklarını belirledik.

Anahtar Kelimeler: Dönüşüm yarıgrupları, m -potent, doğuray kümesi, rank.

ABSTRACT

PhD THESIS

RANK OF SOME ORDER-PRESERVING TRANSFORMATION SEMIGROUPS AND COMBINATORICS

Emrah KORKMAZ

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
Year: 2023, Pages: 59
Jury : Prof. Dr. Hayrullah AYIK
: Prof. Dr. Hamza MENKEN
: Prof. Dr. Gonca AYIK
: Prof. Dr. Melis MİNİSKER
: Assoc. Prof. Dr. Leyla BUGAY

Let C_n be the semigroup of all order-preserving and decreasing transformations on $X_n = \{1, \dots, n\}$, under its natural order and let $N(C_n)$ be the set of all nilpotent elements of C_n . Let $\text{fix}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$ for any transformation α , and let $C_{n,Y} = \{\alpha \in C_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$ for any subset Y of X_n . In this thesis, we obtain formulas for the number of m -potent elements of $N(C_n)$ and $C_{n,Y}$. Furthermore, we determine the structure of all the maximum nilpotent subsemigroups of C_n with their cardinalities and ranks.

Keywords: Transformation semigroups, m -potent, generating set, rank.

GENİŞLETİLMİŞ ÖZET

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgrup teorisinde de temel problemlerden biri yarıgrupların sınıflandırılmasını sağlayacak ve onların yapısını tanımlayacak belirli özelliklerle ifade edilip edilemeyeceğini gösteren yöntemler bulmaktır. Bu yöntemler arasında doğuray kümesi ve rank bulma yöntemleri oldukça popülerdir. Ayrıca, yarıgrup teorisinde yarıgrupların ve onların alt yarıgruplarının kombinatorik özelliklerini bulmak da önemli bir problemdir.

Doğal sıralı $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde tüm sıra-koruyan ve azalan dönüşümlerin yarıgrupunu C_n olmak üzere bu yarıgrupun tüm idempotent ve nilpotent elemanlarının kümelerini sırasıyla $E(C_n)$ ve $N(C_n)$ ile gösterelim. S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere $a, a^2, \dots, a^{m+r-1}$ birbirinden farklı ve $a^{m+r} = a^m$ olacak şekilde m, r pozitif tamsayıları varsa a ya S nin bir (m, r) -potent elemanı denir. Eğer a , S nin bir (m, r) -potent elemanı ise m ye a nın indeksi ve r ye a nın periyodu denir. Ayrıca, $r = 1$ ise a ya bir m -potent eleman denir. 0 , S nin sıfır elemanı olmak üzere eğer $a \in S$ için $a^m = 0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa a ya nilpotent eleman ve bu koşulu sağlayan en küçük m pozitif tamsayısına a elemanının nilpotentlik derecesi denir. Nilpotentlik derecesi m olan $a \in S$ elemanına m -nilpotent eleman denir.

Bu tezde $N(C_n)$ yarıgrupundaki m -nilpotent elemanların sayısını belirledik. Ayrıca, Y kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi olmak üzere

$$C_{n,Y} = \{\alpha \in C_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$$

kümesindeki m -potent elemanların sayısını belirledik. $N(C_n)$ yarıgrupunun

minimum doğuray kümesini ve rankını bulduk. Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ için

$$C_n(\xi) = \{\alpha \in C_n : \text{bazı } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \alpha^m = \xi\}$$

olsun. $C_n(\xi)$ nin C_n yarıgrubunun sıfır elemanı ξ olan maksimum nilpotent alt yarıgrubu olduğunu gösterdik. Üstelik, $C_n(\xi)$ yarıgrubunun kardinalitesini ve rankını bulduk.





Sevgili eşim Ayşe ve oğullarım Asım Muaz ve Enes'e



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca gösterdiği teşvik, rehberlik ve desteği için danışmanım Prof. Dr. Hayrullah AYIK'a en içten teşekkürlerimi sunarım. Danışman olarak sonsuz enerjisi ve araştırma hevesi beni motive etmiş ve araştırma hayatımı benim için sorunsuz ve ödüllendirici kılmıştır. Ayrıca, başta Doç. Dr. Leyla BUGAY olmak üzere Ç.Ü. Matematik Bölümü'nün akademik personeline teşekkür ederim.

Bu çalışmanın gerektirdiği çalışma koşullarına benimle katlanan, desteğini ve güler yüzünü hiç esirgemeyen kıymetli eşim Ayşe KORKMAZ'a ve ayrılması gereken vakitten fazlaca aldığım evlatlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Değerli akademisyen abim Emrullah KORKMAZ'a rehberliği için şükranlarımı sunarım. Sevgi ve teşvikleriyle her zaman yanımda olan annem Gülten KORKMAZ ve babam Hayrullah KORKMAZ'a şükranlarımı sunarım.

Son olarak doktora yaptığım süre içerisinde BİDEB 2211/A Genel Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sunduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ	I
ABSTRACT	II
GENİŞLETİLMİŞ ÖZET	III
TEŞEKKÜR	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER	5
2.1. Yarıgruplar	5
2.2. Doğuray Kümeleri	9
2.3. Green Denklik Bağlantıları	10
2.4. Dönüşüm Yarıgrupları	12
2.5. Parçalanış ve Özel Sayılar	19
2.6. Sonuçlar	23
3. $N(C_n)$ YARIGRUBUNUN m -NİLPOPOTENT ELEMANLARININ SAYISI	33
4. $C_{n,Y}$ KÜMESİNİN m -POTENT ELEMANLARININ SAYISI	37
5. C_n YARIGRUBUNUN MAKSİMUM NİLPOTENT ALT YARIGRUPLARININ KARDİNALİTELERİ VE RANKLARI	41
5.1. $N(C_n)$ Yarı grubunun Minimum Doğuray Kümesi ve Rankı	43
5.2. $C_n(\xi)$ Yarı grubunun Minimum Doğuray Kümesi ve Rankı	47
KAYNAKLAR	55
ÖZGEÇMİŞ	59

1. GİRİŞ

Doğal sıralı $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ üzerinde tüm dönüşümlerin oluşturduğu yarıgrubu $\mathcal{T}_n$ ile gösterelim. O_n ve $\mathcal{D}_n$ ile de sırasıyla $\mathcal{T}_n$ deki tüm sıra koruyan dönüşümlerin yarıgrubunu ve tüm azalan dönüşümlerin yarıgrubunu gösterelim. $O_n \cap \mathcal{D}_n$ olarak tanımlanan C_n ile de $\mathcal{T}_n$ deki tüm sıra koruyan ve azalan dönüşümlerin yarıgrubunu ve $N(C_n)$ ile de C_n yarıgrubunun tüm nilpotent elemanlarının kümesini gösterelim. Birleşme özelliği ile donatılmış en sade cebirsel yapı yarıgruptur. Grup teorisinde ünlü Cayley teoreminin yarıgrup versiyonu mevcuttur. Her sonlu yarıgrup bir sonlu dönüşüm yarıgrubunun ($\mathcal{T}_n$) bir alt yarıgrubuna izomorfiktir. Bu yüzden yarıgrup teorisinin en popüler çalışma konularından biri dönüşüm yarıgruplarıdır. Bu bağlamda yapılan ilk çalışma Tainiter (1968) in $\mathcal{T}_n$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını verdiği çalışmadır.

C_n yarıgrubunun, özellikle de bilgisayar bilimlerinde olmak üzere birçok uygulması vardır. Örneğin, Higgins (1993) C_n yarıgrubu ile n kaynak düğümlü üzerinde ikili ağaçlar arasında özel bir bağlantı kurmuştur. Böylece C_n yarıgrubunun kardinalitesinin n . Catalan sayısına eşit olduğunu göstermiştir. Bu yüzden C_n yarıgrubu Catalan monoid olarak da bilinmekte ve çalışılmaktadır. Ayrıca, Higgins (1993) C_n yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını hesaplamıştır. Howie (1970/71) O_n yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısını hesaplamıştır. Umar (1992) $\mathcal{D}_n$ yarıgrubunun idempotent elemanlarının sayısı ile 2. Stirling sayıları arasındaki ilişkiyi vermiştir.

Ayık, Ayık, Ünlü ve Howie (2005) $\mathcal{T}_n$ yarıgrubunun tüm singüler dönüşümlerinin oluşturduğu $\mathcal{ST}_n$ yarıgrubundaki m -potent ve (m, r) -potent elemanların sayısını belirlemişlerdir. Ayık, Ayık ve Koç (2011) $Y \subseteq X_n$ olmak

üzere

$$C_{n,Y} = \{\alpha \in C_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$$

kümesinin kardinalitesini bulmuşlardır. Sönmez ve Ünlü

$$\mathcal{U}_{n,r} = \{\alpha \in O_n : \alpha \text{ is } s\text{-potent } s \leq r\},$$

$$\mathcal{W}_{n,r} = \{\alpha \in \mathcal{U}_{n,r} : |\text{fix}(\alpha)| = 1\} \text{ ve}$$

$$C_{n,r} = \mathcal{W}_{n,r}(1) = \{\alpha \in \mathcal{U}_{n,r} : \text{fix}(\alpha) = \{1\}\}$$

yarıgruplarının kardinaliteleri ile ilgili kombinatorik sonuçlar vermişlerdir.

Laradji ve Umar (2006) C_n yarı grubunun kardinalitesini ve C_n yarı grubundaki nilpotent elemanların sayısını bulmuşlardır. Laradji ve Umar (2004) C_n yarı grubunun

$$\{\alpha \in C_n : |\text{im}(\alpha)| = r \text{ ve } n\alpha = k\},$$

$$\{\alpha \in C_n : |\text{im}(\alpha)| = r\}$$

alt kümeleri ile kombinatorik sonuçlar vermişlerdir. Laradji ve Umar (2004)

$$C_{n,r} = \{\alpha \in C_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$$

yarı grubunun rankını belirlemişlerdir.

Yukarıda bahsedildiği üzere C_n yarı grubu cebirsel ve kombinatorik bağlamda önemli bir araştırma konusudur. Bu tezde C_n yarı grubu ile ilgili önemli bazı araştırma sorularını ortaya koyup bunları cevapladık. $N(C_n)$ yarı grubundaki m -nilpotent (m -potent) elemanların sayısını belirledik. Ayrıca, Y kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi olmak üzere

$$C_{n,Y} = \{\alpha \in C_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$$

kümesindeki m -potent elemanların sayısını belirledik. $N(C_n)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesini ve rankını bulduk. Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ için

$$C_n(\xi) = \{\alpha \in C_n : \text{bazı } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \alpha^m = \xi\}$$

olsun. $C_n(\xi)$ nin C_n yarıgrubunun sıfır elemanı ξ olan maksimum nilpotent alt yarıgrubu olduğunu gösterdik. Üstelik, $C_n(\xi)$ yarıgrubunun kardinalitesini ve rankını bulduk.



2. ÖN BİLGİLER

2.1. Yarıgruplar

Bu bölümde yarıgrup teorisinin temel tanım ve teoremleri verilecektir. Ayrıca, dönüşüm yarıgrupları ile ilgili çalışmalardan elde edilen sonuçlardan bahsedilecektir. Böylece C_n yarıgrupunun popülerliği daha iyi anlaşılacaktır.

Tanım 2.1 S boştan farklı bir küme olmak üzere $\mu : S \times S \rightarrow S$ fonksiyonuna bir ikili işlem ve (S, μ) ikilisine de bir grupoid denir. Her $a, b \in S$ için (a, b) nin ikili işlem altında görüntüsünü $a\mu b$ ile göstereceğiz. Eğer S bu ikili işleme göre birleşme özelliğine sahip, yani

$$\forall x, y, z \in S \text{ için } x\mu(y\mu z) = (x\mu y)\mu z$$

oluyorsa (S, μ) cebirsel yapısına bir yarıgrup denir. Eğer ikili işlemin ne olduğu içerikten belli ise kolaylık sağlamak için (S, μ) yerine S ve $x\mu y$ yerine kısaca xy yazılır.

Tanım 2.2 S bir yarıgrup olsun. Her $a \in S$ için $0a = 0$ olacak şekilde $0 \in S$ var ise 0 elemanına S nin bir sol sıfır elemanı denir. Her $a \in S$ için $a0' = 0'$ olacak şekilde $0' \in S$ var ise $0'$ elemanına S nin bir sağ sıfır elemanı denir. Hem sol hem de sağ sıfır olan bir elemana sıfır eleman denir.

Bir yarıgrupta birden fazla sol veya sağ sıfır eleman olabilir.

Önerme 2.3 Bir S yarıgrupunda sıfır eleman mevcutsa tektir.

İspat: 0 ve $0'$, S nin iki sıfır elemanı olsun. 0 sıfır eleman olduğundan dolayı $00' = 0$ ve $0'$ sıfır eleman olduğundan dolayı $00' = 0'$ olup

$$0 = 00' = 0'$$

elde edilir. □

Tanım 2.4 S bir yarıgrup olsun. Her $s \in S$ için $es = s$ olacak şekilde $e \in S$ var ise e ye sol birim eleman denir. Her $s \in S$ için $sf = s$ olacak şekilde $f \in S$ var ise f ye sağ birim eleman denir. Hem sol hem de sağ birim olan elemana birim eleman denir.

