

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TİPTEN KİSMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI VE
UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Zeynep Sümeyye YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

HAZİRAN 2024

T.C.
SAKARYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI TİPTEN KİSMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI VE
UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

DOKTORA TEZİ

Zeynep Sümeyye YILMAZ

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Şevket GÜR

HAZİRAN 2024

Zeynep Sümeyye Yılmaz tarafından hazırlanan “Bazı Tipten Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması ve Uzun Zaman Davranışı” adlı tez çalışması 28.06.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği ile Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı **Uygulamalı Matematik** Bilim Dalı’nda Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Jüri Başkanı :	Prof. Dr. İrem BAĞLAN Kocaeli Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Şevket GÜR Sakarya Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Prof. Dr. Metin YAMAN Sakarya Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Doç. Dr. Hakan ADIGÜZEL Sakarya Uygulamalı Bilimler Üniversitesi	
Jüri Üyesi :	Dr. Öğr. Üyesi Emine ÇELİK Sakarya Üniversitesi	



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Sakarya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğine ve Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesine uygun olarak hazırlamış olduğum “Bazı Tipten Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemlerin Çözümlerinin Patlaması ve Uzun Zaman Davranışı” başlıklı tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın tüm aşamalarında yukarıda belirtilen yönetmelik ve yönergeye uygun davrandığımı, tezin içerdiği yenilik ve sonuçları başka bir yerden almadığımı, tezde kullandığım eserleri usulüne göre kaynak olarak gösterdiğimi, bu tezi başka bir bilim kuruluna akademik amaç ve unvan almak amacıyla vermediğimi ve 20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince Sakarya Üniversitesi’nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Enstitü tarafından belirlenmiş ölçütlere uygun rapor alındığını, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun ortaya çıkması halinde doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi beyan ederim.

(28/06/2024)

Zeynep Sümeyye YILMAZ





Anneme, babama ve eşime...



TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve bu tez çalışmasının her anında rehberliğiyle, tecrübesiyle yanımda olan ve her türlü yardımı benden esirgemeyen kıymetli danışmanım Prof. Dr. Şevket Gür'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bana tez çalışmamda destek olan ve yol gösteren değerli hocam Prof. Dr. Erhan Pişkin'e teşekkürlerimi borç bilirim.

Tüm yaşamım boyunca her daim yanımda olan, benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen canım anneme ve babama, ayrıca beni her zaman yüreklendiren, bana güvenen kıymetli eşime teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, doktora eğitimim süresince alınan 2211-Yurt içi doktora bursu ile, bu tezin oluşturulmasında maddi desteklerini esirgemeyen TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı'na içten teşekkürlerimi sunarım.

Zeynep Sümeyye YILMAZ



İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ	v
TEŞEKKÜR	ix
İÇİNDEKİLER	xi
SİMGELER	xiii
ÖZET.....	xv
SUMMARY	xix
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Literatür Taraması	1
2. ÖN BİLGİLER	7
2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı, Hilbert Uzayı.....	7
2.2. Lebesgue Uzayı	8
2.3. Sobolev Uzayı	10
2.4. Eşitsizlikler.....	12
3. ÇÖZÜMLERİN AZALMASI VE PATLAMASI İLE İLGİLİ BAZI LEMMA VE EŞİTSİZLİKLER	15
3.1. Çözümlerin Azalması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler.....	15
3.1.1. Nakao eşitsizliği	15
3.2. Çözümlerin Patlaması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler	17
3.2.1. Konkavlık metodu	17
3.2.2. Georgiev ve Todorova metodu	19
3.2.3. Li ve Tsai metodu	20
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER OLMAYAN KLEIN-GORDON DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ENERJİ AZALIMI VE PATLAMASI.....	25
4.1. Giriş	25
4.2. Ön Bilgiler.....	26
4.3. Global Varlık ve Enerji Azalması	30
4.4. Çözümlerin Patlaması	45
5. HİDRODİNAMİK SÖNÜMLÜ TERİM İÇEREN ROSENAU DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI.....	57
5.1. Giriş	57
5.2. Çözümlerin Patlaması	57
6. DOĞRUSAL OLMAYAN DAMPING TERİM İÇEREN P-TRİHARMONİK DENKLEM SİSTEMİ İÇİN ENERJİ AZALIMI VE ÇÖZÜMLERİN PATLAMASI.....	65
6.1. Giriş	65
6.2. Ön Bilgiler.....	66
6.3. Global Varlık ve Enerji Azalması	67
6.4. Çözümlerin Patlaması	85
7. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	101
KAYNAKLAR	103

ÖZGEÇMİŞ.....	107
---------------	-----



SİMGELER

$\mathbb{R}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
$C(\Omega)$	: Sürekli fonksiyonlar uzayı
$C_w(\Omega)$	: Zayıf sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^m(\Omega)$	: m . mertebeye kadar türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^\infty(\Omega)$	: Sonsuz mertebeden türevli ve sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^m([0, T]; X)$	: $[0, T]$ den X e tanımlanmış m . mertebeye kadar türevleri sürekli olan fonksiyonlar uzayı
$L^p(a, b; X)$	: (a, b) den X e tanımlanmış ölçülebilir fonksiyonlar uzayı
$L^p(\Omega)$	: p . mertebeden Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$W^{m,p}(\Omega)$	: Sobolev uzayı
$L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$	: Lebesgue uzayı
$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$	: Hilbert uzayı
$\ u\ $	: u 'nın normu
$E(t)$	: Enerji fonksiyoneli



BAZI TİPTEN KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI VE UZUN ZAMAN DAVRANIŞI

ÖZET

Anahtar Kelimeler: Global varlık, Çözümlerin patlaması, Enerji azalması, Nakao eşitsizliği, Klein-Gordon denklemi, Rosenau denklemi, p-triharmonik denklem.

Tezin birinci bölümünde, enerji azalımı ve çözümlerin patlaması konusundaki günümüze kadar yapılmış olan çalışmaların tarihi gelişimi ele alınmıştır.

İkinci bölümde, tez boyunca kullanılan temel tanımlar, teoremler ve eşitsizlikler sunulmuştur.

Çalışmanın üçüncü bölümünde, tezde kullanılacak olan enerji azalımı ve çözümlerin patlaması ile ilgili temel lemmalar ve ispatlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde kaynak ve lineer olmayan damping terim içeren genelleştirilmiş Klein-Gordon denklem sistemi için

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) + m_1^2 u + |u_t|^{p-1} u_t &= f_1(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v) + m_2^2 v + |v_t|^{q-1} v_t &= f_2(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x &\in \Omega, \\ v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), x &\in \Omega, \\ u(x, t) = v(x, t) = 0, x &\in \partial\Omega \end{aligned}$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $\Omega, \mathbb{R}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $n = 1, 2, 3; m_1, m_2 > 0, p, q \geq 1$ ve $\alpha \geq 1$ dir. $a, b > 0$

için $F(u, v) = [a |u + v|^{r+1} + 2b |uv|^{\frac{r+1}{2}}]$ olmak üzere; $f_1(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}, f_2(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}$ ve

$$\begin{cases} 1 < r & ; & n \leq 2, \\ 1 < r \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2 \end{cases}$$

dir. Böylece $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için $uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = (r+1)F(u, v), \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ olur.

Bu çalışmada kaynak ve lineer olmayan damping terim içeren genelleştirilmiş Klein-Gordon denklem sisteminin çözümlerinin global varlığı, enerji azalması ve patlaması gösterilmiştir. Enerji azalımı Nakao eşitsizliği kullanılarak ispatlanmıştır. İlk olarak bu denklem sistemine bağlı bir $E(t)$ fonksiyonu bulunup, $E(t)$ fonksiyonunun $t \geq 0$ için

$$E'(t) = - \left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1} \right) \leq 0$$

yani artmayan olduğu elde edilir. Daha sonra Nakao eşitsizliği kullanılarak belli eşitsizlikler, lemmalar yardımıyla $p = q = 1$ ve $p, q > 1$ için iki farklı durumda enerji azalması gösterilir. Çözümlerin patlaması ise 1994 yılında Georgiev ve Todorova tarafından ortaya koyulan yöntem ile ispatlanmıştır. Bu yöntemde başlangıç enerjisi $E(0) < 0$ olarak ele alınır ve çözümün bütün zamanlarda var olduğu kabul edilip buradan bir çelişki elde edilir. Böylece çözümün sonlu bir zamanda patladığı gösterilir. İlk olarak enerji fonksiyonunun negatifi olan bir fonksiyon ele alınır yani $H(t) = -E(t)$, $E(0) < 0$ ve $0 < H(0) \leq H(t)$ olur. Buradan ε daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sabit olmak üzere

$$\psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right)$$

ve

$$0 < \sigma \leq \min \left\{ \frac{r-p}{(r+1)p}, \frac{r-q}{(r+1)q}, \frac{r-1}{2(r+1)} \right\}$$

tanımlanır. Burada amaç, $\psi(t)$ fonksiyonunun

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\zeta}(t) \quad , \quad \zeta > 1$$

şeklinde bir diferensiyel eşitsizliğini sağladığını göstermektir. Bu durum, çözümün sonlu bir T^* zamanında patladığını ifade eder ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{1-\sigma}(0)}$$

olur.

Beşinci bölümde hidrodinamik sönümlü terim içeren Rosenau denkleminin

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha u_{xx} - \mu u_{xxt} + \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxt} &= \varphi(u^2)_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,1) \end{aligned}$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $\alpha, \mu, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\varphi \in \mathbb{R}$ dır. Bu çalışmada çözümlerin patlaması 1974 yılında Levine tarafından ortaya koyulan Konkavlık metodu kullanılarak ispatlanmıştır.

İlk önce $u(x,t)$ çözümü $u(x,t) = (w(x,t))_x$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} w_{tt} - \alpha w_{xx} - \mu w_{xxt} + \beta w_{xxxx} + \gamma w_{xxxxt} &= \varphi(w_x^2)_x, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ w_x(0,t) &= w_x(1,t) = w_{xxx}(0,t) = w_{xxx}(1,t), \quad t > 0, \\ w(x,0) &= w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad x \in (0,1) \end{aligned}$$

yazılır. Enerji fonksiyonu $t \geq 0$ için

$$E'(t) + \mu \|w_{xt}(t)\|^2 = 0$$

olur. Daha sonra probleme ait uygun bir $F(t)$ fonksiyoneli

$$F(t) = \|w(t)\|^2 + \gamma \|w_{xx}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_x(s)\|^2 ds + (T^* - t) \|w_{0x}\|^2 + \beta_0 (t + \tau)^2$$

şeklinde seçilir. Burada T^* , β_0 and τ pozitif sabitlerdir. $F(t)$ fonksiyonu pozitif, iki kez türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere $t \geq 0$ ve $\nu > 0$ için

$$F''(t)F(t) - (1 + \nu)F'(t)^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilir. Eğer $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ ise o zaman $t \rightarrow \tilde{T}^-$ iken $F(t) \rightarrow \infty$ olacak şekilde $0 \leq \tilde{T} \leq \frac{F(0)}{\nu F'(0)}$ pozitif sabiti vardır.

Altıncı bölümde ise doğrusal olmayan damping terim içeren p -triharmonik denklem sistemi için

$$\begin{aligned} u_t - \Delta_p u - \Delta u_t + |u_t|^{m-2} u_t &= f_1(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_t - \Delta_p v - \Delta v_t + |v_t|^{r-2} v_t &= f_2(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = v = \Delta u = \Delta v = \Delta^2 u = \Delta^2 v &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) &= v_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v_t(x, 0) &= v_1(x), & x \in \Omega \end{aligned}$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada Ω , $\mathbb{R}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $n=1, 2, 3$; $m, r \geq 2$ ve $p \geq 2$ olup $\Delta_p^3 u = \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u)$ ve $\Delta_p^3 v = \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta v|^{p-2} \nabla \Delta v)$ p -triharmonik operatörlerdir. $a, b > 0$ için $F(u, v) = [a |u + v|^{r+1} + 2b |uv|^{\frac{r+1}{2}}]$ olmak üzere;

$$f_1(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}, \quad f_2(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v} \text{ ve}$$

$$\begin{cases} 1 < q & ; & n \leq 2, \\ 1 < q \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2 \end{cases}$$

dır. Böylece $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için $uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = (q+1)F(u, v)$ olur.

Bu çalışmada p -triharmonik denklem sisteminin çözümlerinin enerji azalması ve patlaması gösterilmiştir. Enerji azalımı Nakao eşitsizliği kullanılarak ispatlanmıştır. İlk olarak bu denklem sistemine bağlı bir $E(t)$ fonksiyonu bulunup, $E(t)$ fonksiyonunun $t \geq 0$ için

$$E'(t) = -\left(\|u_t\|_m^m + \|v_t\|_r^r + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \leq 0$$

yani artmayan olduğu elde edilir. Daha sonra Nakao eşitsizliği kullanılarak belli eşitsizlikler, lemmalar yardımıyla $m = r = p = 2$ ve $m, r, p > 2$ için iki farklı durumda enerji azalması gösterilir. Çözümlerin patlamasını göstermek için ise 2003 yılında Li ve Tsai tarafından bulunan yöntem kullanılmıştır. Çözümlerin patlaması $m = r = 2$ durumu için gösterilir. $m = r = 2$ olarak alındığında, çalışılan problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + u_t &= f_1(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + v_t &= f_2(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

olur. Burada (u, v) çözümü için

$$\lim_{t \rightarrow T_*^-} \left\{ \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau \right\} = \infty$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanında çözümün patlaması gösterilir. Çözümlerin patlamasına başlangıç enerjisinin $E(0) > 0$, $E(0) = 0$ ve $E(0) < 0$ üç farklı durumuna göre bakılır.



BLOW UP AND LONG TIME BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF SOME TYPES OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

SUMMARY

Keywords: Global existence, Blow up, Energy decay, Nakao inequality, Klein-Gordon equation, Rosenau equation, p-triharmonic equation.

In the first chapter, the historical progressions and various studies in the literature concerning the blow up of solutions and energy decay are discussed.

In the second chapter, essential theorems, definitions and inequalities required for the thesis are presented.

In the third chapter of this study, several fundamental lemmas and proofs concerning the blow-up of solutions and energy decay are provided. These are used in the fourth, fifth and sixth sections of the thesis.

In the fourth chapter, the global existence, blow up of solutions and energy decay of the generalized Klein-Gordon equation system with source and nonlinear damping terms are studied. We examine the following problem:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) + m_1^2 u + |u_t|^{p-1} u_t &= f_1(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v) + m_2^2 v + |v_t|^{q-1} v_t &= f_2(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), x \in \Omega, \\ u(x, t) &= v(x, t) = 0, x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, 3$; $m_1, m_2 > 0$, $p, q \geq 1$ and $\alpha \geq 1$.

Let $F(u, v) = [a|u+v|^{r+1} + 2b|uv|^{\frac{r+1}{2}}]$ with $a, b > 0$; $f_1(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}$, $f_2(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}$ and

$$\begin{cases} 1 < r & ; & n \leq 2, \\ 1 < r \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2. \end{cases}$$

One can easily verify that

$$uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = (r+1)F(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Firstly, we find energy functional $E(t)$ related to this system. $E(t)$ is a nonincreasing function for $t \geq 0$

$$E'(t) = -\left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1}\right) \leq 0.$$

Then, using some inequalities and lemmas, the energy decay for $p, q > 1$ and $p = q = 1$ are established by using Nakao's inequality.

The blow up of the solution with negative initial energy $E(0) < 0$ was proved by the method introduced by Georgiev-Todorova in 1994. We suppose that the solution exists for all time and we find in a contradiction. Set $H(t) = -E(t)$, then $E(0) < 0$ and $0 < H(0) \leq H(t)$. Define

$$\psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right)$$

where ε is a small value to be determined later and

$$0 < \sigma \leq \min \left\{ \frac{r-p}{(r+1)p}, \frac{r-q}{(r+1)q}, \frac{r-1}{2(r+1)} \right\}.$$

Our purpose is to demonstrate that $\psi(t)$ satisfies a differential inequality in the following format

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\zeta}(t), \quad \zeta > 1.$$

As a result, the solution of this system blows up within finite time T^* , and

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

where $\psi(t)$ and σ are given above.

In the fifth chapter, we study the blow up of solutions of the generalized Rosenau equations with a hydrodynamically damping term. The following problem is being examined:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha u_{xx} - \mu u_{xxt} + \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxt} &= \varphi(u^2)_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) &= 0, \quad t \geq 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x &\in (0,1) \end{aligned}$$

where $\alpha, \mu, \beta, \gamma \geq 0$ are constants and $\varphi \in \mathbb{R}$. The blow up of solutions was proved by the Concavity method introduced by Levine in 1974. Firstly, the solution $u(x,t)$ satisfies $u(x,t) = (w(x,t))_x$, with a corresponding evolution of $w(x,t)$ as follows:

$$\begin{aligned} w_{tt} - \alpha w_{xx} - \mu w_{xxt} + \beta w_{xxxx} + \gamma w_{xxxxt} &= \varphi(w_x^2)_x, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ w_x(0,t) = w_x(1,t) = w_{xxx}(0,t) = w_{xxx}(1,t), \quad t > 0, \\ w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad x &\in (0,1). \end{aligned}$$

Energy function of this equation satisfy

$$E'(t) + \mu \|w_{xt}(t)\|^2 = 0, \quad t \geq 0.$$

Now we let

$$F(t) = \|w(t)\|^2 + \gamma \|w_{xx}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_x(s)\|^2 ds + (T^* - t) \|w_{0x}\|^2 + \beta_0(t + \tau)^2$$

where T^* , β_0 and τ positive numbers. Let's suppose that $F(t)$, a positive function and twice differentiable, satisfies the following inequality on $t \geq 0$

$$F''(t)F(t) - (1+\nu)F'(t)^2 \geq 0$$

where $\nu > 0$ is a constant. If $F(0) > 0$ and $F'(0) > 0$, thus there exists a positive constant $\tilde{T} \leq \frac{F(0)}{aF'(0)}$ such that $F(t) \rightarrow \infty$ as $t \rightarrow \tilde{T}^-$.

In the sixth chapter, we study the global existence, decay estimates of the energy function and blow-up of solutions for a system of p-triharmonic with strong and nonlinear damping term. The following initial-boundary value problem is being examined:

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + |u_t|^{m-2} u_t &= f_1(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + |v_t|^{r-2} v_t &= f_2(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = v = \Delta u = \Delta v = \Delta^2 u = \Delta^2 v &= 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) &= v_0(x), & x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v_t(x, 0) &= v_1(x), & x \in \Omega \end{aligned}$$

where Ω is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega$ in $\mathbb{R}^n$, $n=1, 2, 3$; $m, r \geq 2$, $p \geq 2$; $\Delta_p^3 u = \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u)$ and $\Delta_p^3 v = \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta v|^{p-2} \nabla \Delta v)$.

Let $F(u, v) = [a|u+v|^{r+1} + 2b|uv|^{\frac{r+1}{2}}]$ with $a, b > 0$; $f_1(u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}$, $f_2(u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}$ and

$$\begin{cases} 1 < q & ; & n \leq 2, \\ 1 < q \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2. \end{cases}$$

It is confirmed that

$$uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = (q+1)F(u, v), \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Firstly, we find energy functional $E(t)$ related to this system. So, $E(t)$ is a nonincreasing function

$$E'(t) = -\left(\|u_t\|_m^m + \|v_t\|_r^r + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \leq 0, \quad t \geq 0.$$

Then, using some inequalities and lemmas, the energy decay for $m=r=p=2$ and $m, r, p > 2$ are derived using Nakao's inequality. The blow up of solutions was proved by the method introduced by Li and Tsai in 2003.

We consider problem $m=r=2$ for the blow up of solutions.

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + u_t &= f_1(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + v_t &= f_2(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

A solution (u, v) with $m=r=2$ is termed as blow up if there exist a finite time T^* such that

$$\lim_{t \rightarrow T_*^-} \left\{ \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau \right\} = \infty.$$

We attain the blow up of solutions in three different ranges of the initial energy:
 $E(0) > 0$, $E(0) = 0$ and $E(0) < 0$.



1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Literatür Taraması

Bu tezin amacı, dördüncü bölümde ele alınan kaynak ve lineer olmayan damping terim içeren

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) + m_1^2 u + |u_t|^{p-1} u_t &= f_1(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v) + m_2^2 v + |v_t|^{q-1} v_t &= f_2(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), x \in \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), x \in \Omega, \\ u(x, t) &= v(x, t) = 0, x \in \partial\Omega \end{aligned} \quad (1.1)$$

genelleştirilmiş Klein-Gordon denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını, enerji azalımını ve patlamasını, beşinci bölümde ele alınan doğrusal olmayan kaynak terim ve hidrodinamik sönümlü terim içeren

$$\begin{aligned} u_{tt} - \alpha u_{xx} - \mu u_{xxt} + \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxt} &= \varphi(u^2)_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \\ u(0, t) &= u(1, t) = u_{xx}(0, t) = u_{xx}(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in (0, 1) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Rosenau denkleminin çözümlerinin patlamasını ve altıncı bölümde ele alınan doğrusal olmayan damping terim içeren

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + |u_t|^{m-2} u_t &= f_1(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + |v_t|^{r-2} v_t &= f_2(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = v = \Delta u = \Delta v = \Delta^2 u = \Delta^2 v &= 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u_t(x, 0) &= u_1(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.3)$$

p -triharmonik denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını, enerji azalımını ve patlamasını incelemektir.

Öncelikle Klein-Gordon denklemleri ile ilgili yapılmış olan çalışmalar incelenirse, Segal ilk olarak

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + g_1 u^2 v &= 0, \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + g_2 uv^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

doğrusal olmayan Klein-Gordon denklem sistemini ele almıştır (Segal, 1965). Burada m_1 ve m_2 yüklü parçacıkların elektromanyetik alandaki hareketini tanımlayan sıfır olmayan sabitlerdir. I. Segal, $g_1, g_2 > 0$ olduğunda, (1.4) denklem sisteminin global varlığını çalışmıştır. Levine (1974) ve Lions (1985) çalışmalarında $g_1, g_2 < 0$ olduğunda, (1.4) denklem sisteminin çözümlerinin patlamasını göstermişlerdir. (1.1) denklem sisteminde, $\alpha = 1$ alınması durumunda

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u + m_1^2 u + |u_t|^{p-1} u_t &= g_1(u, v), \\ v_{tt} - \Delta v + m_2^2 v + |v_t|^{q-1} v_t &= g_2(u, v) \end{aligned} \quad (1.5)$$

denklem sistemi elde edilir. Pişkin, Nakao eşitsizliğini kullanarak (1.5) denklem sisteminin çözümlerinin enerji azalmasını ve negatif başlangıç enerji ile sonlu zamanda çözümlerin patlamasını ispatlamıştır (Pişkin, 2014). Buna ek olarak, Ye, (1.5) denklem sisteminde $p = q$ olduğunda, potential-well metodu kullanarak global varlığı ve Komornik Lemmasını (1994) kullanarak asimptotik kararlılığı göstermiştir (Ye, 2013). Ayrıca Wu, (1.5) denklem sisteminin bazı şartlar altında global çözümlerinin patlamasına çalışmıştır (Wu, 2009).

$p = q = 1$ olduğunda, Wu (1.5) denklem sisteminin çözümlerinin global varlığını ve asimptotik davranışını incelemiştir (Wu, 2012). $m_1 = m_2 = 0$ olduğunda, Agre ve Rammaha (1.5) denklem sisteminin çözümlerinin varlığına ve patlamasına, Georgiev ve Todorova (1994) çalışmasındaki benzer tekniği kullanarak göstermiştir (Agre ve Rammaha, 2006).