Bir yarıgrupta birden fazla sol veya sağ birim eleman olabilir.

Önerme 2.5 Bir S yarıgrubunda birim eleman mevcutsa tektir.

İspat: e ve f , S nin iki birim elemanı olsun. e birim eleman olduğundan $ef = f$ ve f birim eleman olduğundan $ef = e$ olup

$$f = ef = e$$

elde edilir. □

Birim elemanlı bir yarıgrup monoid olarak adlandırılır.

Tanım 2.6 S bir yarıgrup olmak üzere

$$S^1 = \begin{cases} S & 1 \in S \text{ ise} \\ S \cup \{1\} & 1 \notin S \text{ ise} \end{cases}$$

olarak alalım. Her $s, t \in S^1$ için S^1 üzerindeki ikili işlem

$$st = \begin{cases} st & s, t \neq 1 \text{ ise} \\ t & s = 1 \text{ ise} \\ s & t = 1 \text{ ise} \\ 1 & s = t = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise S^1 bir monoid olur. Bu monoide gerekli ise S ye birim eleman eklenerek elde edilen monoid denir. Bu elde edilen monoid Green denklik bağıntılarının oluşturulmasında kullanılacaktır. Benzer şekilde S^0 tanımlanabilir. Bu yarıgruba gerekli ise S ye sıfır eleman eklenerek elde edilen yarıgrup denir.

Tanım 2.7 S bir yarıgrup olsun. S yarıgrubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S) = \{e \in S : e^2 = e\}$ ile gösterilir.

Her elemanı idempotent olan yarıgruba band denir.

Tanım 2.8 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olmak üzere $a, a^2, \dots, a^{m+r-1}$ birbirinden farklı ve $a^{m+r} = a^m$ olacak şekilde m, r pozitif tamsayıları varsa a ya S nin bir (m, r) -potent elemanı denir. Eğer a , S nin bir (m, r) -potent elemanı ise m ye a nın indeksi ve r ye a nın periyodu denir. Ayrıca, $r = 1$ ise a ya bir m -potent, $m = r = 1$ ise a ya bir idempotent denir.

Tanım 2.9 0 , S nin sıfır elemanı olmak üzere eğer $a \in S$ için $a^m = 0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{Z}^+$ varsa a ya nilpotent eleman ve bu koşulu sağlayan en küçük m pozitif tamsayısına a elemanının nilpotentlik derecesi denir. Nilpotentlik derecesi m olan $a \in S$ elemanına m -nilpotent eleman denir.

S yarıgrubunun tüm nilpotent elemanlarının kümesi $N(S)$ ile gösterilir. Bu durumda $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $N(S) = \{a \in S : a^m = 0\}$ olur.

Tanım 2.10 0 , S yarıgrubunun sıfır elemanı olsun. Eğer $S^m = \{0\}$, yani her $a_1, a_2, \dots, a_m \in S$ için $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ olacak şekilde bir $m \in \mathbb{N}$ varsa S ye nilpotent yarıgrup denir. Ayrıca, nilpotent bir yarıgrupta m -potent ile m -nilpotent elemanlar çakışır.

S sonlu ve sıfır elemanlı yarıgrup olsun. Ganyushkin ve Mazorchuk (2009) aşağıdaki koşulların denk olduğunu göstermişlerdir.

- (i) S nilpotenttir,
- (ii) her $a \in S$ nilpotenttir ve
- (iii) S nin tek idempotent elemanı sıfırdır.

Tanım 2.11 O , S yarıgrupunun sıfır elemanı olsun. T , S nin bir alt yarıgrubu olmak üzere $T^m = \{0\}$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}^+$ veya 0 dan farklı bir e idempotent için $T^k = \{e\}$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ varsa T ye S nin nilpotent alt yarıgrubu denir.

Tanım 2.12 S bir yarıgrup ve $T \subseteq S$ olsun. Her $x, y \in T$ için $xy \in T$ ise T ye S nin bir alt yarıgrubu denir ve $T \leq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.13 S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq T \subseteq S$ olsun. Eğer $ST \subseteq T$ ise T ye S nin sol ideali denir. $TS \subseteq T$ ise T ye S nin sağ ideali denir. Eğer T , S nin hem sol ideali hem de sağ ideali oluyorsa T ye S nin ideali denir ve $T \trianglelefteq S$ ile gösterilir.

Tanım 2.14 S bir yarıgrup olmak üzere eğer her $a \in S$ için $Sa = S$ ve $aS = S$ ise S ye bir grup denir.

Tanım 2.15 S ve T iki yarıgrup ve $\phi : S \rightarrow T$ bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer her $x, y \in S$ için $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ ise ϕ dönüşümüne yarıgrup homomorfizmi denir. Ayrıca $T = S$ ise ϕ dönüşümüne bir endomorfizm denir. Eğer $\phi : S \rightarrow T$ homomorfizmi bire-bir ise ϕ ye bir monomorfizm, örten ise ϕ ye bir epimorfizm ve hem monomorfizm hem de epimorfizm ise ϕ ye bir

izomorfizm denir. Eğer $\phi : S \rightarrow T$ dönüşümü bir izomorfizm ise S ile T ye izomorfik yarıgruplar denir ve $S \cong T$ ile gösterilir. Eğer $\phi : S \rightarrow S$ dönüşümü bir izomorfizm ise ϕ ye bir otomorfizm denir.

2.2. Doğuray Kümeleri

Tanım 2.16 S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olmak üzere S nin A kümesini içeren tüm alt yarıgruplarının kesişimi bir alt yarıgrup olup bu alt yarıgruba S nin A tarafından doğrulan alt yarıgrubu denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Yani,

$$\langle A \rangle = \bigcap \{U : U, A \text{ yı içeren } S \text{ nin alt yarıgrubu}\}$$

olarak tanımlıdır. Böylece,

$$\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \cdots a_n : n \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.17 S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Eğer $S = \langle A \rangle$ ise A ya S nin bir doğuray kümesi denir. Eğer bir sonlu $\emptyset \neq A \subseteq S$ alt kümesi için $S = \langle A \rangle$ ise S ye sonlu doğuraylı bir yarıgrup denir.

Tanım 2.18 S bir yarıgrup olmak üzere eğer $S = \langle A \rangle$ olacak şekilde $\emptyset \neq A \subseteq E(S)$ varsa S ye idempotent doğuraylı bir yarıgrup denir.

Tanım 2.19 S sonlu doğuraylı bir yarıgrup ve olmak üzere

$$\text{rank}(S) = \min\{|A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } \emptyset \neq A \subseteq S \text{ sonlu}\}$$

pozitif tam sayısına S nin rankı ve S nin $\text{rank}(S)$ elemanlı bir doğuray kümesine minimal doğuray kümesi denir.

S sonlu idempotent doğuraylı bir yarıgrup olmak üzere S nin idempotent rankı

$$\text{idrank}(S) = \min\{|A| : \langle A \rangle = S \text{ ve } \emptyset \neq A \subseteq E(S) \text{ sonlu}\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.20 S bir yarıgrup ve $a \in S$ olsun. Her $x, y \in S$ için $a \neq xy$ ise, yani $a \in S \setminus S^2$ ise a ya bir ayrılmaz eleman denir.

Tanım 2.21 S bir yarıgrup ve $s \in S$ olsun. Eğer s ayrılmaz veya herhangi $x, y \in S$ için $s = xy$ iken $s = x$ veya $s = y$ ise s elemanına indirgenemez eleman denir.

S nin her doğuray kümesinin ayrılmaz elemanları içermesi gerektiği kolayca görülür. Böylece, eğer A , S nin indirgenemez elemanlarından oluşan sonlu bir alt kümesi ve $S = \langle A \rangle$ ise A ya S nin minimum doğuray kümesi denir ve $\text{rank}(S) = |A|$ olur.

2.3. Green Denklik Bağlılıkları

Tanım 2.22 S bir yarıgrup ve $x \in S$ olmak üzere

$$S^1 x = \{sx : x \in S^1\}$$

$$aS^1 = \{xs : x \in S^1\}$$

$$S^1 x S^1 = \{sxy : s, y \in S^1\}$$

kümeleri sırasıyla S nin x i içeren en küçük sol ideali, sağ ideali ve idealidir. Bu ideallere sırasıyla S nin x tarafından doğrulan sol ideali, sağ ideali ve ideali denir.

Tanım 2.23 S bir yarıgrup ve $x, y \in S$ olsun. S üzerinde tanımlanan

$$x\mathcal{L}y \iff S^1x = S^1y$$

$$x\mathcal{R}y \iff xS^1 = yS^1$$

$$x\mathcal{J}y \iff S^1xS^1 = S^1yS^1$$

$\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$ bağıntıları birer denklik bağıntısı olup sırasıyla sol Green ($\mathcal{L}$ -Green), sağ Green ($\mathcal{R}$ -Green) ve $\mathcal{J}$ -Green bağıntıları olarak adlandırılırlar.

Önerme 2.24 S bir yarıgrup ve $x, y \in S$ olsun.

1. $x\mathcal{L}y \iff x = ay$ ve $y = bx$ olacak şekilde $a, b \in S^1$ vardır.
2. $x\mathcal{R}y \iff x = ya$ ve $y = xb$ olacak şekilde $a, b \in S^1$ vardır.
3. $x\mathcal{J}y \iff x = ayb$ ve $y = u xv$ olacak şekilde $a, b, u, v \in S^1$ vardır.

İspat: Howie (1995) e bakınız. □

Önerme 2.25 Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$ -Green ve $\mathcal{R}$ -Green bağıntıları bileşke işlemi altında değişmelidir.

İspat: Howie (1995) e bakınız. □

Tanım 2.26 $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ sırasıyla S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}$ -Green ve $\mathcal{R}$ -Green bağıntıları olsun. O zaman $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$ şeklinde tanımlı denklik bağıntısına $\mathcal{H}$ -Green bağıntısı denir. $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{R}$ yi içeren en küçük denklik bağıntısına da $\mathcal{D}$ -Green bağıntısı denir ve $\mathcal{D} = \mathcal{L} \vee \mathcal{R}$ ile gösterilir.

Önerme 2.27 Herhangi bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}, \mathcal{R}$ ve $\mathcal{D}$ -Green bağıntıları için $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ olur.

İspat: Howie (1995) e bakınız. $\square$

Önerme 2.28 S sonlu bir yarıgrup ise $\mathcal{D} = \mathcal{J}$ olur.

İspat: Howie (1995) e bakınız. $\square$

Bir S yarıgrubu üzerindeki $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}, \mathcal{H}$ ve $\mathcal{D}$ -Green bağıntıları arasında $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{L}$, $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{J} \subseteq S \times S$ ilişkisi mevcuttur.

2.4. Dönüşüm Yarıgrupları

Tanım 2.29 X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X$ kartezyen çarpımının her alt kümesine bir bağıntı denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesi $\mathcal{B}_X = \{\rho : \rho \subseteq X \times X\}$ ile gösterilir. X üzerindeki $\emptyset$, $1_X = \{(x, x) : x \in X\}$ ve $X \times X$ bağıntılarına sırasıyla boş bağıntı, birim bağıntı ve evrensel bağıntı denir.

Her $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ için $\mathcal{B}_X$ üzerinde bir ikili işlem

$$\alpha \circ \beta = \{(x, y) : \exists z \in X \text{ için } (x, z) \in \alpha \text{ ve } (z, y) \in \beta\}$$

olarak tanımlansın. Bu ikili işlem ile $\mathcal{B}_X$ bir yarıgrup olup bu yarıgruba X üzerinde tüm bağıntılar yarıgrubu denir. Üstelik, $\mathcal{B}_X$ birim elemanı 1_X olan bir monoid olur. Ayrıca, her $\rho \in \mathcal{B}_X$ için

$$\rho^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in \rho\}$$

bağıntısına ρ nun ters bağıntısı (tersi) denir.

Her $\alpha \in B_X$ için

$\text{dom}(\alpha) = \{x \in X : \exists y \in X, (x, y) \in \alpha\}$ kümesine α bağıntısının tanım kümesi,

$\text{im}(\alpha) = \{y \in X : \exists x \in X, (x, y) \in \alpha\}$ kümesine α bağıntısının görüntü kümesi,

$x\alpha = \{y \in X : (x, y) \in \alpha\}$ kümesine $x \in X$ in α altındaki görüntü kümesi,

$y\alpha^{-1} = \{x \in X : (x, y) \in \alpha\}$ kümesine $y \in X$ in α altındaki ters-görüntü kümesi

denir.

Yukarıdaki tanımlamalardan, her $\alpha, \beta \in \mathcal{B}_X$ için

(i) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \text{dom}(\alpha) \subseteq \text{dom}(\beta)$ ve $\text{im}(\alpha) \subseteq \text{im}(\beta)$,

(ii) $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$,

(iii) $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \subseteq \beta^{-1}$

olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 2.30 ρ , X üzerinde bir bağıntı olsun.