Şimdi Rosenau denklemleri ile ilgili yapılmış olan çalışmalar incelenirse, 1980'lerin sonlarında Philip Rosenau yoğun ayrık sistemlerin dinamiklerini açıklamak için bazı yüksek mertebeden doğrusal olmayan kısmi diferensiyel denklemleri ileri sürmüştür (Rosenau, 1986, 1988). İki tipik denklem

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = f(u)_x \quad (1.6)$$

ve

$$u_{tt} + au_{xxxx} + bu_{xxxxt} - \gamma u_{xx} = f(u)_{xx} \quad (1.7)$$

şeklindedir. Burada $a > 0$, $b > 0$ ve $\gamma > 0$ dır. Rosenau ilk olarak

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x = 0 \quad (1.8)$$

denklemini incelemiştir. Park, (1.8) denkleminin çözümlerinin varlığını ve tekliğini ortaya koymuştur (Park, 1990). (1.8) denklemine $(+u_{xxx})$ terimi eklenirse

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1.9)$$

Rosenau-KdV denklemi elde edilir. Diğer taraftan (1.9) denklemine $(-u_{xxxxx})$ terimi eklenirse

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + uu_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} = 0 \quad (1.10)$$

Rosenau-Kawahara denklemi bulunur. Zuo, Rosenau-Kawahara ve Rosenau-KdV denklemlerini tanh ve sinüs-kosinüs tekniklerini kullanarak çözmüştür (Zuo, 2009). (1.8) denklemine $(-u_{xxt})$ terimi eklenirse

$$u_t + u_{xxxxt} - u_{xxt} + u_x + uu_x = 0 \quad (1.11)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem Rosenau-RLW (RRLW) denklemi olarak adlandırılır (Atouani ve Omrani, 2013). (1.7) denkleminde $a = b = 1$ alınır, Wang ve Xu

$$u_{tt} + u_{xxxx} + u_{xxxxt} - \gamma u_{xx} = f(u)_{xx} \quad (1.12)$$

denkleminin çözümlerinin varlığını, tekliğini ve patlamasını araştırmışlardır (Wang ve Xu, 2009). Wang hidrodinamik sönümlü terim $(-v\Delta u_t)$ içeren

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u - v\Delta u_t + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} &= \Delta f(u), & x \in R^n, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), & u_t(x, 0) &= u_1(x), & x \in R^n \end{aligned} \quad (1.13)$$

Rosenau denkleminin asimptotik davranışını ve global çözümünü araştırmıştır (Wang ve Wang, 2013). Ayrıca Wang ve Feng, (1.13) denkleminin çözümlerinin uzun zaman davranışını ve enerji azalmasını incelemiştir (Wang ve Feng, 2017). (1.13) denkleminde, hidrodinamik sönümlü terimin $(v\Delta u_t)$ yerine Stokes sönümlü terimi (vu_t) yazılırsa

$$u_{tt} - \Delta u - \nu u_t + \Delta^2 u + \Delta^2 u_{tt} = \Delta f(u) \quad (1.14)$$

elde edilir. Wang ve Su, (1.14) denkleminin çözümlerinin global varlığını ve enerji azalımını araştırmıştır (Wang ve Su, 2015). Genelleştirilmiş Boussinesq denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} + \alpha u_{xxxx} + f(u)_{xx} = 0 \quad (1.15)$$

şeklinde dir. Godefroy, (1.15) denkleminin çözümlerin patlamasını göstermiştir (Godefroy, 1998). Polat (2008)

$$u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \Delta^2 u - k \Delta u_t = \Delta f(u) \quad (1.16)$$

genelleştirilmiş çok boyutlu sönümlü Boussinesq denkleminin çözümlerinin global varlığını ve patlamasını araştırmıştır. Polat ve Kaya (2006)

$$u_{tt} - b u_{xx} + \delta u_{xxxx} - \lambda u_{xxtt} = \beta(u^2)_{xx} - p^2 u \quad (1.17)$$

sönümlü terim içeren genelleştirilmiş Boussinesq denkleminin çözümlerinin patlamasını ele almışlardır. Polat, Kaya ve Tutalar (2005)

$$u_{tt} - b u_{xx} + \delta u_{xxxx} - r u_{xxt} = f(u)_{xx} \quad (1.18)$$

sönümlü Boussinesq denkleminin çözümlerinin patlamasına çalışmışlardır.

Son olarak p -triharmonik problemler ile ilgili yapılmış olan çalışmalar incelenirse, Belakhdar, Belaouidel, Filali ve Tsouli

$$\begin{cases} -\Delta_p^3(x)u = \lambda V_1(x) |u|^{q(x)-2} u, & x \in \Omega, \\ u = \Delta u = \Delta^2 u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1.19)$$

lineer olmayan problemin çözümlerinin varlığına çalışmışlardır. $\mathbb{R}^n$ sınırlı bölgesi üzerinde Navier sınır değer şartları ile $p(x)$ -triharmonik probleminin özdeğerlerinin var olmasını ve olmamasını varyasyonel yaklaşımlara ve değişken üslü Lebesgue uzayları teorisine dayanarak göstermişlerdir (Belakhdar ve ark., 2022). Pişkin ve Polat

$$\begin{aligned} u_{tt} + |u_t|^{m-1} u_t &= \operatorname{div} \left(\rho \left(|\nabla u|^2 \right) \nabla u \right) + f_1(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} + |v_t|^{r-1} v_t &= \operatorname{div} \left(\rho \left(|\nabla v|^2 \right) \nabla v \right) + f_2(u, v), & (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ u = v &= 0, & (x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ v(x, 0) &= v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), & x \in \Omega \end{aligned} \quad (1.20)$$

başlangıç sınır değer probleminin global varlığına, enerji azalımına ve çözümlerinin patlamasına çalışmışlardır. Enerji fonksiyonunun azalımı için Nakao eşitsizliğini, çözümlerin patlaması için Li ve Tsai yöntemini kullanmışlardır (Pişkin ve Polat, 2013). Ayrıca Pişkin aşağıdaki yarı doğrusal hiperbolik denklem içeren başlangıç sınır değer probleminin

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^m \nabla u) - \Delta u_t + |u_t|^{q-1} u_t &= |u|^{p-1} u, & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), & x \in \Omega, \\ u(x, t) &= 0, & x \in \partial\Omega, t > 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

enerji azalımını Nakao eşitsizliğini kullanarak ispatlamıştır ve başlangıç enerjisinin üç farklı durumuna göre çözümlerin patlamasını Li ve Tsai yöntemini kullanarak göstermiştir (Pişkin, 2015). Pişkin ve Yüksekaya çalışmasında

$$u_{tt} + \Delta^2 u - M\left(\|\nabla u\|^2\right) \Delta u - \Delta u_t + u_t = |u|^{q-1} u \quad (1.22)$$

sönümlü terim içeren Timoshenko denkleminin çözümlerinin patlamasını Li ve Tsai yöntemini kullanarak ispatlamıştır (Pişkin ve Yüksekaya, 2018).



2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümler için gerekli olan bazı tanımlar, uzaylar ve eşitsizlikler verilmiştir (Adams ve Fournier, 2003; Brezis, 2011; Evans, 1998; Pişkin 2013, 2017, 2021).

2.1. Normlu Uzay, İç Çarpım Uzayı, Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1. X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $x \rightarrow \|x\|$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in K$ için

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(N_2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$;

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır ve bu durumda $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *normlu vektör uzayı* veya *normlu uzay* denir. $\|x\|$ sayısına da $x \in X$ elemanının normu denir.

Teorem 2.1.2. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. Böylece $\forall x, y \in X$ için

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Bu metriğe normun oluşturduğu metrik denir.

Tanım 2.1.3. (x_n) , X normlu uzayında bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_X = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ varsa (x_n) dizisine yakınsaktır denir ve bu yakınsama

$$x_n \rightarrow x$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.4. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip yani X in bir elemanına yakınsıyor ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.5. X bir reel vektör uzayı olsun.

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu

$$i) \langle u, u \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$$

$$ii) \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

$$iii) \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

$$iv) \langle cu, v \rangle = \langle u, cv \rangle = c \langle u, v \rangle$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona *iç çarpım* denir. Bu iç çarpım ile

$$\|x\| = (x, x)^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanan $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu norm olur. Normu yukarıdaki gibi bir iç çarpım ile tanımlanan uzaya *iç çarpım uzayı* denir.

Tanım 2.1.6. Bir $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahip ise $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

2.2. Lebesgue Uzayı

Tanım 2.2.1. Ω , $\mathbb{R}^n$ de ölçülebilir bir bölge olsun. u ölçülebilir ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $|u(x)|^p$ Lebesgue anlamında integrallenebilir, yani

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty$$

ise $u(x)$ fonksiyonları p . kuvvetten integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı olarak adlandırılır ve bu sınıf $L^p(\Omega)$ veya L^p ile gösterilir. Bu şartı sağlayan tüm u fonksiyonlarının uzayına L^p *Lebesgue uzayı* denir.

Bu uzaydaki norm $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Not. $L^p(\Omega)$ uzayında

i. $p = 1$ alınırsa $L^1(\Omega) = L(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonlar uzayı,

ii. $p = 2$ alınırsa $L^2(\Omega)$ karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2. Ω , $\mathbb{R}^n$ de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p . kuvveti integrallenebilen bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayına $L_{p,loc}(\Omega)$ uzayı denir.

Tanım 2.2.3. X ve Y iki normlu uzay olsun. Eğer

i. X in bütün elemanları Y nin de bir elemanı ise ($X \subset Y$) ve

ii. u dan bağımsız olacak şekilde bir k sabiti varsa ve her $u \in X$ için

$$\|u\|_Y \leq k \|u\|_X$$

eşitsizliği sağlanıyorsa X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \hookrightarrow Y$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.4. $vol(\Omega) = \int_{\Omega} dx < \infty$ (Ω bölgesi sınırlı) ve $1 \leq p \leq q < \infty$ olsun. Eğer

$u \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $u \in L^p(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_p \leq (vol(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|u\|_q$$

olur. Yani

$$L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

gömülmesi geçerlidir.

2.3. Sobolev Uzayı

Sobolev uzayları, Rus matematikçi olan Sergei L’vovich Sobolev tarafından 1930 lu yıllarda tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.1. $u \in L_{1,loc}(\Omega)$ ve α çoklu indisi verilsin. $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega} \varphi v dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^\alpha \varphi dx$$

ise $v \in L_{1,loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun α . zayıf (genelleştirilmiş) türevi denir ve $v = D^\alpha u$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.3.2. $\Omega, \mathbb{R}^n$ de bir bölge, m negatif olmayan bir tamsayı ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), 0 \leq |\alpha| \leq m\}$$

ile tanımlı olan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Yani kendisi ve m . mertebeye kadar bütün genelleştirilmiş türevleri $L^p(\Omega)$ uzayında olan fonksiyonlar uzayına Sobolev uzayı denir.

Sobolev uzayında normlar: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{m,p} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ve $p = \infty$ için

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

olarak tanımlanır.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayıdır. Yani; $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ olması için ancak ve ancak $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(x) = u$ olacak şekilde $(u_k) \subset C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyon dizisi var olmalıdır.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı, $W^{m,p}(\Omega)$ uzayında bulunan ve $(m-1)$. mertebeye kadar bütün türevleri Ω nın $\partial\Omega$ sınırında sıfır olan fonksiyonların kümesidir. Yani;

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = u'|_{\partial\Omega} = \dots = u^{(m-1)}|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

dır. Buradan da görüldüğü gibi $W_0^{m,p}(\Omega)$ uzayı $W^{m,p}(\Omega)$ uzayının bir alt uzayıdır.

Tanım 2.3.3. Sobolev Gömülme Teoremi. Ω , $\mathbb{R}^n$ de koni özelliğine sahip olan açık bir bölge, $j \geq 0$ ve $m \geq 1$ tamsayılar ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

i. $mp > n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

gömülmesi bulunur.

ii. $mp = n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

veya $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q < \infty$$

gömülmesi bulunur. Ayrıca $p = 1$ olarak alınırsa

$$W^{j+m,1}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\Omega)$$

bulunur.

iii. $mp < n$ ise

$$W^{j+m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{j,q}(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

veya $j = 0$ ise

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad p \leq q \leq p^*$$

gömülmesi bulunur. Burada

$$p^* = \begin{cases} \frac{np}{n-mp}, & n > mp, \\ +\infty, & n \leq mp \end{cases}$$

şeklindedir.

2.4. Eşitsizlikler

Eşitsizlikler; matematiğin hemen hemen her alanında kullanılan çok önemli araçlardır.

Lemma 2.4.1. (Cauchy Eşitsizliği) Eğer $\varepsilon > 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ ise, bu durumda

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 2.4.2. (Young Eşitsizliği) $a, b \geq 0$ ve $p > 1$ için $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Bu durumda

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$$

dır.

Lemma 2.4.3. (Sobolev Eşitsizliği) $n > 1$ olmak üzere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ açık olsun. $n > p$, $p \geq 1$ ve $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ ise, o zaman

$$\|u\|_{L_{np/(n-p)}(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olacak biçimde bir $C = C(n, p)$ sabiti vardır.

$p > n$ ve Ω sınırlı ise, bu durumda $u \in C(\bar{\Omega})$ ve

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{1/n-1/p} \|Du\|_{L^p(\Omega)}$$

olur.

Lemma 2.4.4. (Sobolev-Poincare Eşitsizliği)

$$\begin{cases} 2 \leq p < \infty & ; \quad n = 1, 2, \\ 2 \leq p \leq \frac{2n}{n-2} & ; \quad n \geq 3 \end{cases}$$

olsun. O zaman, $\forall u \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|u\|_p \leq C_* \|\nabla u\|_2$$

dir. Burada $C_* = C_*(\Omega, p)$ dır.

Lemma 2.4.5. (Hölder Eşitsizliği) $1 < p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$,

$v \in L^q(\Omega)$ ise bu durumda $uv \in L(\Omega)$ ve

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

dır. $p = q = 2$ iken bu eşitsizliğe Cauchy-Schwarz-Bunyakowski eşitsizliği denir.

Teorem 2.4.6. $a, b \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. Bu durumda

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

dır.

Teorem 2.4.7. (Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olsun. Eğer $u, v \in L^p(\Omega)$ ise bu durumda $u+v \in L^p(\Omega)$ ve

$$\|u+v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p$$

dır.

Lemma 2.4.8. (Kısmi İntegral Alma Formülleri) $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\partial\Omega \in C^1$ sınırına sahip)

bölgesinde tanımlı $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x))$ vektörü $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere

$F_i(x) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ bileşenleri ile verilmiş olsun. $\operatorname{div} F(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$

fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir veya $\bar{\Omega}$ ($\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bölge) bölgesinde sürekli ise,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F(x) dx = \int_{\partial\Omega} F(x) n(x) ds$$

olur. $n(x)$; Ω bölgesine göre dışa yönlendirilmiş $\partial\Omega$ sınırının birim normal vektörüdür. Buna Ostrogradsky formülü de denir.

Teorem 2.4.9. (Green Özdeşliği) $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, $v(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ ve

$\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$ fonksiyonu Ω bölgesinde integrallenebilir olsun.

$v\Delta u = v.\text{div}(\nabla u) = \text{div}(v\nabla u) - \nabla u \nabla v$, $\nabla u \nabla v = u_{x_1} v_{x_1} + \dots + u_{x_n} v_{x_n}$ olduğundan

$$\int_{\Omega} v \Delta u dx = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx$$

bulunur. Burada n dışı doğru yönlendirilmiş birim vektör ve $\frac{\partial u}{\partial n} = n \cdot \nabla u$ olup bu Green formülü olarak bilinmektedir.

Lemma 2.4.6. (Gronwall Eşitsizliği (Diferensiyel Form))

$\eta(t)$, $[0, T]$ aralığında negatif olmayan mutlak sürekli bir fonksiyon, $\psi(t)$ ve $\phi(t)$ negatif olmayan $[0, T]$ üzerinde toplanabilir fonksiyonlar olmak üzere,

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

eşitsizliği sağlansın. O zaman $0 \leq t \leq T$ için

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left(\eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right)$$

yazılabilir.

Lemma 2.4.7. (Gronwall Eşitsizliği (İntegral Form))

(i) $\xi(t)$, hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ ve $C_1, C_2 \geq 0$ sabitleri için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds + C_2$$

integral eşitsizliğini sağlayan, $[0, T]$ üzerinde toplanabilir, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_2 \left(1 + C_1 t e^{C_1 t} \right)$$

olur.

(ii) Eğer hemen hemen her $0 \leq t \leq T$ için

$$\xi(t) \leq C_1 \int_0^t \xi(s) ds$$

ise, bu durumda $\xi(t) = 0$ dir.

3. ÇÖZÜMLERİN AZALMASI VE PATLAMASI İLE İLGİLİ BAZI LEMMA VE EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde çözümlerin azalması ve patlamasını gösterirken kullanacağımız bazı lemma ve eşitsizlikler verilecektir.

3.1. Çözümlerin Azalması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler

3.1.1. Nakao eşitsizliği

Lemma 3.1.1.1. $\phi(t)$ fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olmak üzere; $w_0 > 0$ ve $m \geq 0$ için

$$\phi^{1+m}(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1))$$

eşitsizliğini sağlasın. O zaman $\forall t \in [0, T]$ için

$$\begin{cases} \phi(t) \leq \phi(0)e^{(-w_1[t-1]^+)} & ; \quad m = 0, \\ \phi(t) \leq (\phi(0)^{-m} + w_0^{-1}m[t-1]^+)^{-\frac{1}{m}} & ; \quad m > 0 \end{cases}$$

dır. Burada $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ ve $w_1 = \ln\left(\frac{w_0}{w_0-1}\right)$ dır (Nakao, 1977, 1978).

İspat.

i) $m > 0$ için $y(t) = \phi^{-m}(t)$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} y(t+1) - y(t) &= \phi^{-m}(t+1) - \phi^{-m}(t) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m} d\theta \\ &= \int_0^1 -m [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m-1} [\phi(t+1) - \phi(t)] d\theta \\ &\geq m \int_0^1 [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m-1} w_0^{-1} \phi^{1+m}(t) d\theta \\ &= mw_0^{-1} \phi^{1+m}(t) \int_0^1 [\theta\phi(t+1) + (1-\theta)\phi(t)]^{-m-1} d\theta \\ &\geq mw_0^{-1} \phi^{1+m}(t) \phi^{-1-m}(t) = mw_0^{-1} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$y(t+1) \geq y(t) + mw_0^{-1} \quad \Rightarrow \quad \int_t^{t+1} y'(\tau) d\tau \geq mw_0^{-1}$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlik $t > 0$ için $[0, t]$ üzerinde integre edilirse,

$$\begin{aligned} \int_0^t \int_0^{t+1} y'(\tau) d\tau dt &\geq \int_0^t mw_0^{-1} dt \\ \int_0^{t+1} y'(\tau) d\tau &\geq mw_0^{-1} t \\ y(t+1) &\geq y(0) + mw_0^{-1} t \end{aligned}$$

yazılabilir. $y(t)$ nin tanımından, $(y(t) = \phi^{-m}(t))$

$$\phi^{-m}(t+1) \geq \phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} t$$

ve $t \geq 1$ alınırsa, $n \leq t \leq n+1$ olacak şekilde n tamsayısı için

$$\phi^{-m}(t) \geq \phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} (t-1)$$

elde edilir. $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ olmak üzere,

$$\phi^{-m}(t) \geq \phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} [t-1]^+$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin $\left(-\frac{1}{m}\right)$ kuvveti alınırsa, eşitsizlik yön değiştirir

ve böylece

$$\phi(t) \leq \left(\phi^{-m}(0) + mw_0^{-1} [t-1]^+ \right)^{\frac{1}{m}}$$

bulunur.

ii) Şimdi $m=0$ olsun. Bu durumda

$$\phi^{1+m}(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1))$$

eşitsizliği

$$\begin{aligned} \phi(t) \leq w_0 (\phi(t) - \phi(t+1)) &\Rightarrow w_0 \phi(t+1) \leq (w_0 - 1) \phi(t) \\ &\Rightarrow \phi(t+1) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0} \right) \phi(t) \end{aligned}$$

olur. Ayrıca eğer $t \geq 1$ alınırsa, n tamsayısı için $n \leq t \leq n+1$ dir.

O halde

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right) \phi(t-1)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\phi(t) \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^2 \phi(t-2) \leq \dots \leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n)$$

olur. Böylece ($\phi(1) \leq \phi(0)$ olduğundan)

$$\begin{aligned} \phi(t) &\leq \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^n \phi(t-n) \\ &\leq \phi(0) \left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{[t-1]^+} \\ &= \phi(0) e^{-[t-1]^+ \ln\left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{-1}} \\ &= \phi(0) e^{-w_1 [t-1]^+} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $w_1 = \ln\left(1 - \frac{1}{w_0}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{w_0}{w_0-1}\right)$ dır.

Böylece lemmanın ispatı tamamlanmış olur.

3.2. Çözümlerin Patlaması ile İlgili Bazı Lemma ve Eşitsizlikler

3.2.1. Konkavlık metodu

Levine (1974) tarafından elde edilen bu metodun temel düşüncesi; problemin lokal varlık koşulu altında problemi temsil eden pozitif bir $F(t)$ fonksiyonu için $\phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ konkav fonksiyonunu inşa etmektir.

Lemma 3.2.1.1. $F(t)$ iki kez türevlenebilen ve $t > 0$, $\alpha > 0$ için

$$F''(t)F(t) - (1 + \alpha)(F'(t))^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun. Eğer $F(0)>0$ ve $F'(0)>0$ ise bu durumda $0<T_c \leq \frac{F(0)}{\alpha F'(0)}$ zamanı vardır ki

$$\lim_{t \rightarrow T_c} F(t) = \infty$$

olur (Levine, 1974).

İspat. $\phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ olsun. $\phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ nin birinci ve ikinci türevleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \phi'(t) &= \left[F^{-\alpha}(t) \right]' \\ &= -\alpha F^{-\alpha-1}(t) F'(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

ve

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= (-\alpha)(-\alpha-1) F^{-\alpha-2}(t) [F'(t)]^2 + (-\alpha) F^{-\alpha-1}(t) F''(t) \\ &= -\alpha F^{-\alpha-2}(t) \left[F''(t) F(t) - (1+\alpha) (F'(t))^2 \right] \end{aligned} \quad (3.2)$$

olur. (3.2) eşitliğinde

$$F''(t) F(t) - (1+\alpha) (F'(t))^2 \geq 0$$

kabulü göz önünde bulundurulursa

$$\phi''(t) = -\alpha F^{-\alpha-2}(t) \leq 0 \quad (3.3)$$

olur. Yani $\phi(t) = F^{-\alpha}(t)$ konkav fonksiyondur. Ayrıca (3.1) eşitliğinde $\phi'(t)$ fonksiyonu negatiftir, dolayısıyla $\phi(t)$ azalan fonksiyondur. $\phi(t)$ fonksiyonunun $(0, \phi(0))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$\begin{aligned} \phi(t) - \phi(0) &= \phi'(0)(t - 0), \\ \phi(t) &= \phi(0) + \phi'(0)t \end{aligned}$$

ve $\phi(0) = F^{-\alpha}(0)$ olduğundan

$$\phi(t) = F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0) F'(0)t \quad (3.4)$$

olur. Teğet doğrusunun t eksenini kestiği nokta $(T^*, 0)$ ise

$$0 = F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0)F'(0)T^*$$

$$T^* = \frac{F(0)}{\alpha F'(0)} > 0$$

bulunur. (3.3) ten $\phi(t)$ konkav olduğundan, $\phi(t)$ nin grafiği teğet doğrusunun altında kalır.

Teğet doğrusu t eksenini T^* noktasında kestiğinden $\phi(t)$ nin grafiği t eksenini $T_c < T^*$ noktasında keser. (3.4) ten

$$F^{-\alpha}(t) = F^{-\alpha}(0) - \alpha F^{-\alpha-1}(0)F'(0)t,$$

$$\frac{1}{F^\alpha(t)} = \frac{1}{F^\alpha(0)} - \frac{\alpha F'(0)t}{F^{\alpha+1}(0)},$$

$$F^\alpha(t) = \frac{F^{\alpha+1}(0)}{F(0) - \alpha F'(0)t}$$

dir. Böylece $t \rightarrow T_c^-$ iken $\phi(t) \rightarrow 0$ dır. Dolayısıyla

$$\lim_{t \rightarrow T_c^-} F(t) = \infty$$

olur.

3.2.2. Georgiev ve Todorova metodu

Bu metot 1994 yılında Georgiev ve Todorova tarafından elde edilmiştir.

Lemma 3.2.2.1. Bu metodun temel fikri uygun seçilmiş bir $\psi(t)$ fonksiyoneli için

$$\psi'(t) \geq c_1 \psi^{c_2}(t)$$

($c_1 > 0$, $c_2 > 1$, $t \geq 0$) diferensiyel eşitsizliğini elde etmektir. Buradan $(0, t)$ aralığında integral alınırsa

$$\frac{\psi'(t)}{\psi^{c_2}(t)} \geq c_1,$$

$$\frac{\psi^{1-c_2}(t)}{1-c_2} - \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{1-c_2} \geq c_1 t$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\psi^{c_2-1}(t) \geq \frac{1}{\psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t}$$

elde edilir. Böylece paydayı sıfır yapan

$$\begin{aligned} \psi^{1-c_2}(0) - c_1(c_2-1)t &= 0 \\ t &= \frac{\psi^{1-c_2}(0)}{c_1(c_2-1)} \end{aligned}$$

zamanında $\psi(t)$ sınırsız olur.

Georgiev ve Todorova çalışmalarında lineer olmayan damping $(|u_t|^{p-1}u_t)$ ve kaynak terim $(|u|^{q-1}u)$ içeren

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^{p-1}u_t = |u|^{q-1}u$$

denkleminin lokal varlığını ve negatif başlangıç enerjisi $(E(0) < 0)$ için çözümlerin patlamasını çalıştılar. Burada

$$\begin{cases} 1 < q \leq p \text{ ise global çözüm,} \\ 1 < p < q \leq \frac{n}{n-2} \text{ ise blow up} \end{cases}$$

olduğunu gösterdiler (Georgiev ve Todorova, 1994).

3.2.3. Li ve Tsai metodu

Lemma 3.2.3.1. $\delta > 0$ ve $B(t) \in C^2(0, \infty)$ negatif olmayan fonksiyonu, $t \geq 0$ için

$$B''(t) - 4(\delta + 1)B'(t) + 4(\delta + 1)B(t) \geq 0 \quad (3.5)$$

eşitsizliği sağlansın. $r_2 = 2(\delta + 1) - 2\sqrt{(\delta + 1)\delta}$ olmak üzere; eğer

$$B'(0) > r_2 B(0) + K_0 \quad (3.6)$$

ise, o zaman $t > 0$ için $B'(t) > K_0$ dır. Burada K_0 sabit sayıdır (Li ve Tsai, 2003).

İspat.

$r^2 - 4(\delta + 1)r + 4(\delta + 1) = 0$ denkleminin kökleri $r_1 = 2(\delta + 1) + 2\sqrt{\delta(\delta + 1)}$ ve $r_2 = 2(\delta + 1) - 2\sqrt{\delta(\delta + 1)}$ dir. O halde (3.5) diferensiyel eşitsizliği

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} - r_1\right)\left(\frac{d}{dt} - r_2\right)B(t) &\geq 0, \\ B''(t) - r_2B'(t) - r_1B'(t) + r_1r_2B(t) &\geq 0, \\ B''(t) - r_2B'(t) &\geq r_1B'(t) - r_1r_2B(t) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\frac{(B'(t) - r_2B(t))'}{B'(t) - r_2B(t)} \geq r_1 \quad (3.7)$$

bulunur. (3.7) nin 0 dan t ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \ln(B'(t) - r_2B(t)) \Big|_0^t &\geq r_1 t \\ \ln\left(\frac{B'(t) - r_2B(t)}{B'(0) - r_2B(0)}\right) &\geq r_1 t \\ \frac{B'(t) - r_2B(t)}{B'(0) - r_2B(0)} &\geq e^{r_1 t} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$B'(t) \geq r_2B(t) + (B'(0) - r_2B(0))e^{r_1 t}$$

olur. Böylece $B'(t) > K_0$ elde edilir.