(i) $1_X \subseteq \rho$ ise ρ ya yansılmalı bağıntı denir.

(ii) $\rho^{-1} = \rho$ ise ρ ya simetrik bağıntı denir.

(iii) $\rho \circ \rho = \rho$ ise ρ ya geçişmeli bağıntı denir.

(iv) $\rho \cap \rho \subseteq 1_X$ ise ρ ya ters-simterik bağıntı denir.

Eğer X üzerindeki ρ bağıntısı yansılmalı, simetrik ve geçişmeli bir bağıntı ise ρ ya bir denklik bağıntısı denir.

ρ , X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $x \in X$ olsun. O zaman

$$x\rho = \{y \in X : (x, y) \in \rho\}$$

kümesine x in denklik sınıfı ve tüm denklik sınıflarının ailesi olan

$$x/\rho = \{x\rho : x \in X\}$$

kümesine X in ρ ile elde edilen bölüm kümesi denir.

Tanım 2.31 X boştan farklı bir küme ve $\alpha \in \mathcal{B}_X$ olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| \leq 1$$

oluyorsa α ya bir kısmi dönüşüm denir. Tüm kısmi dönüşümlerin kümesi $\mathcal{P}_X$ ile gösterilir.

Tanım 2.32 X boştan farklı bir küme ve $\alpha \in \mathcal{B}_X$ olmak üzere

$$\forall x \in X \text{ için } |x\alpha| = 1$$

oluyorsa α ya bir (tam) dönüşüm denir. Tüm tam dönüşümlerin kümesi $\mathcal{T}_X$ ile gösterilir.

$\mathcal{P}_X$ ve $\mathcal{T}_X$ bileşke işlemi ile yarıgruplardır. Bu yarıgruplara sırasıyla X üzerindeki kısmi dönüşümler yarıgrubu ve (tam) dönüşümler yarıgrubu denir.

Açıkça, $\alpha \in \mathcal{P}_X$ iken $\emptyset \subseteq \text{dom}(\alpha) \subseteq X$ olur. Üstelik, eğer $\alpha \in \mathcal{P}_X$ ve $\text{dom}(\alpha) = X$ ise o zaman $\alpha \in \mathcal{T}_X$ olur.

Tanım 2.33 X üzerindeki tüm bire-bir ve örten dönüşümlerin bileşke işlemiyle oluşturduğu gruba simterik grup denir ve $\mathcal{S}_X$ ile gösterilir.

Tanımlanan bu yarıgruplar arasında

$$\mathcal{S}_X \leq \mathcal{T}_X \leq \mathcal{P}_X \leq \mathcal{B}_X$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tez boyunca $X = X_n = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu kümesiyle ilgileneceğiz. Bu yüzden $\mathcal{S}_X, \mathcal{T}_X, \mathcal{P}_X$ ve $\mathcal{B}_X$ yerine $\mathcal{S}_n, \mathcal{T}_n, \mathcal{P}_n$ ve $\mathcal{B}_n$ yazacağız.

Bu tezde, herhangi bir $\alpha \in \mathcal{T}_n$ dönüşümünü sağdan yazacağız, yani $\alpha(x)$ yerine $x\alpha$ alacağız. Ayrıca, bileşke işlemini soldan sağa yazacağız, yani $(\alpha\beta)x$ yerine $x(\alpha\beta)$ alacağız.

Teorem 2.34 Her S sonlu yarıgrubu, $|S| = n$ olmak üzere, $\mathcal{T}_n$ veya $\mathcal{T}_{n+1}$ in bir alt yarıgrubuna izomorftur.

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009) a bakınız. □

Tanım 2.35 $n \geq 2$ olmak üzere

$$\mathcal{ST}_n = \mathcal{T}_n \setminus \mathcal{S}_n = \{\alpha \in \mathcal{T}_n : |\text{im}(\alpha)| \leq n-1\}$$

kümesi bileşke işlemiyle bir yarıgrup olup bu yarıgrupa singüler dönüşümler yarıgrubu denir. $\mathcal{ST}_n \leq \mathcal{T}_n$ olduğu kolayca görülür.

$\alpha \in \mathcal{P}_n$ ve $\beta \in \mathcal{T}_n$ dönüşümlerini sırasıyla

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \in \text{dom}(\alpha) & x \in X_n \setminus \text{dom}(\alpha) \\ x\alpha & - \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\alpha & 2\alpha & \cdots & n\alpha \end{pmatrix}$$

formunda düşünürsek $|\mathcal{S}_n| = n!$, $|\mathcal{T}_n| = n^n$ ve $|\mathcal{P}_n| = (n+1)^n$ olduğu kolayca görülür.

Tanım 2.36 Her $\alpha \in \mathcal{T}_n$ için imaj kümesi (görüntü kümesi), yükseklik, çekirdek

kümesi ve sabit noktalar kümesi

$$\text{im}(\alpha) = \{x\alpha : x \in X_n\},$$

$$\text{h}(\alpha) = |\text{im}(\alpha)|,$$

$$\text{ker}(\alpha) = \{(x, y) \in X_n \times X_n : x\alpha = y\alpha\},$$

$$\text{fix}(\alpha) = \{x \in X_n : x\alpha = x\}$$

olarak tanımlanır.

Aşağıdaki iki önermeyi tez boyunca sıkça kullanacağımız için ispatı ile birlikte verelim.

Önerme 2.37 $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_n$ olsun. O zaman

$$(i) \text{ im}(\alpha\beta) \subseteq \text{im}(\beta),$$

$$(ii) \text{ ker}(\alpha) \subseteq \text{ker}(\alpha\beta) \text{ olur.}$$

İspat: (i) $y \in \text{im}(\alpha\beta)$ olsun. O zaman $x(\alpha\beta) = y$ olacak şekilde $y \in X_n$ vardır. Böylece, $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = y$ olup $y \in \text{im}(\beta)$ elde edilir.

(ii) $(x, y) \in \text{ker}(\alpha)$ olsun. O zaman $x\alpha = y\alpha$ dır. Böylece, $(x\alpha)\beta = (y\alpha)\beta$, yani $x(\alpha\beta) = y(\alpha\beta)$ olup $(x, y) \in \text{ker}(\alpha\beta)$ elde edilir. $\square$

Önerme 2.38 $\alpha \in \mathcal{T}_n$ olsun. α nın idempotent olması için gerek ve yeter koşul $\text{fix}(\alpha) = \text{im}(\alpha)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in \mathcal{T}_n$ bir idempotent eleman olmak üzere kabul edelim ki $x \in \text{im}(\alpha)$ olsun. O zaman $y\alpha = x$ olacak şekilde bir $y \in X_n$ vardır. α idempotent olduğundan $y\alpha^2 = y\alpha$ olur. Bu durumda

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = x\alpha = y\alpha = x$$

olup $x\alpha = x$, yani $x \in \text{fix}(\alpha)$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $\alpha \in \mathcal{T}_n$ için $\text{fix}(\alpha) = \text{im}(\alpha)$ olsun. O zaman her $x \in \text{im}(\alpha)$ için $x\alpha = x$ olur. Her $y \in X_n$ için $y\alpha^2 = y\alpha$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $y\alpha = z$ olsun. Böylece

$$y\alpha^2 = (y\alpha)\alpha = z\alpha = z = y\alpha$$

olup α nın idempotent olduğu görülür. □

Tanım 2.39 $\alpha \in \mathcal{T}_n$ olmak üzere her $x, y \in X_n$ için $x \leq y$ iken $x\alpha \leq y\alpha$ oluyor ise α ya bir sıra koruyan dönüşüm denir. X_n üzerinde tanımlı tüm sıra koruyan dönüşümlerin oluşturduğu küme O_n ile gösterilir. O_n kümesi $\mathcal{T}_n$ nin bir alt yarıgrubudur.

Tanım 2.40 $\alpha \in \mathcal{T}_n$ olmak üzere her $x \in X_n$ için $x\alpha \leq x$ ($x \leq x\alpha$) ise α ya azalan (artan) dönüşüm denir. X_n üzerinde tanımlı tüm azalan (artan) dönüşümlerin oluşturduğu küme $\mathcal{D}_n$ ($\mathcal{D}_n^+$) ile gösterilir.

Tanım 2.41 $\mathcal{T}_n$ nin tüm sıra koruyan ve azalan ile tüm sıra koruyan ve artan dönüşümlerinin oluşturduğu kümeler sırasıyla

$$\begin{aligned} C_n &= \{\alpha \in O_n : x\alpha \leq x (\forall x \in X_n)\} \\ C_n^+ &= \{\alpha \in O_n : x \leq x\alpha (\forall x \in X_n)\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca, C_n ve C_n^+ , O_n nin alt yarıgruplarıdır. Üstelik, $C_n = O_n \cap \mathcal{D}_n$ ve $C_n^+ = O_n \cap \mathcal{D}_n^+$ olduğu kolayca görülür. Umar (1996) $C_n \cong C_n^+$ olduğunu göstermiştir.

Örnek 2.42 O_3 yarıgrubu aşağıdaki on elemanı içerir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{D}_3$ yarıgrubu aşağıdaki altı elemanı içerir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

C_3 yarıgrubu aşağıdaki beş elemanı içerir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$N(C_3)$ yarıgrubu aşağıdaki iki elemanı içerir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$E(C_3)$ kümesi aşağıdaki dört elemanı içerir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ayrıca,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \varepsilon^+ = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n & \cdots & n \end{pmatrix}$$

dönüşümleri sırasıyla C_n ve C_n^+ nın sıfır elemanlarıdır.

Tanım 2.43 Herhangi bir $\emptyset \neq Y \subseteq X_n$ için

$$O_{n,Y} = \{\alpha \in O_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$$

$$C_{n,Y} = \{\alpha \in C_n : \text{fix}(\alpha) = Y\}$$

olarak tanımlanır.

2.5. Parçalanış ve Özel Sayılar

Tanım 2.44 X_n kümesinin herhangi bir parçalanışı $P = \{I_1, I_2, \dots, I_p\}$ olmak üzere eğer

$$\forall x \in I_i \text{ ve } \forall y \in I_{i+1} \ (1 \leq i \leq p-1) \text{ için } x < y$$

oluyorsa $I_i < I_{i+1}$ şeklinde gösterilir ve $P = \{I_1, I_2, \dots, I_p\}$ bir sıralı parçalanış olarak adlandırılır. Ayrıca, $\emptyset \neq C \subseteq X_n$ için eğer

$$x, y \in C \text{ ve } x \leq z \leq y \Rightarrow z \in C$$

oluyorsa C ye konveks küme denir.

Herhangi $m, n \in \mathbb{Z}^+$ için $m \leq n$ olmak üzere

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

denkleminin sadece pozitif tamsayılardan oluşan tüm çözümlerinin kümesi

$$S_{(n,m)} = \{(s_1, s_2, \dots, s_m) : s_1, s_2, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } s_1 + s_2 + \dots + s_m = n\}$$

ile gösterilir ve $S_{(n,m)}$ kümesinin kardinalitesi

$$|S_{(n,m)}| = \binom{n-1}{m-1}$$

olur.

Örnek 2.45 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ denkleminin sadece pozitif tamsayılardan oluşan tüm çözümlerinin kümesi

$$S_{(6,4)} = \{(1, 1, 1, 3), (1, 1, 3, 1), (1, 3, 1, 1), (3, 1, 1, 1), (1, 1, 2, 2), \\ (1, 2, 1, 2), (1, 2, 2, 1), (2, 1, 1, 2), (2, 1, 2, 1), (2, 2, 1, 1)\}$$

olup $|S_{(6,4)}| = 10$ elde edilir.

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

denkleminin negatif olmayan tamsayılardan oluşan tüm çözümlerinin kümesi

$$S_{(n,m)}^0 = \{(s_1, s_2, \dots, s_m) : s_1, s_2, \dots, s_m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \text{ ve } s_1 + s_2 + \cdots + s_m = n\}$$

ile gösterilir ve $S_{(n,m)}^0$ kümesinin kardinalitesi

$$|S_{(n,m)}^0| = \binom{n+m-1}{n} = \binom{n+m-1}{m-1}$$

olur.

Örnek 2.46 $x_1 + x_2 + x_3 = 3$ denkleminin negatif olmayan tamsayılardan oluşan tüm çözümlerinin kümesi

$$S_{(3,3)}^0 = \{(0, 0, 3), (0, 3, 0), (3, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 2, 1), \\ (1, 0, 2), (2, 0, 1), (1, 2, 0), (2, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

olup $|S_{(3,3)}^0| = 10$ elde edilir.

Şimdi birçok kombinatorik problemin çözümünde kullanılan Catalan sayıları, Narayana sayıları, 2. tip Stirling sayılarına değineceğiz. Bu özel sayıların dönüşüm yarıgrupları ile ilgili bazı önemli soruların cevapları olduğunu bu bölümün sonuçlar kısmında vereceğiz.

Tanım 2.47 Herhangi bir $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

olarak tanımlanan C_n sayısına n . Catalan sayısı denir.

Bu tezde $C_0 = 1$ kabul edeceğiz. Catalan sayıları kombinatorikte yaklaşık 200 tane problemin cevabı olarak karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca, C_n yarıgrubunun kardinalitesi n . Catalan sayısına eşit olduğundan Catalan sayıları, dönüşüm yarıgruplarını kombinatoriksel metotlarla açıklamada önemli bir araçtır.

Tablo 2.1 Bazı Pozitif Tamsayılar İçin Catalan Sayıları

n	C_n
1	1
2	2
3	5
4	14
5	42
6	132
7	429
8	1430

Tanım 2.48 $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq r \leq n$ olmak üzere Narayana sayıları

$$N(n, r) = \frac{1}{n} \binom{n}{r} \binom{n}{r-1} = \frac{1}{n-r+1} \binom{n-1}{r-1} \binom{n}{r}$$

şeklinde tanımlanır.

Tablo 2.2 Bazı Pozitif Tamsayılar İçin Narayana Sayıları

$n \backslash r$	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1								1
2	1	1							2
3	1	3	1						5
4	1	6	6	1					14
5	1	10	20	10	1				42
6	1	15	50	50	15	1			132
7	1	21	105	175	105	21	1		429
8	1	128	196	490	490	196	28	1	1430

Catalan sayıları ile Narayana sayıları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

Önerme 2.49 $n \in \mathbb{Z}^+$ ve $1 \leq r \leq n$ olmak üzere

$$\sum_{r=1}^n N(n, r) = C_n.$$

İspat: Grimaldi (2012) ye bakınız. □

Tanım 2.50 n ve m pozitif tamsayılar olmak üzere $1 \leq m \leq n$ için n elemanlı bir kümenin m tane kümeye parçalanış sayısına 2. tip Stirling sayıları denir ve $S(n, m)$ ile gösterilir.

n elemanlı bir kümenin 1 veya n tane kümeye parçalanış sayısının 1 olduğu açıktır. Dolayısıyla $S(n, 1) = S(n, n) = 1$ olur. n elemanlı $\{1, 2, \dots, n\}$ kümesinin

$\{n\}$ yi içeren m tane kümeye parçalanış sayısı $S(n-1, m-1)$ ve $\{n\}$ yi içermeyen m tane kümeye parçalanış sayısı $mS(n-1, m)$ olur. Böylece,

$$S(n, m) = S(n-1, m-1) + mS(n-1, m)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

Tablo 2.3 Bazı Pozitif Tamsayılar İçin 2. Tip Stirling Sayıları

$S(n, m)$	$m = 1$	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$	$m = 8$
$n = 1$	1							
$n = 2$	1	1						
$n = 3$	1	3	1					
$n = 4$	1	7	6	1				
$n = 5$	1	15	25	10	1			
$n = 6$	1	31	90	65	15	1		
$n = 7$	1	63	301	350	140	21	1	
$n = 8$	1	127	966	1701	1050	266	28	1

Pozitif veya negatif olmayan tamsayı parçalanışı ile ilgili daha detaylı bilgi için Grimaldi (1994) e bakınız. Ayrıca, bu tezde bahsi geçen özel sayıların cevap verdiği sorular ve daha detaylı teknik bilgi için Grimaldi (1994) e bakınız.

2.6. Sonuçlar

Şimdi bahsi geçen dönüşüm yarıgrupları ile ilgili bazı önemli sonuçlar vereceğiz. İlk olarak bazı teknik detaylara değinmek için bazı özel dönüşümler tanımlayalım.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 1 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

olsun.

$$\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ ve } \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ - & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

olsun.

$2 \leq i \leq n$ için C_n yarıgrubunun $|\text{im}(\alpha)| = n-1$ olan her bir idempotentini

$$\xi_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i-1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ile gösterelim.

$1 \leq i \leq n-1$ için O_n yarıgrubunun yüksekliği $n-1$ olan ξ_i den farklı her bir idempotentini

$$\delta_i = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & i+1 & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ile gösterelim.

$1 \leq j < i \leq n$ olmak üzere $\mathcal{D}_n$ yarıgrubunun yüksekliği $n-1$ olan her bir idempotentini

$$\mu_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

ile gösterelim. Ayrıca,

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \text{ ve } 1_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} \text{ alalım.}$$

O_n , $\mathcal{D}_n$ ve C_n dönüşüm yarıgruplarının birim elemanı 1_n dir.

Teorem 2.51 $n \geq 3$ için $\mathcal{S}_n = \langle \alpha, \beta \rangle$ ve $\text{rank}(\mathcal{S}_n) = 2$ olur.

İspat: Howie (1995) e bakınız. □

Teorem 2.52 $n \geq 3$ için $\mathcal{T}_n = \langle \alpha, \beta, \lambda \rangle$ ve $\text{rank}(\mathcal{T}_n) = 3$ olur.

İspat: Howie (1995) e bakınız. □

Teorem 2.53 $n \geq 3$ için $\text{rank}(\mathcal{ST}_n) = \frac{n(n-1)}{2} = \text{idrank}(\mathcal{ST}_n)$ olur.

İspat: Howie (1978) veya Gomes ve Howie (1987) ye bakınız. □

Teorem 2.54 $n \geq 3$ için $\mathcal{P}_n = \langle \alpha, \beta, \lambda, \theta \rangle$ ve $\text{rank}(\mathcal{P}_n) = 4$ olur.

İspat: Howie (1995) e bakınız. □

Teorem 2.55 $n \geq 2$ için $\text{rank}(\mathcal{O}_n) = n$ olur.

İspat: $A = \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \gamma\}$ kümesinin $\mathcal{O}_n \setminus \{1_n\}$ için minimal doğuray kümesi olduğu gösterilmiştir. Gomes ve Howie (1992) ye bakınız. □

Teorem 2.56 $n \geq 2$ için $\text{idrank}(\mathcal{O}_n) = 2n - 2$ olur.

İspat: $E = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}\}$ kümesinin $\mathcal{O}_n \setminus \{1_n\}$ için minimum doğuray kümesi olduğu gösterilmiştir. Gomes ve Howie (1992) ye bakınız. □

Teorem 2.57 $n \geq 2$ için $\text{rank}(\mathcal{D}_n) = \text{idrank}(\mathcal{D}_n) = \frac{n(n-1)}{2}$ olur.

İspat: $E = \{\mu_{i,j} : 1 \leq j < i \leq n\}$ kümesinin $\mathcal{D}_n \setminus \{1_n\}$ için minimal doğuray kümesi olduğu gösterilmiştir. Umar (1992) ye bakınız. □

Teorem 2.58 $n \geq 2$ için $\text{rank}(C_n) = \text{idrank}(C_n) = n - 1$ olur.

İspat: $E = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}\}$ kümesinin $C_n \setminus \{1_n\}$ için minimum doğuray kümesi olduğu gösterilmiştir. Umar (2004) e bakınız. $\square$

Tanım 2.59 $f_0 = 0, f_1 = f_2 = 1$ olmak üzere $n \geq 3$ için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ indirgeme ilişkisi ile tanımlanan sayılara Fibonacci sayıları denir.

Teorem 2.60 $n \geq 1$ için

$$|O_n| = \binom{2n-1}{n-1} \text{ ve } |E(O_n)| = f_{2n} \text{ olur.}$$

İspat: Howie (1970/71) e bakınız. $\square$

Teorem 2.61 $\alpha, \beta \in O_n$ için

- (i) $\alpha \mathcal{L} \beta \iff \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta),$
- (ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \iff \ker(\alpha) = \ker(\beta),$
- (iii) $\alpha \mathcal{D} \beta \iff |\text{im}(\alpha)| = |\text{im}(\beta)|,$
- (iv) $\alpha \mathcal{H} \beta \iff \alpha = \beta \text{ olur.}$

İspat: Howie (1995) e bakınız. $\square$

Önerme 2.62 $|\{\alpha \in O_n : |\text{im}(\alpha)| = r \text{ ve } n\alpha = k\}| = \binom{k-1}{r-1} \binom{n-1}{r-1} \text{ olur.}$

İspat: Laradji ve Umar (2006) ya bakınız. $\square$

Önerme 2.63 (i) $|\{\alpha \in O_n : |\text{im}(\alpha)| = r\}| = \binom{n}{r} \binom{n-1}{r-1} \text{ dir.}$

(ii) $|\{\alpha \in O_n : n\alpha = k\}| = \binom{n+k-2}{k-1} \text{ dir.}$

İspat: Laradji ve Umar (2006) ya bakınız. □

Teorem 2.64 $F(n, r) = |\{O_n : |\text{fix}(\alpha)| = r\}|$ olsun.

(i) $F(n, 1) = C_n$ olur.

(ii) $F(n, 2) = \frac{2}{n} \binom{2n}{n+2}$ olur.

(iii) $F(n, r) = \frac{r}{n} \binom{2n}{n+r}$ olur.

İspat: Ayık ve ark. (2011) ve Higgins (1993) e bakınız. □

Teorem 2.65 $a_1 < a_2 < \dots < a_r$ olmak üzere $Y = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi olsun. Eğer $k_1 = a_1 - 1$, $k_j = a_j - a_{j-1}$ ($2 \leq j \leq r$) ve $k_{r+1} = n - a_r$ alınırsa

$$|O_{n,Y}| = \prod_{j=1}^{r+1} C_{k_j}$$

olur.

İspat: Ayık ve ark. (2011) e bakınız. □

Önerme 2.66 $n \geq 1$ olmak üzere

$$|\mathcal{D}_n| = |\mathcal{D}_n^+| = n!.$$

İspat: Ganyushkin ve Mazorchuk (2009) bakınız. □

Önerme 2.67 $n \geq 1$ olmak üzere

$$|N(\mathcal{D}_n)| = |N(\mathcal{D}_n^+)| = (n-1)!.$$

İspat: Umar (1992) ye bakınız. □

Önerme 2.68 2. tip Stirling sayısı $S(n, m)$ olmak üzere $n \geq 2$ için $|E(\mathcal{D}_n)| = \sum_{m=0}^n S(n, m) - 1$ olur.

İspat: Umar (1992) ye bakınız. □

Tez boyunca aşağıdaki lemmayı sıkça kullanacağımız için ispatı ile birlikte verelim.

Lemma 2.69 $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$ için $\text{fix}(\alpha\beta) = \text{fix}(\beta\alpha) = \text{fix}(\alpha) \cap \text{fix}(\beta)$ olur.

İspat: $x \in \text{fix}(\alpha\beta)$ olsun. O zaman $x(\alpha\beta) = x$ olur. Bu durumda $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta = x$ ve azalanlıktan eğer $x\alpha < x$ ise $x(\alpha\beta) \neq x$ olur. Böylece $x\alpha = x$ ve $x\beta = x$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in \text{fix}(\alpha) \cap \text{fix}(\beta)$ olsun. Bu durumda $x \in \text{fix}(\alpha)$ ve $x \in \text{fix}(\beta)$ olup $x \in \text{fix}(\alpha\beta)$ elde edilir. Benzer şekilde $\text{fix}(\beta\alpha) = \text{fix}(\alpha) \cap \text{fix}(\beta)$ olduğu gösterilebilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 2.70 $\alpha, \beta \in \mathcal{D}_n$ için

- (i) $\alpha \mathcal{L} \beta \iff \alpha = \beta$,
- (ii) $\alpha \mathcal{R} \beta \iff \text{im}(\alpha) = \text{im}(\beta)$ ve her $a \in \mathbb{Z}^+$ için $\min\{x : x\alpha = a\} = \min\{y : y\beta = a\}$ olur.

İspat: Umar (1992) ye bakınız. □

Sonuç 2.71 $\mathcal{D}_n$ yarıgrubu için $\mathfrak{D} = \mathfrak{L}$ ve $\mathfrak{R} = \mathfrak{D} = \mathfrak{J}$ olur.

İspat: Umar (1992) ye bakınız. □

Teorem 2.72 n . Catalan sayısı C_n olmak üzere $|C_n| = |C_n^+| = C_n$ olur.

İspat: Higgins (1993) veya Laradji ve Umar (2004)e bakınız. $\square$

C_n yarigrubu literatürde Catalan monoid olarak da bilinmekte ve çalışılmaktadır.

Teorem 2.73 $n \geq 1$ için

$$|N(C_n)| = |N(C_n^+)| = C_{n-1}.$$

İspat: Laradji ve Umar (2006) ya bakınız. $\square$

Teorem 2.74 $n \geq 1$

$$|E(C_n)| = |E(C_n^+)| = 2^{n-1}.$$

İspat: Higgins (1993) e bakınız. $\square$

Tez boyunca aşağıdaki sonucu sıkça kullanacağımız için ispatı ile birlikte verelim.

Sonuç 2.75 (i) $\alpha, \beta \in C_n$ için $\text{fix}(\alpha\beta) = \text{fix}(\beta\alpha) = \text{fix}(\alpha) \cap \text{fix}(\beta)$ olur.

(ii) $\alpha \in C_n$ ve $k \in \mathbb{Z}^+$ için $\text{fix}(\alpha^k) = \text{fix}(\alpha)$ olur.