Lemma 3.2.3.2. Eğer $H(t)$, $[t_0, \infty]$ aralığında artmayan ve $t \geq t_0$ için

$$[H'(t)]^2 \geq a + b[H(t)]^{2+\frac{1}{\delta}} \quad (3.8)$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise, o zaman

$$\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$$

eşitliğini sağlayacak şekilde sonlu bir T^* zamanı vardır. Burada $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ dir.

T^* ın üst sınırları için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

(i) Eğer $b < 0$ ve $H(t_0) < \min\left\{1, \sqrt{-\frac{a}{b}}\right\}$ ise, o zaman

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)} \quad (3.9)$$

dır.

(ii) Eğer $b = 0$ ise, o zaman

$$T^* \leq t_0 + \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \quad (3.10)$$

dır.

(iii) Eğer $b > 0$ ise, o zaman

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \frac{\delta c}{\sqrt{a}} \left[1 - (1 + cH(t_0))^{-\frac{1}{2\delta}} \right] \quad (3.11)$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b}\right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır (Li ve Tsai 2003).

İspat.

(i) $c \geq d > 0$ için $\sqrt{c^2 - d^2} \geq c - d$ olduğundan, (3.8) den $t \geq t_0$ için

$$\begin{aligned} H'(t) &\leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b} [H(t)]^{1+\frac{1}{2\delta}} \\ &\leq -\sqrt{a} + \sqrt{-b} H(t) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$H(t) \leq \left(H(t_0) - \sqrt{-\frac{a}{b}} \right) e^{(t-t_0)\sqrt{-b}} + \sqrt{-\frac{a}{b}}$$

olur. Burada $\lim_{t \rightarrow T^*-} H(t) = 0$ olacak şekilde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve T^*

sayısının üst sınırı (3.9) da verildiği gibidir.

(ii) $b = 0$ ise, (3.8) den $t \geq t_0$ için

$$H(t) \leq H(0) - \sqrt{a}(t - t_0)$$

olur. Böylece burada $\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$ olacak biçimde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır ve

T^* sayısının üst sınırı (3.10) da verildiği gibidir.

(iii) $b > 0$ ise, (3.8) den

$$H'(t) \leq -\sqrt{a \left(1 + (cH(t))^{2+\frac{1}{\delta}} \right)} \quad (3.12)$$

dır. Burada $c = \left(\frac{a}{b} \right)^{2+\frac{1}{\delta}}$ dır.

$m, n > 0$ ve $q \geq 1$ olmak üzere

$$m^q + n^q \geq 2^{1-q} (m+n)^q$$

eşitsizliği ele alınırsa, $q = 2 + \frac{1}{\delta}$ olarak seçilip (3.12) den

$$H'(t) \leq -\sqrt{a} 2^{\frac{-1-\delta}{2\delta}} (1 + cH(t))^{1+\frac{1}{2\delta}}$$

diferensiyel eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin çözülmesiyle

$$H(t) \leq \frac{1}{c} \left\{ -1 + \left[(1 + cH(t_0))^{-\frac{1}{2\delta}} + \frac{\sqrt{a}}{\delta c} 2^{\frac{-3\delta+1}{2\delta}} (t - t_0) \right]^{-2\delta} \right\}$$

bulunur. Böylece burada $\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$ olacak biçimde pozitif bir $T^* < \infty$ sayısı vardır

ve T^* sayısının üst sınırı (3.11) de verildiği gibidir.



4. GENELLEŞTİRİLMİŞ LİNEER OLMAYAN KLEIN-GORDON DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN ENERJİ AZALIMI VE PATLAMASI

Bu bölümde kaynak ve doğrusal olmayan damping terim içeren genelleştirilmiş Klein-Gordon denklem sisteminin enerji fonksiyonunun azalımı, Nakao eşitsizliği kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca negatif başlangıç enerjisi ile Georgiev ve Todorova yöntemi kullanılarak çözümlerin patlaması incelenmiştir.

4.1. Giriş

Bu çalışmada kaynak ve doğrusal olmayan damping terim içeren genelleştirilmiş Klein-Gordon denklem sistemi için

$$u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) + m_1^2 u + |u_t|^{p-1} u_t = f_1(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (4.1)$$

$$v_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v) + m_2^2 v + |v_t|^{q-1} v_t = f_2(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.3)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega, \quad (4.4)$$

$$u(x, t) = v(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega \quad (4.5)$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $\Omega, \mathbb{R}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $n=1, 2, 3; m_1, m_2 > 0, p, q \geq 1$ ve $\alpha \geq 1$ olup $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ fonksiyonları (4.9) ve (4.10) da tanımlanmıştır.

(4.1)–(4.5) denklem sisteminde $\alpha=1$ olarak alınırsa, bu sistem Klein-Gordon denklem sistemine dönüşür.

(A1) $a, b > 0$ olmak üzere

$$F(u, v) = [a |u + v|^{r+1} + 2b |uv|^{\frac{r+1}{2}}] \quad (4.6)$$

olsun. Burada

$$\begin{cases} 1 < r & ; & n \leq 2, \\ 1 < r \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2 \end{cases} \quad (4.7)$$

ve

$$\begin{cases} 1 \leq p, q & ; & n \leq 2, \\ 1 \leq p, q \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2 \end{cases} \quad (4.8)$$

dır. Ayrıca

$$f_1(u, v) = (r+1)[a|u+v|^{r-1}(u+v) + b|u|^{\frac{r-3}{2}}|v|^{\frac{r+1}{2}}], \quad (4.9)$$

$$f_2(u, v) = (r+1)[a|u+v|^{r-1}(u+v) + b|u|^{\frac{r+1}{2}}|v|^{\frac{r-3}{2}}v] \quad (4.10)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için

$$uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = (r+1)F(u, v) \quad (4.11)$$

olduğu kolayca görülebilir.

4.2. Ön Bilgiler

Lemma 4.1. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere

$$c_0(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \leq F(u, v) \leq c_1(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \quad (4.12)$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari, 2010).

İspat. (4.12) eşitsizliğinin sağ tarafının doğruluğunu göstermek için (4.6) eşitliğinde $a = b = 1$ olarak alınırsa, Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} F(u, v) &= [|u+v|^{r+1} + 2|uv|^{\frac{r+1}{2}}] \\ &\leq c(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) + 2|uv|^{\frac{r+1}{2}} \\ &\leq c_1(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \end{aligned}$$

bulunur. Burada $c_1 = c + 1$ dir. Yani (4.12) eşitsizliğinin sağ tarafının doğruluğu açıktır.

(4.12) nin sol tarafında eğer $u=v=0$ ise eşitsizlik doğrudur. Şimdi genellik kaybedilmeden $v \neq 0$ ve $|u| \leq |v|$ veya $|u| > |v|$ durumları ele alınsın.

$|u| \leq |v|$ için,

$$F(u, v) = |v|^{r+1} \left[a \left| 1 + \frac{u}{v} \right|^{r+1} + 2b \left| \frac{u}{v} \right|^{\frac{r+1}{2}} \right]$$

yazılabilir. Şimdi $s = \frac{u}{v}$ olmak üzere $[-1, 1]$ aralığında

$$j(s) = a |1 + s|^{r+1} + 2b |s|^{\frac{r+1}{2}}$$

sürekli fonksiyonu tanımlansın. Burada $\min j(s) \geq 0$ dır.

Eğer $\min j(s) = 0$ ise, bazı $s_0 \in [-1, 1]$ sayıları için

$$j(s_0) = a |1 + s_0|^{r+1} + 2b |s_0|^{\frac{r+1}{2}} = 0$$

olur. Buradan $|1 + s_0| = |s_0| = 0$ olması gerekir, bu da imkansızdır.

Yani $\min j(s) = 2c_0 > 0$ dır. Böylece $|v| \geq |u|$ için,

$$F(u, v) \geq 2c_0 |v|^{r+1} \geq 2c_0 |u|^{r+1}$$

dır. Sonuç olarak

$$2F(u, v) \geq 2c_0 (|u|^{r+1} + |v|^{r+1})$$

eşitsizliği sağlanır ve buradan

$$c_0 (|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \leq F(u, v)$$

olur.

Eğer $|u| > |v|$ ise, benzer şekilde

$$F(u, v) = |u|^{r+1} \left[a \left| 1 + \frac{v}{u} \right|^{r+1} + 2b \left| \frac{v}{u} \right|^{\frac{r+1}{2}} \right] \geq 2c_0 |u|^{r+1} \geq 2c_0 |v|^{r+1}$$

dır. O halde

$$2F(u, v) \geq 2c_0(|u|^{r+1} + |v|^{r+1})$$

dan

$$c_0(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \leq F(u, v)$$

bulunur. Böylece

$$c_0(|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) \leq F(u, v) \leq c_1(|u|^{r+1} + |v|^{r+1})$$

eşitsizliği sağlanarak lemmanın ispatı tamamlanır.

Şimdi

$$J(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (4.13)$$

ve

$$I(t) = \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 - (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (4.14)$$

fonksiyonelleri tanımlansın. Ayrıca (4.1)–(4.5) probleminin enerji fonksiyoneli de

$$E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (4.15)$$

şeklindedir. Son olarak

$$W = \{(u, v) : (u, v) \in W_0^{1, \alpha+1}(\Omega) \times W_0^{1, \alpha+1}(\Omega), I(u, v) > 0\} \cup \{0, 0\} \quad (4.16)$$

olsun.

Lemma 4.2. $t \geq 0$ için

$$E'(t) = - \left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1} \right) \leq 0 \quad (4.17)$$

olduğundan $E(t)$ fonksiyoneli $t \geq 0$ için artmayandır.

İspat. (4.1) denkleminin u_t ile iç çarpımı alınır

$$(u_t, u_{tt}) - (u_t, \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u)) + m_1^2 (u_t, u) + (u_t, |u_t|^{p-1} u_t) = (u_t, f_1(u, v)) \quad (4.18)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
(u_t, u_t) &= \int_{\Omega} u_t u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, \\
(u_t, \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u)) &= \int_{\Omega} u_t \nabla(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) dx = - \int_{\Omega} \nabla u_t |\nabla u|^{\alpha} dx \\
&= - \frac{1}{\alpha+1} \int_{\Omega} \frac{d}{dt} |\nabla u|^{\alpha+1} dx = - \frac{1}{\alpha+1} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}, \\
m_1^2(u_t, u) &= m_1^2 \int_{\Omega} u_t u dx = \frac{m_1^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u|^2 dx = \frac{m_1^2}{2} \frac{d}{dt} \|u\|^2, \\
(u_t, |u_t|^{p-1} u_t) &= \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} dx = \|u_t\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned}$$

terimleri (4.18) de yerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 \right] + \|u_t\|_{p+1}^{p+1} = (u_t, f_1(u, v)) \quad (4.19)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2) denkleminin v_t ile iç çarpımı alınır

$$(v_t, v_t) - (v_t, \operatorname{div}(|\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v)) + m_2^2(v_t, v) + (v_t, |v_t|^{q-1} v_t) = (v_t, f_2(u, v)) \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.20) denkleminde terimler düzenlenirse

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_2^2 \|v\|^2 \right] + \|v_t\|_{q+1}^{q+1} = (v_t, f_2(u, v)) \quad (4.21)$$

bulunur. (4.19) ve (4.21) taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right] \\
&+ \|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1} = (u_t, f_1(u, v)) + (v_t, f_2(u, v))
\end{aligned} \quad (4.22)$$

olur. (4.11) den $(u_t, f_1(u, v)) + (v_t, f_2(u, v)) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u, v) dx$ ifadesi (4.22) de yerine

yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \right] \\
&= - \left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1} \right) \leq 0
\end{aligned} \quad (4.23)$$

bulunur. $t \geq 0$ için $E'(t) \leq 0$ olduğundan $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur.

(4.23) eşitsizliğinin $[0, t]$ üzerinde integrali alınır, $t \geq 0$ için

$$E(t) - E(0) = - \int_0^t \left(\|u_\tau\|_{p+1}^{p+1} + \|v_\tau\|_{q+1}^{q+1} \right) d\tau \quad (4.24)$$

sağlanır.

Teorem 4.3 (Lokal Varlık). Kabul edelim ki (4.7) ve (4.8) sağlansın. Ayrıca $u_0, v_0 \in W_0^{1,\alpha+1}(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega)$, $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ olsun.

Bu durumda (4.1)–(4.5) problemi

$$u, v \in \left(C[0, T]; W_0^{1,\alpha+1}(\Omega) \cap L^{r+1}(\Omega) \right),$$

$$u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^{p+1}(\Omega \times [0, T]),$$

$$v_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^{q+1}(\Omega \times [0, T])$$

lokal çözümüne sahiptir. Ayrıca, aşağıdaki durumlardan en az biri doğrudur:

i) $T = \infty$

ii) $t \rightarrow T^-$ için $\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \rightarrow \infty$ olur.

İspat. Teoremin ispatı Agre ve Rammaha (2006) çalışmasına benzer yapılabilir.

4.3. Global Varlık ve Enerji Azalması

Bu kısımda (4.1)–(4.5) probleminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması gösterilmiştir.

Lemma 4.4. Kabul edelim ki (4.7) sağlansın ve $\alpha > 1$ olmak üzere, $r > \alpha$ ile

$$r+1 \leq \frac{n(\alpha+1)}{n-\alpha+1}, \quad \alpha+1 < n \quad (4.25)$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $(u_0, v_0) \in W$ ve $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için

$$\beta = \frac{c_1 C_*^{r+1} (r+1)(\alpha+1)}{2} \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} E(0) \right)^{\frac{r-\alpha}{\alpha+1}} < 1 \quad (4.26)$$

ise, o zaman $\forall t \geq 0$ için $(u, v) \in W$ dir.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, $u(t)$ ve $v(t)$ nin sürekliliğinden $t = 0$ komşuluğundaki bazı aralıklarda $\forall t \in [0, T_m]$ için $T_m > 0$ maksimum zamanı vardır ve

$$\{I(T_m) = 0 \text{ ve } I(T) > 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T_m\}$$

dır. (4.13) ve (4.14) ten

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{r+1} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 - (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\ &\quad + \frac{r-1}{2(r+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{r+1} I(t) + \frac{r-1}{2(r+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\ &\geq \frac{r-1}{2(r+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $E(t) \leq E(0)$ ve $E(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} &\leq \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \\ &\leq \frac{2(r+1)}{r-1} J(t) \leq \frac{2(r+1)}{r-1} J(t) + \frac{2(r+1)}{r-1} \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\ &= \frac{2(r+1)}{r-1} E(t) \leq \frac{2(r+1)}{r-1} E(0) \end{aligned} \tag{4.27}$$

olur. Diğer yandan (4.12) den

$$(r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq c_1 (r+1) (\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1})$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada Sobolev gömme teoreminden $t \in [0, T_m]$ için

$$\|u\|_{r+1}^{r+1} \leq C_*^{r+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{r+1} = C_*^{r+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{r-\alpha} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \tag{4.28}$$

ve

$$\|v\|_{r+1}^{r+1} \leq C_*^{r+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{r+1} = C_*^{r+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{r-\alpha} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \tag{4.29}$$

olur. (4.27) den

$$\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \leq \frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} E(0)$$

bulunur ve $(a+b)^\lambda \leq 2^{\lambda-1}(a^\lambda + b^\lambda)$ dan

$$\|\nabla u\|_{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1} \leq \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} E(0) \right)^{\frac{1}{\alpha+1}}$$

ise

$$\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{r-\alpha} \leq \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} E(0) \right)^{\frac{r-\alpha}{\alpha+1}}$$

ve

$$\|\nabla v\|_{\alpha+1}^{r-\alpha} \leq \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} E(0) \right)^{\frac{r-\alpha}{\alpha+1}}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Elde edilen eşitsizlikler (4.28) ve (4.29) da yerlerine yazılıp taraf tarafa toplanırsa, $t \in [0, T_m]$ için

$$\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \leq C_*^{r+1} \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} E(0) \right)^{\frac{r-\alpha}{\alpha+1}} (\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1})$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizlik

$$(r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq c_1 (r+1) (\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1})$$

eşitsizliğinde yerine yazılırsa (4.26) dan

$$\begin{aligned} c_1 (r+1) (\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1}) &\leq \beta \frac{2}{\alpha+1} (\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) \\ &< \frac{2}{\alpha+1} (\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}) \\ &\leq \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir. Buradan $\forall t \in [0, T_m]$ için $I(t) > 0$ olduğu görülür.

Bu işlemin tekrarıyla; T_m , T ye genişletilir ve lemmanın ispatı tamamlanır.

Lemma 4.5. Lemma 4.4 ün koşulları sağlansın. Bu durumda $\eta_1 = 1 - \beta$ olmak üzere

$$\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \leq \frac{1}{\eta_1} I(t) \quad (4.31)$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat. (4.12) ve (4.30) dan

$$\begin{aligned} (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx &\leq \beta \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \right) \\ &\leq \beta \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $\beta = 1 - \eta_1$ yazılırsa

$$(r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq (1 - \eta_1) \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} &\eta_1 \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\ &\leq \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 - (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\ &\leq I(t) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (4.31) eşitsizliği bulunup ispat tamamlanır.

Teorem 4.6. (4.7) ve (4.16) sağlansın. $(u_0, v_0) \in W$, (4.26) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (4.1) – (4.5) probleminin çözümü globaldir.

İspat. Çözümün global olduğunu göstermek için

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2$$

ifadesinin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu göstermek için $E(t)$ ve $I(t)$ eşitsizlikleri kullanılırsa, $I(t) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + J(t) = \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&+ \frac{1}{r+1} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 - (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\
&+ \frac{r-1}{2(r+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + \frac{1}{r+1} I(t) \\
&+ \frac{r-1}{2(r+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\
&\geq \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + \frac{r-1}{2(r+1)} \left(\frac{2}{\alpha+1} \left(\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \right) + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right)
\end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \leq CE(0) \quad (4.32)$$

bulunur. Burada $C = \frac{2(r+1)}{r-1}$ dir. (4.32) eşitsizliğinden

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2$$

ifadesi t den bağımsız olarak sınırlıdır. Sonuç olarak Teorem 4.3 ten çözüm global olur.

Teorem 4.7. (4.7), (4.16), (4.26) sağlansın ve $(u_0, v_0) \in W$ olsun. Böylece

$$E(t) \leq \begin{cases} E(0)e^{-w_1[t-1]^+} & ; \quad p = q = 1, \\ \left(E(0)^{-m} + C_9^{-1} m[t-1]^+ \right)^{-\frac{1}{m}} & ; \quad p, q > 1 \end{cases}$$

enerji kestirimi yazılabilir. Burada w_1, m ve C_9 daha sonra belirlenecek olan pozitif sabitlerdir.

İspat.

$$E'(t) = -\left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1}\right)$$

ifadesi $t > 0$ için $[t, t+1]$ üzerinde integre edilirse,

$$E(t) - E(t+1) = \int_t^{t+1} \left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1} \right) d\tau \quad (4.33)$$

bulunur.

$$D_1^{p+1}(t) = \int_t^{t+1} \left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1} \right) d\tau \quad (4.34)$$

ve

$$D_2^{q+1}(t) = \int_t^{t+1} \left(\|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1} \right) d\tau \quad (4.35)$$

olarak seçilirse (4.33) ten

$$E(t) - E(t+1) = D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)$$

olur. (4.34) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt &\leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1 \cdot |u_t|^2 dx \right) dt \leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{p+1}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |u_t|^2 dx \right)^{\frac{2}{p+1}} dt \\ &\leq \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}} \left(\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} dt = \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}} \|u_t\|_{p+1}^2 dt \\ &= |\Omega|^{\frac{p-1}{p+1}} D_1^2(t) = CD_1^2(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

yazılır. Benzer şekilde (4.35) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx dt &\leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1 \cdot |v_t|^2 dx \right) dt \leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{q+1}{q-1}} dx \right)^{\frac{q-1}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v_t|^2 dx \right)^{\frac{2}{q+1}} dt \\ &\leq \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{q-1}{q+1}} \left(\|v_t\|_{q+1}^{q+1} \right)^{\frac{2}{q+1}} dt = \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{q-1}{q+1}} \|v_t\|_{q+1}^2 dt \\ &= |\Omega|^{\frac{q-1}{q+1}} D_2^2(t) = CD_2^2(t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

bulunur.

Böylece $t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4} \right]$ ve $t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t + 1 \right]$ olmak üzere (4.36) ve (4.37) den

$$\|u_t(t_i)\| \leq CD_1(t) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4.38)$$

ve

$$\|v_t(t_i)\| \leq CD_2(t) \quad , \quad i = 1, 2 \quad (4.39)$$

yazılabilir. Şimdi (4.1) denkleminin u ile iç çarpımı alınır

$$(u, u_{tt}) - (u, \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u)) + m_1^2(u, u) + (u, |u_t|^{p-1} u_t) = (u, f_1(u, v))$$

elde edilir. Elde edilenler düzenlenirse

$$\begin{aligned} (u, \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u)) &= \int_{\Omega} u \nabla(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla u |\nabla u|^{\alpha} dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^{\alpha+1} dx = - \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \end{aligned}$$

ifadesinden

$$\int_{\Omega} u u_{tt} dx + \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t dx = \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx \quad (4.40)$$

olur. Benzer şekilde (4.2) denkleminin v ile iç çarpımı alınır

$$\int_{\Omega} v v_{tt} dx + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_2^2 \|v\|^2 + \int_{\Omega} |v_t|^{q-1} v_t dx = \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx \quad (4.41)$$

bulunur. (4.40) ve (4.41) in taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} [u u_{tt} + v v_{tt}] dx + \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \\ &- \int_{\Omega} [u f_1(u, v) + v f_2(u, v)] dx + \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t dx + \int_{\Omega} |v_t|^{q-1} v_t dx = 0 \end{aligned} \quad (4.42)$$

elde edilir. (4.11), (4.42) ve $I(t)$ nin tanımından $\alpha > 1$ için $\frac{2}{\alpha+1} < 1$ olduğundan

$$I(t) \leq - \int_{\Omega} [u u_{tt} + v v_{tt}] dx - \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t dx - \int_{\Omega} |v_t|^{q-1} v_t dx \quad (4.43)$$

olur. (4.43), $[t_1, t_2]$ üzerinde integre edilirse

$$\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt \leq - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [uu_{tt} + vv_{tt}] dxdt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u dxdt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^{q-1} v_t v dxdt \quad (4.44)$$

olur. (4.44) ün sağ tarafındaki ilk terime kısmi integrasyon ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} uu_{tt} dxdt &= - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} uu_{tt} dt dx = - \int_{\Omega} \left[uu_t \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} |u_t|^2 dt \right] dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[uu_t \Big|_{t_1}^{t_2} \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dxdt \\ &= - \int_{\Omega} \left[|u_t(t_2)| |u(t_2)| - |u_t(t_1)| |u(t_1)| \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt \\ &\leq \|u_t(t_2)\| \|u(t_2)\| + \|u_t(t_1)\| \|u(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt \end{aligned} \quad (4.45)$$

ve

$$\begin{aligned} - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} vv_{tt} dxdt &= - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} vv_{tt} dt dx = - \int_{\Omega} \left[vv_t \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} |v_t|^2 dt \right] dx \\ &= - \int_{\Omega} \left[vv_t \Big|_{t_1}^{t_2} \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^2 dxdt \\ &= - \int_{\Omega} \left[|v_t(t_2)| |v(t_2)| - |v_t(t_1)| |v(t_1)| \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt \\ &\leq \|v_t(t_2)\| \|v(t_2)\| + \|v_t(t_1)\| \|v(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt \end{aligned} \quad (4.46)$$

elde edilir. (4.45) ve (4.46) eşitsizlikleri (4.44) te yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt &\leq \|u_t(t_1)\| \|u(t_1)\| + \|u_t(t_2)\| \|u(t_2)\| + \|v_t(t_1)\| \|v(t_1)\| + \|v_t(t_2)\| \|v(t_2)\| \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u dxdt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^{q-1} v_t v dxdt \end{aligned} \quad (4.47)$$

bulunur. Şimdi (4.47) nin sağ tarafındaki son iki terim için bir kestirim elde edilirse, Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^{p-1} u_t u dx dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^{\frac{p+1}{p}} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^{p+1} dx \right)^{\frac{p}{p+1}} \left(\int_{\Omega} |u|^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p+1}} dt \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\|u_t(t)\|_{p+1}^p \|u(t)\|_{p+1} \right] dt
\end{aligned} \tag{4.48}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^{q-1} v_t v dx dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |v_t|^{\frac{q+1}{q}} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |v_t|^{q+1} dx \right)^{\frac{q}{q+1}} \left(\int_{\Omega} |v|^{q+1} dx \right)^{\frac{1}{q+1}} dt \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\|v_t(t)\|_{q+1}^q \|v(t)\|_{q+1} \right] dt
\end{aligned} \tag{4.49}$$

yazılır. Buradan Sobolev-Poincare eşitsizliği, (4.27) ve (4.34) ten

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \left[\|u_t(t)\|_{p+1}^p \|u(t)\|_{p+1} \right] dt &\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(t)\|_{p+1}^p \|\nabla u\| dt \\
&\leq C_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \|u_t(t)\|_{p+1}^p E^{\frac{1}{2}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_{p+1}^p dt \\
&\leq C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_1^p(t)
\end{aligned} \tag{4.50}$$

bulunur. Benzer şekilde Sobolev-Poincare eşitsizliği, (4.27) ve (4.35) ten

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \left[\|v_t(t)\|_{q+1}^q \|v(t)\|_{q+1} \right] dt &\leq C'_* \int_{t_1}^{t_2} \|v_t(t)\|_{q+1}^q \|\nabla v\| dt \\
&\leq C'_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \int_{t_1}^{t_2} \|v_t(t)\|_{q+1}^q E^{\frac{1}{2}}(s) dt \\
&\leq C'_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|_{q+1}^q dt \\
&\leq C'_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_2^q(t)
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olur. (4.47) nin sağ tarafındaki ilk iki terime Sobolev-Poincare eşitsizliği uygulanırsa, (4.27) ve (4.38) den, $i = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
\|u_t(t_1)\| \|u(t_1)\| + \|u_t(t_2)\| \|u(t_2)\| &= \|u_t(t_i)\| \|u(t_i)\| \\
&\leq C_* \|u_t(t_i)\| \|\nabla u(t_i)\| \\
&\leq C_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[E^{\frac{1}{2}}(t_1) + E^{\frac{1}{2}}(t_2) \right] \|u_t(t_i)\| \\
&\leq C_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} 2 \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \|u_t(t_i)\| \\
&\leq C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} 2C \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_1(t) \\
&= C_1 D_1(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s)
\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Burada $C_1 = 2C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} C$ dir.

Benzer şekilde (4.47) nin sağ tarafındaki 3. ve 4. terime Sobolev-Poincare eşitsizliği uygulanırsa, (4.27) ve (4.39) dan, $i = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
& \|v_t(t_1)\| \|v(t_1)\| + \|v_t(t_2)\| \|v(t_2)\| = \|v_t(t_i)\| \|v(t_i)\| \\
& \leq C'_* \|v_t(t_i)\| \|\nabla v(t_i)\| \\
& \leq C'_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} \left[E^{\frac{1}{2}}(t_1) + E^{\frac{1}{2}}(t_2) \right] \|v_t(t_i)\| \\
& \leq C'_* \left(\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1} \right)^{\frac{1}{2}} 2 \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \|v_t(t_i)\| \quad (4.53) \\
& \leq C'_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} 2C \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_2(t) \\
& = C_2 D_2(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $C_2 = 2C'_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} C$ dir.

(4.47) nin sağ tarafındaki diğer terimler, (4.36) ve (4.37) den

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt \leq C D_1^2(t) \quad (4.54)$$

ve

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt \leq C D_2^2(t) \quad (4.55)$$

şeklinde yazılır. (4.48) – (4.55) eşitsizliklerinin (4.47) de yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \leq C_1 D_1(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) + C_2 D_2(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) + C D_1^2(t) + C D_2^2(t) \\
& + C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_1^p(t) \\
& + C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) D_2^q(t) \quad (4.56) \\
& = C_3 \left\{ \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) (D_1(t) + D_2(t)) + D_1^2(t) + D_2^2(t) \right. \\
& \left. + C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) (D_1^p(t) + D_2^q(t)) \right\}
\end{aligned}$$

olur. Burada $C_3 = \max\{C_1, C_2, C, 1\}$ dir.

Diğer taraftan $I(t)$ nin tanımından ve Lemma 4.5 ten

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{r+1} \right) \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\
&+ \left(\frac{1}{r+1} \right) \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 - (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + \left(\frac{1}{\eta_1} \frac{r-1}{2(r+1)} + \frac{1}{r+1} \right) I(t)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$E(t) \leq \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + C_4 I(t) \quad (4.57)$$

elde edilir. Burada $C_4 = \frac{1}{\eta_1} \frac{(r-1)}{2(r+1)} + \frac{1}{r+1}$ dir.

(4.57), $[t_1, t_2]$ aralığı üzerinde integre edilirse

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t) dt \leq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) dt + C_4 \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt \quad (4.58)$$

bulunur. Bu durumda (4.36), (4.37) ve (4.56) nın (4.58) de yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} E(t) dt &\leq \frac{1}{2} C \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right) \\
&+ C_4 C_3 \left\{ \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \left(D_1(t) + D_2(t) \right) + D_1^2(t) + D_2^2(t) \right. \\
&\left. + C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \left(D_1^p(t) + D_2^q(t) \right) \right\}
\end{aligned} \quad (4.59)$$

elde edilir. Şimdi (4.17), $[t, t_2]$ üzerinde integre edilirse

$$E(t) = E(t_2) + \int_t^{t_2} \left(\|u_{\tau}\|_{p+1}^{p+1} + \|v_{\tau}\|_{q+1}^{q+1} \right) d\tau \quad (4.60)$$

olur. (4.60) ın $[t_1, t_2]$ aralığında integralinin alınmasıyla da

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} E(t_2)dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_t^{t_2} \left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1} \right) d\tau dt$$

bulunur; $t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4} \right]$ ve $t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t + 1 \right]$ olmak üzere $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \geq \int_{t_1}^{t_2} E(t_2)dt = tE(t_2)\Big|_{t_1}^{t_2} = (t_2 - t_1)E(t_2) \geq \frac{1}{2}E(t_2)$$

yazılır. Yani

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \geq \frac{1}{2}E(t_2) \quad \Rightarrow \quad E(t_2) \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \quad (4.61)$$

olur. Sonuç olarak (4.33)–(4.35), (4.60), (4.61) den ve $t_1, t_2 \in [t, t + 1]$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(t) &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt + \int_t^{t+1} \left(\|u_\tau(\tau)\|_{p+1}^{p+1} + \|v_\tau(\tau)\|_{q+1}^{q+1} \right) d\tau \\ &= 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt + D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) \end{aligned} \quad (4.62)$$

elde edilir. (4.59) eşitsizliği (4.62) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right) + 2C_4C_3 \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right) + 2C_4C_3 \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \left(D_1(t) + D_2(t) \right) \\ &\quad + 2C_4C_3C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{2}}(s) \left(D_1^p(t) + D_2^q(t) \right) + D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \left(C + 2C_4C_3 \right) \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right) + D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) \\ &\quad + C_5 E^{\frac{1}{2}}(t) \left(D_1(t) + D_2(t) + D_1^p(t) + D_2^q(t) \right) \end{aligned} \quad (4.63)$$

bulunur. Burada $C_5 = 2C_4C_3 \max \left(1, C_* \sqrt{\frac{(r+1)(\alpha+1)}{r-1}} \right)$ dir.

(4.63) ün sağ tarafındaki son terime Young eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
E^{\frac{1}{2}}(t)C_5 \left(D_1(t) + D_2(t) + D_1^p(t) + D_2^q(t) \right) &\leq \frac{E(t)}{2} + \frac{C_5^2 \left[D_1(t) + D_2(t) + D_1^p(t) + D_2^q(t) \right]^2}{2} \\
&\leq \frac{E(t)}{2} + \frac{C_5^2 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_1^{2p}(t) + D_2^{2q}(t) \right]}{2}
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitsizlik (4.63) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq (2C + 4C_4C_3 + C_5^2) \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right) \\
&\quad + 2 \left(D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) \right) + C_5^2 \left(D_1^{2p}(t) + D_2^{2q}(t) \right)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

olur. Sonuç olarak

$$E(t) \leq C_6 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) + D_1^{2p}(t) + D_2^{2q}(t) \right] \tag{4.65}$$

elde edilir. Burada $C_6 = \max(2C + 4C_4C_3 + C_5^2, 2)$ dır.

1. Durum: Eğer $p = q = 1$ ise (4.65) ifadesi

$$E(t) \leq 3C_6 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t) \right] = 3C_6 \left[E(t) - E(t+1) \right] \tag{4.66}$$

olur. Bu durumda Lemma 3.1.1.1 den, $E(t)$ negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olmak üzere (4.66) eşitsizliğinde $w_0 = 3C_6$ ve $\alpha = 0$ dır. Böylece

$$E(t) \leq E(0)e^{-w_1[t-1]^+} \tag{4.67}$$

bulunur. Burada $w_1 = \ln \left(\frac{3C_6}{3C_6 - 1} \right)$ ve $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ dır.

2. Durum: Eğer $p, q > 1$ ise (4.65) ifadesi

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq C_6 D_1^2(t) \left[1 + D_1^{p-1}(t) + D_1^{2(p-1)}(t) \right] + C_6 D_2^2(t) \left[1 + D_2^{q-1}(t) + D_2^{2(q-1)}(t) \right] \\
&\leq C_6 \left[1 + D_1^{p-1}(t) + D_1^{2(p-1)}(t) + D_2^{q-1}(t) + D_2^{2(q-1)}(t) \right] \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right)
\end{aligned} \tag{4.68}$$

olur.

Bu durumda (4.33) ten $E(t) - E(t+1) = D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)$ ve $E(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan $E(t) \geq D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)$ dır ve $\forall t \geq 0$ için $E(0) \geq E(t)$ için

$$E(0) \geq D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)$$

yazılabilir. Buradan

$$D_1^{p+1}(t) \leq E(0) \Rightarrow D_1^{p-1}(t) \leq E^{\frac{p-1}{p+1}}(0) \text{ ve } D_1^{2(p-1)}(t) \leq E^{\frac{2(p-1)}{p+1}}(0)$$

ve

$$D_2^{q+1}(t) \leq E(0) \Rightarrow D_2^{q-1}(t) \leq E^{\frac{q-1}{q+1}}(0) \text{ ve } D_2^{2(q-1)}(t) \leq E^{\frac{2(q-1)}{q+1}}(0)$$

dır. Bu durumda (4.68) den, $t \geq 0$ için

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_6 \left[1 + E^{\frac{p-1}{p+1}}(0) + E^{\frac{q-1}{q+1}}(0) + E^{\frac{2(p-1)}{p+1}}(0) + E^{\frac{2(q-1)}{q+1}}(0) \right] (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \\ &= C_7 (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \end{aligned} \quad (4.69)$$

elde edilir. Burada $C_7 = C_6 \left[1 + E^{\frac{p-1}{p+1}}(0) + E^{\frac{q-1}{q+1}}(0) + E^{\frac{2(p-1)}{p+1}}(0) + E^{\frac{2(q-1)}{q+1}}(0) \right]$ dır.

(4.69) un $m = \max \left\{ \frac{p-1}{2}, \frac{q-1}{2} \right\}$ olmak üzere, $(1+m)$. kuvveti alınırsa

$$\begin{aligned} E(t)^{1+m} &\leq \left[C_7 (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \right]^{1+m} \\ &\leq C_8 (D_1^{2+2m}(t) + D_2^{2+2m}(t)) \end{aligned} \quad (4.70)$$

bulunur. Burada $C_8 = C_7^{1+m} C$ dır. Böylece (4.70) ten

$$\begin{aligned} E(t)^{1+m} &\leq C_8 (D_1^{p+1}(t) D_1^{2m-p+1}(t) + D_2^{q+1}(t) D_2^{2m-q+1}(t)) \\ &\leq C_8 \left(D_1^{p+1}(t) E^{\frac{2m-p+1}{p+1}}(0) + D_2^{q+1}(t) E^{\frac{2m-q+1}{q+1}}(0) \right) \\ &\leq C_9 (D_1^{p+1}(t) + D_2^{q+1}(t)) \\ &= C_9 (E(t) - E(t+1)) \end{aligned} \quad (4.71)$$

elde edilir. Burada $C_9 = C_8 \max \left\{ E^{\frac{2m-p+1}{p+1}}(0), E^{\frac{2m-q+1}{q+1}}(0) \right\}$ dır.

Bu durumda Lemma 3.1.1.1 ve (4.71) den $E(t)$ fonksiyonu artmayan, negatif olmayan bir fonksiyondur ve $E(t)^{1+m} \leq C_9 (E(t) - E(t+1))$ koşulunu sağlar. Bu durumda $\forall t \in [0, T]$ ve $m > 0$ için

$$E(t) \leq (E(0)^{-m} + C_9^{-1} m[t-1]^+)^{\frac{-1}{m}}$$

eşitsizliği sağlanır ve Teorem 4.7 nin ispatı tamamlanmış olur.

4.4. Çözümlerin Patlaması

Bu bölümde (4.1) – (4.5) denklem sisteminin çözümünün patlaması incelenmiştir.

Teorem 4.8. $r+1 > \max\{p+1, q+1\}$, $E(0) < 0$ ve $\alpha < r$ olsun. O halde (4.1) – (4.5) denklem sisteminin çözümü sonlu bir T^* zamanında patlar. Burada

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)} \quad (4.72)$$

dır. $\psi(t)$ ve σ fonksiyonları sırasıyla (4.73) ve (4.74) te tanımlanmıştır.

İspat. Teoremin ispatı için çözümün bütün zamanlar için var olduğu kabulünden yola çıkılıp buradan bir çelişki elde edilir. Bu amaçla $H(t) = -E(t)$ olarak tanımlansın. Böylece teoremdeki $E(0) < 0$ kabulünden ve (4.24) ten $E(t) < 0$ dır ve $H(t) = -E(t) > 0$ olur. O halde $0 < H(0) \leq H(t)$ sağlanır. ε daha sonra belirlenecek yeterince küçük bir sabit olmak üzere

$$\psi(t) = H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} v v_t dx \right) \quad (4.73)$$

ve

$$0 < \sigma \leq \min \left\{ \frac{r-p}{(r+1)p}, \frac{r-q}{(r+1)q}, \frac{r-1}{2(r+1)} \right\} \quad (4.74)$$

olsun. Burada amaç, $\psi(t)$ fonksiyonunun

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\zeta}(t) \quad , \quad \zeta > 1 \quad (4.75)$$

diferensiyel eşitsizliğini sağladığını göstermektir. Bu durum, çözümün sonlu bir zamanda patladığını göstermektedir. (4.73) ün türevi alınırsa

$$\psi'(t) = (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u_t u_t dx + \int_{\Omega} v_t v_t dx \right) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u u_{tt} dx + \int_{\Omega} v v_{tt} dx \right) \quad (4.76)$$

elde edilir. (4.1) denkleminin u ile iç çarpımı alınırsa

$$\int_{\Omega} uu_t dx + \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + \int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx = \int_{\Omega} uf_1(u, v) dx \quad (4.77)$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2) denkleminin v ile iç çarpımı alınırsa

$$\int_{\Omega} vv_t dx + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_2^2 \|v\|^2 + \int_{\Omega} vv_t |v_t|^{q-1} dx = \int_{\Omega} vf_2(u, v) dx \quad (4.78)$$

olur. (4.77) ve (4.78) in taraf tarafa toplanmasıyla, (4.11) den

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx = & -\left(\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1}\right) - \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2\right) \\ & - \left(\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx + \int_{\Omega} vv_t |v_t|^{q-1} dx\right) + (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \end{aligned} \quad (4.79)$$

sağlanır. (4.79) ifadesi (4.76) nın sağ tarafındaki son terimde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi'(t) = & (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) - \varepsilon \left(\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \right) \\ & - \varepsilon \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) - \varepsilon \left(\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx + \int_{\Omega} vv_t |v_t|^{q-1} dx \right) \\ & + \varepsilon (r+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \end{aligned} \quad (4.80)$$

elde edilir. $H(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned} 0 = & H(t) + E(t) = H(t) + \frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \end{aligned}$$

olur ve buradan eşitliğin her bir tarafı $\varepsilon(\alpha+1)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} -\varepsilon \left(\|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} \right) = & \varepsilon(\alpha+1)H(t) - \varepsilon(\alpha+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ & + \frac{\varepsilon(\alpha+1)}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + \frac{\varepsilon(\alpha+1)}{2} \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \end{aligned} \quad (4.81)$$

bulunur. (4.81), (4.80) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \varepsilon(\alpha+1)H(t) \\
&\quad - \varepsilon(\alpha+1) \int_{\Omega} F(u,v) dx + \varepsilon\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\
&\quad + \varepsilon\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) - \varepsilon(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) \\
&\quad - \varepsilon\left(\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx + \int_{\Omega} vv_t |v_t|^{q-1} dx\right) + \varepsilon(r+1) \int_{\Omega} F(u,v) dx
\end{aligned} \tag{4.82}$$

elde edilir. (4.82) nin düzenlenmesiyle

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon\left(\frac{\alpha+3}{2}\right)(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \varepsilon(\alpha+1)H(t) \\
&\quad + \varepsilon(r-\alpha) \int_{\Omega} F(u,v) dx + \varepsilon\left(\frac{\alpha-1}{2}\right)(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) \\
&\quad - \varepsilon\left(\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx + \int_{\Omega} vv_t |v_t|^{q-1} dx\right)
\end{aligned} \tag{4.83}$$

bulunur. (4.83) ün son teriminde kestirim elde etmek için $X, Y \geq 0$, $\delta > 0$, $k, l \in \mathbb{R}^+$

ve $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$ olmak üzere

$$XY \leq \frac{\delta^k X^k}{k} + \frac{\delta^{-l} Y^l}{l}$$

şeklinde Young eşitsizliği kullanılırsa; $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{l_1} = 1$ olmak üzere $k_1 = p+1$ ve $l_1 = \frac{p+1}{p}$

olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} uu_t |u_t|^{p-1} dx &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} |u|^{p+1} + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} |u_t|^{p\left(\frac{p+1}{p}\right)} \right] dx \\
&= \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} \int_{\Omega} |u|^{p+1} dx + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \int_{\Omega} |u_t|^{p+1} dx \\
&\leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p\delta_1^{-\frac{p+1}{p}}}{p+1} \|u_t\|_{p+1}^{p+1}
\end{aligned} \tag{4.84}$$

elde edilir. (4.17) ve $H(t) = -E(t)$ den

$$H'(t) = \|u_t\|_{p+1}^{p+1} + \|v_t\|_{q+1}^{q+1}$$

olur. Yani $\|u_t\|_{p+1}^{p+1} \leq H'(t)$ ve $\|v_t\|_{q+1}^{q+1} \leq H'(t)$ dır. O halde (4.84) ten

$$\int_{\Omega} u u_t |u_t|^{p-1} dx \leq \frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{p\delta_1^{\frac{p+1}{p}}}{p+1} H'(t) \quad (4.85)$$

bulunur.

Benzer şekilde $\frac{1}{k_2} + \frac{1}{l_2} = 1$ olmak üzere $k_2 = q+1$ ve $l_2 = \frac{q+1}{q}$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v v_t |v_t|^{q-1} dx &\leq \int_{\Omega} \left[\frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} |v|^{q+1} + \frac{q\delta_2^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} |v_t|^q \right] dx \\ &= \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \int_{\Omega} |v|^{q+1} dx + \frac{q\delta_2^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} \int_{\Omega} |v_t|^{q+1} dx \\ &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} \|v_t\|_{q+1}^{q+1} \\ &\leq \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \|v\|_{q+1}^{q+1} + \frac{q\delta_2^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} H'(t) \end{aligned} \quad (4.86)$$

olur. Burada δ_1 ve δ_2 daha sonra belirlenecek zamana bağlı sabitlerdir. (4.85) ve (4.86) eşitsizlikleri (4.83) te yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq (1-\sigma)H^{-\sigma}(t)H'(t) + \varepsilon \left(\frac{\alpha+3}{2} \right) (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \varepsilon(\alpha+1)H(t) \\ &+ \varepsilon(r-\alpha) \int_{\Omega} F(u,v) dx + \varepsilon \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) \\ &- \varepsilon \left(\frac{\delta_1^{p+1}}{p+1} \|u\|_{p+1}^{p+1} + \frac{\delta_2^{q+1}}{q+1} \|v\|_{q+1}^{q+1} \right) - \varepsilon \left(\frac{p\delta_1^{\frac{p+1}{p}}}{p+1} + \frac{q\delta_2^{\frac{q+1}{q}}}{q+1} \right) H'(t) \end{aligned} \quad (4.87)$$

elde edilir. Böylece $n_1, n_2 > 0$ olmak üzere δ_1 ve δ_2

$$\delta_1^{\frac{p+1}{p}} = n_1 H^{-\sigma}(t), \quad (4.88)$$

$$\delta_2^{\frac{q+1}{q}} = n_2 H^{-\sigma}(t) \quad (4.89)$$

olacak şekilde seçilirse,

$$\begin{aligned}
H(0) &\leq H(t) = -E(t) = -\frac{1}{2} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\alpha+1} \|\nabla u\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + \frac{2}{\alpha+1} \|\nabla v\|_{\alpha+1}^{\alpha+1} + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) + \int_{\Omega} F(u, v) dx \\
&\leq \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq \int_{\Omega} c_1 (|u|^{r+1} + |v|^{r+1}) dx = c_1 \left(\|u\|^{r+1} + \|v\|^{r+1} \right)
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\delta_1^{p+1} = n_1^{-p} H^{\sigma p}(t) \leq n_1^{-p} c_1^{\sigma p} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p} \quad (4.90)$$

ve

$$\delta_2^{q+1} = n_2^{-q} H^{\sigma q}(t) \leq n_2^{-q} c_1^{\sigma q} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q} \quad (4.91)$$

bulunur. (4.88)–(4.91) in (4.87) de yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\geq (1-\sigma) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\frac{\alpha+3}{2} \right) \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) + \varepsilon (\alpha+1) H(t) \\
&\quad + \varepsilon (r-\alpha) \int_{\Omega} F(u, v) dx + \varepsilon \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\
&\quad - \frac{\varepsilon n_1^{-p} c_1^{\sigma p}}{p+1} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{p+1}^{p+1} \\
&\quad - \frac{\varepsilon n_2^{-q} c_1^{\sigma q}}{q+1} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q} \|v\|_{q+1}^{q+1} \\
&\quad - \frac{\varepsilon p n_1}{p+1} H^{-\sigma}(t) H'(t) - \frac{\varepsilon q n_2}{q+1} H^{-\sigma}(t) H'(t)
\end{aligned}$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &\geq \left(1 - \sigma - \frac{\varepsilon p n_1}{p+1} - \frac{\varepsilon q n_2}{q+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\frac{\alpha+3}{2} \right) \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\
&\quad + \varepsilon (\alpha+1) H(t) + \varepsilon (r-\alpha) \int_{\Omega} F(u, v) dx + \varepsilon \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \quad (4.92) \\
&\quad - \frac{\varepsilon n_1^{-p} c_1^{\sigma p}}{p+1} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{p+1}^{p+1} - \frac{\varepsilon n_2^{-q} c_1^{\sigma q}}{q+1} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q} \|v\|_{q+1}^{q+1}
\end{aligned}$$

bulunur. $r+1 > \max\{p+1, q+1\}$ olduğundan

$$\|u\|_{p+1}^{p+1} \leq C \|u\|_{r+1}^{p+1}$$

ve

$$\|v\|_{q+1}^{q+1} \leq C \|v\|_{r+1}^{q+1}$$

yazılabilir. Böylece (4.92) nin sağ tarafındaki son iki terim için

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{p+1}^{p+1} &\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p} \|u\|_{r+1}^{p+1} \\ &= C \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\frac{p+1}{r+1}} \\ &\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p + \frac{p+1}{r+1}} \end{aligned} \quad (4.93)$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q} \|v\|_{q+1}^{q+1} &\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q} \|v\|_{r+1}^{q+1} \\ &= C \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q} \left(\|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\frac{q+1}{r+1}} \\ &\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q + \frac{q+1}{r+1}} \end{aligned} \quad (4.94)$$

bulunur. (4.74) ten

$$\begin{aligned} 0 < \sigma \leq \frac{r-p}{(r+1)p} &\Rightarrow 0 < \sigma p(r+1) \leq r-p \\ &\Rightarrow p+1 < \sigma p(r+1) + p+1 \leq r+1 \\ &\Rightarrow 0 < \frac{p+1}{r+1} < \sigma p + \frac{p+1}{r+1} \leq 1 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 < \sigma \leq \frac{r-q}{(r+1)q} &\Rightarrow 0 < \sigma q(r+1) \leq r-q \\ &\Rightarrow q+1 < \sigma q(r+1) + q+1 \leq r+1 \\ &\Rightarrow 0 < \frac{q+1}{r+1} < \sigma q + \frac{q+1}{r+1} \leq 1 \end{aligned}$$

olarak yazılabilir ve $\forall z \geq 0$, $0 < v \leq 1$ ve $\omega > 0$ için

$$z^v \leq z+1 \leq \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) (z + \omega)$$

cebirsal eşitsizliği kullanılarak, $t \geq 0$ için, $\omega = H(0)$ ve $d = 1 + \frac{1}{H(0)}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma p + \frac{p+1}{r+1}} &\leq d \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(0) \right) \\ &\leq d \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right) \end{aligned} \quad (4.95)$$

ve

$$\begin{aligned} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\sigma q + \frac{q+1}{r+1}} &\leq d \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(0) \right) \\ &\leq d \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right) \end{aligned} \quad (4.96)$$

elde edilir. (4.93) – (4.96) nın (4.92) de yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq \left(1 - \sigma - \frac{\varepsilon p n_1}{p+1} - \frac{\varepsilon q n_2}{q+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\frac{\alpha+3}{2} \right) \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\ &+ \varepsilon (\alpha+1) H(t) + \varepsilon (r-\alpha) \int_{\Omega} F(u, v) dx + \varepsilon \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\ &- \frac{\varepsilon n_1^{-p} C C_1^{\sigma p} d}{p+1} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right) - \frac{\varepsilon n_2^{-q} C C_1^{\sigma q} d}{q+1} \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right) \end{aligned} \quad (4.97)$$

bulunur. (4.97) de

$$\int_{\Omega} F(u, v) dx \geq \int_{\Omega} c_0 \left(|u|^{r+1} + |v|^{r+1} \right) dx = c_0 \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right)$$

eşitsizliği yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq \left(1 - \sigma - \frac{\varepsilon p n_1}{p+1} - \frac{\varepsilon q n_2}{q+1} \right) H^{-\sigma}(t) H'(t) + \varepsilon \left(\frac{\alpha+3}{2} \right) \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 \right) \\ &+ \varepsilon \left(\alpha+1 - \frac{n_1^{-p} C C_1^{\sigma p} d}{p+1} - \frac{n_2^{-q} C C_1^{\sigma q} d}{q+1} \right) H(t) + \varepsilon \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 \right) \\ &+ \varepsilon \left(c_0 (r-\alpha) - \frac{n_1^{-p} C C_1^{\sigma p} d}{p+1} - \frac{n_2^{-q} C C_1^{\sigma q} d}{q+1} \right) \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right) \end{aligned} \quad (4.98)$$

elde edilir. n_1 ve n_2 ,

$$c_0 (r-\alpha) - \frac{n_1^{-p} C C_1^{\sigma p} d}{p+1} - \frac{n_2^{-q} C C_1^{\sigma q} d}{q+1} \geq \frac{c_0 (r-\alpha)}{2}$$

ve

$$\alpha + 1 - \frac{n_1^{-p} C C_1^{\sigma p} d}{p+1} - \frac{n_2^{-q} C C_1^{\sigma q} d}{q+1} \geq \frac{\alpha + 1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde yeterince büyük seçilsin.