İspat: (i) $C_n, \mathcal{D}_n$ nin bir alt yarigrubu olup Lemma 2.69 dan sonuç açıktır.

(ii) $k = 1$ için sonuç açık olduğundan $k \geq 2$ için $\text{fix}(\alpha^{k-1}) = \text{fix}(\alpha)$ kabul edelim. Bu durumda $x \in \text{fix}(\alpha^k)$ ise azalanlıktan ve kabulden $x\alpha^k = (x\alpha^{k-1})\alpha = x\alpha^2 = x$ elde edilir. Böylece (i) gereği $x\alpha^2 = x\alpha = x$ olup $x \in \text{fix}(\alpha)$ elde edilir. Diğer taraftan $x \in \text{fix}(\alpha)$ ise açıkça $x \in \text{fix}(\alpha^k)$ olup ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 2.76 $\alpha \in C_n$ olsun.

(i) $\alpha \in N(C_n) \iff \text{fix}(\alpha) = \{1\}$ dir.

(ii) $\alpha \in N(C_n^+) \iff \text{fix}(\alpha) = \{n\}$ dir.

İspat: (i) $\Rightarrow \alpha \in N(C_n)$ olsun. O zaman $\alpha^k = \varepsilon$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. O halde Sonuç 2.60 dan $\text{fix}(\alpha^k) = \text{fix}(\varepsilon) = \{1\}$ elde edilir

$\Leftarrow \text{fix}(\alpha) = \{1\}$ olsun. O zaman $\alpha \in C_n$ olduğundan her bir $x \in X_n \setminus \{1\}$ için $x\alpha < x$ olur. Böylece, her bir $x \in X_n$ için $x\alpha^n = 1$ olup $\alpha^n = \varepsilon$ elde edilir. Nilpotent eleman tanımından $\alpha \in N(C_n)$ elde edilir.

(ii) $C_n \cong C_n^+$ olduğundan sonuç açıktır. Ayrıca, Laradji ve Umar (2004) bakınız. $\square$

Önerme 2.77 $1 \leq r \leq k \leq n$ için $J(n, r, k) = |\{\alpha \in C_n : |\text{im}(\alpha)| = r \text{ ve } n\alpha = k\}|$ olmak üzere

(i) $J(n, k, k) = \binom{n-1}{k-1}$,

(ii) $J(n, r, k) = \frac{n-k+1}{n-r+1} \binom{n-1}{r-1} \binom{k-2}{r-2}$ olur.

İspat: Laradji ve Umar (2004) e bakınız. $\square$

Önerme 2.78 (i) $|\{\alpha \in C_n : |\text{im}(\alpha)| = r\}| = N(n, r)$ olur.

(ii) $|\{\alpha \in C_n : n\alpha = k\}| = \frac{n-k+1}{n} \binom{n+k-2}{n-1}$ olur.

(iii) $C_{n,r} = \{\alpha \in C_n : |\text{im}(\alpha)| \leq r\}$ olsun. O zaman $|C_{n,r}| = \sum_{t=1}^r \frac{1}{n-t+1} \binom{n-1}{t-1} \binom{n}{t}$ olur.

(iv) $\text{rank}(C_{n,r}) = \text{idrank}(C_{n,r}) = \binom{n-1}{r-1}$ olur.

İspat: Laradji ve Umar (2004) e bakınız. $\square$

Önerme 2.79 $N(n, k) = \{\alpha \in C_n : |\text{fix}(\alpha)| = k\}$ olsun. O zaman

(i) $N(n, k) = \frac{k}{2n-k} \binom{2n-k}{n}$ olur.

(ii) $N(n+1, k) = N(n, k-1) + 2N(n, k) + N(n, k+1)$ olur.

İspat: Higgins (1993) e bakınız. □

Teorem 2.80 $1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r$ ($1 \leq r$) olmak üzere $Y = \{1, a_2, \dots, a_r\}$ kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi olsun. Her $j = 1, 2, \dots, r-1$ için $k_j = a_{j+1} - a_j$ ve $k_r = n - a_r + 1$ olsun. O zaman

$$|C_{n,Y}| = \prod_{j=1}^r C_{k_j-1}$$

olur.

İspat: Ayık ve ark. (2011) e bakınız.



3. $N(C_n)$ YARIGRUBUNUN m -NİLPOPOTENT ELEMANLARININ SAYISI

X_n üzerindeki doğal sıralama ile $\alpha \in N(C_n)$ olmak üzere

$$A_0 = \{1\}$$

$$A_1 = \{x \in X_n \setminus \{1\} : x\alpha = 1\} \text{ ve}$$

$$A_i = \{x \in X_n : x\alpha \in A_{i-1}\} \quad 2 \leq i \leq n-1 \text{ için}$$

olsun. Ayrıca, m de $A_m \neq \emptyset$ fakat $A_{m+1} = \emptyset$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Bu durumda $\{A_0, A_1, \dots, A_m\}$ kümesi X_n nin bir parçalanışı olur. Üstelik $A_0, A_1, \dots, A_m$ kümeleri X_n nin konveks alt kümeleri olur. Böylece $P(\alpha) = (A_0 < A_1 < \dots < A_m)$, X_n nin bir sıralı parçalanışı olur. Ayrıca, $P(\alpha)$ ve $\text{nil}(\alpha) = m$ sırasıyla α -nın parçalanış sınıfı ve α -nın nil sayısı olarak adlandırılır. Bu notasyonlar ile birlikte $A_0 = \{1\}$ yerine $A_0 = 1$ yazacağız ve böylece α dönüşümünü

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ 1 & 1 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

şekinde göstereceğiz.

Lemma 3.1 $\alpha \in N(C_n)$ olsun. Eğer $1 \leq m \leq n-1$ için $\text{nil}(\alpha) = m$ ise o zaman $\alpha \in N(C_n)$ bir m -nilpotent elemandır.

İspat: $\alpha \in N(C_n)$ ve $1 \leq m \leq n-1$ için $\text{nil}(\alpha) = m$ olsun. O halde X_n kümesinin sıralı bir parçalanışı $P(\alpha) = (\{1\} < A_1 < \dots < A_m)$ olmak üzere 3.1 formunda olduğu gibi

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ 1 & 1 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{pmatrix}$$

alabiliriz. Böylece $1\alpha^m = 1$ ve $A_1\alpha^m = 1$ olduğu kolayca görülür. Diğer taraftan $x \in X_n \setminus (A_1 \cup \{1\})$ için $x \in A_k$ olacak şekilde $k \in \{2, 3, \dots, m\}$ vardır. Bu durumda $x\alpha^{k-1} \neq 1$ ve $x\alpha^k = 1$ olduğu kolayca görülür. Böylece $x\alpha^m = 1$ olur. Her $x \in A_m$ için $x\alpha^{m-1} \neq 1$ olduğundan α bir m -nilpotent elemandır. $\square$

$\alpha \in N(C_n)$ nin 1-nilpotent olması için gerek ve yeter koşul $\alpha = \varepsilon$ olmasıdır. Böylece $N(C_n)$ deki 1-nilpotent elemanların sayısı 1 olup m -nilpotent elemanların sayısını $2 \leq m \leq n-1$ için düşünmek yeterlidir.

Teorem 3.2 $2 \leq m \leq n-1$ olmak üzere $N(C_n)$ yarıgrubundaki m -nilpotent elemanlarının sayısı

$$\sum_{(s_1, \dots, s_m) \in S_{(n-1, m)}} \prod_{i=2}^m \binom{s_i + s_{i-1} - 1}{s_i}$$

olur.

İspat: Eğer α bir m -nilpotent eleman ise $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ 1 & 1 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \end{pmatrix}$ ve $P(\alpha) = (\{1\} < A_1 < \cdots < A_m)$ kümesi X_n nin bir parçalanışı olur. Bu durumda $(|A_1|, |A_2|, \dots, |A_m|) \in S_{n-1, m}$ olduğu kolayca görülür. Üstelik, her bir $2 \leq i \leq m$ için α nın A_i üzerindeki kısıtlanması $\alpha|_{A_i} : A_i \rightarrow A_{i-1}$ sıra koruyan bir dönüşümdür.

Tersine, herhangi bir $(s_1, s_2, \dots, s_m) \in S_{n-1, m}$ için $2 \leq i \leq m$ olmak üzere

$$A_1 = \{2, \dots, s_1 + 1\} \text{ ve}$$

$$A_i = \{(s_1 + \cdots + s_{i-1} + 1) + 1, \dots, (s_1 + \cdots + s_{i-1} + 1) + s_i\}$$

olsun. Şimdi parçalanış sınıfı $\{\{1\} < A_1 < \cdots < A_m\}$ olan $N(C_n)$ deki m -nilpotent elemanlarının sayısının $\prod_{i=2}^m \binom{s_i + s_{i-1} - 1}{s_i}$ olduğunu göstereceğiz. $\alpha \in N(C_n)$ ve $P(\alpha) = (\{1\} < A_1 < \cdots < A_m)$ olsun. Kolayca görülür ki α

bir m -nilpotenttir ancak ve ancak her bir $2 \leq i \leq m$ için α nın A_i üzerindeki kısıtlanması $\alpha|_{A_i} : A_i \rightarrow A_{i-1}$ sıra koruyan bir dönüşümdür. Her bir $2 \leq i \leq m$ için A_i den A_{i-1} ye $\binom{s_i+s_{i-1}-1}{s_i}$ tane sıra koruyan bir dönüşüm vardır. Bu durumda parçalanış sınıfı $\{\{1\} < A_1 < \dots < A_m\}$ olan $N(C_n)$ deki m -nilpotent elemanlarının sayısı $\prod_{i=2}^m \binom{s_i+s_{i-1}-1}{s_i}$ olur. Böylece, $N(C_n)$ deki m -nilpotent elemanlarının sayısı $\sum_{(s_1, \dots, s_m) \in S_{(n-1, m)}} \prod_{i=2}^m \binom{s_i+s_{i-1}-1}{s_i}$ olur. $\square$

Şimdi $N(C_n)$ nin 2 , $n-1$ ve $n-2$ -nilpotent elemanlarının sayılarını yukarıdaki formülü kullanarak sırasıyla basitleştireceğiz. $s_1, s_2 \geq 1$ olmak üzere $s_1 + s_2 = n-1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi $\{(k, n-1-k) \mid k=1, \dots, n-2\}$ olduğundan Teorem 3.2 kullanılarak 2-nilpotent elemanlarının sayısının

$$\sum_{(k, n-1-k) \in S_{(n-1, 2)}} \binom{n-1-k+k-1}{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} = 2^{n-2} - 1$$

olduğu elde edilir.

$s_1, s_2, \dots, s_{n-1} \geq 1$ olmak üzere $s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} = n-1$ denkleminin tek çözümü $(1, 1, \dots, 1, 1)$ ve $\binom{1+1-1}{1} = 1$ olduğundan Teorem 3.2 gereği $n-1$ -nilpotent elemanlarının sayısı 1 olup bu tek eleman aşağıdaki gibidir:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

$s_1, s_2, \dots, s_{n-2} \geq 1$ olmak üzere $s_1 + s_2 + \dots + s_{n-2} = n-1$ denkleminin tüm pozitif tamsayı çözümlerinin kümesi

$$\{(1, 1, \dots, 1, 2), (1, \dots, 1, 2, 1), \dots, (1, 2, 1, \dots, 1), (2, 1, \dots, 1, 1)\}$$

olur. Ayrıca, $\binom{1+1-1}{1} = 1$, $\binom{2+1-1}{2} = 1$ ve $\binom{1+2-1}{1} = 2$ olduğundan $(1, 1, \dots, 1, 2)$ çözümü için bir tane $n-2$ -nilpotent eleman vardır ve $s_1 +$

$s_2 + \cdots + s_{n-2} = n - 1$ denkleminin diğer tüm çözümleri için iki tane $(n - 2)$ -nilpotent eleman vardır. Böylece $(n - 2)$ -nilpotent elemanların sayısı $2n - 5$ olur.