Ayrıca ε da $1 - \sigma - \frac{\varepsilon p n_1}{p+1} - \frac{\varepsilon q n_2}{q+1} \geq 0$ olacak şekilde yeterince küçük seçilsin. Böylece

(4.98) eşitsizliği

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\geq \varepsilon \left(\frac{\alpha+3}{2} \right) (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \varepsilon \left(\frac{\alpha+1}{2} \right) H(t) \\ &+ \varepsilon \left(\frac{\alpha-1}{2} \right) (m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2) + \varepsilon \left(\frac{c_0(r-\alpha)}{2} \right) (\|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1}) \\ &\geq \eta (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1}) \end{aligned} \quad (4.99)$$

olur. Burada $\eta = \min \left\{ \varepsilon \frac{\alpha-1}{2}, \varepsilon \frac{c_0(r-\alpha)}{2} \right\}$ dır.

Sonuç olarak, (4.73) ve (4.1)–(4.5) in koşullarından, $\forall t \geq 0$ için

$$\psi(t) \geq \psi(0) = H^{1-\sigma}(0) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u_0 u_1 dx + \int_{\Omega} v_0 v_1 dx \right) > 0 \quad (4.100)$$

olur. Diğer taraftan (4.73) ün $\left(\frac{1}{1-\sigma} \right)$. kuvveti alınır

$$\begin{aligned} \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &= \left[H^{1-\sigma}(t) + \varepsilon \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} v v_t dx \right) \right]^{\frac{1}{1-\sigma}} \\ &\leq 2^{\left(\frac{1}{1-\sigma} - 1 \right)} \left[H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} v v_t dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \\ &\leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} \left(\int_{\Omega} u u_t dx + \int_{\Omega} v v_t dx \right)^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \end{aligned} \quad (4.101)$$

bulunur. (4.101) in sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanırsa, $r+1 > 2$ ve $a, b > 0$

için $(a+b)^\lambda \leq C(a^\lambda + b^\lambda)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left[\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} + \left| \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \right] \\
&\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\
&\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \right)
\end{aligned} \tag{4.102}$$

elde edilir. (4.102) de $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ olmak üzere Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|u_t\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} + \|v\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \|v_t\|_{r+1}^{\frac{1}{1-\sigma}} \right) \\
&\leq C \left(\frac{\|u\|_{r+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}}}{\mu} + \frac{\|u_t\|_{r+1}^{\frac{\theta}{1-\sigma}}}{\theta} + \frac{\|v\|_{r+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}}}{\mu} + \frac{\|v_t\|_{r+1}^{\frac{\theta}{1-\sigma}}}{\theta} \right) \\
&\leq C \left(\|u\|_{r+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|u_t\|_{r+1}^{\frac{\theta}{1-\sigma}} + \|v\|_{r+1}^{\frac{\mu}{1-\sigma}} + \|v_t\|_{r+1}^{\frac{\theta}{1-\sigma}} \right)
\end{aligned} \tag{4.103}$$

olur. (4.103) te $\theta = 2(1-\sigma)$ olarak alınırsa $\mu = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}$ olur. Böylece (4.103),

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} \leq C \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u\|_{r+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} + \|v\|_{r+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} \right) \tag{4.104}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca (4.74) ten

$$\begin{aligned}
0 < \sigma \leq \frac{r-1}{2(r+1)} &\Rightarrow 2\sigma(r+1) \leq r-1 \Rightarrow 2\sigma r + 2\sigma \leq r-1 \\
2\sigma + 1 \leq r - 2\sigma r &\Rightarrow 2\sigma + 1 \leq r(1-2\sigma) \Rightarrow \frac{2\sigma+1}{1-2\sigma} \leq r \\
\frac{2\sigma+1}{1-2\sigma} + 1 \leq r+1 &\Rightarrow \frac{2}{1-2\sigma} \leq r+1
\end{aligned}$$

olduğundan $\frac{2}{(1-2\sigma)(r+1)} \leq 1$ dir. Böylece (4.104) ün sağ tarafındaki son iki terime

$\forall z \geq 0, 0 < v \leq 1$ ve $\omega > 0$ için

$$z^v \leq z + 1 \leq \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)(z + \omega)$$

eşitsizliği uygulanırsa; $\omega = H(0)$ ve $d = 1 + \frac{1}{H(0)}$ olmak üzere $t \geq 0$ için

$$\|u\|_{r+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} = \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\frac{2}{(1-2\sigma)(r+1)}} \leq d \left(\|u\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right)$$

ve

$$\|v\|_{r+1}^{\frac{2}{1-2\sigma}} = \left(\|v\|_{r+1}^{r+1} \right)^{\frac{2}{(1-2\sigma)(r+1)}} \leq d \left(\|v\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right)$$

elde edilir. Elde edilenler (4.104) te yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} uu_t dx + \int_{\Omega} vv_t dx \right|^{\frac{1}{1-\sigma}} &\leq C \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} + H(t) \right) \\ &\leq C \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right) \end{aligned} \quad (4.105)$$

bulunur. (4.105) in de (4.101) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) &\leq 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left[H(t) + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} C \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) \right) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} C \left(m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.106)$$

olur. Sonuç olarak $C_{10} = 2^{\frac{\sigma}{1-\sigma}} \left(1 + \varepsilon^{\frac{1}{1-\sigma}} C \right)$ olmak üzere

$$\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \leq C_{10} \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + H(t) + m_1^2 \|u\|^2 + m_2^2 \|v\|^2 + \|u\|_{r+1}^{r+1} + \|v\|_{r+1}^{r+1} \right) \quad (4.107)$$

elde edilir. (4.107) ve (4.99) dan ξ pozitif sabit olmak üzere

$$\psi'(t) \geq \xi \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad , \quad \frac{1}{1-\sigma} > 1 \quad (4.108)$$

olur. Böylece $\psi(t)$ fonksiyonunun (4.75) formunda bir diferensiyel eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş olur.

(4.108) in $(0, t)$ aralığında integrali alınır

$$\frac{d\psi}{dt} \geq \xi \psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d\psi}{\psi^{\frac{1}{1-\sigma}}(t)} \geq \xi dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^t \psi^{\frac{1}{\sigma-1}}(t) d\psi \geq \int_0^t \xi dt$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\psi^{\frac{1}{\sigma-1}+1}(t)}{\frac{1}{\sigma-1}+1} - \frac{\psi^{\frac{1}{\sigma-1}+1}(0)}{\frac{1}{\sigma-1}+1} \geq \xi t \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma-1}{\sigma} \psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(t) \geq \xi t + \frac{\sigma-1}{\sigma} \psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0)$$

olur. O halde $\frac{\sigma-1}{\sigma} < 0$ olduğundan eşitsizliğin her bir tarafı $\frac{\sigma-1}{\sigma}$ ya bölünürse

$$\psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(t) \leq \frac{\xi t + \frac{\sigma-1}{\sigma} \psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0)}{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \quad \Rightarrow \quad \psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(t) \leq \frac{\xi \sigma t}{\sigma-1} + \psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0)$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizliğin her iki tarafının (-1) . kuvveti alınırsa

$$\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(t) \geq \frac{1}{\psi^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}(0) + \frac{\xi \sigma t}{\sigma-1}} = \frac{1}{\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\xi \sigma t}{1-\sigma}} \quad (4.109)$$

olur. (4.109) un paydasını sıfır yapan t değeri çözümün patlama zamanı olur ve

$$\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0) - \frac{\xi \sigma t}{1-\sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)} = \frac{\xi \sigma t}{1-\sigma} \quad \Rightarrow \quad \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)} = t$$

bulunur. Buradan çözüm sonlu bir T^* zamanında patlar ve

$$T^* \leq \frac{1-\sigma}{\xi \sigma \psi^{\frac{\sigma}{1-\sigma}}(0)}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.



5. HİDRODİNAMİK SÖNÜMLÜ TERİM İÇEREN ROSENAU DENKLEMİNİN ÇÖZÜMLERİNİN PATLAMASI

Bu bölümde doğrusal olmayan kaynak terim ve hidrodinamik sönümlü terim içeren Rosenau denkleminin çözümlerinin patlaması Levine'in Konkavlık metodu kullanılarak incelenmiştir.

5.1. Giriş

Bu çalışmada doğrusal olmayan kaynak terim ve hidrodinamik sönümlü terim içeren Rosenau denklemi için

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \mu u_{xxt} + \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxt} = \varphi(u^2)_{xx}, \quad x \in (0,1), \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(0,t) = u(1,t) = u_{xx}(0,t) = u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in (0,1) \quad (5.3)$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $\alpha, \mu, \beta, \gamma \geq 0$ ve $\varphi \in \mathbb{R}$ sabitlerdir.

5.2. Çözümlerin Patlaması

Lemma 5.1. $w_0(x) \in H^2$ ve $v_0(x) \in H^2$ fonksiyonları sırasıyla $u_0(x)$ ve $u_t(x,0)$ başlangıç değerleriyle

$$u(x,0) = (w_0(x))_x, \quad u_t(x,0) = (v_0(x))_x$$

bağıntılarını sağlasın.

O halde (5.1) – (5.3) probleminin $u(x,t)$ çözümü, $\forall t \in T$ için $u(x,t) = (w(x,t))_x$ koşulunu sağlar ve $w(x,t)$, $v(x,t)$ ye karşılık gelen evrim denklemi

$$\begin{aligned} w_t(x,t) &= v(x,t) \\ v_t - \mu v_{xx} + \gamma v_{xxxx} &= \alpha w_{xx} - \beta w_{xxxx} + \varphi(w_x^2)_x \end{aligned} \quad (5.4)$$

sistemini sağlar.

İspat. (5.1) denklemini

$$u_t = z_x, \quad (5.5)$$

$$z_{xt} - \mu z_{xxx} + \gamma z_{xxxxt} = \alpha u_{xx} - \beta u_{xxxx} + \varphi(u^2)_{xx} \quad (5.6)$$

formunda yazalım. (5.6) eşitliğinde her bir tarafın x e göre integralinin alınmasıyla

$$z_t - \mu z_{xx} + \gamma z_{xxx} = (\alpha u - \beta u_{xx} + \varphi u^2)_x \quad (5.7)$$

bulunur. Ayrıca (5.5) eşitliğinin $[0, t]$ aralığında integralinin alınmasıyla

$$u(x, t) = u(x, 0) + \int_0^t z_x(x, s) ds$$

elde edilir. $u(x, 0)$ terimi hipotezden x e göre türevlenebilir ve $\int_0^t z_x(x, s) ds$ de x e göre türevlenebilirdir. Bu yüzden $u(x, t) = (w(x, t))_x$ olacak şekilde öyle bir $w(x, t)$ fonksiyonu vardır ki, (5.1) den

$$u = w_x,$$

$$w_{xtt} - \alpha w_{xxx} - \mu w_{xxt} + \beta w_{xxxx} + \gamma w_{xxxxt} = \varphi(w_x^2)_{xx} \quad (5.8)$$

denklemini yazılabilir. (5.8) denkleminin her bir tarafının x e göre integralinin alınmasıyla

$$w_{tt} - \alpha w_{xx} - \mu w_{xt} + \beta w_{xxx} + \gamma w_{xxxxt} = \varphi(w_x^2)_x, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (5.9)$$

bulunur. Böylece Lemma 5.1 den, (5.1) – (5.3) başlangıç sınır değer problemi

$$w_{tt} - \alpha w_{xx} - \mu w_{xt} + \beta w_{xxx} + \gamma w_{xxxxt} = \varphi(w_x^2)_x, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \quad (5.10)$$

$$w_x(0, t) = w_x(1, t) = w_{xxx}(0, t) = w_{xxx}(1, t), \quad t > 0, \quad (5.11)$$

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad w_t(x, 0) = w_1(x), \quad x \in (0, 1) \quad (5.12)$$

halini alır.

Teorem 5.2. $u(x, 0)$ ve $u_t(x, 0)$ başlangıç değerleri aşağıdaki varsayımları sağlasın:

- i. Bazı $w_0 \in H^2$ ve $v_0 \in H^2$ için $u(x, 0) = (w_0(x))_x$, $u_t(x, 0) = (v_0(x))_x$ dir.

$$\text{ii. } E(0) = \frac{1}{2} \|v(0)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|w_x(0)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|w_{xx}(0)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|v_{xx}(0)\|^2 + \frac{\varphi}{3} \int_0^1 w_{0x}^3 dx < 0 \text{ dır.}$$

O zaman (5.1) – (5.3) probleminin $u(x, t)$ çözümü sonlu zamanda patlar.

İspat. Teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemma kullanılır.

Lemma 5.3. $F(t)$ fonksiyonu pozitif, iki kez türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $t \geq 0$ için

$$F''(t)F(t) - (1+\nu)F'(t)^2 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlasın. Burada $\nu > 0$ bir sabittir. Eğer $F(0) > 0$ ve $F'(0) > 0$ ise o zaman $t \rightarrow \tilde{T}^-$ iken $F(t) \rightarrow \infty$ olacak şekilde $0 \leq \tilde{T} \leq \frac{F(0)}{\nu F'(0)}$ pozitif sabiti vardır.

İspat. (5.10) denkleminin L^2 üzerinde w_t ile iç çarpımı alınırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 w_t w_{tt} dx - \alpha \int_0^1 w_t w_{xx} dx - \mu \int_0^1 w_t w_{xxt} dx + \beta \int_0^1 w_t w_{xxxx} dx + \gamma \int_0^1 w_t w_{xxxxt} dx \\ &= \varphi \int_0^1 w_t (w_x^2)_x dx \end{aligned} \quad (5.13)$$

elde edilir. (5.13) deki her bir terim,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 w_t w_{tt} dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |w_t|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w_t\|^2, \\ & -\alpha \int_0^1 w_t w_{xx} dx = \alpha \int_0^1 w_{tx} w_x dx = \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |w_x|^2 dx = \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dt} \|w_x\|^2, \\ & -\mu \int_0^1 w_t w_{xxt} dx = \mu \int_0^1 w_{xt} w_{xt} dx = \mu \|w_{xt}\|^2, \\ & \beta \int_0^1 w_t w_{xxxx} dx = \beta \int_0^1 w_{txx} w_{xx} dx = \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |w_{xx}|^2 dx = \frac{\beta}{2} \frac{d}{dt} \|w_{xx}\|^2, \\ & \gamma \int_0^1 w_t w_{xxxxt} dx = \gamma \int_0^1 w_{txx} w_{xxtt} dx = \frac{\gamma}{2} \frac{d}{dt} \|w_{xxt}\|^2, \\ & \varphi \int_0^1 w_t (w_x^2)_x dx = -\varphi \int_0^1 w_{tx} (w_x)^2 dx = \frac{-\varphi}{3} \frac{d}{dt} \int_0^1 |w_x|^3 dx = \frac{-\varphi}{3} \frac{d}{dt} \|w_x\|_3^3 \end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|w_t(t)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|w_x(t)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|w_{xx}(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|w_{xxt}(t)\|^2 + \frac{\varphi}{3} \|w_x(t)\|_3^3 \right] \\ & + \mu \|w_{xt}(t)\|^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.14)$$

elde edilir. (5.14),

$$E'(t) + \mu \|w_{xt}(t)\|^2 = 0 \quad (5.15)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $t \geq 0$ için

$$E(t) = \frac{1}{2} \|w_t(t)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|w_x(t)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|w_{xx}(t)\|^2 + \frac{\gamma}{2} \|w_{xxt}(t)\|^2 + \frac{\varphi}{3} \|w_x(t)\|_3^3 \quad (5.16)$$

dır. (5.15) eşitliği $[0, t]$ üzerinde integre edilirse, $t \geq 0$ için

$$E(t) + \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds = E(0) < 0 \quad (5.17)$$

sağlanır.

Şimdi $t \in [0, T^*]$ için (5.10) – (5.12) problemine ait uygun bir $F(t)$ fonksiyoneli

$$F(t) = \|w(t)\|^2 + \gamma \|w_{xx}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_x(s)\|^2 ds + (T^* - t) \|w_{0x}\|^2 + \beta_0 (t + \tau)^2 \quad (5.18)$$

olsun. Burada T^* , β_0 ve τ sonradan belirlenecek pozitif sabitlerdir. (5.18) in t ye göre türevi alınırsa

$$F'(t) = 2 \left[(w, w_t) + \gamma (w_{xx}, w_{xxt}) + \mu \int_0^t (w_x, w_{xt}) ds + \beta_0 (t + \tau) \right] \quad (5.19)$$

bulunur. (5.19) un karesi alınıp Schwarz eşitsizliği ve $a_i, b_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) için $(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
F'^2(t) &= 4 \left[\|w\| \|w_t\| + \gamma \|w_{xx}\| \|w_{xxt}\| + \mu \int_0^t \|w_x\| \|w_{xt}\| ds + \beta_0(t + \tau) \right]^2 \\
&\leq 4 \left[\|w(t)\|^2 + \gamma \|w_{xx}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_x(s)\|^2 ds + \beta_0(t + \tau)^2 \right] \\
&\quad * \left[\|w_t(t)\|^2 + \gamma \|w_{xxt}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds + \beta_0 \right] \quad (5.20) \\
&= 4 \left[F(t) - (T^* - t) \|w_{0x}\|^2 \right] \left[\|w_t(t)\|^2 + \gamma \|w_{xxt}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds + \beta_0 \right] \\
&\leq 4F(t) \left(\|w_t(t)\|^2 + \gamma \|w_{xxt}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds + \beta_0 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.19) un t ye göre türevi alınırsa

$$F''(t) = 2 \left(\|w_t(t)\|^2 + (w, w_{tt}) + \gamma \|w_{xxt}(t)\|^2 + \gamma (w_{xx}, w_{xxtt}) + \mu (w_x, w_{xt}) + \beta_0 \right) \quad (5.21)$$

olur. (5.10) denkleminin w ile iç çarpımı alınırsa

$$(w, w_{tt}) - \alpha (w, w_{xx}) - \mu (w, w_{xxt}) + \beta (w, w_{xxxx}) + \gamma (w, w_{xxxxt}) = \varphi(w, (w_x^2)_x) \quad (5.22)$$

bulunur. (5.22) deki her bir terim,

$$\begin{aligned}
-\alpha \int_0^1 w w_{xx} dx &= \alpha \int_0^1 w_x w_x dx = \alpha \int_0^1 |w_x|^2 dx = \alpha \|w_x\|^2, \\
-\mu \int_0^1 w w_{xxt} dx &= \mu \int_0^1 w_x w_{xt} dx, \\
\beta \int_0^1 w w_{xxxx} dx &= \beta \int_0^1 w_{xx} w_{xx} dx = \beta \int_0^1 |w_{xx}|^2 dx = \beta \|w_{xx}\|^2, \\
\gamma \int_0^1 w w_{xxxxt} dx &= \gamma \int_0^1 w_{xx} w_{xxtt} dx, \\
\varphi \int_0^1 w (w_x^2)_x dx &= -\varphi \int_0^1 w_x (w_x)^2 dx = -\varphi \int_0^1 |w_x|^3 dx = -\varphi \|w_x\|_3^3
\end{aligned}$$

şeklinde düzenlenirse

$$(w, w_{tt}) + \gamma (w_{xx}, w_{xxtt}) + \mu (w_x, w_{xt}) = -\alpha \|w_x(t)\|^2 - \beta \|w_{xx}(t)\|^2 - \varphi \int_0^1 w_x^3 dx \quad (5.23)$$

elde edilir. (5.23) ün (5.21) de yerine yazılmasıyla

$$F''(t) = 2 \left(\|w_t(t)\|^2 + \gamma \|w_{xt}(t)\|^2 - \alpha \|w_x(t)\|^2 - \beta \|w_{xx}(t)\|^2 - \varphi \int_0^1 w_x^3 dx + \beta_0 \right) \quad (5.24)$$

bulunur. (5.17) nin 3 sayısı ile çarpılmasıyla, (5.16) dan

$$\begin{aligned} 3E(t) + 3\mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds &= 3E(0), \\ \frac{3}{2} \|w_t(t)\|^2 + \frac{3\alpha}{2} \|w_x(t)\|^2 + \frac{3\beta}{2} \|w_{xx}(t)\|^2 + \frac{3\gamma}{2} \|w_{xt}(t)\|^2 \\ + \varphi \|w_x(t)\|_3^3 + 3\mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds - 3E(0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.25)$$

elde edilir. (5.25), (5.24) ün sağ tarafındaki parantezin içine eklenirse

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2 \left(\frac{5}{2} \|w_t(t)\|^2 + \frac{5\gamma}{2} \|w_{xt}(t)\|^2 + \frac{\alpha}{2} \|w_x(t)\|^2 + \frac{\beta}{2} \|w_{xx}(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + 3\mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds - 3E(0) + \beta_0 \right) \end{aligned} \quad (5.26)$$

olur. Şimdi Lemma 5.3 teki Konkavlık teoreminden $\nu = \frac{\alpha}{4}$ olmak üzere

$$F(t)F''(t) - \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right) F'^2(t) \geq 0$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilsin. (5.20) ve (5.26) dan

$$\begin{aligned} F(t)F''(t) - \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right) F'^2(t) &= F(t)F''(t) \\ &\quad - (4 + \alpha) F(t) \left(\|w_t(t)\|^2 + \gamma \|w_{xt}(t)\|^2 + \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds + \beta_0 \right) \\ &= F(t) \left[5 \|w_t(t)\|^2 + 5\gamma \|w_{xt}(t)\|^2 + \alpha \|w_x(t)\|^2 + \beta \|w_{xx}(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + 6\mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds - 6E(0) + 2\beta_0 - (4 + \alpha) \|w_t(t)\|^2 - (4 + \alpha) \gamma \|w_{xt}(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. - (4 + \alpha) \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds - (4 + \alpha) \beta_0 \right] \\ &= F(t) \left[(1 - \alpha) \|w_t(t)\|^2 + (1 - \alpha) \gamma \|w_{xt}(t)\|^2 + \alpha \|w_x(t)\|^2 + \beta \|w_{xx}(t)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + (2 - \alpha) \mu \int_0^t \|w_{xt}(s)\|^2 ds - 6E(0) - (2 + \alpha) \beta_0 \right] \end{aligned} \quad (5.27)$$

bulunur. (5.27) de $0 < \alpha \leq 1$, $\beta_0 = -\frac{6}{2+\alpha} E(0) > 0$ olarak seçilirse, o zaman

$$F''(t)F(t) - \left(1 + \frac{\alpha}{4}\right) F'^2(t) \geq 0, \quad t \in [0, T^*] \quad (5.28)$$

elde edilir. Konkavlık metodunda

$$\tilde{T}^- = \frac{4F(0)}{aF'(0)}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{T}^- &= \frac{4\left(\|w_0\|^2 + \gamma\|w_{0xx}\|^2 + T^*\|w_{0x}\|^2 + \beta_0\tau^2\right)}{2\alpha[(w_0, w_1) + \gamma(w_{0xx}, w_{1xx}) + \beta_0\tau]} \\ &= \frac{2\left(\|w_0\|^2 + \gamma\|w_{0xx}\|^2 + T^*\|w_{0x}\|^2 + \beta_0\tau^2\right)}{\alpha[(w_0, w_1) + \gamma(w_{0xx}, w_{1xx}) + \beta_0\tau]} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$\tilde{T} \in (0, T^*)$ olur. (5.18) eşitliğindeki $F(t)$ fonksiyoneline tanımlanan T^* sayısı

$$T^* \geq \tilde{T}^- = \frac{2\left(\|w_0\|^2 + \gamma\|w_{0xx}\|^2 + T^*\|w_{0x}\|^2 + \beta_0\tau^2\right)}{\alpha[(w_0, w_1) + \gamma(w_{0xx}, w_{1xx}) + \beta_0\tau]}$$

şeklinde seçilirse

$$T^* \geq \frac{2\left(\|w_0\|^2 + \gamma\|w_{0xx}\|^2 + \beta_0\tau^2\right)}{\alpha[(w_0, w_1) + \gamma(w_{0xx}, w_{1xx}) + \beta_0\tau] - 2\|w_{0x}\|^2}$$

olur. $T^* > 0$ olması gerektiğinden

$$\alpha[(w_0, w_1) + \gamma(w_{0xx}, w_{1xx}) + \beta_0\tau] - 2\|w_{0x}\|^2 > 0,$$

$$\tau > \frac{2\|w_{0x}\|^2 - \alpha[(w_0, w_1) + \gamma(w_{0xx}, w_{1xx})]}{\alpha\beta_0}$$

olmalıdır. Dolayısıyla Konkavlık metodu gereğince (5.10)–(5.12) probleminin çözümü $\tilde{T}^-$ zamanında veya öncesinde patlar.

Yani $t \rightarrow \tilde{T}^-$ iken $\|w(t)\|^2 + \|w_{xx}(t)\|^2 + \int_0^t \|w_x(s)\|^2 ds \rightarrow \infty$ olur.

Teoremin ispatı burada tamamlanır.



6. DOĞRUSAL OLMAYAN DAMPING TERİM İÇEREN P-TRİHARMONİK DENKLEM SİSTEMİ İÇİN ENERJİ AZALIMI VE ÇÖZÜMLERİN PATLAMASI

Bu bölümde doğrusal olmayan damping terim içeren p -triharmonik denklem sisteminin enerji fonksiyonunun azalımı, Nakao eşitsizliği kullanılarak gösterilmiştir. Ayrıca, başlangıç enerjisinin üç farklı durumuna göre Li ve Tsai yöntemi ile çözümlerin patlaması incelenmiştir.

6.1. Giriş

Bu çalışmada doğrusal olmayan damping terim içeren p -triharmonik denklem sistemi için

$$u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + |u_t|^{m-2} u_t = f_1(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (6.1)$$

$$v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + |v_t|^{r-2} v_t = f_2(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (6.2)$$

$$u = v = \Delta u = \Delta v = \Delta^2 u = \Delta^2 v = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0, \quad (6.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (6.4)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad x \in \Omega \quad (6.5)$$

başlangıç sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada Ω , $\mathbb{R}^n$ de $\partial\Omega$ düzgün sınırına sahip sınırlı bir bölgedir. Ayrıca $n=1, 2, 3$; $m, r \geq 2$ ve $p \geq 2$ olup $\Delta_p^3 u = \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u)$ ve $\Delta_p^3 v = \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta v|^{p-2} \nabla \Delta v)$ p -triharmonik operatörlerdir. $f_1(u, v)$ ve $f_2(u, v)$ fonksiyonları (6.9) ve (6.10) ile tanımlanmıştır.

(A1) $a, b > 0$ sabitler olmak üzere

$$F(u, v) = [a |u + v|^{q+1} + 2b |uv|^{\frac{q+1}{2}}] \quad (6.6)$$

olsun. Burada

$$\begin{cases} 1 < q & ; & n \leq 2, \\ 1 < q \leq \frac{n+2}{n-2} & ; & n > 2 \end{cases} \quad (6.7)$$

ve

$$\begin{cases} 2 \leq m, r & ; & n \leq 2, \\ 2 \leq m, r \leq \frac{2n}{n-2} & ; & n > 2 \end{cases} \quad (6.8)$$

dir. Ayrıca

$$f_1(u, v) = (q+1)[a |u+v|^{q-1} (u+v) + b |u|^{\frac{q-3}{2}} |v|^{\frac{q+1}{2}}], \quad (6.9)$$

$$f_2(u, v) = (q+1)[a |u+v|^{q-1} (u+v) + b |u|^{\frac{q+1}{2}} |v|^{\frac{q-3}{2}} v] \quad (6.10)$$

olarak tanımlanır. Bu durumda $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ için

$$uf_1(u, v) + vf_2(u, v) = (q+1)F(u, v) \quad (6.11)$$

olduğu kolayca görülebilir.

6.2. Ön Bilgiler

Lemma 6.1. c_0 ve c_1 pozitif sabitler olmak üzere,

$$c_0(|u|^{q+1} + |v|^{q+1}) \leq F(u, v) \leq c_1(|u|^{q+1} + |v|^{q+1}) \quad (6.12)$$

eşitsizliği sağlanır (Messaoudi ve Houari, 2010).

İspat. Lemma 4.1 de yapılmıştır.

Teorem 6.2 (Lokal Varlık). Kabul edelim ki (6.7) ve (6.8) sağlansın.

Ayrıca $u_0, v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)$, $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ olsun.

O zaman (6.1)–(6.5) probleminin

$$u, v \in (C[0, T]; W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega) \cap L^{q+1}(\Omega)),$$

$$u_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times [0, T]),$$

$$v_t \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap L^r(\Omega \times [0, T])$$

lokal çözümü vardır.

Ayrıca, aşağıdaki durumlardan en az biri doğrudur:

i) $T = \infty$

ii) $t \rightarrow T^-$ için $\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \rightarrow \infty$ olur.

6.3. Global Varlık ve Enerji Azalması

Bu kısımda (6.1)–(6.5) probleminin çözümlerinin global varlığı ve enerji azalması gösterilmiştir. Öncelikle

$$J(t) = \frac{1}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p - \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (6.13)$$

ve

$$I(t) = \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p - (q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (6.14)$$

fonksiyonelleri tanımlansın. Ayrıca (6.1)–(6.5) probleminin enerji fonksiyoneli de

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p - \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (6.15)$$

şeklindedir. Son olarak

$$W = \{(u, v) : (u, v) \in (W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega)) \times (W_0^{1,p}(\Omega) \cap W^{3,p}(\Omega)), I(u, v) > 0\} \cup \{0, 0\} \quad (6.16)$$

olsun.

Lemma 6.3. $t \geq 0$ için

$$\frac{d}{dt} E(t) = E'(t) = -\left(\|u_t\|_m^m + \|v_t\|_r^r + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2\right) \leq 0 \quad (6.17)$$

olduğundan $E(t)$ fonksiyoneli $t \geq 0$ için artmayandır.

İspat. (6.1) denkleminin u_t ile iç çarpımı alınırsa

$$(u_t, u_{tt}) - (u_t, \Delta_p^3 u) - (u_t, \Delta u_t) + (u_t, |u_t|^{m-2} u_t) = (u_t, f_1(u, v)) \quad (6.18)$$

elde edilir. (6.18) deki terimler tek tek ele alınırsa

$$\begin{aligned}
(u_t, u_t) &= \int_{\Omega} u_t u_t dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_t\|^2, \\
(u_t, \Delta_p^3 u) &= \int_{\Omega} u_t \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u) dx = - \int_{\Omega} \nabla u_t (\Delta |\nabla \Delta u|^{p-1}) dx, \\
&= - \int_{\Omega} \Delta \nabla u_t |\nabla \Delta u|^{p-1} dx = - \int_{\Omega} \frac{1}{p} \frac{d}{dt} |\nabla \Delta u|^p dx = - \frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\nabla \Delta u\|_p^p \\
(u_t, \Delta u_t) &= \int_{\Omega} u_t \Delta u_t dx = - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_t dx = - \|\nabla u_t\|^2, \\
(u_t, |u_t|^{m-2} u_t) &= \int_{\Omega} |u_t|^m dx = \|u_t\|_m^m
\end{aligned}$$

bulunur. Elde edilenler (6.18) de yerlerine yazılırsa

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|u_t\|^2 + \frac{2}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p \right] + \|\nabla u_t\|^2 + \|u_t\|_m^m = (u_t, f_1(u, v)) \quad (6.19)$$

olur. Benzer şekilde (6.2) denkleminin v_t ile iç çarpımı alınır

$$(v_t, v_t) - (v_t, \Delta_p^3 v) - (v_t, \Delta v_t) + (v_t, |v_t|^{r-2} v_t) = (v_t, f_2(u, v)) \quad (6.20)$$

elde edilir. (6.20) denklemindeki terimler düzenlenirse

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\|v_t\|^2 + \frac{2}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p \right] + \|\nabla v_t\|^2 + \|v_t\|_r^r = (v_t, f_2(u, v)) \quad (6.21)$$

olur. Buradan (6.19) ve (6.21) taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p \right] \\
&+ \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 + \|u_t\|_m^m + \|v_t\|_r^r = (u_t, f_1(u, v)) + (v_t, f_2(u, v))
\end{aligned} \quad (6.22)$$

bulunur. (6.11) den

$$(u_t, f_1(u, v)) + (v_t, f_2(u, v)) = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} F(u, v) dx$$

yazılabilir ve bu ifade (6.22) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p - \int_{\Omega} F(u, v) dx \right] \\
&= - (\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 + \|u_t\|_m^m + \|v_t\|_r^r) \leq 0
\end{aligned} \quad (6.23)$$

elde edilir.

$$E(t) = \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p - \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad \text{olmak üzere } t \geq 0 \text{ için}$$

$E'(t) \leq 0$ olduğundan $E(t)$ artmayan bir fonksiyondur.

(6.23) ün $[0, t]$ üzerinde integrali alınırsa, $t \geq 0$ için

$$E(t) - E(0) = - \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 + \|u_\tau\|_m^m + \|v_\tau\|_r^r \right) d\tau \quad (6.24)$$

sağlanır.

Lemma 6.4. Kabul edelim ki (6.7) ve $p \geq 2$ olmak üzere $q+1 > p$ eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $(u_0, v_0) \in W$ ve $(u_1, v_1) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ için

$$\beta = c_1 C_*^{q+1} (q+1) \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{q-p+1}{p}} < 1 \quad (6.25)$$

oluyorsa, o halde $\forall t \geq 0$ için $(u, v) \in W$ dir.

İspat. $I(0) > 0$ olduğundan, $u(t)$ ve $v(t)$ nin sürekliliğinden $t=0$ komşuluğundaki bazı aralıklarda $\forall t \in [0, T_m]$ için $T_m > 0$ maksimum zamanı vardır ve

$$\{I(T_m) = 0 \text{ ve } I(t) > 0, \quad \forall 0 \leq t \leq T_m\}$$

dır. (6.13) ve (6.14) ten

$$\begin{aligned} J(t) &= \frac{1}{p} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &= \frac{q-p+1}{p(q+1)} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) \\ &\quad + \frac{1}{q+1} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p - (q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\ &= \frac{q-p+1}{p(q+1)} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) + \frac{1}{q+1} I(t) \\ &\geq \frac{q-p+1}{p(q+1)} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $E(t) \leq E(0)$ ve $E(t)$ nin tanımından

$$\begin{aligned}
\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p &\leq \frac{p(q+1)}{q-p+1} J(t) \\
&\leq \frac{p(q+1)}{q-p+1} J(t) + \frac{p(q+1)}{q-p+1} \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\
&= \frac{p(q+1)}{q-p+1} E(t) \\
&\leq \frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0)
\end{aligned} \tag{6.26}$$

olur. Diğer yandan (6.12) den

$$(q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq c_1 (q+1) (\|u\|_{q+1}^{q+1} + \|v\|_{q+1}^{q+1})$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada Sobolev-Poincare eşitsizliği ve $p \geq 2$ olduğundan $t \in [0, T_m]$ için

$$\begin{aligned}
\|u\|_{q+1}^{q+1} &\leq C_*^{q+1} \|\nabla \Delta u\|^{q+1} \\
&\leq C_*^{q+1} \|\nabla \Delta u\|_p^{q+1} \\
&= C_*^{q+1} \|\nabla \Delta u\|_p^{q-p+1} \|\nabla \Delta u\|_p^p
\end{aligned} \tag{6.27}$$

ve

$$\begin{aligned}
\|v\|_{q+1}^{q+1} &\leq C_*^{q+1} \|\nabla \Delta v\|^{q+1} \\
&\leq C_*^{q+1} \|\nabla \Delta v\|_p^{q+1} \\
&= C_*^{q+1} \|\nabla \Delta v\|_p^{q-p+1} \|\nabla \Delta v\|_p^p
\end{aligned} \tag{6.28}$$

bulunur. (6.26) ve $(a+b)^\lambda \leq 2^{\lambda-1} (a^\lambda + b^\lambda)$ eşitsizliğinden

$$\|\nabla \Delta u\|_p + \|\nabla \Delta v\|_p \leq \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}}$$

olur. Böylece

$$\|\nabla \Delta u\|_p^{q-p+1} \leq \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{q-p+1}{p}}$$

ve

$$\|\nabla \Delta v\|_p^{q-p+1} \leq \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{q-p+1}{p}}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Elde edilen eşitsizlikler (6.27) ve (6.28) de yerlerine yazılıp taraf tarafa toplanırsa, $t \in [0, T_m]$ için

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} + \|v\|_{q+1}^{q+1} \leq C_*^{q+1} \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{q-p+1}{p}} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right)$$

bulunur. Elde edilen son eşitsizlik

$$(q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq c_1 (q+1) \left(\|u\|_{q+1}^{q+1} + \|v\|_{q+1}^{q+1} \right)$$

eşitsizliğinde yerine yazılırsa (6.25) ten

$$\begin{aligned} c_1 (q+1) \left(\|u\|_{q+1}^{q+1} + \|v\|_{q+1}^{q+1} \right) &\leq \beta \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) \\ &< \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \end{aligned} \quad (6.29)$$

elde edilir. Böylece her $t \in [0, T_m]$ için $I(t) > 0$ olduğu gösterilir.

Bu işlemin tekrarıyla; T_m , T ye genişletilir ve lemmanın ispatı tamamlanır.

Lemma 6.5. Kabul edelim ki Lemma 6.4 ün koşulları sağlansın. Bu durumda $\eta_1 = 1 - \beta$ olmak üzere

$$\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \leq \frac{1}{\eta_1} I(t) \quad (6.30)$$

eşitsizliği yazılabilir.

İspat. (6.12) ve (6.29) dan

$$(q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq \beta \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right)$$

eşitsizliğinde $\beta = 1 - \eta_1$ yazılırsa

$$(q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \leq (1 - \eta_1) \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right)$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} \eta_1 \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) &\leq \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p - (q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &\leq I(t) \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece (6.30) eşitsizliği bulunup ispat tamamlanır.

Teorem 6.6. (6.7) ve (6.16) sağlansın. $(u_0, v_0) \in W$, (6.25) eşitsizliğini sağlıyorsa, o zaman (6.1)–(6.5) probleminin çözümü globaldir.

İspat. Çözümün global olduğunu göstermek için $\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p$ ifadesinin t den bağımsız olarak sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunu göstermek için $E(t)$ ve $I(t)$ eşitsizlikleri kullanılırsa, $I(t) \geq 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(0) &\geq E(t) = \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \frac{1}{p} (\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p) - \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &= \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + J(t) \\ &= \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \frac{q-p+1}{p(q+1)} (\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p) + \frac{1}{q+1} I(t) \\ &\geq \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \frac{q-p+1}{p(q+1)} (\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p) \end{aligned}$$

yazılır. Böylece

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \leq CE(0) \quad (6.31)$$

bulunur. Burada $C = \max \left\{ 2, \frac{p(q+1)}{q-p+1} \right\}$ dır. (6.31) eşitsizliğinden

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p$$

ifadesi t den bağımsız olarak sınırlıdır. Sonuç olarak Teorem 6.2 den çözüm global olur.

Teorem 6.7. Kabul edelim ki (6.7), (6.16) ve (6.25) sağlansın ve $(u_0, v_0) \in W$ olsun.

Böylece

$$E(t) \leq \begin{cases} E(0)e^{-w_1[t-1]^+} & ; \quad m=r=p=2, \\ \left(E(0)^{-\alpha} + C_9^{-1} \alpha [t-1]^+ \right)^{\frac{-1}{\alpha}} & ; \quad m, r, p > 2 \end{cases}$$

enerji kestirimi yazılabilir. Burada w_1, α ve C_9 daha sonra belirlenecek olan pozitif sabitlerdir.

İspat.

$$E'(t) = -\left(\|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 + \|u_t\|_m^m + \|v_t\|_r^r\right)$$

ifadesi $t > 0$ için $[t, t+1]$ üzerinde integre edilirse

$$E(t) - E(t+1) = \int_t^{t+1} \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 + \|u_\tau\|_m^m + \|v_\tau\|_r^r\right) d\tau \quad (6.32)$$

bulunur.

$$D_1^m(t) = \int_t^{t+1} \left(\|u_\tau\|_m^m + \|\nabla u_\tau\|^2\right) d\tau \quad (6.33)$$

ve

$$D_2^r(t) = \int_t^{t+1} \left(\|v_\tau\|_r^r + \|\nabla v_\tau\|^2\right) d\tau \quad (6.34)$$

olarak seçilirse (6.32) den

$$E(t) - E(t+1) = D_1^m(t) + D_2^r(t)$$

olur. (6.33) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt &\leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1 \cdot |u_t|^2 dx \right) dt \leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{m}{m-2}} dx \right)^{\frac{m-2}{m}} \left(\int_{\Omega} |u_t|^{\frac{m}{2}} dx \right)^{\frac{2}{m}} dt \\ &\leq \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{m-2}{m}} \left(\|u_\tau\|_m^m \right)^{\frac{2}{m}} d\tau = \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{m-2}{m}} \|u_\tau\|_m^2 d\tau \\ &\leq |\Omega|^{\frac{m-2}{m}} D_1^2(t) = CD_1^2(t) \end{aligned} \quad (6.35)$$

yazılır. Benzer şekilde (6.34) ve Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+1} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx dt &\leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1 \cdot |v_t|^2 dx \right) dt \leq \int_t^{t+1} \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{r}{r-2}} dx \right)^{\frac{r-2}{r}} \left(\int_{\Omega} |v_t|^{\frac{r}{2}} dx \right)^{\frac{2}{r}} dt \\
&\leq \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{r-2}{r}} \left(\|v_t\|_r^r \right)^{\frac{2}{r}} d\tau = \int_t^{t+1} |\Omega|^{\frac{r-2}{r}} \|v_t\|_r^2 d\tau \\
&\leq |\Omega|^{\frac{r-2}{r}} D_2^2(t) = CD_2^2(t)
\end{aligned} \tag{6.36}$$

bulunur.

Böylece $t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4} \right]$ ve $t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t + 1 \right]$ olmak üzere (6.35) ve (6.36) dan

$$\|u_t(t_i)\| \leq CD_1(t) \quad , \quad i = 1, 2 \tag{6.37}$$

ve

$$\|v_t(t_i)\| \leq CD_2(t) \quad , \quad i = 1, 2 \tag{6.38}$$

yazılabilir. Şimdi (6.1) denkleminin u ile iç çarpımı alınırsa

$$(u, u_{tt}) - (u, \Delta_p^3 u) - (u, \Delta u_t) + (u, |u_t|^{m-2} u_t) = (u, f_1(u, v))$$

elde edilir. Elde edilenler düzenlenirse

$$\begin{aligned}
(u, \Delta_p^3 u) &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u) dx = - \int_{\Omega} \nabla u (\Delta |\nabla \Delta u|^{p-1}) dx \\
&= - \int_{\Omega} \Delta \nabla u |\nabla \Delta u|^{p-1} dx = - \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^p dx = - \|\nabla \Delta u\|_p^p, \\
(u, \Delta u_t) &= \int_{\Omega} u \Delta u_t dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx
\end{aligned}$$

terimlerinden

$$\int_{\Omega} u u_{tt} dx + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} |u_t|^{m-2} u_t u dx = \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx \tag{6.39}$$

bulunur. Benzer şekilde (6.2) denkleminin v ile iç çarpımı alınırsa

$$\int_{\Omega} v v_{tt} dx + \|\nabla \Delta v\|_p^p + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx + \int_{\Omega} |v_t|^{r-2} v_t v dx = \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx \tag{6.40}$$

olur. (6.39) ve (6.40) in taraf tarafa toplanmasıyla (6.11) den

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [uu_{tt} + vv_{tt}] dx + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \\
& + \int_{\Omega} |u_t|^{m-2} u_t u dx + \int_{\Omega} |v_t|^{r-2} v_t v dx = \int_{\Omega} [uf_1(u, v) + vf_2(u, v)] dx \\
& = (q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx
\end{aligned} \tag{6.41}$$

elde edilir. (6.41) in $[t_1, t_2]$ üzerinde integre edilmesiyle

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) dt - (q+1) \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} F(u, v) dx dt \\
& = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} [uu_{tt} + vv_{tt}] dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\| \|\nabla u_t\| dt - \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v\| \|\nabla v_t\| dt \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^{m-2} u_t u dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^{r-2} v_t v dx dt
\end{aligned} \tag{6.42}$$

bulunur. (6.42) nin sağ tarafındaki ilk terime kısmi integrasyon ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} uu_{tt} dx dt = - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} uu_{tt} dt dx = - \int_{\Omega} \left[uu_t \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} |u_t|^2 dt \right] dx \\
& = - \int_{\Omega} \left[uu_t \Big|_{t_1}^{t_2} \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx dt \\
& = - \int_{\Omega} [|u_t(t_2)| |u(t_2)| - |u_t(t_1)| |u(t_1)|] dx + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt \\
& \leq \|u_t(t_2)\| \|u(t_2)\| + \|u_t(t_1)\| \|u(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt
\end{aligned} \tag{6.43}$$

ve

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} vv_{tt} dx dt = - \int_{\Omega} \int_{t_1}^{t_2} vv_{tt} dt dx = - \int_{\Omega} \left[vv_t \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} |v_t|^2 dt \right] dx \\
& = - \int_{\Omega} \left[vv_t \Big|_{t_1}^{t_2} \right] dx + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^2 dx dt \\
& = - \int_{\Omega} [|v_t(t_2)| |v(t_2)| - |v_t(t_1)| |v(t_1)|] dx + \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt \\
& \leq \|v_t(t_2)\| \|v(t_2)\| + \|v_t(t_1)\| \|v(t_1)\| + \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt
\end{aligned} \tag{6.44}$$

elde edilir. (6.43) ve (6.44) eşitsizlikleri (6.42) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} I(t) dt &\leq \|u_t(t_1)\| \|u(t_1)\| + \|u_t(t_2)\| \|u(t_2)\| + \|v_t(t_1)\| \|v(t_1)\| + \|v_t(t_2)\| \|v(t_2)\| \\
&+ \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\| \|\nabla u_t\| dt + \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v\| \|\nabla v_t\| dt \\
&- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^{m-2} u_t u dx dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^{r-2} v_t v dx dt
\end{aligned} \tag{6.45}$$

bulunur. Şimdi (6.45) in sağ tarafındaki terimler için kestirimler elde edelim.

İlk olarak (6.45) in sağ tarafındaki son iki terim için Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |u_t|^{m-2} u_t u dx dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^{m-1 \left(\frac{m}{m-1} \right)} dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_{\Omega} |u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |u_t|^m dx \right)^{\frac{m-1}{m}} \left(\int_{\Omega} |u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}} dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\|u_t(t)\|_m^{m-1} \|u(t)\|_m \right] dt
\end{aligned} \tag{6.46}$$

ve benzer biçimde

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} |v_t|^{r-2} v_t v dx dt &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |v_t|^{r-1 \left(\frac{r}{r-1} \right)} dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_{\Omega} |v|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{\Omega} |v_t|^r dx \right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\int_{\Omega} |v|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} dt \leq \int_{t_1}^{t_2} \left[\|v_t(t)\|_r^{r-1} \|v(t)\|_r \right] dt
\end{aligned} \tag{6.47}$$

elde edilir. Sobolev-Poincare eşitsizliği, (6.26), (6.33) ten ve $p \geq 2$ olduğundan, (6.46) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \left[\|u_t(t)\|_m^{m-1} \|u(t)\|_m \right] dt &\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_m^{m-1} \|\nabla \Delta u\| dt \\
&\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_m^{m-1} \|\nabla \Delta u\|_p dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_m^{m-1} E^{\frac{1}{p}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) D_1^{m-1}(t)
\end{aligned} \tag{6.48}$$

olur. Benzer şekilde Sobolev-Poincare eşitsizliği, (6.26), (6.34) ten ve $p \geq 2$ olduğundan, (6.47) eşitsizliği

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \left[\|v_t(t)\|_r^{r-1} \|v(t)\|_r \right] dt &\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|_r^{r-1} \|\nabla \Delta v\| dt \\
&\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|_r^{r-1} \|\nabla \Delta v\|_p dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|_r^{r-1} E^{\frac{1}{p}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) D_2^{r-1}(t)
\end{aligned} \tag{6.49}$$

olur. (6.45) in sağ tarafındaki ilk iki terimde Sobolev-Poincare, (6.26), (6.37) eşitsizlikleri kullanılırsa, $p \geq 2$ ve $i=1,2$ için

$$\begin{aligned}
\|u_t(t_1)\| \|u(t_1)\| + \|u_t(t_2)\| \|u(t_2)\| &= \|u_t(t_i)\| \|u(t_i)\| \\
&\leq C_* \|u_t(t_i)\| \|\nabla \Delta u(t_i)\| \\
&\leq C_* \|u_t(t_i)\| \|\nabla \Delta u(t_i)\|_p \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) \|u_t(t_i)\| \\
&\leq CC_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) D_1(t) \\
&= C_1 D_1(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s)
\end{aligned} \tag{6.50}$$

olur. Burada $C_1 = CC_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}}$ dir.

Benzer şekilde (6.45) in sağ tarafındaki 3. ve 4. terimde, Sobolev-Poincare, (6.26) ve (6.38) eşitsizlikleri kullanılırsa, $p \geq 2$ ve $i=1,2$ için

$$\begin{aligned}
\|v_t(t_1)\| \|v(t_1)\| + \|v_t(t_2)\| \|v(t_2)\| &= \|v_t(t_i)\| \|v(t_i)\| \\
&\leq C_*' \|v_t(t_i)\| \|\nabla \Delta v(t_i)\| \\
&\leq C_*' \|v_t(t_i)\| \|\nabla \Delta v(t_i)\|_p \\
&\leq C_*' \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) \|v_t(t_i)\| \quad (6.51) \\
&\leq CC_*' \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) D_2(t) \\
&= C_2 D_2(t) \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $C_2 = CC_*' \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}}$ dir.

(6.45) in sağ tarafındaki 5. ve 6. terimler (6.35) ve (6.36) dan

$$\int_{t_1}^{t_2} \|u_t\|^2 dt \leq CD_1^2(t) \quad (6.52)$$

ve

$$\int_{t_1}^{t_2} \|v_t\|^2 dt \leq CD_2^2(t) \quad (6.53)$$

şeklinde yazılır.