Tablo 3.1 Bazı Pozitif Tamsayılar İçin $N(C_n)$ deki m -Nilpotent Elemanların Sayısı

$n \backslash m$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$ N(C_n) $
1	1									1
2	1	0								1
3	1	1	0							2
4	1	3	1	0						5
5	1	7	5	1	0					14
6	1	15	18	7	1	0				42
7	1	31	57	33	9	1	0			132
8	1	63	169	132	52	11	1	0		429
9	1	127	482	484	247	75	13	1	0	1430

4. $C_{n,Y}$ KÜMESİNİN m -POTENT ELEMANLARININ SAYISI

$Y = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r\}$ kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi olsun. Herhangi bir $\alpha \in C_{n,Y}$ ve her $1 \leq i \leq r-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_r = n - a_r + 1$ olmak üzere

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & a_{j+1} - a_j \\ 1 & (a_j + 1)\alpha - a_j + 1 & \dots & (a_{j+1} - 1)\alpha - a_j + 1 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\alpha_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n - a_r + 1 \\ 1 & (a_r + 1)\alpha - a_r + 1 & \dots & (n)\alpha - a_r + 1 \end{pmatrix}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. O zaman açıkça her $1 \leq j \leq r$ için $\alpha_j \in N(C_{k_j})$ olur. Şimdi

$$f : C_{n,Y} \rightarrow N(C_{k_1}) \times N(C_{k_2}) \times \dots \times N(C_{k_r}) \quad (4.1)$$

dönüşümünü yukarıda tanımlanan α_i -ler ile $\alpha \in C_{n,Y}$ için $\alpha f = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ sıralı r -lisi olarak tanımlayalım. Bu durumda f dönüşümünün iyi tanımlı bir bijeksiyon olduğu açıktır. f dönüşümünün tanımından aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.1 $\alpha \in C_{n,Y}$ ve her bir $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $\alpha_i \in N(C_{k_i})$ bir m_i -potent (m_i -nilpotent) eleman olsun. O zaman α nın bir m -potent olması için gerek ve yeter koşul $\max(m_1, m_2, \dots, m_r) = m$ olmasıdır. $\square$

$C_{n,\{1\}} = N(C_n)$ olduğundan $C_{n,\{1\}}$ kümesindeki m -potent elemanların sayısı Teorem 3.1 de bulduğumuz $N(C_n)$ yarıgrubundaki m -nilpotent elemanların sayısına eşittir. Dolayısıyla $|Y| \geq 2$ durumunu düşünmek yeterlidir.

Teorem 4.2 $Y = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_r\}$ kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi ve her $1 \leq i \leq r-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_r = n - a_r + 1$ olsun. O zaman $C_{n,Y}$ kümesindeki 1-potent elemanların sayısı 1 ve $1 \leq i \leq r-1$ için $N(C_{k_i})$ yarıgrubundaki q -nilpotent elemanların sayısı $t_{i,q} \geq 0$ olmak üzere $m \geq 2$ için $C_{n,Y}$ kümesindeki m -potent elemanların sayısı

$$\prod_{i=1}^r \sum_{q=1}^m t_{i,q} - \prod_{i=1}^r \sum_{q=1}^{m-1} t_{i,q}$$

olur.

İspat: Açıkça X_n nin herhangi bir $Y = \{1, a_2, \dots, a_r\}$ alt kümesi için fix kümesi ve görüntü kümesi Y olan C_n yarıgrubunun idempotent (1-potent) eleman sayısı 1 olur.

Kabul edelim ki $m \geq 2$ olsun. Lemma 4.1 ve (4.1) de tanımlanan bijeksiyondan $1 \leq i \leq r-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_r = n - a_r + 1$ olmak üzere $N(C_{k_1}) \times N(C_{k_2}) \times \dots \times N(C_{k_r})$ deki m -potent elmanların sayısını saymak yeterlidir.

Her $1 \leq i \leq r-1$ ve $1 \leq q \leq m$ için

$$Q_{i,q} = \{\alpha \in N(C_{k_i}) : \alpha \text{ bir } q\text{-nilpotent}\}$$

olarak tanımlayalım.

Şimdi

$$Q_i = \bigcup_{q=1}^m Q_{i,q} \quad \text{ve} \quad \mathcal{R}_i = \bigcup_{q=1}^{m-1} Q_{i,q}.$$

olarak tanımlayalım. O halde kolayca görülür ki

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in N(C_{k_1}) \times N(C_{k_2}) \times \dots \times N(C_{k_r})$$

bir m -potent elemandır ancak ve ancak

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r) \in ((Q_1 \times \dots \times Q_r) \setminus (\mathcal{R}_1 \times \dots \times \mathcal{R}_r)).$$

Böylece, Lemma 4.1 den $C_{n,Y}$ kümesindeki m -potent elemanların sayısı

$$\prod_{i=1}^r \sum_{q=1}^m t_{i,q} - \prod_{i=1}^r \sum_{q=1}^{m-1} t_{i,q}$$

olur. □

Herhangi bir $\alpha \in C_n$ için $1\alpha = 1 \in \text{im}(\alpha)$ ve $X_n \setminus \{1\}$ kümesinin öz alt kümelerinin sayısı $2^{n-1} - 1$ olduğundan Teorem 4.2 gereği C_n yarıgrubundaki 1-potent elemanların sayısı $2^{n-1} - 1$ olur.

Eğer $\alpha \in C_n$ bir $(n-2)$ -potent eleman ise o zaman açıkça $|\text{fix}(\alpha)| \leq 2$ olur. Aslında $\text{fix}(\alpha) = \{1\}$, $\text{fix}(\alpha) = \{1, 2\}$ veya $\text{fix}(\alpha) = \{1, n\}$ olur. Böylece Teorem 3.2 ve Teorem 4.2 gereği C_n yarıgrubundaki $(n-2)$ -potent elemanların sayısı

$$(2n-5) + 1 + 1 = 2n-3$$

olur. Ayrıca, Teorem 3.2 ve Teorem 4.2 den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.3 $a_1 = 1 < a_2 < \dots < a_r$ ($r > 1$) olmak üzere $Y = \{1, a_2, \dots, a_r\}$ kümesi X_n nin herhangi bir alt kümesi olsun. Eğer $1 \leq i \leq r-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_r = n - a_r + 1$ ise o zaman $C_{n,Y}$ kümesindeki 2-potent elemanların sayısı

$$\left(\prod_{k_i \geq 2} 2^{k_i-2} \right) - 1$$

olur. □

Örnek 4.4 Bu örnekte C_5 yarıgrubundaki 2-potent elemanların sayısını hesaplayacağız. Eğer $\alpha \in C_5$ ise o zaman $\text{fix}(\alpha)$ kümesinin kardinalitesi en

fazla 3 olur. Eğer $|\text{fix}(\alpha)| = 1$ ise o zaman Teorem 3.2 den C_5 yarigrubunun fix elemanı bir tane olan 7 tane 2-potent elemanı vardır. Eğer $|\text{fix}(\alpha)| = 2$ ise o zaman $\text{fix}(\alpha)$ kümesi

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\} \text{ ve } \{1,5\}$$

kümelerinden biri olabilir. Bu durumda Sonuç 4.3 den C_5 yarigrubunun fix elemanı iki tane olan 8 tane 2-potent elemanı vardır. Eğer $|\text{fix}(\alpha)| = 3$ ise o zaman $\text{fix}(\alpha)$ kümesi

$$\{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\} \text{ ve } \{1,4,5\}$$

kümelerinden biridir. Bu durumda Sonuç 4.3 den C_5 yarigrubunun fix elemanı üç tane olan 3 tane 2-potent elemanı vardır. Böylece, C_5 yarigrubundaki 2-potent elemanların sayısı 18 olur.

Tablo 4.1 Bazı Pozitif Tamsayıları İçin C_n deki m -Potent Elemanların Sayısı

$n \backslash m$	1	2	3	4	$ C_n $
1	1				1
2	2				2
3	4	1			5
4	8	5	1		14
5	16	18	7	1	42

5. C_n YARIGRUBUNUN MAKSİMUM NİLPOTENT ALT YARIGRUPLARININ KARDİNALİTELERİ VE RANKLARI

$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ 1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \in C_n$ olsun. O zaman α nın idempotent olması için gerek ve yeter koşul $a_1 = 1$ olmak üzere $1 \leq i \leq p$ için $\min A_i = a_i$ olmasıdır. Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ için

$$C_n(\xi) = \{\alpha \in C_n : \text{bazı } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \alpha^m = \xi\}$$

olsun. Bu durumda $C_n(\varepsilon) = N(C_n)$ olur.

Önerme 5.1 $\xi \in E(C_n)$ ve $\alpha \in C_n$ olsun. O zaman $\alpha \in C_n(\xi)$ olması için gerek ve yeter koşul $\text{fix}(\alpha) = \text{fix}(\xi)$ olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\alpha \in C_n(\xi)$ olsun. Eğer $\alpha = \xi$ ise o zaman sonuç açıktır. O halde $\alpha \neq \xi$ kabul edelim. O zaman $\alpha^m = \xi$ olacak şekilde $m \geq 2$ tamsayısı vardır. Böylece $\text{fix}(\alpha) \subseteq \text{fix}(\alpha^m) = \text{fix}(\xi)$ olur.

Herhangi bir $i \in \text{fix}(\xi)$ için $i\alpha = j$ olsun. $\alpha, \alpha^{m-1} \in C_n$ olduğundan $i\alpha = j \leq i$ ve

$$i = i\xi = i\alpha^m = (i\alpha)\alpha^{m-1} = j\alpha^{m-1} \leq j \leq i$$

olur. Böylece $j = i \in \text{fix}(\alpha)$ ve dolayısıyla $\text{fix}(\xi) \subseteq \text{fix}(\alpha)$ olur. Böylece $\text{fix}(\alpha) = \text{fix}(\xi)$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $\text{fix}(\alpha) = \text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_p\}$ olsun. $p = 1$ için $\alpha = \xi = \varepsilon$ olduğu açıktır. Şimdi $p \geq 2$ için

$$\xi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ 1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

41

olsun. Ayrıca, $1 \leq i \leq p$ için $m_i = |A_i| - 1$ alalım. O zaman her $a \in A_i \setminus \{a_i\}$ için $a\alpha \neq a$ ve dolayısıyla $a\alpha < a$ olur. Buradan her $a \in A_i$ için $a\alpha^{m_i} = a_i$ elde edilir. Eğer

$$m = \max\{|A_i| - 1 : 1 \leq i \leq p\}$$

olarak alınır ise o zaman $\alpha^m = \xi$ olduğu kolayca görülür. Böylece, $\alpha \in C_n(\xi)$ elde edilir. $\square$

S sonlu ve sıfır elemanlı bir yarıgrup olsun. Ganyushkin ve Mazorchuk (2009) aşağıdaki koşulların denk olduğu göstermişlerdir.

- (i) S nilpotenttir,
- (ii) her $a \in S$ nilpotenttir ve
- (iii) S nin tek idempotent elemanı sıfırdır.

Önerme 5.2 $\xi \in E(C_n)$ için $C_n(\xi)$, C_n nin sıfır elemanı ξ olan maksimum nilpotent alt yarıgrubudur.

İspat: İlk olarak $C_n(\xi)$ nin C_n nin bir alt yarıgrubu olduğunu gösterelim. $\alpha, \beta \in C_n(\xi)$ olsun. O zaman Önerme 5.1 gereği

$$i(\alpha\beta) = (i\alpha)\beta = i\beta = i$$

olup $i \in \text{fix}(\alpha\beta)$ elde edilir. Böylece

$$\text{fix}(\xi) \subseteq \text{fix}(\alpha\beta)$$

olur.

$i \in \text{fix}(\alpha\beta)$ için $i\alpha = j$ olsun. $\alpha, \beta \in C_n$ olduğundan $i\alpha = j \leq i$ olur.

Buradan

$$i = i(\alpha\beta) = (i\alpha)\beta = j\beta \leq i\beta \leq i$$

olup $i\beta = i$ elde edilir. Önerme 5.1 den $i \in \text{fix}(\xi)$ olup

$$\text{fix}(\alpha\beta) \subseteq \text{fix}(\xi)$$

elde edilir. Böylece $\text{fix}(\alpha\beta) = \text{fix}(\xi)$ olduğunu gösterdik. Bu durumda Önerme 5.1 den $\alpha\beta \in C_n(\xi)$ olup $C_n(\xi)$, C_n nin bir alt yarıgrubudur.

Şimdi ξ nin $C_n(\xi)$ yarıgrubunun sıfır elemanı olduğunu gösterelim. $\alpha \in C_n(\xi)$ ve $\text{fix}(\alpha) = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_p\}$ olsun. ξ bir idempotent olduğundan ve Önerme 5.1 den her $1 \leq i \leq p$ için $a_i = \min A_i$ olmak üzere

$$\xi = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \\ 1 & a_2 & \dots & a_p \end{pmatrix}$$

alalım. Bu durumda her $1 \leq i \leq p$ için $A_i\alpha \subseteq A_i$ ve $a_i \in A_i$ olduğundan

$$A_i(\alpha\xi) = a_i \text{ ve } A_i(\xi\alpha) = a_i\alpha = a_i$$

elde edilir. Böylece $\alpha\xi = \xi = \xi\alpha$ olup $C_n(\xi)$ yarıgrubunun sıfır elemanının ξ olduğu gösterilmiş olur.

Ayrıca, nilpotent yarıgrup tanımından veya nilpotent yarıgrup ile ilgili verilen bu önermenin üstünde verilen gerçekten hareketle $C_n(\xi)$ nin bir nilpotent yarıgrup olduğu açıktır. T , C_n nin sıfır elemanı ξ olan bir nilpotent alt yarıgrubu ise o zaman açıkça T , $C_n(\xi)$ yarıgrubunun bir alt kümesidir. Böylece $C_n(\xi)$, C_n nin sıfır elemanı ξ olan maksimum nilpotent alt yarıgrubudur. $\square$

5.1. $N(C_n)$ Yarıgrubunun Minimum Doğuray Kümesi ve Rankı

$\alpha \in N(C_n)$ olmak üzere her $i \geq 2$ için $i\alpha \leq i-1$ olur. Böylece

$$N(C_2) = \left\{ \begin{pmatrix} \{1,2\} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olduğu kolayca görülür.