Ayrıca (6.33) ten

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_t\| dt \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_t\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq CD_1(t)$$

olmak üzere (6.45) in sağ tarafındaki 7. terime Sobolev-Poincare eşitsizliği ve (6.26) uygulanırsa, $p \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u\| \|\nabla u_t\| dt &\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \Delta u\| \|\nabla u_t\| dt \\
&\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \Delta u\|_p \|\nabla u_t\| dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_t\| E^{\frac{1}{p}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla u_t\| dt \\
&\leq CC_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) D_1(t)
\end{aligned} \tag{6.54}$$

bulunur. Benzer şekilde (6.34) ten

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v_t\| dt \leq \left(\int_{t_1}^{t_2} 1 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v_t\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq CD_2(t)$$

olmak üzere (6.45) in sağ tarafındaki 8. terime Sobolev-Poincare eşitsizliği ve (6.26) uygulanırsa, $p \geq 2$ için

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v\| \|\nabla v_t\| dt &\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \Delta v\| \|\nabla v_t\| dt \\
&\leq C_* \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla \Delta v\|_p \|\nabla v_t\| dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v_t\| E^{\frac{1}{p}}(s) dt \\
&\leq C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) \int_{t_1}^{t_2} \|\nabla v_t\| dt \\
&\leq CC_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) D_2(t)
\end{aligned} \tag{6.55}$$

olur. Buradan (6.46) – (6.55) eşitsizliklerinin (6.45) te yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt &\leq \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) [C_1 D_1(t) + C_2 D_2(t)] + CD_1^2(t) + CD_2^2(t) \\
&+ CC_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) [D_1(t) + D_2(t)] \\
&+ C_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}} \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) [D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t)] \\
&\leq CD_1^2(t) + CD_2^2(t) + C_3 \left\{ \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) [D_1(t) + D_2(t) + D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t)] \right\}
\end{aligned} \tag{6.56}$$

elde edilir. Burada $C_3 = maks\{C_1, C_2\} + CC_* \left(\frac{p(q+1)}{q-p+1} E(0) \right)^{\frac{1}{p}}$ dır.

Diğer taraftan $I(t)$ nin tanımından ve Lemma 6.5 ten

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q+1} \right) (\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p) \\
&+ \left(\frac{1}{q+1} \right) \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p - (q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \right) \\
&\leq \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \frac{1}{\eta_1} \frac{q-p+1}{p(q+1)} I(t) + \frac{1}{q+1} I(t) \\
&= \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + \left(\frac{1}{\eta_1} \frac{q-p+1}{p(q+1)} + \frac{1}{q+1} \right) I(t)
\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece

$$E(t) \leq \frac{1}{2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) + C_4 I(t) \tag{6.57}$$

olur. Burada $C_4 = \frac{1}{\eta_1} \frac{q-p+1}{p(q+1)} + \frac{1}{q+1}$ dır.

(6.57), $[t_1, t_2]$ aralığı üzerinde integre edilirse

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \leq \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) dt + C_4 \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt \tag{6.58}$$

bulunur. Bu durumda (6.58) de (6.35), (6.36) ve (6.56) eşitsizliklerinin yerlerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt &\leq \frac{1}{2}C(D_1^2(t) + D_2^2(t)) + CC_4(D_1^2(t) + D_2^2(t)) \\ &+ C_4C_3 \left\{ \sup_{t_1 \leq s \leq t_2} E^{\frac{1}{p}}(s) [D_1(t) + D_2(t) + D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t)] \right\} \end{aligned} \quad (6.59)$$

elde edilir. Şimdi (6.17), $[t, t_2]$ aralığında integre edilirse

$$E(t) = E(t_2) + \int_t^{t_2} \left(\|u_\tau\|_m^m + \|v_\tau\|_r^r + \|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 \right) d\tau \quad (6.60)$$

olur. (6.60) ın $[t_1, t_2]$ aralığında integrali alınırsa da

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} E(t_2)dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_t^{t_2} \left(\|u_\tau\|_m^m + \|v_\tau\|_r^r + \|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 \right) d\tau dt$$

bulunur; $t_1 \in \left[t, t + \frac{1}{4} \right]$ ve $t_2 \in \left[t + \frac{3}{4}, t + 1 \right]$ olmak üzere $t_2 - t_1 \geq \frac{1}{2}$ olduğundan

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \geq \int_{t_1}^{t_2} E(t_2)dt = tE(t_2)|_{t_1}^{t_2} = (t_2 - t_1)E(t_2) \geq \frac{1}{2}E(t_2)$$

yazılır. Yani

$$\int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \geq \frac{1}{2}E(t_2) \quad \Rightarrow \quad E(t_2) \leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt \quad (6.61)$$

dır. Sonuç olarak (6.32)–(6.34), (6.60) ve (6.61) den ve $t_1, t_2 \in [t, t + 1]$ olduğundan

$$\begin{aligned} E(t) &\leq 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt + \int_t^{t+1} \left(\|u_\tau\|_m^m + \|v_\tau\|_r^r + \|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 \right) d\tau \\ &= 2 \int_{t_1}^{t_2} E(t)dt + D_1^m(t) + D_2^r(t) \end{aligned} \quad (6.62)$$

elde edilir. Böylece (6.59) un (6.62) de yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} E(t) &\leq (C + 2CC_4)(D_1^2(t) + D_2^2(t)) + D_1^m(t) + D_2^r(t) \\ &+ 2C_4C_3 [D_1(t) + D_2(t) + D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t)] E^{\frac{1}{p}}(t) \end{aligned} \quad (6.63)$$

bulunur. (6.63) ün sağ tarafında Young eşitsizliği uygulanırsa; $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} = 1$ olmak üzere

$k = \frac{p}{p-1}$, $l = p$ olarak seçilirse

$$\begin{aligned}
& 2C_4C_3 \left[D_1(t) + D_2(t) + D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t) \right] E^{\frac{1}{p}}(t) \\
& \leq \frac{\left[2C_4C_3 \left[D_1(t) + D_2(t) + D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t) \right] \right]^{\frac{p}{p-1}}}{\frac{p}{p-1}} + \frac{\left[E^{\frac{1}{p}}(t) \right]^p}{p} \quad (6.64) \\
& = C_5 \left[D_1(t) + D_2(t) + D_1^{m-1}(t) + D_2^{r-1}(t) \right]^{\frac{p}{p-1}} + \frac{E(t)}{p}
\end{aligned}$$

olur. Burada $C_5 = \frac{(p-1)(2C_4C_3)^{\frac{p}{p-1}}}{p}$ dır.

(6.64) eşitsizliği (6.63) te yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& E(t) - \frac{E(t)}{p} \leq (C + 2CC_4) \left(D_1^2(t) + D_2^2(t) \right) + D_1^m(t) + D_2^r(t) \\
& + C_5 \left[D_1^{\frac{p}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{p}{p-1}}(t) + D_1^{\frac{(m-1)p}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{(r-1)p}{p-1}}(t) \right] \quad (6.65)
\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}
& E(t) \leq C_6 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_1^m(t) + D_2^r(t) + D_1^{\frac{p}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{p}{p-1}}(t) \right. \\
& \left. + D_1^{\frac{(m-1)p}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{(r-1)p}{p-1}}(t) \right] \quad (6.66)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $C_6 = \frac{p}{p-1} \max(C + 2CC_4, 1, C_5)$ dır.

1. Durum: Eğer $m = r = p = 2$ ise (6.66) ifadesi (6.32) den

$$E(t) \leq 4C_6 \left[D_1^2(t) + D_2^2(t) \right] = 4C_6 \left[E(t) - E(t+1) \right] \quad (6.67)$$

olur. Bu durumda Lemma 3.1.1.1 den, $E(t)$ negatif olmayan ve artmayan bir fonksiyon olmak üzere (6.67) eşitsizliğinde $w_0 = 4C_6$ ve $\alpha = 0$ dır. O halde

$$E(t) \leq E(0)e^{-w_1[t-1]^+} \quad (6.68)$$

bulunur. Burada $w_1 = \ln\left(\frac{4C_6}{4C_6-1}\right)$ ve $[t-1]^+ = \max\{t-1, 0\}$ dir.

2. Durum: Eğer $m, r, p > 2$ ise (6.66) ifadesi

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C_6 D_1^2(t) \left[1 + D_1^{m-2}(t) + D_1^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) + D_1^{\frac{(m-3)p+2}{p-1}}(t) \right] \\ &\quad + C_6 D_2^2(t) \left[1 + D_2^{r-2}(t) + D_2^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{(r-3)p+2}{p-1}}(t) \right] \\ &\leq C_6 \left[1 + D_1^{m-2}(t) + D_1^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) + D_1^{\frac{(m-3)p+2}{p-1}}(t) \right. \\ &\quad \left. + D_2^{r-2}(t) + D_2^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{(r-3)p+2}{p-1}}(t) \right] (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \end{aligned} \quad (6.69)$$

olur. Bu durumda (6.32) den $E(t) - E(t+1) = D_1^m(t) + D_2^r(t)$ ve $E(t)$ negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan $E(t) \geq D_1^m(t) + D_2^r(t)$ olur; $\forall t \geq 0$ için $E(0) \geq E(t)$ için

$$E(0) \geq D_1^m(t) + D_2^r(t)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} D_1^m(t) \leq E(0) &\Rightarrow D_1^{m-2}(t) \leq E^{\frac{m-2}{m}}(0), \quad D_1^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) \leq E^{\frac{-p+2}{m(p-1)}}(0) \\ D_1^{\frac{(m-3)p+2}{p-1}}(t) &\leq E^{\frac{(m-3)p+2}{m(p-1)}}(0) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_2^r(t) \leq E(0) &\Rightarrow D_2^{r-2}(t) \leq E^{\frac{r-2}{r}}(0), \quad D_2^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) \leq E^{\frac{-p+2}{r(p-1)}}(0) \\ D_2^{\frac{(r-3)p+2}{p-1}}(t) &\leq E^{\frac{(r-3)p+2}{r(p-1)}}(0) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (6.69) dan

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq C_6 \left[1 + D_1^{m-2}(t) + D_1^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) + D_1^{\frac{(m-3)p+2}{p-1}}(t) \right. \\
&\quad \left. + D_2^{r-2}(t) + D_2^{\frac{-p+2}{p-1}}(t) + D_2^{\frac{(r-3)p+2}{p-1}}(t) \right] (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \\
&\leq C_6 \left[1 + E^{\frac{m-2}{m}}(0) + E^{\frac{r-2}{r}}(0) + E^{\frac{-p+2}{m(p-1)}}(0) \right. \\
&\quad \left. + E^{\frac{-p+2}{r(p-1)}}(0) + E^{\frac{(m-3)p+2}{m(p-1)}}(0) + E^{\frac{(r-3)p+2}{r(p-1)}}(0) \right] (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \\
&\leq C_7 (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \quad , \quad t \geq 0
\end{aligned} \tag{6.70}$$

olur. Burada

$$C_7 = C_6 \left[1 + E^{\frac{m-2}{m}}(0) + E^{\frac{r-2}{r}}(0) + E^{\frac{-p+2}{m(p-1)}}(0) + E^{\frac{-p+2}{r(p-1)}}(0) + E^{\frac{(m-3)p+2}{m(p-1)}}(0) + E^{\frac{(r-3)p+2}{r(p-1)}}(0) \right]$$

dır.

(6.70) in $\alpha = \max\left\{\frac{m-2}{2}, \frac{r-2}{2}\right\}$ olmak üzere, $(1+\alpha)$. kuvveti alınır

$$\begin{aligned}
E(t)^{1+\alpha} &\leq \left[C_7 (D_1^2(t) + D_2^2(t)) \right]^{1+\alpha} \\
&\leq C_8 (D_1^{2+2\alpha}(t) + D_2^{2+2\alpha}(t))
\end{aligned} \tag{6.71}$$

bulunur. Burada $C_8 = C_7^{1+\alpha} C$ dır. (6.71) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
E(t)^{1+\alpha} &\leq C_8 (D_1^m(t) D_1^{2\alpha-m+2}(t) + D_2^r(t) D_2^{2\alpha-r+2}(t)) \\
&\leq C_8 \left(D_1^m(t) E^{\frac{2\alpha-m+2}{m}}(0) + D_2^r(t) E^{\frac{2\alpha-r+2}{r}}(0) \right) \\
&\leq C_9 (D_1^m(t) + D_2^r(t)) \\
&= C_9 (E(t) - E(t+1))
\end{aligned} \tag{6.72}$$

olur. Burada $C_9 = C_8 \max\left\{E^{\frac{2\alpha-m+2}{m}}(0), E^{\frac{2\alpha-r+2}{r}}(0)\right\}$ dır.

Bu durumda Lemma 3.1.1.1 ve (6.72) den, $E(t)$ fonksiyonu artmayan, negatif olmayan bir fonksiyondur ve $E(t)^{1+\alpha} \leq C_9 (E(t) - E(t+1))$ koşulunu sağlar.

Böylece $\forall t \in [0, T]$ ve $\alpha > 0$ için

$$E(t) \leq \left(E(0)^{-\alpha} + C_9^{-1} \alpha [t-1]^+ \right)^{\frac{-1}{\alpha}}$$

eşitsizliği sağlanır ve Teorem 6.7 nin ispatı tamamlanmış olur.

6.4. Çözümlerin Patlaması

Bu bölümde $m=r=2$ olduğunda (6.1)–(6.5) probleminin çözümünün patlaması incelenmiştir.

Durum 1: Eğer $m=r=2$ olarak alınırsa, (6.1)–(6.2) problemi

$$u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + u_t = f_1(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \quad (6.73)$$

$$v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + v_t = f_2(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \quad (6.74)$$

halini alır.

Tanım 6.8. (6.73) – (6.74) probleminin bir (u, v) çözümü için

$$\lim_{t \rightarrow T^*} \left\{ \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau \right\} = \infty \quad (6.75)$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı varsa buna çözümün patlaması denir. $t \geq 0$ için

$$a(t) = \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau \quad (6.76)$$

olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir.

Lemma 6.9. Kabul edelim ki (A1) şartları sağlansın ve $\frac{p-2}{4} \leq \delta \leq \frac{q-1}{4}$, $p \geq 2$ olsun.

O zaman

$$\begin{aligned} a''(t) &\geq 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2) dx - 4(2\delta+1) E(0) \\ &\quad + 4(2\delta+1) \int_0^t (\|u_{\tau}\|^2 + \|v_{\tau}\|^2 + \|\nabla u_{\tau}\|^2 + \|\nabla v_{\tau}\|^2) d\tau \end{aligned} \quad (6.77)$$

dır.

İspat. (6.76) nın birinci ve ikinci mertebeden türevleri sırasıyla

$$a'(t) = 2 \int_{\Omega} (uu_t + vv_t) dx + \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \quad (6.78)$$

ve

$$\begin{aligned} a''(t) &= 2 \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2) dx + 2 \int_{\Omega} (uu_{tt} + vv_{tt}) dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} (uu_t + \nabla u \nabla u_t) dx + 2 \int_{\Omega} (vv_t + \nabla v \nabla v_t) dx \\ &= 2 \|u_t\|^2 + 2 \|v_t\|^2 + 2 \int_{\Omega} (uu_{tt} + vv_{tt}) dx \\ &+ 2 \int_{\Omega} (uu_t + \nabla u \nabla u_t) dx + 2 \int_{\Omega} (vv_t + \nabla v \nabla v_t) dx \end{aligned} \quad (6.79)$$

olur. (6.73) ün u ile iç çarpımı alınır

$$(u, u_{tt}) - (u, \Delta_p^3 u) - (u, \Delta u_t) + (u, u_t) = (u, f_1(u, v))$$

elde edilir. Elde edilen terimler düzenlenirse

$$\begin{aligned} (u, \Delta_p^3 u) &= \int_{\Omega} u \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta u|^{p-2} \nabla \Delta u) dx = - \int_{\Omega} \nabla u (\Delta |\nabla \Delta u|^{p-1}) dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \nabla u |\nabla \Delta u|^{p-1} dx = - \int_{\Omega} |\nabla \Delta u|^p dx = - \|\nabla \Delta u\|_p^p, \\ (u, \Delta u_t) &= \int_{\Omega} u \Delta u_t dx = - \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\int_{\Omega} uu_{tt} dx + \|\nabla \Delta u\|_p^p + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Omega} uu_t dx = \int_{\Omega} u f_1(u, v) dx \quad (6.80)$$

bulunur. Benzer şekilde (6.74) ün v ile iç çarpımı alınır

$$(v, v_{tt}) - (v, \Delta_p^3 v) - (v, \Delta v_t) + (v, v_t) = (v, f_2(u, v))$$

elde edilir. Elde edilen terimler düzenlenirse

$$\begin{aligned} (v, \Delta_p^3 v) &= \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\Delta |\nabla \Delta v|^{p-2} \nabla \Delta v) dx = - \int_{\Omega} \nabla v (\Delta |\nabla \Delta v|^{p-1}) dx \\ &= - \int_{\Omega} \Delta \nabla v |\nabla \Delta v|^{p-1} dx = - \int_{\Omega} |\nabla \Delta v|^p dx = - \|\nabla \Delta v\|_p^p, \\ (v, \Delta v_t) &= \int_{\Omega} v \Delta v_t dx = - \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx \end{aligned}$$

eşitliklerinden

$$\int_{\Omega} v v_t dx + \|\nabla \Delta v\|_p^p + \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx + \int_{\Omega} v v_t dx = \int_{\Omega} v f_2(u, v) dx \quad (6.81)$$

bulunur. (6.80) ve (6.81) taraf tarafa toplanır

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (u u_t + v v_t) dx + \int_{\Omega} (\nabla u \nabla u_t + \nabla v \nabla v_t) dx + \int_{\Omega} (u u_t + v v_t) dx \\ &= - \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) + (q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \end{aligned} \quad (6.82)$$

olur. (6.82) nin (6.79) da yerine yazılmasıyla

$$a''(t) = 2\|u_t\|^2 + 2\|v_t\|^2 - 2 \left(\|\nabla \Delta u\|_p^p + \|\nabla \Delta v\|_p^p \right) + 2(q+1) \int_{\Omega} F(u, v) dx \quad (6.83)$$

elde edilir. Şimdi (6.17) denkleminde $m = r = 2$ olarak alınsın. O halde

$$E'(t) = - \left(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u_t\|^2 + \|\nabla v_t\|^2 \right) \quad (6.84)$$

olur. (6.84) ün her iki tarafının $[0, t]$ aralığı üzerinde integrali alınır

$$\begin{aligned} \int_0^t E'(\tau) d\tau &= - \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 + \|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau, \\ E(t) - E(0) &= - \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 + \|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} E(0) &= E(t) + \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 + \|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \|u_t\|^2 + \frac{1}{2} \|v_t\|^2 + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta u\|_p^p + \frac{1}{p} \|\nabla \Delta v\|_p^p - \int_{\Omega} F(u, v) dx \\ &\quad + \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 + \|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau \end{aligned}$$

olur. Şimdi $4(1+2\delta)E(0)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
4(1+2\delta)E(0) &= 4(1+2\delta)\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|v_t\|^2\right) \\
&+ 4(1+2\delta)\left(\frac{1}{p}\|\nabla\Delta u\|_p^p + \frac{1}{p}\|\nabla\Delta v\|_p^p\right) - 4(1+2\delta)\int_{\Omega} F(u,v)dx \\
&+ 4(1+2\delta)\left(\int_0^t (\|\nabla u_{\tau}\|^2 + \|\nabla v_{\tau}\|^2 + \|u_{\tau}\|^2 + \|v_{\tau}\|^2) d\tau\right) \\
&= 2(1+2\delta)(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) \\
&+ \frac{4(1+2\delta)}{p}(\|\nabla\Delta u\|_p^p + \|\nabla\Delta v\|_p^p) - 4(1+2\delta)\int_{\Omega} F(u,v)dx \\
&+ 4(1+2\delta)\left(\int_0^t (\|\nabla u_{\tau}\|^2 + \|\nabla v_{\tau}\|^2 + \|u_{\tau}\|^2 + \|v_{\tau}\|^2) d\tau\right)
\end{aligned} \tag{6.85}$$

bulunur. (6.83) e (6.85) de bulunan $4(1+2\delta)E(0)$ ifadesi eklenip çıkarılırsa

$$\begin{aligned}
a''(t) &= 4(1+\delta)(\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2) - 4(1+2\delta)E(0) \\
&+ 4(1+2\delta)\int_0^t (\|\nabla u_{\tau}\|^2 + \|\nabla v_{\tau}\|^2 + \|u_{\tau}\|^2 + \|v_{\tau}\|^2) d\tau \\
&+ \left(\frac{4+8\delta}{p} - 2\right)(\|\nabla\Delta u\|_p^p + \|\nabla\Delta v\|_p^p) + 2(q-4\delta-1)\int_{\Omega} F(u,v)dx
\end{aligned} \tag{6.86}$$

elde edilir. $0 \leq \delta \leq \frac{q-1}{4}$ olduğundan $2q-8\delta-2 \geq 0$ ve $\frac{p-2}{4} \leq \delta$ olduğundan

$$\frac{8\delta+4}{p} - 2 \geq 0 \text{ dir.}$$

Sonuç olarak (6.86) nın son iki terimi ihmal edilirse (6.77) eşitsizliği bulunur.

Lemma 6.10. (A1), $\frac{p-2}{4} \leq \delta \leq \frac{q-1}{4}$ ve aşağıdaki durumlardan biri sağlansın:

- (i) $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$,
- (ii) $E(0) = 0$ ve $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$,
- (iii) $E(0) > 0$ ve

$$a'(0) > r_2 \left[a(0) + \frac{K_1}{4(\delta+1)} \right] + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \tag{6.87}$$

olsun. Böylece $t > t^*$ için $a'(t) > \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$ olur.

Burada (i) durumunda $t_0 = t^*$ ve (ii), (iii) durumlarında $t_0 = 0$ dir.

Ayrıca K_1 ve t^* sırasıyla (6.102) ve (6.89) da tanımlanmıştır.

İspat.

(i) $E(0) < 0$ olması durumunda, (6.77) den

$$a''(t) \geq -4(1+2\delta)E(0)$$

olur. Bu eşitsizliğin 0 dan t ye integrali alınırsa

$$\begin{aligned} \int_0^t a''(\tau) d\tau &\geq \int_0^t -4(1+2\delta)E(0) d\tau, \\ (a'(t) - a'(0)) &\geq -4(1+2\delta)E(0)t, \\ a'(t) &\geq a'(0) - 4(1+2\delta)E(0)t \end{aligned} \tag{6.88}$$

olur. (6.78) den

$$a'(t) = 2 \int_{\Omega} (uu_t + vv_t) dx + \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2$$

ifadesinde t yerine 0 yazılırsa

$$a'(0) = 2 \int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$$

elde edilir. Burada $a'(0)$ ifadesi (6.88) de yerine yazılırsa

$$a'(t) \geq 2 \int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 - 4(1+2\delta)E(0)t$$

olur. Böylece $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$ olduğundan, $t > t^*$ için

$$a'(t) > \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$$

bulunur. Bu ifade ve (6.88) den

$$4(1+2\delta)E(0)t^* \leq a'(0) - (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2)$$

olacak şekilde t^* vardır. Burada

$$t^* = maks \left\{ \frac{a'(0) - (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2)}{4(1+2\delta)E(0)}, 0 \right\} = 0 \quad (6.89)$$

dır.

(ii) Eğer $E(0) = 0$ ve $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$ ise, o zaman (6.77) den $t \geq 0$ için $a''(t) \geq 0$

dır. Buradan integral alınırsa

$$a'(t) \geq a'(0) \quad (6.90)$$

olur. Ayrıca

$$a'(t) = 2 \int_{\Omega} (u u_t + v v_t) dx + \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2$$

ve

$$a'(0) = 2 \int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$$

dır. $a'(0)$ ifadesi (6.90) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$a'(t) \geq 2 \int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$$

elde edilir. Böylece $t \geq 0$ için $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$ kabulünden

$$a'(t) > \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$$

olur.

(iii) Eğer $E(0) > 0$ ise, ilk olarak

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \int_{\Omega} u u_t dx d\tau &= \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial u^2}{\partial t} dx d\tau \\ &= \|u\|^2 - \|u_0\|^2 \end{aligned} \quad (6.91)$$

göz önüne alınsın. (6.91) a Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 + 2 \int_0^t \|u\| \|u_{\tau}\| d\tau \quad (6.92)$$

olur. (6.92) de Young eşitsizliğinden

$$\|u\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \int_0^t \|u\|^2 d\tau + \int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \quad (6.93)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\|v\|^2 = \|v_0\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} v v_t dx d\tau$$

ifadesinde Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\|v\|^2 \leq \|v_0\|^2 + 2 \int_0^t \|v\| \|v_\tau\| d\tau \quad (6.94)$$

olur. (6.94) de Young eşitsizliğinden

$$\|v\|^2 \leq \|v_0\|^2 + \int_0^t \|v\|^2 d\tau + \int_0^t \|v_\tau\|^2 d\tau \quad (6.95)$$

bulunur. (6.93) ve (6.95) in taraf tarafa toplanmasıyla

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \leq \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \int_0^t (\|u\|^2 + \|v\|^2) d\tau + \int_0^t (\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2) d\tau \quad (6.96)$$

elde edilir. (6.76) dan

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = a(t) - \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau \quad (6.97)$$

yazılır. (6.78) de $\|u\|^2 + \|v\|^2$ ifadesi yerine (6.97) yazılırsa

$$a'(t) = a(t) - \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + 2 \int_{\Omega} (u u_t + v v_t) dx \quad (6.98)$$

bulunur. (6.98) e önce Hölder eşitsizliği sonra Young eşitsizliği uygulanırsa;

Hölder eşitsizliğinden

$$a'(t) \leq a(t) - \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + 2 \|u\| \|u_t\| + 2 \|v\| \|v_t\|$$

ve Young eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
a'(t) &\leq a(t) - \int_0^t \int_{\Omega} \left(u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2 \right) dx d\tau \\
&\quad + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 + \|u\|^2 + \|u_t\|^2 + \|v\|^2 + \|v_t\|^2
\end{aligned} \tag{6.99}$$

olur. (6.96) daki $\|u\|^2 + \|v\|^2$ ifadesi (6.99) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
a'(t) &\leq a(t) + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\
&\quad + \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla v\|^2 \right) d\tau
\end{aligned} \tag{6.100}$$

bulunur. (6.100) ün her iki tarafı $-4(\delta+1)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}
-4(\delta+1)a'(t) &\geq -4(\delta+1)a(t) - 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) dx \\
&\quad - 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2) dx - 4(\delta+1) (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \\
&\quad - 4(\delta+1) \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla v\|^2 \right) d\tau
\end{aligned} \tag{6.101}$$

olur. (6.77) ve (6.101) in taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned}
a''(t) - 4(\delta+1)a'(t) &\geq 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2) dx - 4(2\delta+1)E(0) \\
&\quad + 4(2\delta+1) \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 + \|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 \right) d\tau \\
&\quad - 4(\delta+1)a(t) - 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) dx - 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2) dx \\
&\quad - 4(\delta+1) (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) - 4(\delta+1) \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 - \|\nabla u\|^2 - \|\nabla v\|^2 \right) d\tau
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
&a''(t) - 4(\delta+1)a'(t) + 4(\delta+1)a(t) + 4(2\delta+1)E(0) \\
&\quad + 4(\delta+1) \int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) dx - 4\delta \int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2 \right) d\tau \\
&\quad - 4(\delta+1) \int_0^t \left(\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \right) d\tau - 4(2\delta+1) \int_0^t \left(\|\nabla u_\tau\|^2 + \|\nabla v_\tau\|^2 \right) d\tau \\
&\quad + 4(\delta+1) (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \geq 0
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$a''(t) - 4(\delta + 1)a'(t) + 4(\delta + 1)a(t) + K_1 \geq 0$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} K_1 &= 4(2\delta + 1)E(0) + 4(\delta + 1) \int_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) dx \\ &\quad - 4\delta \int_0^t (\|u_{\tau}\|^2 + \|v_{\tau}\|^2) d\tau - 4(\delta + 1) \int_0^t (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) d\tau \\ &\quad - 4(2\delta + 1) \int_0^t (\|\nabla u_{\tau}\|^2 + \|\nabla v_{\tau}\|^2) d\tau + 4(\delta + 1) (\|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2) \end{aligned} \quad (6.102)$$

dır. $t > 0$ için $b(t) = a(t) + \frac{K_1}{4(\delta + 1)}$ olsun. O zaman $b(t)$, Lemma 3.2.3.1 i sağlar.

Yani (6.87) den $a'(t) > \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2$, $t > 0$ olur.

Teorem 6.11. (A1) ve $\frac{p-2}{4} \leq \delta \leq \frac{q-1}{4}$, $p \geq 2$ sağlansın. Aşağıdaki durumlarda

- (i) $E(0) < 0$ ve $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$,
- (ii) $E(0) = 0$ ve $\int_{\Omega} (u_0 u_1 + v_0 v_1) dx > 0$,
- (iii) $0 < E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2)\right)^2}{8 \left[a(t_0) + (T_1 - t_0)(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2)\right]}$ ve (6.87) sağlandığında,

(u, v) çözümü (6.75) anlamında sonlu bir T^* zamanında patlar.

(i) durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{H'(t_0)} \quad (6.103)$$

dır. Ayrıca, eğer $H(t_0) < \min \left\{ 1, \sqrt{-\frac{a}{b}} \right\}$ ise, o zaman

$$T^* \leq t_0 + \frac{1}{\sqrt{-b}} \ln \frac{\sqrt{-\frac{a}{b}}}{\sqrt{-\frac{a}{b}} - H(t_0)} \quad (6.104)$$

olur. Burada

$$a = \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right)^2 - 8E(0)H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right] > 0 \quad (6.105)$$

ve

$$b = 8\delta^2 E(0) \quad (6.106)$$

dır.

(ii) durumunda

$$T^* \leq t_0 - \frac{H(t_0)}{H'(t_0)} \quad (6.107)$$

dır.

(iii) durumunda

$$T^* \leq \frac{H(t_0)}{\sqrt{a}} \text{ veya } T^* \leq t_0 + 2^{\frac{3\delta+1}{2\delta}} \left(\frac{a}{b} \right)^{2+\frac{1}{\delta}} \frac{\delta}{\sqrt{a}} \left\{ 1 - \left[1 + \left(\frac{a}{b} \right)^{2+\frac{1}{\delta}} H(t_0) \right]^{-\frac{1}{2\delta}} \right\} \quad (6.108)$$

olur. Burada α ve b sırasıyla (6.105) ve (6.106) da verildiği gibidir.

İspat. $t \in [0, T_1]$ için

$$H(t) = \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^{-\delta} \quad (6.109)$$

olsun. Burada $T_1 > 0$ daha sonra belirlenecek olan bir sabittir. Buradan (6.109) un 1.

ve 2. mertebeden türevi alınırsa

$$\begin{aligned} H'(t) &= -\delta \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^{-\delta-1} \\ &\quad * \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right] \\ &= -\delta H^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (6.110)$$

ve

$$H(t)^{1+\frac{2}{\delta}} = \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^{-\delta-2}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} H''(t) &= -\delta(-\delta-1) \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^{-\delta-2} \\ &\quad * \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^2 \\ &\quad - \delta \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^{-\delta-1} a''(t) \\ &= -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) a''(t) \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right] \\ &\quad + \delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) (1+\delta) \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (6.111)$$

elde edilir. Böylece (6.111) den

$$\begin{aligned} V(t) &= a''(t) \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right] \\ &\quad - (1+\delta) \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (6.112)$$

olmak üzere

$$H''(t) = -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t) V(t) \quad (6.113)$$

yazılabilir. Ayrıca hesaplamalarda kolaylık olması için

$$\begin{aligned} P_u &= \int_{\Omega} u^2 dx, & R_u &= \int_{\Omega} u_t^2 dx, & Q_u &= \int_0^t \|u\|^2 d\tau, \\ S_u &= \int_0^t \|u_{\tau}\|^2 d\tau, & M_u &= \int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau, & N_u &= \int_0^t \|\nabla u_{\tau}\|^2 d\tau, \\ P_v &= \int_{\Omega} v^2 dx, & R_v &= \int_{\Omega} v_t^2 dx, & Q_v &= \int_0^t \|v\|^2 d\tau, \\ S_v &= \int_0^t \|v_{\tau}\|^2 d\tau, & M_v &= \int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau, & N_v &= \int_0^t \|\nabla v_{\tau}\|^2 d\tau \end{aligned}$$

gösterimleri kullanılsın. (6.92) ve (6.94) eşitsizlikleri (6.78) de yerlerine yazılır ve Hölder eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
a'(t) &\leq 2 \int_{\Omega} u u_t dx + 2 \int_{\Omega} v v_t dx + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\
&+ 2 \int_0^t \|u\| \|u_\tau\| d\tau + 2 \int_0^t \|v\| \|v_\tau\| d\tau \\
&\leq 2 \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} u_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_{\Omega} v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} v_t^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ 2 \left(\int_0^t \|u\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|u_\tau\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + 2 \left(\int_0^t \|v\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|v_\tau\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\
&\leq 2 \left(\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} \right) \\
&+ \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2
\end{aligned} \tag{6.114}$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx d\tau &= \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx d\tau \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau \\
&= \|\nabla u\|^2 - \|\nabla u_0\|^2
\end{aligned}$$

den

$$\|\nabla u\|^2 = \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx d\tau \tag{6.115}$$

olur. (6.115) e Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\|\nabla u\|^2 \leq \|\nabla u_0\|^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u\| \|\nabla u_\tau\| d\tau \tag{6.116}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
2 \int_0^t \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx d\tau &= \frac{d}{dt} \int_0^t \int_{\Omega} (\nabla v)^2 dx d\tau \\
&= \frac{d}{dt} \int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau \\
&= \|\nabla v\|^2 - \|\nabla v_0\|^2
\end{aligned}$$

den

$$\|\nabla v\|^2 = \|\nabla v_0\|^2 + 2 \int_0^t \int_{\Omega} \nabla v \nabla v_t dx d\tau \quad (6.117)$$

olur. (6.117) ye Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\|\nabla v\|^2 \leq \|\nabla v_0\|^2 + 2 \int_0^t \|\nabla v\| \|\nabla v_t\| d\tau \quad (6.118)$$

bulunur. (6.116) ve (6.118) in taraf tarafa toplanmasıyla

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 &\leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \\ &+ 2 \int_0^t \|\nabla u\| \|\nabla u_t\| d\tau + 2 \int_0^t \|\nabla v\| \|\nabla v_t\| d\tau \end{aligned} \quad (6.119)$$

yazılabilir. (6.119) da Hölder eşitsizliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 &\leq \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 + 2 \left(\int_0^t \|\nabla u\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\nabla u_t\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ 2 \left(\int_0^t \|\nabla v\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \|\nabla v_t\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 + 2\sqrt{M_u N_u} + 2\sqrt{M_v N_v} \end{aligned} \quad (6.120)$$

elde edilir. (6.120) nin (6.114) te yerine yazılmasıyla

$$\begin{aligned} a'(t) &\leq 2 \left(\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} \right) + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|\nabla v\|^2 \\ &\leq 2 \left(\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{M_u N_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} + \sqrt{M_v N_v} \right) \\ &+ \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \end{aligned} \quad (6.121)$$

bulunur. Eğer (i) ve (ii) durumları sağlanıyorsa, (6.77) den

$$\begin{aligned} a''(t) &\geq -4(2\delta + 1)E(0) + 4(\delta + 1) \int_{\Omega} (u_t^2 + v_t^2) dx \\ &+ 4(2\delta + 1) \int_0^t (\|u_{\tau}\|^2 + \|v_{\tau}\|^2 + \|\nabla u_{\tau}\|^2 + \|\nabla v_{\tau}\|^2) d\tau \\ &\geq (-4 - 8\delta)E(0) + 4(1 + \delta)(R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) \end{aligned} \quad (6.122)$$

yazılır. (6.109) dan

$$a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) = H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \quad (6.123)$$

dir. (6.121) – (6.123), (6.112) de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
V(t) &= a''(t) \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right] \\
&\quad - (1 + \delta) \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^2 \\
&= a''(t) H^{-\frac{1}{\delta}}(t) - (1 + \delta) \left[a'(t) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^2 \quad (6.124) \\
&\geq \left[(-4 - 8\delta) E(0) + 4(1 + \delta) (R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) \right] H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\
&\quad - 4(1 + \delta) \left[\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} + \sqrt{M_u N_u} + \sqrt{M_v N_v} \right]^2
\end{aligned}$$

olur. (6.76) dan

$$\begin{aligned}
a(t) &= \int_{\Omega} (u^2 + v^2) dx + \int_0^t \int_{\Omega} (u^2 + v^2 + |\nabla u|^2 + |\nabla v|^2) dx d\tau \\
&= P_u + P_v + Q_u + Q_v + M_u + M_v \quad (6.125)
\end{aligned}$$

dir. (6.123) – (6.125) ten

$$\begin{aligned}
V(t) &\geq (-4 - 8\delta) E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t) + 4(1 + \delta) (R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) \\
&\quad * \left[a(t) + (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right] \\
&\quad - 4(1 + \delta) \left[\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{M_u N_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} + \sqrt{M_v N_v} \right]^2 \\
&= (-4 - 8\delta) E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\
&\quad + 4(1 + \delta) \left[(R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right. \\
&\quad + (R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) (P_u + Q_u + M_u + P_v + Q_v + M_v) \\
&\quad \left. - \left[\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{M_u N_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} + \sqrt{M_v N_v} \right]^2 \right] \\
&= (-4 - 8\delta) E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \\
&\quad + 4(1 + \delta) \left[(R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) \right. \\
&\quad \left. * (T_1 - t) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) + \phi(t) \right] \quad (6.126)
\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
\phi(t) &= (R_u + S_u + N_u + R_v + S_v + N_v) (P_u + Q_u + M_u + P_v + Q_v + M_v) \\
&\quad - \left[\sqrt{R_u P_u} + \sqrt{Q_u S_u} + \sqrt{M_u N_u} + \sqrt{R_v P_v} + \sqrt{Q_v S_v} + \sqrt{M_v N_v} \right]^2
\end{aligned}$$

dır. $a, b, c, d, e, f, g, h, k, l, m, n \geq 0$ olmak üzere

$$(ab + cd + ef + gh + kl + mn)^2 \leq (a^2 + c^2 + e^2 + g^2 + k^2 + m^2)(b^2 + d^2 + f^2 + h^2 + l^2 + n^2)$$

formundaki Schwarz eşitsizliğinden $\phi(t)$ negatif değildir. Böylece $t \geq t_0$ için

$$V(t) \geq (-4 - 8\delta)E(0)H^{-\frac{1}{\delta}}(t) \quad (6.127)$$

olur. Ayrıca (6.113) ve (6.127) den $t \geq t_0$ için

$$H''(t) = -\delta H^{1+\frac{2}{\delta}}(t)V(t) \leq 4\delta(1+2\delta)E(0)H^{1+\frac{1}{\delta}}(t) \quad (6.128)$$

eşitsizliği elde edilir. (6.110) ve Lemma 6.10 dan $t \geq t_0$ için $H'(t) < 0$ olduğu bilinmektedir. (6.128) eşitsizliği $H'(t)$ ile çarpılıp $[t_0, t]$ üzerinde integre edilirse, $t \geq t_0$ için

$$\int_{t_0}^t H'(t)H''(t)dt \geq 4\delta(1+2\delta)E(0) \int_{t_0}^t H^{1+\frac{1}{\delta}}(t)H'(t)dt$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} \left. \frac{H'^2(t)}{2} \right|_{t_0}^t &\geq (4\delta(1+2\delta)E(0)) \left. \frac{H^{2+\frac{1}{\delta}}(t)}{2+\frac{1}{\delta}} \right|_{t_0}^t, \\ \frac{H'^2(t) - H'^2(t_0)}{2} &\geq 4\delta^2 E(0) \left(H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \right), \\ (H'^2(t) - H'^2(t_0)) &\geq 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \end{aligned}$$

den

$$H'^2(t) \geq 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) + H'^2(t_0) \quad (6.129)$$

olur. (6.110) dan

$$H'^2(t_0) = \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[a'(t_0) - (\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2) \right]^2$$

dır ve $H'^2(t_0)$ ifadesi (6.129) da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
H'^2(t) &\geq 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) - 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t_0) \\
&+ \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]^2 \\
&= 8\delta^2 E(0) H^{2+\frac{1}{\delta}}(t) \\
&+ \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right)^2 - 8E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $t \geq t_0$ için

$$H'^2(t) \geq a + b H^{2+\frac{1}{\delta}}(t)$$

bulunur. Burada a ve b sırasıyla (6.105) ve (6.106) daki gibidir. Yani

$$a = \delta^2 H^{2+\frac{2}{\delta}}(t_0) \left[\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right)^2 - 8E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) \right]$$

ve

$$b = 8\delta^2 E(0)$$

dir. Eğer (iii) sağlanıyor ise, (i) deki adımlara benzer şekilde, $a > 0$ olması için ancak ve ancak

$$\begin{aligned}
&\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right)^2 - 8E(0) H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0) > 0, \\
&\frac{\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right)^2}{8H^{-\frac{1}{\delta}}(t_0)} > E(0)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanmalıdır. Burada (6.123) ten

$$E(0) < \frac{\left(a'(t_0) - \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right)^2}{8 \left[a(t_0) + (T_1 - t_0) \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 + \|\nabla u_0\|^2 + \|\nabla v_0\|^2 \right) \right]}$$

olur. O halde Lemma 3.2.3.2 den

$$\lim_{t \rightarrow T^*} H(t) = 0$$

şartını sağlayan sonlu bir T^* zamanı vardır ki T^* in üst sınırları $E(0)$ ın işaretine göre belirlenir.

7. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Dördüncü bölümde

$$\begin{aligned} u_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) + m_1^2 u + |u_t|^{p-1} u_t &= f_1(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \operatorname{div}(|\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v) + m_2^2 v + |v_t|^{q-1} v_t &= f_2(u, v), (x, t) \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerinin azalması Nakao eşitsizliği kullanılarak, patlaması ise Georgiev ve Todorova (1994) nin yöntemi ile gösterilmiştir. Çözümlerinin azalımı Komornik lemması kullanılarak, patlaması ise negatif başlangıç enerjisi ($E(0) < 0$) ile Georgiev ve Todorova yönteminin bir genelleştirmesi olan Vitillaro (1999) un yöntemi kullanılarak ($E(0) < E_1$) için gösterilebilir. Ayrıca çözümlerin patlaması $p = q = 1$ için Zhou (2005) nun lemmasından faydalanılarak ispatlanabilir. Bu çalışmada doğrusal olmayan damping terimlerin kuvvetleri birden büyük olarak seçilmiştir; bu damping terimlerin kuvvetleri $(0, 1)$ aralığında iken tekrar çalışılabilir. Beşinci bölümde ele alınan

$$u_{tt} - \alpha u_{xx} - \mu u_{xxt} + \beta u_{xxxx} + \gamma u_{xxxxt} = \varphi(u^2)_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

denkleminin çözümlerinin patlaması Levine (1974) in lemmasından faydalanılarak gösterilmiştir. Çözümlerin patlaması farklı metotlar çalışılarak gösterilebilir. Altıncı bölümde ele alınan

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_p^3 u - \Delta u_t + |u_t|^{m-2} u_t &= f_1(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T), \\ v_{tt} - \Delta_p^3 v - \Delta v_t + |v_t|^{r-2} v_t &= f_2(u, v), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T) \end{aligned}$$

denklem sisteminin çözümlerinin azalması Nakao eşitsizliği kullanılarak ve patlaması ise Li ve Tsai (2003) nin yöntemi ile gösterilmiştir. Çözümlerinin azalımı Komornik lemması kullanılarak, patlaması ise farklı lemmalardan faydalanılarak gösterilebilir.



KAYNAKLAR

- Adams, R.A., Fournier, J.J.F. (2003). *Sobolev Spaces* (2nd ed.) Academic Press: New York.
- Agre, K., Rammaha, M.A. (2006). Systems of nonlinear wave equations with damping and source terms. *Differential of Integral Equations*, 19 (11), 1235–1270. <https://doi.org/10.57262/die/1356050301>
- Atouani, N., Omrani, K. (2013). Galerkin finite element method for the Rosenau-RLW equation. *Computers and Mathematics with Applications*, 66 (3), 289–303. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2013.04.029>
- Belakhdar, A., Belaouidel, H., Filali, M., Tsouli N. (2022). Existence and multiplicity of solutions of $p(x)$ -triharmonic problem. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 27 (2), 349–361.
- Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial differential equations*, Springer.
- Evans, L.C. (1998). *Partial differential equations*, Graduate studies in mathematics, vol 19.
- Georgiev, V., Todorova, G. (1994). Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms. *Journal of Differential Equations*, 109 (2), 295–308. <https://doi.org/10.1006/jdeq.1994.1051>
- Godefroy, A.D. (1998). Blow up of solutions of a generalized Boussinesq equation. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 60 (2), 123–138. <https://doi.org/10.1093/imamat/60.2.123>
- Hao, J., Niu, S., Meng, H. (2014). Global nonexistence of solutions for nonlinear coupled viscoelastic wave equations with damping and source terms. *Boundary Value Problems*, 2014 (250), 1–11. <https://doi.org/10.1186/s13661-014-0250-z>
- Komornik, V. (1994). *Exact Controllability and Stabilization: The Multiplier Method*. Research in Applied Mathematics.
- Levine, H.A. (1974). Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, *Transactions of the American Mathematical Society*, 192, 1–21. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1974-0344697-2>
- Li, M.R., Tsai, L.Y. (2003). Existence and nonexistence of global solutions of some system of semilinear wave equations. *Nonlinear Analysis*. 54 (8), 1397-1415.
- Lions, J.L. (1985). *Control of distributed singular systems*, Gauthier-Villars.

- Messaoudi, S.A., Houari, B.S. (2010). Global nonexistence of positive initial-energy solutions of a system of nonlinear viscoelastic wave equations with damping and source terms, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 365 (1), 277–287. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.10.050>
- Nakao, M. (1977). Asymptotic stability of the bounded or almost periodic solution of the wave equation with nonlinear dissipative term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 58 (2), 336–343. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(77\)90211-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(77)90211-6)
- Nakao, M. (1978). A difference inequality and its application to nonlinear evolution equations. *J. Math. Soc. Japan*, 30 (4), 747–762. <https://doi.org/10.2969/jmsj/03040747>
- Park, M.A. (1990). On the Rosenau equation. *Math. Appl. Comput.*, 9 (2), 145–152.
- Pişkin, E., Polat, N. (2013). Global existence, decay and blow up solutions for coupled nonlinear wave equations with damping and source terms. *Turk. J. Math.*, 37 (4), 633 – 651. <https://doi.org/10.3906/mat-1110-48>
- Pişkin, E. (2013). *Doğrusal olmayan evölüsyon denklemlerin çözümlerinin azalması ve patlaması* [Doktora tezi]. Dicle Üniversitesi.
- Pişkin, E. (2014). Uniform decay and blow-up of solutions for coupled nonlinear Klein–Gordon equations with nonlinear damping terms. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37 (18), 3036–3047. <https://doi.org/10.1002/mma.3042>
- Pişkin, E. (2015). On the decay and blow up of solutions for a quasilinear hyperbolic equations with nonlinear damping and source terms. *Boundary Value Problems*, 127, 1–14. <https://doi.org/10.1186/s13661-015-0395-4>
- Pişkin, E. (2017). *Sobolev uzayları* (1. Baskı). Seçkin Yayınevi.
- Pişkin, E., Yüksekaya, H. (2018). Blow up of solutions for a Timoshenko equation with damping terms. *Middle East Journal of Science*, 4 (2), 70–80. <https://doi.org/10.23884/mejs.2018.4.2.03>
- Pişkin, E. (2021). *Evolüsyon denklemlerinin çözümlerinin patlaması* (1. Baskı). Pegem Akademi.
- Polat, N., Kaya, D., Tutalar, H.I. (2005). Blow-up of solutions for the damped Boussinesq equation. *Journal of Zeitschrift für Naturforschung*, 60 (7), 473–476. <https://doi.org/10.1515/zna-2005-0701>
- Polat, N., Kaya, D. (2006). Blow up of solution for the generalized Boussinesq equation with damping term. *Journal of Zeitschrift für Naturforschung*, 61 (5-6), 235–238. <https://doi.org/10.1515/zna-2006-5-604>
- Polat, N. (2008). Existence and blow up of solutions of Cauchy problem of the generalized damped multidimensional improved modified Boussinesq equation. *Journal of Zeitschrift für Naturforschung*, 63 (9), 543–552. <https://doi.org/10.1515/zna-2008-0903>
- Rosenau, P. (1986). A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line. *Physica Scripta*, 34 (6B), 827–829. <https://doi.org/10.1088/0031-8949/34/6B/020>

- Rosenau, P. (1988). Dynamics of dense discrete dystems: High order effects. *Progress of Theoretical Physics*, 79 (5), 1028–1042. <https://doi.org/10.1143/PTP.79.1028>
- Segal I. (1965). Nonlinear partial differential equations in quantum field theory. *Proceedings of Symposia in Applied Mathematics AMS*, 17, 210–226.
- Wang, S., Xu, G. (2009). The Cauchy problem for the Rosenau equation. *Nonlinear Analysis TMA*, 71 (1-2), 456–466. <https://doi.org/10.1016/j.na.2008.10.085>
- Wang, H., Wang, S. (2013). Global existence and asymptotic behavior of solution for the Rosenau equation with hydrodynamical damped term. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 401 (2), 763–773. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2012.12.069>
- Wang, S., Su, X. (2015). Global existence and asymptotic behavior of solution for Rosenau equation with Stokes damped term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 38 (17), 3990–4000. <https://doi.org/10.1002/mma.3333>
- Wang, Y., Feng, G. (2017). Large-time behavior of solutions to the Rosenau equation with damped term. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40 (6), 1986–2004. <https://doi.org/10.1002/mma.4114>
- Wu, S.T. (2009). Blow-up of solutions for a system of nonlinear wave equations with nonlinear damping. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2009 (105), 1–11.
- Wu, S.T. (2012). Global existence, blow-up and asymptotic behavior of solutions for a class of coupled nonlinear Klein-Gordon equations with damping terms. *Acta Applicandae Mathematicae*, 119 (1), 75–95. <https://doi.org/10.1007/s10440-011-9662-2>
- Ye, Y. (2013). Global existence and asymptotic stability for coupled nonlinear Klein–Gordon equations with nonlinear damping terms. *Dynamical Systems*, 28 (2), 287–298. <https://doi.org/10.1080/14689367.2013.792330>
- Zuo, J.M. (2009). Solitons and periodic solutions for the Rosenau–KdV and Rosenau–Kawahara equations. *Applied Mathematics and Computation*, 215 (2), 835–840. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.06.011>

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Zeynep Sümeyye YILMAZ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2013, Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği
- **Yükseklisans** : 2018, Sakarya Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik

TEZDEN TÜRETİLEN ESERLER:

- Çelik, Z.S., Gür, Ş. ve Pişkin, E. 2023. Energy decay and blow-up of solutions for a class of system of generalized nonlinear Klein-Gordon equations with source and damping terms, *Turkish Journal of Mathematics*, 47(4), 1288-1305.