Lemma 5.3 $n \geq 3$ için

$$Y = \{\alpha \in N(C_n) : \text{en az bir } i \geq 3 \text{ vardır öyle ki } i\alpha = i - 1\}$$

olarak tanımlayalım. O zaman $Y = N(C_n) \setminus N(C_n)^2$ olur. Böylece Y kümesi $N(C_n)$ yarıgrubunun ayrılmaz elemanlarının bir kümesidir. Üstelik, her $\alpha \in N(C_n)^2$ için $3\alpha = 1$ olur.

İspat: $\beta, \gamma \in N(C_n)$ olsun. O zaman her $i \geq 3$ için

$$i(\beta\gamma) = (i\beta)\gamma \leq (i-1)\gamma \leq i-2$$

olur. Bu durumda $Y = N(C_n) \setminus N(C_n)^2$ olduğu aşıkardır. Böylece Y kümesi $N(C_n)$ yarıgrubunun ayrılmaz elemanlarının bir kümesi olup her $\alpha \in N(C_n)^2$ için $3\alpha = 1$ olur. □

Teorem 5.4 $n \geq 3$ için

$$Y = \{\alpha \in N(C_n) : \text{en az bir } i \geq 3 \text{ vardır öyle ki } i\alpha = i - 1\}$$

olsun. O zaman Y kümesi $N(C_n)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesidir. Üstelik, $N(C_n) = Y \cup Y^2$ olur.

İspat: Lemma 5.3 den her $\alpha \in N(C_n)^2$ için $\alpha \in \langle Y \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. Herhangi bir $\alpha \in N(C_n)^2$ için

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ 1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

olsun. O zaman Lemma 5.3 den $3 \in A_1$ ve $a_p \leq n-2$ olur. Her $2 \leq i \leq p$ için $b_i = \max A_{i-1}$, $b_{p+1} = n$, $B_1 = \{1, \dots, b_2 - 1\}$ ve $B_i = \{b_i, \dots, b_{i+1} - 1\}$ olmak

üzere

$$\beta = \begin{pmatrix} \{1,2\} & A_1 \setminus \{1,2\} & A_2 & \cdots & A_p \\ 1 & 2 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p & n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_p & n-1 \end{pmatrix}$$

olarak alınır ise $\beta \in N(C_n)$ olduğu aşıkardır. Ayrıca, $a_i \leq (\min A_i) - 2$ olduğundan Lemma 5.3 gereği her $2 \leq i \leq p$ için $a_i \leq (\min B_i) - 1$ olur. Böylece, $\gamma \in N(C_n)$ olup $\alpha = \beta\gamma$ elde edilir. Üstelik,

$$3 \in A_1 \setminus \{1,2\}, 3\beta = 2 \text{ ve } n\gamma = n-1$$

olduğundan $\beta, \gamma \in Y$ olduğu aşıkardır. Böylece $\alpha \in \langle Y \rangle$ ve $N(C_n) = Y \cup Y^2$ elde edilir. □

Teorem 5.5 $n \geq 3$ için $\text{rank}(N(C_n)) = C_{n-1} - C_{n-2}$ olur.

İspat: $N(C_n)$ yarigrubunun rankını bulmak için Teorem 5.4 den $Y = N(C_n) \setminus N(C_n)^2$ kümesinin kardinalitesini bulmak yeterlidir. $|N(C_n)| = C_{n-1}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$|N(C_n) \setminus N(C_n)^2| = |N(C_n)| - |N(C_n)^2|$$

olduğundan $N(C_n)^2$ kümesinin kardinalitesini bulmak yeterlidir. Eğer $\alpha \in N(C_n)^2$ ise o zaman her $i \geq 3$ için $i\alpha \leq i-2$ olur. Şimdi $\alpha \in N(C_n)^2$ alalım. Her $2 \leq i \leq p$ için

$$A_1 = \{1, 2, 3, \dots, b_1\}, A_i = \{b_{i-1} + 1, \dots, b_i\}, B_1 = \{1, 2, \dots, b_1 - 1\}$$

ve $B_i = \{b_{i-1}, \dots, b_i - 1\}$ ve $b_1 > 3, b_p = n$ olmak üzere

$$\alpha = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_p \\ 1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix} \text{ ve } \beta = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_p \\ 1 & a_2 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Buradan

$$f : N(C_n)^2 \rightarrow N(C_{n-1})$$

dönüşümü $\alpha f = \beta$ olarak tanımlanır ise f dönüşümünün iyi tanımlı bijeksiyon bir dönüşüm olduğu kolayca görülür. Ayrıca, $|N(C_n)^2| = |N(C_{n-1})| = C_{n-2}$ olup

$$\text{rank}(N(C_n)) = C_{n-1} - C_{n-2}$$

elde edilir. □

Lemma 5.6 S sonlu bir nilpotent yarıgrup olsun. O zaman $A = S \setminus S^2$ kümesi S nin minimum doğuray kümesidir.

İspat: Açıkça A kümesinin elemanları indirgenemezdir. Kabul edelim ki $x \in S$ fakat $x \notin \langle A \rangle$ olsun. O zaman $0, S$ nin sıfır elemanı olmak üzere $x \neq 0$ olur. Eğer $x = 0$ olsaydı A nın elemanları nilpotent olduğundan $x \in \langle A \rangle$ çelişkisi elde edilirdi. Ayrıca, $x \notin A$ olduğundan $y \notin \langle A \rangle$ veya $z \notin \langle A \rangle$ olmak üzere $x = yz$ yazabiliriz. Eğer bu çarpımı $\langle A \rangle$ yarı grubuna ait olmayan elemanlar ile devam ettirsek nilpotentlik derecesinden büyük bir uzunluk elde edeceğimizden dolayı $x = 0$ çelişkisi elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Böylece $N(C_n)$ yarı grubunun rankını hesaplamak için Teorem 5.4 ün alternatifi olarak $N(C_n) \setminus N(C_n)^2$ kümesinin kardinalitesini bulduğumuz Teorem 5.5 yeterli olur.

Örnek 5.7 Teorem 5.4 den $N(C_5)$ yarıgrubunun minimum doğuray kümesi

$$Y = \left\{ \begin{pmatrix} \{1,2,3,4\} & 5 \\ & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & 4 & 5 \\ & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4,5\} \\ & 1 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & 4 & 5 \\ & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3,4,5\} \\ & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3,4\} & 5 \\ & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \begin{pmatrix} \{1,2\} & \{3,4\} & 5 \\ & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & \{4,5\} \\ & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & 4 & 5 \\ & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$

olur. Ayrıca, $C_4 - C_3 = 9 = |Y|$ elde edilir. □

5.2. $C_n(\xi)$ Yarıgrubunun Minimum Doğuray Kümesi ve Rankı

İlk olarak $C_n(\xi)$ yarıgrubunun kardinalitesini bulalım.

$\xi \in E(C_n)$ olmak üzere

$$C_n(\xi) = \{\alpha \in C_n : \text{bazı } m \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } \alpha^m = \xi\}$$

olsun. Önerme 5.2 gereği $C_n(\xi)$, C_n nin sıfır elemanı ξ olan maksimum nilpotent alt yarıgrubudur.

$\xi \in E(C_n)$ için $\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < \dots < a_p\}$ olarak alalım. Eğer $p = 1$ ise o zaman $C_n(\xi) = N(C_n)$ olup $|C_n(\xi)| = C_{n-1}$ olduğunu biliyoruz. O halde $p \geq 2$ kabul edelim. Herhangi bir $\alpha \in C_n(\xi)$ için $1 \leq i \leq p-1$ olmak üzere

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & a_{i+1} - a_i \\ 1 & (a_i + 1)\alpha - a_i + 1 & \dots & (a_{i+1} - 1)\alpha - a_i + 1 \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\alpha_p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n - a_p + 1 \\ 1 & (a_p + 1)\alpha - a_p + 1 & \dots & (n)\alpha - a_p + 1 \end{pmatrix}$$

dönüşümlerini tanımlayalım. Şimdi $1 \leq i \leq p-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_p = n - a_p + 1$ olsun. O zaman her $1 \leq i \leq p$ için $\alpha_i \in N(C_{k_i})$ olur. Buradan

$$f : C_n(\xi) \rightarrow N(C_{k_1}) \times N(C_{k_2}) \times \cdots \times N(C_{k_p}) \quad (5.1)$$

dönüşümü $\alpha f = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ olarak tanımlanır ise f dönüşümünün iyi tanımlı bir bijeksiyon olduğu kolayca görülür. Böylece aşağıdaki teoremi bir sonuç olarak verebiliriz.

Teorem 5.8 Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ için

$$\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_p\}$$

olsun. O zaman her $1 \leq i \leq p-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_p = n - a_p + 1$ olmak üzere

$$|C_n(\xi)| = \prod_{i=1}^p C_{k_i-1}$$

olur. □

Şimdi herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ için $C_n(\xi)$ yarıgrubunun rankını bulmaya odaklanacağız. Eğer $\xi = 1_n$ ise o zaman $C_n(\xi) = \{1_n\}$ olur. Eğer $\text{fix}(\xi) = \{1\}$ ise $C_n(\xi) = N(C_n)$ olup Teorem 5.5 de $N(C_n)$ yarıgrubunun rankını bulmuştuk. O halde $2 \leq p \leq n-1$ kabul edelim. Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ için $\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_p\}$ olsun. Eğer her $1 \leq i \leq p$ için $a_{p+1} = n$ olmak üzere $|a_{i+1} - a_i| \leq 2$ ise o zaman $C_n(\xi) = \{\xi\}$ olur. Bu yüzden $a_{p+1} = n$ olmak üzere en az bir $1 \leq i \leq p$ için $|a_{i+1} - a_i| \geq 3$ kabul edeceğiz.

Lemma 5.9 Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ ve $2 \leq p \leq n-1$ için

$$\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \cdots < a_p\}$$

olsun. $a_{p+1} = n$ olmak üzere en az bir $1 \leq i \leq p$ için $|a_{i+1} - a_i| \geq 3$ kabul edelim.
Eğer

$$Y = \{\alpha \in C_n(\xi) : 1 \leq i \leq p-1 \text{ ve } a_i + 2 \leq k \leq a_{i+1} - 1 \text{ veya} \\ a_p + 2 \leq k \leq n \text{ olacak şekilde } i \text{ ve } k \text{ vardır öyle ki } k\alpha = k-1\}$$

olarak tanımlanır ise o zaman $Y = C_n(\xi) \setminus C_n(\xi)^2$ olur. Ayrıca, $1 \leq i \leq p-1$ için $a_i + 2 \leq a_{i+1} - 1$ veya $a_p + 2 \leq n$ ise her $\alpha \in C_n(\xi)^2$ için $(a_i + 2)\alpha = a_i$ olur.

İspat: $\beta, \gamma \in C_n(\xi)$ olsun. Açıkça, her $1 \leq i \leq p$ için $a_i(\beta\gamma) = a_i$ olur. Eğer $a_{i+1} \neq a_i + 1 \leq n$ ise $(a_i + 1)(\beta\gamma) = a_i$ olur. Ayrıca, eğer $a_i + 2 \leq k \leq a_{i+1} - 1$ olacak şekilde bir k tamsayısı var ise o zaman

$$k(\beta\gamma) = (k\beta)\gamma \leq (k-1)\gamma \leq k-2$$

elde edilir. Böylece $Y = C_n(\xi) \setminus C_n(\xi)^2$ olduğu aşıkardır. Üstelik, eğer $a_i + 2 \leq a_{i+1} - 1$ veya $a_p + 2 \leq n$ ise her $\alpha \in C_n(\xi)^2$ için $(a_i + 2)\alpha = a_i$ elde edilir. $\square$

Teorem 5.10 Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ ve $2 \leq p \leq n-1$ için

$$\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_p\}$$

olsun. $a_{p+1} = n$ olmak üzere en az bir $1 \leq i \leq p$ için $|a_{i+1} - a_i| \geq 3$ kabul edelim.
Eğer

$$Y = \{\alpha \in C_n(\xi) : 1 \leq i \leq p-1 \text{ ve } a_i + 2 \leq k \leq a_{i+1} - 1 \text{ veya} \\ a_p + 2 \leq k \leq n \text{ olacak şekilde } i \text{ ve } k \text{ vardır öyle ki } k\alpha = k-1\}$$

olarak alınır ise o zaman Y kümesi $C_n(\xi)$ yarigrubunun doğuray kümesi olur.

İspat: Lemma 5.9 dan her $\alpha \in C_n(\xi)^2$ için $\alpha \in \langle Y \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. $\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_p\}$ olsun. En az $1 \leq i \leq p$ için $|a_{i+1} - a_i| \geq 3$ ve $a_{p+1} = n$ olsun. Şimdi $\alpha \in C_n(\xi)^2$ olsun. Bu durumda $a_{i_0+1} \geq a_{i_0} + 3$ olacak şekilde en az bir $1 \leq i_0 \leq p$ vardır. Önerme 5.1 den $\text{fix}(\xi) = \text{fix}(\alpha) \subseteq \text{im}(\alpha)$ olur. Şimdi

$$\{a_{i_0} = b_1 < \dots < b_r\} = \{a_{i_0}, a_{i_0} + 1, \dots, a_{i_0+1} - 1\} \cap \text{im}(\alpha)$$

olsun. Ayrıca, $1 \leq i \leq r$ için $B_i = b_i \alpha^{-1}$ olsun. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^r B_i = a_{i_0} \xi^{-1}$ elde edilir. Şimdi $c_1 = b_1$ ve $2 \leq i \leq r$ için $c_i = \max B_{i-1}$ olsun. Buradan aşağıdaki kümeleri tanımlayalım:

$$\begin{aligned} C_i &= \{c_i, \dots, c_{i+1} - 1\} \quad (1 \leq i \leq r-1), \\ C_r &= \{c_r, \dots, a_{i_0+1} - 2\}, \\ D &= X_n \setminus \left(a_{i_0} \xi^{-1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^p \{a_i, a_i + 1\} \right) \right) \text{ ve} \\ E &= X_n \setminus (a_{i_0} \xi^{-1} \cup \text{fix}(\alpha)). \end{aligned}$$

Bu durumda $b_r \leq a_{i_0+1} - 2$ ve $a_{i_0} = b_1, b_1 + 1, b_1 + 2 \in B_1$ olur. Şimdi β ve γ dönüşümlerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$x\beta = \begin{cases} b_1 & \text{eğer } x \in \{b_1, b_1 + 1\} \text{ ise} \\ b_1 + 1 & \text{eğer } x \in B_1 \setminus \{b_1, b_1 + 1\} \text{ ise} \\ c_i & \text{eğer } 2 \leq i \leq r \text{ için } x \in B_i \text{ ise} \\ x & \text{eğer } x \in \text{fix}(\alpha) \text{ ise} \\ x - 1 & \text{eğer } x - 1 \in \text{fix}(\alpha) \text{ ve } x \notin \text{fix}(\alpha) \text{ ise} \\ x\alpha + 1 & \text{eğer } x \in D \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$x\gamma = \begin{cases} b_i & \text{eğer } 1 \leq i \leq r \text{ için } x \in C_i \text{ ise} \\ a_{i_0+1} - 2 & \text{eğer } x = a_{i_0+1} - 1 \text{ ise} \\ x & \text{eğer } x \in \text{fix}(\alpha) \text{ ise} \\ x - 1 & \text{eğer } x \in E \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda, eğer $x - 1, x \notin \text{fix}(\alpha)$ ise o zaman $x\alpha \leq x - 2$ olduğu Lemma 5.9 kullanılarak kolayca görülür. Böylece $\beta, \gamma \in C_n(\xi)$ olduğu aşikar olup $\alpha = \beta\gamma$ elde edilir. Ayrıca, $(b_1 + 2)\beta = b_1 + 1$ ve $(a_{i_0+1} - 1)\gamma = a_{i_0+1} - 2$ olduğundan $\beta, \gamma \in Y$ olur ki buradan $\alpha \in \langle Y \rangle$ olduğu elde edilir. $\square$

Şimdi $C_n(\xi)$ maksimum nilpotent yarıgrubunun rankını bulacağımız aşağıdaki teoremden $n = 0$ ve $n = -1$ olması durumunu da düşünmek gerektiğinden gösterimde uygunluk için

$$C_0 = N(C_0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

olduğunu kabul edeceğiz. Ayrıca, n . Catalan sayısı C_n olmak üzere $n = -1$ ve $n = 0$ için

$$C_{-1} = C_0 = 1$$

alacağız.

Teorem 5.11 Herhangi bir $\xi \in E(C_n)$ ve $2 \leq p \leq n - 1$ için

$$\text{fix}(\xi) = \{1 = a_1 < a_2 < \dots < a_p\}$$

olsun. $a_{p+1} = n$ olmak üzere en az bir $1 \leq i \leq p$ için $|a_{i+1} - a_i| \geq 3$ kabul edelim.

$1 \leq i \leq p - 1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_p = n - a_p + 1$ olmak üzere

$$\text{rank}(C_n(\xi)) = \left(\prod_{i=1}^p C_{k_i-1} \right) - \left(\prod_{i=1}^p C_{k_i-2} \right)$$

olur.

İspat: Teorem 5.10 dan $Y = C_n(\xi) \setminus C_n(\xi)^2$ kümesinin kardinalitesini bulmak yeterlidir. $|C_n(\xi) \setminus C_n(\xi)^2| = |C_n(\xi)| - |C_n(\xi)^2|$ olduğunu biliyoruz. Teorem 5.8 de

$$|C_n(\xi)| = \prod_{i=1}^p C_{k_i-1}$$

olduğunu gösterdik. Şimdi (5.1) de verilen dönüşümü modifiye ederek $C_n(\xi)^2$ kümesinin kardinalitesini bulacağız. Herhangi bir $\alpha \in C_n(\xi)^2$ elemanını ele alıp $1 \leq i \leq p-1$ için $k_i = a_{i+1} - a_i$ ve $k_p = n - a_p + 1$ olmak üzere aşağıdaki dönüşümleri tanımlayalım.

$$\alpha_i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{eğer } k_i = 1, 2 \text{ ise} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k_i - 1 \\ 1 & (a_i + 2)\alpha - a_i + 1 & \cdots & (a_{i+1} - 1)\alpha - a_i + 1 \end{pmatrix} & \text{eğer } k_i \geq 3 \text{ ise} \end{cases}$$

ve

$$\alpha_p = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{eğer } k_p = 1, 2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k_p - 1 \text{ ise} \\ 1 & (a_p + 2)\alpha - a_p + 1 & \cdots & (n)\alpha - a_p + 1 \end{pmatrix} & \text{eğer } k_p \geq 3 \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu durumda her $1 \leq i \leq p$ için $\alpha_i \in N(C_{k_i-1})$ olduğu açıktır. Böylece

$$f : C_n(\xi)^2 \rightarrow N(C_{k_1-1}) \times N(C_{k_2-1}) \times \cdots \times N(C_{k_p-1})$$

dönüşümü $\alpha f = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p)$ olarak tanımlanır ise f dönüşümünün iyi

tanımlı bir dönüşüm olduğu kolayca görülür. Böylece

$$|C_n(\xi)^2| = \prod_{i=1}^p C_{k_i-2}$$

olup

$$\text{rank}(C_n(\xi)) = \left(\prod_{i=1}^p C_{k_i-1} \right) - \left(\prod_{i=1}^p C_{k_i-2} \right)$$

elde edilir. □

Lemma 5.6 gereği $C_n(\xi)$ yarigrubunun rankının hesaplanması için Teorem 5.10 kullanılmadan $C_n(\xi) \setminus C_n(\xi)^2$ kümesinin kardinalitesini bulmak yeterlidir.

Örnek 5.12 $\xi \in E(C_7)$ ve $\text{fix}(\xi) = \text{im}(\xi) = \{1, 4\}$ olsun. O zaman

$$C_7(\xi) = \left\{ \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4,5,6,7\} \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4,5,6\} & 7 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \right. \\ \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4,5,6\} & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4,5\} & \{6,7\} \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \{1,2,3\} & \{4,5\} & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & \{4,5,6,7\} \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & \{4,5,6\} & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & \{4,5,6\} & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \\ \left. \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & \{4,5\} & \{6,7\} \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \{1,2\} & 3 & \{4,5\} & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \right\}$$

olduğu kolayca görülebilir. Üstelik Teorem 5.2 ve Teorem 5.5 den

$$|C_7(\xi)| = C_2 C_3 = 10$$

$$\text{rank}(C_7(\xi)) = C_2 C_3 - C_1 C_2 = 8 \text{ elde edilir.}$$

5. C_n YARIGRUBUNUN MAKSİMUM NİLPOTENT ALT YARIGRUPLARININ
KARDİNALİTELERİ VE RANKLARI Emrah KORKMAZ



KAYNAKLAR

- Al-Kharousi, F., Kehinde, R., Umar, A., 2014. Combinatorial Results for Certain Semigroups of Partial Isometries of a Finite Chain. *Australas. J. Combin.*, 58: 365-375.
- Ayık, G., Ayık, H., Bugay, L., Kelekci, O., 2013. Generating Sets of Finite Singular Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, 86: 59-66.
- Ayık, G., Ayık, H., Koç, M., 2011. Combinatorial Results for Order-Preserving and Order-Decreasing Transformations. *Turkish Journal of Mathematics*, 35: 1-9.
- Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., Howie J.M., 2005. The Structure of Elements in Finite Full Transformation Semigroups. *Bull. Austral. Math. Soc.*, 71: 69-74.
- Ayık, H., Bugay, L., 2014. Generating Sets of Finite Transformation Semigroups $\mathcal{PK}(n, r)$ and $\mathcal{K}(n, r)$. *Communications in Algebra*, 2: 412-422
- Bugay, L., Yağcı, M., Ayık, H., 2019. Combinatorial Results for Semigroups of Order-Preserving and A -Decreasing Finite Transformations. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 42: 921-932.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2009. *Classical Finite Transformation Semigroups*. Springer-Verlag, London, 314 s.
- Ganyushkin, O., Mazorchuk, V., 2008. On Classification of Maximal Nilpotent Subsemigroups. *Journal of Algebra*, 320, 3081-3103.
- Garba, G.U., 1994. On the Idempotent Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations. *Portugal Math.*, 51: 185-204.
- Gomes, G.M.S., Howie, J M., 1987. On the Rank of Certain Finite Semigroups of Transformations. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 101: 395-403.

- Gomes, G.M.S., Howie, J.M., 1992. On the Ranks of Certain Semigroups of Order-Preserving Transformations. *Semigroup Forum*, 45(3), 272-282.
- Grimaldi R.P., 2003. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. USA: Pearson Education, Inc. 1005 s.
- Grimaldi R.P., 2012. *Fibonacci and Catalan numbers: An Introduction*. Hoboken, New Jersey, USA: John Wiley&Sons, 366 s.
- Higgins, P.M., 1993. Combinatorial Results for Semigroups of Order-Preserving Mappings. *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 113: 281-296.
- Howie, J.M., 1970/71. Products of Idempotents in Certain Semigroups of Transformations. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 17: 223–236.
- Howie, J.M., (1978). Idempotent Generators in Finite Full Transformation Semigroup. *Proc. Royal Soc. Edinburgh* 81A, 317-323.
- Howie, J.M., 1995. *Fundamentals of Semigroup Theory*. Oxford University Press, New York 351 s.
- Laradji, A., Umar, A., 2006. Combinatorial Results for Semigroups of Order-Preserving Full Transformations. *Semigroup Forum* 72: 51-62.
- Laradji, A., Umar, A., 2004. On Certain Finite Semigroups of Order-Decreasing Transformations I. *Semigroup Forum*, 69: 184–200.
- Pin, J.E., 1986. *Varieties of Formal Languages*. North Oxford, London and Plenum, New-York 138 s.
- Sornsanam, S., Sullivan, R.P., 2004. Regularity Conditions on Order-Preserving Transformation Semigroups. *Southeast Asian Bull.Math.*, 28: 333-342.
- Stronska, A., 2004. Nilpotent Subsemigroups of the Semigroup of Order-Decreasing Transformations. *Mat. Stud.*, 2: 184–197.
- Stronska, A., 2007. Nilpotent Subsemigroups of a Semigroup of

- Order-Decreasing Transformations of a Rooted Tree. *Algebra Discrete Math.*, 4: 126-140.
- Sönmez, O., Ünlü, Y., 2014. m -Potent Elements in Order-Preserving Transformation Semigroups and Ordered Sets. *Comm. Algebra*, 42: 332-342.
- Umar, A., 1992. On the Semigroups of Order-Decreasing Finite Full Transformations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 120:129–142.
- Umar, A., 1996. Semigroups of Order-Decreasing Transformations: the isomorphism theorem. *Semigroup Forum*, 53: 220-224.
- Yağcı, M., Korkmaz, E., 2020. On Elements of Finite Semigroups of Order-Preserving and Decreasing Transformations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43: 3863-3870.
- Yağcı, M., Korkmaz, E., 2020. On Nilpotent Subsemigroups of the Order-Preserving and Decreasing Transformation Semigroups. *Semigroup Forum*, 101: 486-496.
- Zhao, P., 2014. On the Semigroups of Order-Preserving and A -Decreasing Finite Transformations. *Algebra Colloq.*, 21: 653-662.



ÖZGEÇMİŞ

Emrah KORKMAZ, 2009 yılında başladığı Ege Üniversitesi Matematik Bölümü'nden 2014 yılında, 2011 yılında başladığı Ege Üniversitesi İstatistik Bölümü, Çift Anadal Programından 2015 yılında mezun oldu. 2014 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında tezli yüksek lisans eğitimine başladı. 2017 yılında Çukurova Üniversitesi'nde yüksek lisansını bitirip aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora eğitimine başladı. 2017 yılında Çukurova Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı.