

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

Basri ÇALIŞKAN

**BAZI YARIGRUP AİLELERİ ve YAPILARI İÇİN SONLULUK
KOŞULLARI ve ETKİNLİK**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA,2008

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI YARIGRUP AİLELERİ ve YAPILARI İÇİN
SONLULUK KOŞULLARI ve ETKİNLİK**

**Basri ÇALIŞKAN
DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Bu Tez/....../2008 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği /
Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.**

İmza:..... Doç.Dr.Hayrullah AYIK DANIŞMAN	İmza:..... Prof.Dr.Bilal VATANSEVER ÜYE	İmza:..... Yrd.Doç.Dr. Ersin KIRAL ÜYE
---	---	--

İmza:..... Doç.Dr.Gonca AYIK ÜYE	İmza:..... Yrd.Doç.Dr. Hüseyin BİLGİÇ ÜYE
--	---

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür**

**Bu Çalışma Ç.Ü. Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi Tarafından
Desteklenmiştir.**

Proje No: FEF 2006D5

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

DOKTORA TEZİ

BAZI YARIGRUP AİLELERİ ve YAPILARI İÇİN SONLULUK KOŞULLARI ve ETKİNLİK

Basri ÇALIŞKAN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç.Dr.Hayrullah AYIK

Yıl: 2008, Sayfa:58

Jüri: Doç.Dr.Hayrullah AYIK

Prof.Dr.Bilal VATANSEVER

Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL

Doç.Dr.Gonca AYIK

Yrd.Doç.Dr.Hüseyin BİLGİÇ

Bu çalışmada yarıgrup yapıları için bazı sonluluk koşulları incelenmiştir. r S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, periyodiklik, yerel sonluluk, residual sonluluk, kelime probleminin çözülebilirliği ve yerel sonlu takdim edilebilirlik gibi sonluluk koşulları S , r ve S/r yarıgrupları için incelenmiştir. I bir yarılatıs, S_i ($i \in I$) ayrık yarıgrupların bir ailesi ve $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ de $\{S_i\}_{i \in I}$ yarıgruplarının bir güçlü yarılatısı olsun. Benzer şekilde $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ için de periyodiklik, yerel sonluluk ve sonlu takdim edilebilirlik gibi sonluluk koşulları incelenmiştir.

G sonlu takdim edilebilir bir grup ve N de G nin herhangi bir sonlu indeksli normal alt grubu olsun. G üzerinde tanımlı $r_N = \{(s, t) : st^{-1} \in N\}$ kongrüansının sonlu doğuraylı ve sonlu takdim edilebilir bir yarıgrup olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarıgruplar, Kongrüans, Sonluluk Koşulları, Güçlü Yarılatıs.

ABSTRACT

Ph.D. THESIS

FINITENESS CONDITIONS FOR SOME SEMIGROUP FAMILIES AND CONSTRUCTIONS AND EFFICIENCY

Basri ÇALIŞKAN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Assc. Dr. Hayrullah AYIK

Year: 2008, Pages: 58

Jury : Assc. Prof. Dr. Hayrullah AYIK

Prof. Dr. Bilal VATANSEVER

Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

Assc. Prof. Dr. Gonca AYIK

Asst. Prof. Dr. Hüseyin BİLGİÇ

In this study some finiteness conditions for semigroup constructions are considered.

Periodicity, local finiteness, residual finiteness and soluble word problem are considered for S , r and S/r where r is a congruence on a semigroup S . Let I be a semilattice, let S_i ($i \in I$) be a family of disjoint semigroups, and let $S[I; S_i, f_{j,i}]$ be the strong semilattice of semigroups $\{S_i\}_{i \in I}$. Similarly, periodicity, local finiteness and local finite presentability are considered for $S[I; S_i, f_{j,i}]$.

Let G be a finitely presented group and N be a normal subgroup of G with finite index. It is shown that the congruence $r_N = \{st^{-1} : (s, t) \in N\}$ on G is finitely generated and finitely presented semigroup.

Keywords: Semigroups, Congruence, Finiteness Conditions, Strong Semilattice.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında bilgi ve tecrübesi ile bana yardımcı olan, danışmanım sayın Doç.Dr.Hayrullah AYIK'a teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım sırasında bana her zaman yardımcı olan değerli hocam Doç.Dr.Gonca AYIK'a teşekkür ederim.

Ayrıca beni akademik kariyere teşvik eden ve öncü olan ağabeyim Bekir ÇALIŞKAN'a, sevgili eşime, değerli aileme ve özellikle de çocuklarının yetişmesi için elinden gelen her şeyi yapan anaların en güzeli rahmetli annem Pervin ÇALIŞKAN'a sonsuz teşekkürler ediyorum. Bu uzun yolun başlangıcında master programında bana danışmanlık yapan sayın Yrd.Doç.Dr.Fikret KUYUCU'ya tekrar teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarım sırasında bana her türlü desteği veren matematik bölümünün değerli hocalarına, araştırma görevlilerine ve idari personeline jüri üyelerim sayın Prof.Dr.Yusuf ÜNLÜ'ye, sayın Prof.Dr.Bilal VATANSEVER'e, sayın Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL'a ve sayın Yrd.Doç.Dr. Hüseyin BİLGİÇ'e teşekkürlerimi sunuyorum. Son olarak, Ç.Ü. Karaisalı Meslek Yüksekokulu'nun akademik ve idari personeline teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER.....	3
2.1. Yarıgruplar.....	3
2.2. İdealler.....	8
2.3. Kongrüans ve Bölüm Yarıgrubu.....	10
2.4. Yarıgrup Takdimleri.....	15
2.5. Tietze Dönüşümleri.....	23
2.6. Yarıgruplar İçin Sonluluk Koşulları.....	26
2.7. Yarıgrupların Güçlü Yarılatisi.....	29
3. S , ρ ve S / ρ İÇİN SONLULUK KOŞULLARI.....	30
3.1. Periyodiklik.....	30
3.2. Yerel Sonluluk.....	33
3.3. Residual Sonluluk.....	35
3.4. Kelime Problemi.....	39
3.5. Yerel Sonlu Takdim Edilebilirlik.....	42
4. ρ_N YARIGRUBU İÇİN BİR SONLU TAKDİM.....	44
4.1. r_N İçin Doğuray Kümesi	44
4.2. r_N İçin Takdim.....	47
5. YARIGRUPLARIN GÜÇLÜ YARILATİSİ İÇİN SONLULUK KOŞULLARI.....	51
5.1. Periyodiklik.....	51
5.2. Yerel Sonluluk.....	52
5.3. Yerel Sonlu Takdim Edilebilirlik.....	53
KAYNAKLAR.....	56
ÖZGEÇMİŞ.....	58

1.GİRİŞ

Yarıgruplar teorisi cebirin en temel dallarından biridir. Yarıgruplar ile ilgili ilk çalışmalar 1920'li yıllarda A.K. Sushkevich'in bir sonlu yarıgrupun minimal idealinin yapısını belirlemesi ve böylece öz ideali olmayan herhangi bir sonlu yarıgrupun yapısını belirlemesine kadar dayanır. Bu sonuç daha sonraları D. Rees tarafından herhangi tam basit yarıgruplar için genelleştirildi. Diğer bir araştırma ise A. Clifford tarafından yapılan tam düzgün yarıgruplar ya da kendi adıyla bilinen Clifford yarıgrubu ile ilgili çalışmalardır. 1950 lerin sonunda yarıgruplar teorisinin kendisi modern cebirin zengin depolu problemlere sahip, matematiğin diğer alanları özellikle de gruplar ve halkalar teorileri ile güçlü bağlantıları olan geniş bir alana sahip bir dalı olmaya başladı.

Diğer cebirsel teorilerde olduğu gibi yarıgruplar teorisinin de temel problemlerden birisi tüm yarıgrupların sınıflandırılması ve onların yapısının tanımlanmasıdır. Bu iş yapılırken, yarıgrupların birçok çeşidi açıkça belirtilmesi ve dikkate alınmasıyla yarıgruplar üzerinde bazı kısıtlamalar oluşturulur. Bu kısıtlamalar çok çeşitlidir.

Bu kısıtlamalardan biri düzgünlüktür. Düzgün yarıgruplar, yarıgruplar teorisinin üzerinde çok sıkça çalışılan bir alanıdır. Bu sınıf, simetrik yarıgrupları, ters dönüşüm yarıgrupları, Clifford yarıgrupları, (sıfır) basit yarıgrupları ve tam (sıfır) basit yarıgrupları içerir.

Diğer bazı kısıtlamalar ise; tüm ya da bazı alt yarıgruplar, idealler ya da kongrüanslar gibi yarıgrup üzerinde bilinen bağıntılardır. Bu tip kısıtlamalar bize, çeşitli tipteki basit yarıgrupları ve çeşitli sonluluk koşullu yarıgrupları verir. Örneğin, periyodik yarıgrup, yerel sonlu yarıgrup, residual sonlu yarıgrup, minimal ideal v.b.

Literatürde yarıgrupların sonluluk koşulları ile ilgili bir çok çalışma vardır. Bunlardan bazıları şunlardır; Ruskuc N., (1998)'deki bir makalesinde bir S yarıgrubunda sonluluk koşullarından bazılarının sağlanması durumunda, S nin sonlu indekse sahip olan bir T alt yarıgrubunda hangi durumlarda sağlanıp sağlanmayacağına dair gerek ve yeter koşulları vermiştir. Bir başka çalışma Ayık H., (2005)'de Rees Matrisler Yarıgrubu için sonluluk koşullarını incelemiştir. Yine Ayık

G., Ayık H., ve Ünlü Y., (2005b)'de yayınlanan makalede yarıgrupların bir güçlü yarılatısı için kelime problemi incelenmiştir. Ayrıca Ayık G., Ayık H., ve Ünlü Y., (2005a)'daki çalışmalarında bir S yarıgrubu üzerindeki r kongrüansının yarıgrup olarak sonlu takdim edildiğinde S ve S/r yarıgruplarının da sonlu takdim edilebilirliğini araştırmışlardır.

Bu tezin birinci ve ikinci bölümünde, giriş ve yarıgruplar teorisinin temel tanım ve teoremlerinden bazıları verilmiştir. Üçüncü bölümünde ise, S , r ve S/r yarıgruplarının birinde sonluluk koşullarının sağlanması durumunda diğerlerinde sağlanıp sağlanmayacağı araştırılmıştır. Dördüncü bölümünde ise, G bir grup ve N de G 'nin bir normal alt grubu olmak üzere G üzerinde tanımlı $r_N = \{(s, t) : st^{-1} \in N\}$ kongrüansının hangi koşullarda sonlu doğuraylı ve sonlu takdim edilebilir olduğu incelenmiştir. Son ve beşinci bölümde ise, yarıgrupların bir güçlü yarılatısı $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ için sonluluk koşullarından bazıları incelenmiştir.

2. TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde, yarıgruplar, yarıgrup takdimleri, yarıgruplar için sonluluk koşulları ve bazı yarıgrup yapılarının basit tanımları ve temel teoremleri verilmiştir.

2.1. Yarıgruplar

S boş olmayan bir küme ve o işlemi S üzerinde tanımlı birleşmeli bir ikili işlem olmak üzere (S, o) ikilisine bir *yarıgrup* denir. Yarıgrubu çarpımsal notasyon ile ifade ederken çarpmanın ne olduğu içerikten belli ise $(S, \cdot)$ yerine sadece S yazacağız. Yani $\forall s, t \in S$ için sot ve $s \cdot t$ yerine st yazacağız. Eğer bir S yarı grubunda her $s, t \in S$ için $st = ts$ oluyor ise S ye *değişmeli yarıgrup* denir. Her $s \in S$ için $s1 = 1s = s$ olacak şekilde bir $1 \in S$ elemanı varsa 1 elemanına S nin *birim elemanı* S ye de *monoid* denir. Bir S yarı grubunun en fazla bir tane birim elemanı vardır. Eğer S birim elemana sahip değil ise ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s1 = 1s = s \text{ ve } 11 = 1$$

olarak tanımlarsak $S \cup \{1\}$ bir monoid olur. S^1 kümesini

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^1 monoidine *gerekli ise birim eleman eklenerek S den elde edilen monoid* denir.

S en az iki elemanı olan bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için $0s = s0 = 0$ olacak şekilde $0 \in S$ elemanı var ise 0 elemanına S nin *sıfır elemanı*, S ye de *sıfırlı yarıgrup* denir. Herhangi bir S yarı grubunda sıfır eleman varsa tek olduğu açıktır. Eğer S yarı grubunun sıfır elemanı yoksa ekstra bir sıfır eleman benzer şekilde

kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için $0s = s0 = s$ ve $0.0=0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda S^0 kümesi

$$S^0 = \begin{cases} S, & S \text{ sıfır elemana sahip ise} \\ S \cup \{0\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve S^0 yarıgrubuna *gerekli ise sıfır eleman eklenerek S den elde edilen sıfırlı yarıgrup* denir.

Ekstra birim ve/veya sıfır elemanı eklerken yarıgrubun bazı özellikleri değişebilir. Eğer grup olan bir yarıgruba sıfır elemanı eklersek grup olmayan bir yarıgrup elde ederiz. Bu sıfırlı yarıgruba, yani bir gruba sıfır eklenerek elde edilen yarıgruba *0-grup* denir. Eğer S yarıgrubunda birim eleman olduğu halde S ye 1 birimi eklenir ise S nin birim elemanı $S \cup \{1\}$ için artık birim değildir ve $S \cup \{1\}$ in birimi yeni eklenen 1 elemanıdır.

Boştan farklı herhangi bir S yarıgrubunda çarpma her $s, t \in S$ için $st = s$ olarak tanımlanırsa S yarıgrubuna *sol sıfır yarıgrup* denir. Sağ sıfır yarıgrup benzer şekilde tanımlanır. m elemanlı sol sıfır yarıgrup L_m ile sağ sıfır yarıgrup R_m ile gösterilir.

Eğer a birim elemansız bir S yarıgrubunun elemanı ise Sa kümesinin a elemanını içermesi gerekmez. O halde

$$\begin{aligned} S^1a &= Sa \cup \{a\} \\ aS^1 &= aS \cup \{a\} \\ S^1aS^1 &= SaS \cup Sa \cup aS \cup \{a\} \end{aligned}$$

dir. Dikkat edilirse S^1a, aS^1, S^1aS^1 kümeleri S nin alt kümeleridir. S yarıgrubunun bir grup olması için gerek ve yeter koşul her $a \in S$ için

$$aS = S \text{ ve } Sa = S$$

olmasıdır.

S bir yarıgrup ve T de S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer T çarpma altında kapalı ise o zaman T ye S nin *alt yarıgrubu* denir. Bu koşulu daha genel olarak $T^2 \subseteq T$ şeklinde ifade edebiliriz. Eğer her $a \in T$ için $Ta = aT = T$ ise T alt yarıgrubu bir alt gruptur.

S ve T iki yarıgrup ve Φ , S den T ye bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in S$ için $\Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y)$ ise Φ ye *homomorfizm* denir. T nin $\Phi(S) = \{\Phi(s) : s \in S\}$ alt kümesine Φ nin *görüntü kümesi* denir. Ayrıca $\Phi(S)$, T nin alt yarıgrubu olduğu açıktır. Eğer S ve T sırasıyla birimleri 1_S ve 1_T olan iki monoid iseler yukarıdaki koşula ek olarak $\Phi(1_S) = 1_T$ oluyor ise Φ ye bir *monoid homomorfizmi* denir. Bu homomorfizmlerin farkını belirtmek istenirse yarıgrup homomorfizmi ve monoid homomorfizmi ifadeleri kullanılır, aksi halde sadece homomorfizm diyeceğiz.

S ve T iki yarıgrup ve Φ , S den T ye bir homomorfizm olsun. Eğer Φ bire-bir ise Φ ye bir *monomorfizm*, Φ örten ise Φ ye bir *epimorfizm* ve Φ hem bire-bir hem de örten ise Φ ye bir *izomorfizm* denir. S den S ye bir izomorfizmaya S nin bir *otomorfizmi* denir. Φ , S den T ye bir izomorfizm ise S , T ye *izomorfiktir* denir ve $S \cong T$ şeklinde yazılır.

S ve T iki yarıgrup ise $S \times T$ kartezyen çarpımı üzerindeki çarpma her $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ için

$$(s, t)(s', t') = (ss', tt')$$

olarak tanımlarsak $S \times T$ bir yarıgruptur ve bu yarıgruba S ve T nin *direk çarpımı* denir.

Grup teoride bir kümenin permütasyonları grubu gibi yarıgrup teoride de bir kümeden kendisine tanımlı dönüşümler kavramı vardır. Yani bir X kümesindeki tüm permütasyonların simetrik grubu $(S_X, \circ)$ na benzer olarak X den X e tanımlı tüm dönüşümlerin yarıgrubu $(T_X, \circ)$ *tüm dönüşümler yarıgrubu* vardır. Her ikisinde

de işlem bileşke işlemidir. $(S_X, \mathbf{o})$, X den X e tüm birebir örten dönüşümleri içeriyor olup $(T_X, \mathbf{o})$ in bir alt yarıgrubudur. Bir S yarıgrubu T_X in bir alt yarıgrubu ise S ye dönüşümler yarıgrubu denir. S bir yarıgrup olmak üzere bir $f : S \rightarrow T_X$ homomorfizmine S nin *temsili* denir.

Aşağıdaki teorem gruplardaki Cayley Teoremine benzer olup her yarıgrubun bir dönüşümler yarıgrubuna izomorfik olduğunu ifade etmektedir.

Teorem 2.1.1: S bir yarıgrup ve $X = S^1$ olmak üzere bir birebir $f : S \rightarrow T_X$ homomorfizmi vardır.

İspat: İspatı için Howie J.M. (1995)'e bakınız. <

Eğer bir $e \in S$ için $e^2 = e$ oluyorsa e ye *idempotent eleman* denir. Eğer S yarıgrubunun tüm elemanları idempotent ise S yarıgrubuna *band* denir. Eğer bir S yarıgrubu hem band hem de değişmeli ise S ye *yarılatis* denir.

A bir küme ve SL_A , A nın boş olmayan tüm alt kümelerinin kümesi olsun. Kümeler üzerindeki birleşme işlemi $\cup$ ile SL_A bir yarılatis, buna A üzerindeki *serbest yarılatis* denir.

Bir S yarıgrubunda her $a, b \in S$ için $aba = a$ ise S yarıgrubuna *dikdörtgen band* denir. Bu durumda aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 2.1.2: S bir yarıgrup olsun. Bu durumda aşağıdakiler birbirine denktir.

- i) S bir dikdörtgen banttır.
- ii) S nin her elemanı idempotent ve her $a, b, c \in S$ için $abc = ac$ dir.
- iii) $S \cong L \times R$ olacak şekilde bir sol sıfır yarıgrup L ve bir sağ sıfır yarıgrup R vardır.
- iv) A ve B boştan farklı kümeler ve $A \times B$ deki çarpma

$$(a,b)(a',b')=(a,b'), (a,a'\in A \text{ ve } b,b'\in B)$$

olmak üzere S yarıgrubu $A \times B$ formunda bir yarıgruba izomorfiktir.

İspat: İspatı için Howie J.M. (1995)'e bakınız.

<

Dikdörtgen ifadesi yukarıdaki teoremin (iv) ifadesinden gelmektedir. Kartezyen düzlemde $(a,b), (c,d)$ noktaları ile bu noktaların çarpımı olan $(a,b)(c,d)$ ve $(c,d)(a,b)$ noktalarını birlikte düşünecek olursak bir dikdörtgenin köşelerini oluşturur. Band ifadesi de elemanların idempotent oluşundan ileri gelmektedir.

Biz sonlu bir dikdörtgen bandı, herhangi iki $(i,j), (k,l) \in R_{m,n}$ elemanının çarpımı

$$(i,j)(k,l)=(i,l)$$

olmak üzere

$$R_{m,n} = \{(i,j) : 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

$R_{m,n}$ kümesi ile ifade edebiliriz.. Dikkat edilirse, eğer $m=1$ ise o zaman $R_{1,n}$ bir sağ sıfır yarıgrup, eğer $n=1$ ise o zaman $R_{m,1}$ bir sol sıfır yarıgrup ve

$$R_{m,n} \cong R_{m,1} \times R_{1,n}$$

dir.

2.2. İdealler

S bir yarıgrup ve $L, R \subseteq S$ olsun. Eğer $SL \subseteq L$ ($RS \subseteq R$) ise S nin boştan farklı L (R) alt kümesine S nin bir *sol ideali* (*sağ ideali*) denir. Eğer S nin boştan farklı bir A alt kümesi hem sağ hem de sol ideal ise A ya S nin *ideali* veya *iki yanlı ideali* denir. Dikkat edilecek olursa bir yarıgrupun iki yanlı her ideali bir alt yarıgruptur, fakat bunun tersi doğru değildir. Bir I ideali $\{0\} \subset I \subset S$ koşulunu sağlıyorsa I ideale *öz ideal* denir.

Tanım 2.2.1: S bir yarıgrup olsun. S nin bir sağ ideali R eğer S nin $K \neq \emptyset$ bir sağ ideali için $K \subseteq R$ olduğunda $K = R$ oluyorsa R ye S nin *minimal sağ ideali* denir. Benzer şekilde minimal sol ideal tanımlanır. S nin bir I ideali eğer S nin bir $K \neq \emptyset$ ideali için $K \subseteq I$ olduğunda $K = I$ oluyorsa I ideale S nin *minimal ideali* denir.

Teorem 2.2.2: S , bir minimal sol ideal L ye sahip yarıgrup ve $s \in S$ olsun.

- i) Herhangi iki minimal sol ideal ayrıktır.
- ii) Ls , S de minimal sol idealdir.
- iii) $a \in L$ ise $Sa = La = L$ dir.
- iv) S deki tüm minimal sol ideallerin birleşimi bir minimal idealdir. Üstelik bu minimal ideal tekdir.

İspat: i) I ve J , S nin farklı iki minimal sol ideali olsun. $I \cap J \neq \emptyset$ olduğunu kabul edelim. O zaman $I \cap J$ bir sol idealdir ve $I \cap J \subseteq I$ dir. I minimal sol ideal olup $I \cap J = I$ dir. Benzer şekilde $I \cap J = J$ dir. Böylece $I = J$ çelişkisi elde edilir. O halde $I \cap J = \emptyset$ dir.

ii) Ls nin S nin bir sol ideali olduğu açıktır. K , S nin bir sol ideali ve $K \subseteq Ls$ olsun. N kümesini

$$N = \{x \in L : xs \in K\} \subseteq L$$

olarak tanımlayalım. $K \neq \emptyset$ olup bir $a \in L$ için $k = as$ olacak şekilde $k \in K$ vardır. O halde $N \neq \emptyset$ dir. $SN \subseteq N$ olup N bir sol idealdir. L minimal sol ideal ve $N \subseteq L$ olup $L = N$ dir. Böylece $K = Ls$ olup Ls bir minimal sol idealdir.

iii) $a \in L$ ve L minimal sol ideal olduğundan $La \subseteq Sa \subseteq L$ dir. L minimal sol ideal olduğundan ve La sol ideal olduğundan $La = Sa = L$ dir.

iv) $\Lambda = \{L : L, S \text{ nin minimal sol ideali}\}$ ve $M = \bigcup_{L \in \Lambda} L$ olsun. $s \in S$ ve $a \in M$ olsun. O zaman bir $L \in \Lambda$ için $a \in L$ dir. Böylece $sa \in L \subseteq M$ olup M bir sol idealdir. M nin bir sağ ideal olduğunu gösterelim. $s \in S$ ve $a \in M$ olsun. O zaman bir $L \in \Lambda$ için $a \in L$ dir. (ii) den dolayı Ls minimal sol idealdir. $as \in Ls \subseteq M$ olup M bir sağ idealdir. M nin minimal olduğunu gösterelim. $I, I \subseteq M$ olacak şekilde S nin bir ideali olsun. Eğer $L \in \Lambda$ ise $IL \subseteq L \cap I$ olup $L \cap I \neq \emptyset$ dir. Fakat $L \in \Lambda$ ve $L \cap I \neq \emptyset$ olup L nin minimalliğinden $L \cap I = L$ dir. Böylece

$$I = I \cap M = \bigcup \{L \cap I : L \in \Lambda\} = \bigcup \{L : L \in \Lambda\} = M$$

olup M minimaldir. W, S nin başka bir minimal ideali olsun. WM de bir ideal olup hem M hem de W bir alt kümesi olduğundan

$$M = WM = W$$

dir.

<

Sıfırlı bir S yarıgrubunda, S nin bir I sol ideali S nin $\{0\}$ sol idealinden başka bir idealini içermiyorsa I ya *0-minimal sol ideal* denir. Benzer şekilde 0-minimal sağ ideal tanımlanır. Sıfırlı bir S yarıgrubunda, S nin bir I ideali S nin $\{0\}$ idealinden başka bir idealini içermiyorsa I ya *0-minimal ideal* denir.

2.3. Kongrüans ve Bölüm Yarıgrubu

X bir küme olsun. $X \times X$ kartezyen çarpımının herhangi bir alt kümesine X üzerinde bir *bağıntı* denir. X üzerindeki tüm bağıntıların kümesini B_X ile göstereceğiz. Ayrıca r , X üzerinde herhangi bir bağıntı ise $(x, y) \in r$ yerine biz genellikle xry yazarız. Ayrıca r ve s , X üzerinde herhangi iki bağıntı olsun. Bu iki bağıntının bileşkesi,

$$ros = rs = \{(x, y) : (\exists z \in X), (x, z) \in r \text{ ve } (z, y) \in s\}$$

şeklinde tanımlanır ve bağıntıların bileşkesi işlemi ile B_X bir yarıgrup olup buna (X üzerindeki) *bağıntılar yarıgrubu* denir. B_X in birim elemanı,

$$\Delta = \Delta_X = \{(x, x) : x \in X\}$$

özdeşlik bağıntısıdır ve boş bağıntı da B_X in sıfır elemanıdır. $j \in B_X$, $x \in X$ ve $Y \subseteq X$ olsun. O zaman

$$xj = \{y \in X : xj = y\}$$

$$Yj = \bigcup_{x \in Y} xj$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $j \in B_X$ elemanı her $x \in X$ için $|xj| \leq 1$ ise j ye *kısmi dönüşüm* denir. X üzerindeki tüm kısmi dönüşümlerin kümesini P_X ile gösterelim. P_X bileşke işlemi ile bir yarıgruptur ve bu yarıgruba *kısmi dönüşümler yarıgubu* denir. Ayrıca her $j \in T_X$ ve her $x \in X$ için $|xj| = 1$ dir. T_X ve P_X , B_X in alt yarıgruplarıdır.

Ters bağıntı,

$$r^{-1} = \{(x, y) : (y, x) \in r\}$$

olarak tanımlanır. $rr^{-1} = \Delta_x$ olmak zorunda değildir. $j \in P_x$ ise $j^{-1} \in P_x$ olmak zorunda değildir. $j^{-1} \in P_x$ olması için $j \in P_x$ bire-bir olmalıdır. X üzerindeki tüm bire-bir kısmi dönüşümlerin kümesini I_x ile gösterelim. I_x de bileşke işlemi ile bir yarıgrupdur ve bu yarıgruba *ters simetrik yarıgrup* denir.

Tanım 2.3.1: r , X üzerinde bir bağıntı olsun.

- i) Her $x \in X$ için $(x, x) \in r$ ise, r ya *yansımali bağıntı* denir.
- ii) Her $x, y \in X$ için $(x, y) \in r$ iken $(y, x) \in r$ oluyorsa r ya *simetrik bağıntı* denir.
- iii) Her $x, y \in X$ için $(x, y) \in r$ ve $(y, x) \in r$ iken $x = y$ oluyorsa r ya *antisimetrik bağıntı* denir.
- iv) Her $x, y, z \in X$ için $(x, y) \in r$ ve $(y, z) \in r$ iken $(x, z) \in r$ oluyorsa r ya *geçişken bağıntı* denir.

Eğer r , yansımali, simetrik ve geçişken bir bağıntı ise r ya bir *denklik bağıntısı* denir. Eğer r , yansımali, antisimetrik ve geçişken bir bağıntı ise r ya bir *(kısmi) sıralama bağıntısı* denir.

r bir denklik bağıntısı olsun. Her $x \in X$ için, x in denklik sınıfı,

$$xr = \{y \in X : (x, y) \in r\}$$

ile tanımlanır. Farklı iki denklik sınıfının kesişimleri boşdur ve tüm denklik sınıflarının birleşimleri X kümesini oluşturur yani X üzerindeki tüm denklik sınıfları X in bir parçalanışıdır. X in tüm denklik sınıflarının kümesi,

$$X/r = \{xr : x \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans, S üzerindeki denklik sınıflarının doğal çarpımı ile tanımlanan bir denklik bağıntısıdır.

Tanım 2.3.2: S bir yarıgrup ve r da S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Her $s \in S$ ve her $(x, y) \in r$ için $(sx, sy) \in r$ ($(xs, ys) \in r$) ise, r ya bir *sol (sağ) uyumlu* denir. Her $(x, y), (x', y') \in r$ için $(xx', yy') \in r$ ise r ya *uyumlu* denir.

Sol uyumlu bir denklik bağıntısına *sol kongrüans*, sağ uyumlu bir denklik bağıntısına *sağ kongrüans*, uyumlu bir denklik bağıntısına da *kongrüans* denir.

Teorem 2.3.3: Bir S yarıgrubu üzerinde r nun bir kongrüans olması için gerek ve yeter koşul r nun hem sağ hem de sol kongrüans olmasıdır.

İspat: İspatı için Howie J.M. (1995)'e bakınız.

<

S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Tüm denklik sınıflarının kümesi S/r üzerindeki çarpma her $xr, yr \in S/r$ için

$$(xr)(yr) = (xy)r$$

şeklinde tanımlanır. S/r bu çarpma işlemi ile bir yarıgruptur. S/r ya, S nin r ile elde edilen *bölüm yarıgrubu* denir. Dikkat edilirse yarıgruplar da bölüm yapısı diğer cebirsel yapılardan farklılık gösterir. Bu farklılığın kaynağı da yarıgruplar arasındaki homomorfizmin çekirdeğinin bir kongrüans olmasıdır.

Teorem 2.3.4: S ve T yarıgrup olsunlar.

- i) r , S üzerinde bir kongrüans olsun. $f : S \rightarrow S/r$ olmak üzere $f(x) = xr$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homomorfizmdir.
- ii) $f : S \rightarrow T$ bir homomorfizm olsun. $\text{Ker}f = \{(x, y) \in S \times S : xf = yf\}$ kümesi bir kongrüanstır ve $S/\text{Ker}f \cong \text{im}f$ dir.

İspat: İspatı için Howie J.M. (1995)'e bakınız. <

Tanım 2.3.5: S bir yarıgrup ve R de S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer $x, y \in S$ için

$$x = urv \quad \text{ve} \quad y = usv$$

olacak şekilde $u, v \in S^1$ ve $(r, s) \in R$ veya $(s, r) \in R$ mevcut ise x ile y *temel R-bağılantılıdır* denir. Eğer her $1 \leq i \leq n-1$ için z_i ile z_{i+1} temel R -bağılantılı olacak şekilde sonlu bir

$$x = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \dots \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_n = y$$

dizisi mevcut ise x ile y *R-bağılantılıdır* veya y , x in bir *R-sonucudur* denir.

Teorem 2.3.6: S bir yarıgrup ve R de S üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S üzerindeki yeni bir r bağıntısını

$$(s, t) \in r \Leftrightarrow s = t \text{ veya } s \text{ ile } t \text{ } R\text{-bağılantılıdır}$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman r , S üzerinde R bağıntısını içeren en küçük kongrüanstır.

İspat: Her $s \in S$ $(s, s) \in r$ olduğundan r yansımalıdır. Her $(s, t) \in r$ için

$$s = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow z_{n-1} \rightarrow z_n = t \text{ ise } t = z_n \rightarrow z_{n-1} \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow z_2 \rightarrow z_1 = s$$

olup r simetriktir. Her $(s, t), (t, u) \in r$ için

$$s = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow z_n = t \text{ ve } t = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow v_m = u$$

olup

$$s = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow z_n \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow v_m = u$$

olur. Yani $(s, u) \in r$ olup r geçişmelidir. Böylece r bir denklik bağıntısıdır.

$(s, t) \in r$ ve $u, v \in S^1$ için

$$usv = uz_1v \rightarrow uz_2v \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow uz_nv = utv$$

ve her $1 \leq i \leq n-1$ için uz_iv ile $uz_{i+1}v$ de temel R-bağılantılı olduğundan

$(us, ut), (sv, tv) \in r$ olup r bir kongrüanstır. $R \subseteq r$ olduğu açıktır.

s, S üzerinde $R \subseteq s$ olacak şekildeki başka bir kongrüans olsun. $(s, t) \in r$ alalım. Eğer $s = t$ ise $(s, t) \in R \subseteq s$ dir. Eğer $s \neq t$ ise sonlu

$$s = z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow z_n = t$$

dizisi vardır; öyle ki

$$z_i = u_i r_i v_i \text{ ve } z_{i+1} = u_i s_i v_i$$

$(u_i, v_i \in S^1$ ve $(r_i, s_i) \in R$ veya $(s_i, r_i) \in R)$ dir. $R \subseteq s$ ve s (sağ/sol) uyumlu olduğundan $(z_i, z_{i+1}) \in s$ ve geçişmeli olduğundan $(s, t) \in s$ olur. Böylece istenildiği gibi $r \subseteq s$ olur (Howie J.M., 1995). $<$

Bundan sonra R bağıntısını içeren en küçük kongrüansı $r(R)$ ile gösterelim.

2.4. Yarıgrup Takdimleri

Bu bölümde öncelikle yarıgrup için doğuray ve serbest yarıgrup kavramları verilecektir. Daha sonra kısaca grup, monoid ve yarıgrup takdimlerinin ne ifade ettiği ve aralarındaki ilişkilerden bahsedilecektir.

S bir yarıgrup A da S nin bir alt kümesi olsun. A yı içeren S nin en küçük yarıgrubuna A nın doğurduğu yarıgrup denir. A ya da bu yarıgrubun doğuray kümesi denir. Bu alt yarıgrubu $\langle A \rangle$ ile göstereceğiz.

Önerme 2.4.1: S bir yarıgrup A da S nin boş olmayan alt kümesi olsun. O zaman

$$\langle A \rangle = \mathbf{I} \{U : U, A \text{ yı içeren } S \text{ nin alt yarıgrubu} \}$$

dır.

İspat: $W = \mathbf{I} \{U : U, A \text{ yı içeren } S \text{ nin alt yarıgrubu} \}$ olsun. W , A yı içeren bir alt yarıgrup olup, tanımdan $\langle A \rangle \subseteq W$ dur. Ayrıca $\langle A \rangle$, A yı içeren bir alt yarıgrup olduğundan $\langle A \rangle \in \{U : U, A \text{ yı içeren } S \text{ nin alt yarıgrubu} \}$ dir. O halde

$$W = \mathbf{I} \{U_i : U_i, A \text{ yı içeren } S \text{ nin alt yarıgrubu} \} \subseteq \langle A \rangle$$

olup $\langle A \rangle = W$ dir (Ruskuc N., 1995).

<

S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq A \subseteq S$ olsun. Benzer şekilde gösterileceği üzere

$$\langle A \rangle = \{a_1 a_2 \dots a_n : a_i \in A, n \in \mathbb{N}\}$$

olur. Bir başka ifade ile $\langle A \rangle$, A üzerindeki tüm sonlu çarpımların kümesidir.

Eğer $S = \langle A \rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir A alt kümesi var ise S ye *sonlu doğuraylı yarıgrup* denir.

$$r(S) = \min \{|A| : A \subseteq S, \langle A \rangle = S\}$$

olarak tanımlanan $r(S)$ doğal sayısına S nin *rankı* denir.

S bir yarıgrup olsun. S nin tek elemanlı bir $A = \{a\}$ doğurayı varsa S ye *monojenik yarıgrup* denir. $S = \langle a \rangle$ yazılır. $S = \langle a \rangle$ monojenik bir yarıgrup olsun. Eğer her $i \neq j \in \mathbb{N}$ için $a^i \neq a^j$ ise S sonsuz olup S ye *serbest monojenik yarıgrup* denir. Serbest monojenik yarıgrup $(\mathbb{N}, +)$ yarıgrupuna izomorfiktir.

$A \neq \emptyset$ bir küme (alfabe) olsun. e boş kelimayı göstermek üzere, A daki tüm sonlu kelimelerin kümesini A^* , boş kelimedenden farklı tüm sonlu $a_1 a_2 \dots a_n$ kelimelerinin kümesini A^+ ile göstereceğiz. Dikkat edilecek olursa $A^* = A^+ \cup \{e\}$ dir. A^+ daki ikili işlemi

$$(a_1 a_2 \dots a_n)(b_1 b_2 \dots b_m) = a_1 a_2 \dots a_n b_1 b_2 \dots b_m$$

olarak tanımlayalım. Böylece yukarıda tanımlanan bu ikili işlem ile A^+ bir yarıgruptur. A^+ ya A üzerinde bir *serbest yarıgrup*, A kümesine de A^+ nın *doğuray kümesi* denir.

$$A = A^+ \setminus (A^+)^2$$

olduğundan doğuray kümesi tek türlü bellidir. Eğer $A = \{a\}$ ise $A^+ = \{a, a^2, a^3, \mathbf{L}\}$ bir sonsuz monojenik yarıgruptur. $|A| \geq 2$ ise o zaman A^+ değişmeli değildir.

Teorem 2.4.2: S bir yarıgrup, A bir alfabe ve $f: A \rightarrow S$ herhangi bir dönüşüm olsun. O zaman $\Phi|_A = f$ olacak şekilde bir tek $\Phi: A^+ \rightarrow S$ homomorfizmi vardır.

İspat: $\Phi: A^+ \rightarrow S$ dönüşümünü $w = a_1 a_2 \mathbf{K} a_n \in A^+$ için

$$\Phi(a_1 a_2 \mathbf{K} a_n) = f(a_1) f(a_2) \mathbf{K} f(a_n)$$

olarak tanımlayalım. Açıkça Φ bir homomorfizm ve $\Phi|_A = f$ dir. Ayrıca $\Psi: A^+ \rightarrow S$, $\Psi|_A = f$ olacak şekilde başka bir homomorfizm olsun. O zaman her $w = a_1 a_2 \mathbf{K} a_n \in A^+$ için

$$\begin{aligned} \Psi(a_1 a_2 \mathbf{K} a_n) &= \Psi(a_1) \Psi(a_2) \mathbf{K} \Psi(a_n) \\ &= f(a_1) f(a_2) \mathbf{K} f(a_n) = \Phi(a_1 a_2 \mathbf{K} a_n) \end{aligned}$$

olup $\Psi = \Phi$ dir. O halde Φ tekdir. <

S bir yarıgrup ve A da S yarıgrubunun doğurayı olsun. Yukarda tanımlanan $\Phi: A^+ \rightarrow S$ örten homomorfizm olduğundan, aşağıdaki sonuca sahibiz.

Sonuç 2.4.3: S herhangi bir yarıgrup olsun. O zaman S bir serbest yarıgrubun homomorfik görüntüsüdür. <

Yarıgrup takdiminde temel iki tip problem vardır. Birincisi verilen bir yarıgrupun bir takdimini bulmak, ikincisi verilen bir takdim tarafından temsil edilen yarıgrubu bulmaktır.

A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere bir *yarıgrup takdimi* $\langle A|R \rangle$ ikilisidir. $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup ise r , R yi içeren A^+ üzerindeki en küçük kongrüans olmak üzere A^+/r yarıgrubudur.

S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. O zaman, her $s \in S$ için $sr^\# = sr$ şeklinde tanımlanan $r^\# : S \rightarrow S/r$ dönüşüm bir homomorfizm olup, buna *doğal homomorfizm* denir.

Teorem 2.4.4: S bir yarıgrup, A da S nin bir doğuray kümesi ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. Eğer her $(w, z) \in R$ için $w = z$ ilişkisi S de sağlanıyor (yani S nin aynı elemanını temsil ediyor) ise s her $a \in A$ için $s(a) = a$ olacak şekildeki tek homomorfizm olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmeli olacak şekilde bir tek $\Psi : \langle A|R \rangle \rightarrow S$ homomorfizmi vardır.

$$\begin{array}{ccc} A^+ & \xrightarrow{r(R)^\#} & \langle A|R \rangle = A^+/r(R) \\ s \downarrow & & \searrow \Psi \\ S & & \end{array}$$

İspat: S , R deki ilişkileri sağladığından her $(w, z) \in R$ için $s(w) = s(z)$ dir. Böylece $R \subseteq \ker s$ olup $\ker s$ bir kongrüans olduğundan $r(R) \subseteq \ker s$ olur. Böylece $y : A^+/r(R) \rightarrow S$ dönüşümü her $wr(R) \in A^+/r(R)$ için $(wr(R))y = ws$ şeklinde tanımlanarak istenilen homomorfizm elde edilir. (Ruskuc, 1995). <

$\langle A|R \rangle$ bir takdim ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. $a, b \in A^*, (u, v) \in R$ veya $(v, u) \in R$ için $w_1 \equiv aub$, $w_2 \equiv avb$ ise w_2 , R deki bir ilişki bir kez uygulanarak w_1 den elde edilmiştir denir. $w_1 \equiv w_2$ veya a_{i+1} , R deki bir ilişki bir kez uygulanarak a_i elde edilmiş olmak üzere kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow a_n \equiv w_2$$

dizisi varsa w_2 , w_1 den elde edilmiştir denir. Ayrıca $w_1 = w_2$, $\langle A|R \rangle$ nin veya sadece R nin bir sonucudur da denir.

Teorem 2.4.5: $\langle A|R \rangle$ bir takdim, r da R yi içeren en küçük kongrüans, $S = A^+/r$ ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. O zaman $w_1 r = w_2 r$ olması için gerek ve yeter koşul $w_1 = w_2$ nin $\langle A|R \rangle$ nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: İspatı için Ruskuc N. (1995)'e bakınız. <

Aslında $w_1 \equiv w_2$ nin anlamı w_2 ve w_1 kelime olarak özdeştir, $w_1 = w_2$ nin anlamı $w_1 r = w_2 r$ olmasıdır.

Önerme 2.4.6: $\langle A|R \rangle$ bir takdim, S bu takdim tarafından tanımlanan yarıgrup ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. O zaman S de $w_1 = w_2$ olması için gerek ve yeter koşul w_2 nin R deki ilişkiler kullanılarak w_1 den elde ediliyor olmasıdır.

İspat: İspatı için Ruskuc N. (1995)'e bakınız. <

Önerme 2.4.7: S bir A kümesi tarafından doğrulan bir yarıgrup ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. $\langle A|R \rangle$ nin, S için bir takdim olabilmesi için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

- i) S, R deki tüm ilişkileri sağlar ve
- ii) $u = v$ ilişkisi S de sağlanıyor olacak şekilde $u, v \in A^+$ herhangi iki kelime ise o zaman $u = v, R$ nin bir sonucudur.

İspat: İspatı için Ruskuc N., (1995)'e bakınız. <

Örnek 2.4.8: A^+ üzerinde boş kümeyi içeren en küçük kongrüans $\{(w, w) : w \in A^+\}$ kümesidir. Böylece $\langle A| \rangle$ takdimi ile tanımlanan yarıgrup A^+ serbest yarıgrubudur.

Teorem 2.4.9: $\langle A|R \rangle$ bir takdim ve S de bu takdim tarafından tanımlanan yarıgrup olsun. Bir B kümesi tarafından doğrulan herhangi bir T yarıgrubu ve örten bir dönüşüm $f : A \rightarrow B$ için f nin tek homomorfik genişlemesi olacak şekilde $\Phi : A^+ \rightarrow T$ tanımlansın. Her $(u, v) \in R$ için $\Phi(u) = \Phi(v)$ ise $\Psi : S \rightarrow T, s \in S$ için $\Psi(sr) = \Phi(s)$ olarak tanımlanan Ψ dönüşümü bir epimorfizmdir.

İspat: İspatı için Ruskuc N., (1995)'e bakınız. <

Önerme 2.4.10: S bir yarıgrup, A kümesi S için bir doğuray kümesi, $R \subseteq A^+ \times A^+$ ilişkilerin bir kümesi ve $W \subseteq A^+$ olsun. Eğer

- i) R deki tüm ilişkiler S de sağlanır;
- ii) $\forall w \in A^+$ kelimesi için $w = \bar{w}, R$ nin bir sonucu olacak şekilde bir $\bar{w} \in W$ kelimesi vardır;
- iii) $\forall u, v \in W$ ve $u \neq v$ olmak üzere o zaman S de $u \neq v$

ise $\langle A|R \rangle, S$ için bir takdimdir.

İspat: İspatı için Ruskuc N., (1995)'e bakınız.

<

Önerme 2.4.11: S bir sonlu yarıgrup A , S için bir doğuray kümesi, $R \subseteq A^+ \times A^+$ ilişkilerin bir kümesi ve $W \subseteq A^+$ olsun. Eğer

- I) R deki tüm ilişkileri S de sağlar;
- II) $\forall w \in A^+$ kelimesi için $w = \bar{w}$, R nin bir sonucu olacak şekilde bir $\bar{w} \in W$ kelimesi vardır;
- III) $|W| \leq |S|$

ise $\langle A|R \rangle$, S için bir takdimdir.

İspat: İspatı için Ruskuc N. (1995)'e bakınız.

<

$\langle A|R \rangle$ bir takdim ve S de bu takdim tarafından tanımlanan yarıgrup olsun. Bu takdimde A ve R sonlu ise $\langle A|R \rangle$ ye *sonlu takdim* ve S ye de *sonlu takdim edilebilir* denir.

Sonlu bir yarıgrup takdimi $\wp = \langle A|R \rangle$ için *noksanlığı* $|R| - |A|$ olarak tanımlanır ve $def(\wp)$ ile gösterilir. Sonlu takdimli bir S yarıgrubu için *yarıgrup noksanlığı* $def_S(S)$ ile gösterilir ve

$$def_S(S) = \min\{def(\wp) : \wp, S \text{ için bir sonlu yarıgrup takdimi}\}$$

olarak tanımlanır. Benzer şekilde grup ve monoid noksanlığı tanımlanır.

S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Her $(x_1, x_2) \in r$ için $j_i : r \rightarrow S$ dönüşümü $j_i(x_1, x_2) = x_i$ ($i=1,2$) olarak tanımlansın. O zaman, aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Tanım 2.4.12: r , bir S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve X de r için bir doğuray kümesi olsun. Her $(x, y) \in X$ için $(x, x), (y, y) \in X$ ise X e r için yansımali *doğuray kümesi* denir.

Önerme 2.4.13: X r nun bir doğuray kümesi ise $j_i(X)$ ($i=1,2$) kümesi de S nin bir doğuray kümesidir.

İspat: İspat için Ayık G., Ayık H. ve Ünlü Y. (2005a)'ya bakınız. <

Önerme 2.4.14: r bir S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r sonlu doğuraylı ise o zaman r nun bir sonlu yansımali doğuray kümesi vardır.

İspat: İspat için Ayık G., Ayık H. ve Ünlü Y. (2005a)'ya bakınız. <

$\langle X | R \rangle$ r nun bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer biz j_i yi X^+ dan $j_i(X)^+$ genişleterek, bir örten homomorfizm olarak alırsak, $w \equiv (x_1, y_2) \mathbf{L} (x_m, y_m) \in X^+$ için, $j_1(w) = x_1 \mathbf{L} x_m$ ve $j_2(w) = y_1 \mathbf{L} y_m$ olur. O zaman,

$$X_i = j_i(X) \text{ ve } R_i = j_i(R) = \{(j_i(r), j_i(s)) : (r, s) \in R\} \quad (i=1,2)$$

aldığımızda aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Önerme 2.4.15: X r nun bir yansımali doğuray kümesi $\langle X | R \rangle$ de r nun bir takdimi olsun. O zaman yukarıdaki gösterimlerle $\langle X_i | R_i \rangle$ ($i=1,2$) S nin bir takdimidir.

İspat: İspat için Ayık G., Ayık H. ve Ünlü Y. (2005a)'ya bakınız. <

Teorem 2.4.16: S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r sonlu takdim edilebilir ise S ve S/r da sonlu takdim edilebilirdir.

İspat: İspat için Ayık G., Ayık H. ve Ünlü Y. (2005a)'ya bakınız. <

Teorem 2.4.17 : (Nielsen-Schreier Teorem) : F bir serbest grup ve H de F nin bir alt grubu olsun. O zaman H serbesttir. Ayrıca H nin F deki indeksi $[F : H] = m$ ve F nin rankı $r(F) = n$ her ikisi de sonlu olmak üzere,

$$r(H) = m(n-1) + 1$$

dır.

İspat: İspat için Johnson D.L. (1995)'e bakınız. <

Sonuç 2.4.18: H bir G grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olsun. Eğer G sonlu takdim edilebilir ise H da sonlu takdim edilebilirdir.

İspat: İspat için Johnson D.L. (1995)'e bakınız. <

2.5. Tietze Dönüşümleri

Tietze dönüşümleri genellikle, tanımladığı yarıgrubu değiştirmeksizin bir takdimden bir başka takdim bulmak için kullanılır. Bir $\wp = \langle A | R \rangle$ takdimi ile başlayıp yeni bir $\wp' = \langle A' | R' \rangle$ takdimini aşağıdaki yollardan biri ile inşa edeceğiz.

(T1) Bir doğuray eklemek. $b \notin A$ ve $w \in A^+$ alalım. $A' = A \cup \{b\}$ ve $R' = R \cup \{b = w\}$ olarak tanımlayalım.

(T2) Bir doğuray çıkartmak. $b \in A$ ve $w \in (An\{b\})^+$ olmak üzere eğer $b = w$ eşitliği R nin bir sonucu ise $A' = An\{b\}$ ve R' de R den R de ki tüm ilişkilerde b yerine w yazılarak elde edilir.

(T3) Bir ilişki eklemek. $u = v$, R nin bir sonucu olan herhangi bir ilişki olsun. O zaman $A' = A$ ve $R' = R \cup \{u = v\}$ olarak tanımlanır.

(T4) Bir ilişki çıkarmak. $(u, v) \in R$, $Rn\{(u, v)\}$ bir sonucu ise $A' = A$ ve $R' = Rn\{(u, v)\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.5.1: A , B , R ve Q sonlu olmak üzere iki $\langle A|R \rangle$ ve $\langle B|Q \rangle$ takdimlerinin izomorfik yarıgrupları tanımlaması için gerek ve yeter koşul $\langle B|Q \rangle$ nun Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisinin uygulanmasıyla $\langle A|R \rangle$ den elde ediliyor olmasıdır.

İspat: İspatı için Ruskuc N. (1995)'e bakınız. <

A bir alfabe, R de $A^* \times A^*$ nin bir alt kümesi olmak üzere bir monoid takdimi $\langle A|R \rangle$ ikilisidir. $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan monoid, $\bar{R}$, R deki boş kelime yerine e yazılarak elde edilmek üzere

$$\langle A, e | \bar{R}, e^2 = e, ae = ea = a (a \in A) \rangle$$

tarafından tanımlanan yarıgruptur.

Dikkat edilecek olursa her yarıgrup takdimi aynı zamanda bir monoid takdimidir. Eğer S , $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan yarıgrup ve M de aynı takdim tarafından tanımlanan monoid ise M basitçe yeni bir birim eklenmiş S dir. Eğer S

birim elemana sahip ise bu eleman yeni eklenen birim eleman üzerinde birim gibi davranamayacaktır. Böylece $|M| = |S| + 1$ dir.

Bir grup takdimi $\langle A|R \rangle$ nin tanımlanan grup aslında $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ olmak üzere monoid takdimi

$$\langle A, A^{-1} | R, aa^{-1} = a^{-1}a = e \ (a \in A) \rangle$$

tarafından tanımlanan monoiddir. Eğer A üzerindeki serbest grup F ise F nin monoid takdimi

$$\langle A, A^{-1} | aa^{-1} = e, a^{-1}a = e \ (a \in A) \rangle$$

olup, serbest gruplar serbest monoid değildir.

Önerme 2.5.2: Eğer $\langle A|R \rangle$ yarıgrup takdimi tarafından tanımlanan S yarıgrubu bir grup ise o zaman $\langle A|R \rangle$ tarafından tanımlanan G grubu S ye izomorfiktir.

İspat: $\Phi : S \rightarrow G$ homomorfizmini her $a \in S$ için $a\Phi = a$ olacak şekilde tanımlayalım. Eğer $e \in S$ birim eleman ve Φ bir homomorfizm olduğundan $e\Phi \in G$ bir idempotent olur. Gruplarda bir tek idempotent (birim eleman) olduğundan, eğer G nin birim elemanı 1 ise $e\Phi = 1$ olur. Ayrıca S bir grup olduğundan her bir $a \in S$ nin bir tersi vardır; bunu $a' \in S$ ile gösterelim. O zaman $a' \in A^+$ olduğundan $a'\Phi = a' \in G$ olur. Dolayısıyla $(aa')\Phi = (aa') \in G$ olup $aa' = 1$ olur. Eğer $u \equiv a_1 \text{ L } a_n \in S \ (a_1, \mathbf{K}, a_n \in A)$ ise

$$\begin{aligned}
ua'_n \mathbf{L} a'_1 &\equiv a_1 \mathbf{L} a_{n-1} (a_n a'_n) a'_{n-1} \mathbf{L} a'_1 \\
&= a_1 \mathbf{L} a_{n-2} (a_{n-1} e) a'_{n-1} \mathbf{L} a'_1 \\
&= a_1 \mathbf{L} a_{n-2} a_{n-1} a'_{n-1} \mathbf{L} a'_1 = \mathbf{L} = e
\end{aligned}$$

olup $u' \equiv a'_n \mathbf{L} a'_1 \in A^+$, u nun bir tersidir. Benzer şekilde gösterilir ki $u'\Phi = u' \in G$ de u nun G deki tersidir. O halde $u, v \in S$ için

$$u\Phi = v\Phi \Rightarrow (u\Phi)v' = (v\Phi)v' \Rightarrow uv' = 1 \Rightarrow u = v$$

olur, yani Φ bire-birdir. Ayrıca G nin bir yarıgrup olarak doğuray kümesi $A \cup \{a' : a \in A\} \subseteq S$ olduğundan Φ örtendir. <

2.6. Yarıgruplar İçin Sonluluk Koşulları

P yarıgrupların bir özelliği olsun. Her sonlu yarıgrup, P özelliğine sahip ise P ye bir *sonluluk koşulu* denir. Örneğin her sonlu yarıgrup sonlu doğrulduğundan, sonlu doğrulma bir sonluluk koşuludur.

Sonlu bir S yarıgrubu için doğuray kümesi olarak S yarıgrubunun kendisini ve ilişkiler olarak da S yarıgrubunun çarpım tablosunu (Cayley Tablosu) alırsak S nin sonlu takdim edilebildiği görülür. Bu yüzden sonlu takdim edilebilirlik de bir sonluluk koşuludur.

S bir yarıgrup olsun. $a \in S$ nin doğurduğu $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ alt yarıgrubu göz önünde bulunduralım. $\{a, a^2, a^3, \dots\}$ listesinde bir tekrar var ise $a^m = a^n$ olacak şekilde m, n farklı pozitif tamsayıları vardır. Bu durumda $\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \dots\}$ monojenik altarıgrup sonludur. Eğer bir S yarıgrubun her monojenik alt yarıgrubu sonlu ise S ye *periyodik yarıgrup* denir. Sonlu yarıgruplar periyodik olduğundan *periyodik olmak* da bir sonluluk koşuludur.

A sonsuz bir küme olsun. A üzerindeki serbest yarılatış SL_A yalnızca idempotentleri içerdiğinden SL_A periyodiktir. Sıfır yarıgruplar ve dikdörtgen bandlar periyodiktirler, fakat sonlu olmayabilir.

P yarıgrupların bir sınıfı olsun. S yarı grubunun sonlu doğuraylı her alt yarı grubu P ye ait ise S yarı grubuna *yerel* P denir. Her sonlu yarı grup yerel sonlu olup *yerel sonluluk* ta bir sonluluk koş uludur. Her sonlu yarı grup yerel sonlu takdimli olup *yerel sonlu takdim edilebilirlik* de bir sonluluk koş uludur. Dikkat edilecek olursa sonlu yarı gruplar sonlu takdimli olup yerel sonlu yarı gruplar yerel sonlu takdimlidir.

Her $s \neq t \in S$ için $f(s) \neq f(t)$ olacak şekilde S yarı grubundan herhangi bir sonlu T yarı grubuna tanımlı bir örten $f: S \rightarrow T$ homomorfizmi var ise S ye *residual sonlu* yarı grup denir. Sonlu bir S yarı grubu için S den kendisine tanımlanan birim homomorfizmini dikkate alırsak her sonlu yarı grubun residual sonlu oldu ğ u gör ü lür. Bunun için *residual sonluluk* bir sonluluk koş uludur.

Teorem 2.6.1: S yarı grubunun residual sonlu olabilmesi için gerek ve yeter koş ul herhangi farklı iki $s, t \in S$ ($s \neq t$) için S üzerinde $(s, t) \notin r$ olacak şekilde (yani s ve t aynı denklik sınıfında olmayacak şekilde) sonlu sayıda denklik sınıfı olan bir r kongrüansının olmasıdır.

İspat: İspat için Ayık H. (1998)'e bakınız.

<

S sonlu doğuraylı bir yarı grup ve A kümesi de S nin sonlu bir doğuray kümesi olsun. Eğer her $u, v \in A^+$ için $u = v$ bağıntısının S de sağlanıp sağlanmadığı na sonlu adımda karar verebilen bir algoritma var ise S yarı grubuna, A doğuray kümesine göre *çözülebilir kelime problemine sahiptir* denir. Her sonlu yarı grup çözülebilir kelime problemine sahip olduğ undan Baumslag G., (1993) çözülebilir kelime problemine sahip olmak bir sonluluk koş uludur. Tietze Dönüşümleri kullanarak kolayca gösterilir ki eğer S sonlu bir doğuray kümesine göre çözülebilir kelime problemine sahip ise S herhangi bir sonlu doğuray

kümesine göre de çözülebilir kelime problemine sahiptir. Böylece sonlu doğuraylı yarıgruplar da çözülebilir kelime problemi sonlu doğuray kümesine bağlı değildir. Bu yüzden, eğer bir sonlu doğuraylı S yarıgrubu herhangi sonlu bir doğuray kümesine göre çözülebilir kelime problemine sahip ise biz S ye sadece *çözülebilir kelime problemine sahiptir* diyeceğiz.

S bir yarıgrup ve T de S nin bir alt yarıgrubu olsun. $S \setminus T$ nin kardinalitesine T nin S deki *indeksi* denir ve $[S:T]$ ile gösterilir. Eğer T nin S deki indeksi sonlu ise S ye T nin bir *küçük genişlemesi* denir.

Teorem 2.6.2: S bir yarıgrup ve T de S nin S deki indeksi sonlu olan bir alt yarıgrubu olsun. O zaman,

- i) S nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul T nin sonlu doğuraylı olmasıdır.
- ii) S nin periyodik olması için gerek ve yeter koşul T nin periyodik olmasıdır.
- iii) S nin yerel sonlu olması için gerek ve yeter koşul T nin yerel sonlu olmasıdır.
- iv) S nin yerel sonlu takdim edilebilir olması için gerek ve yeter koşul T nin yerel sonlu takdim edilebilir olmasıdır.
- v) S nin residual sonlu olması için gerek ve yeter koşul T nin residual sonlu olmasıdır.
- vi) Eğer S sonlu doğuraylıysa, S nin çözülebilir kelime problemine sahip olması için gerek ve yeter koşul T nin çözülebilir kelime problemine sahip olmasıdır.

İspat: Yukarda ki teoremin i) durumu, ilk kez Jura tarafından gösterildi (Jura A., 1978). Ayrıca Ruskuc N. (1998)'de ispatladı. iv) durumu Ruskuc N. ve Thomas R. M. (1998)'de ve diğerleri ise Ruskuc N., (1998) de ispatlandı. <

2.7. Yarıgrupların Güçlü Yarılatisi

Yarıgrup yapılarından birisi de tamamen düzgün yarıgruplar için önemli bir yapı olan yarıgrupların güçlü yarılatisidir.

I bir yarılatis, S_i ($i \in I$) ayrık yarıgrupların bir ailesi olsun. Herhangi iki $i, j \in I$, $i \leq j$ için ($i \leq j \Leftrightarrow ij = i$) bir $f_{j,i} : S_j \rightarrow S_i$ ($j \geq i$) homomorfizmi olduğunu ve bu homomorfizmlerin aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim;

1. Her $i \in I$ için, $f_{i,i}$ birim dönüşüm 1_{S_i} ,
2. Her $i, j, k \in I$ için $i \leq j \leq k$ olmak üzere $f_{k,j} f_{j,i} = f_{k,i}$.

S_i yarıgruplarının elemanları ve $f_{j,i}$ homomorfizmleri yardımıyla, $S = \bigcup_{i \in I} S_i$

üzerindeki çarpma işlemi her $x \in S_i$ ve $y \in S_j$ için,

$$xy = (xf_{i,ij})(yf_{j,ij})$$

şeklinde tanımlansın. Bu çarpma işlemi ile S bir yarıgruptur. Bu yarıgruba *yarıgrupların güçlü yarılatisi* denir ve $S[I; S_i, f_{j,i}]$ ile gösterilir. Daha detaylı bilgi için Howie J.M. (1995)'e bakınız.

Teorem 2.7.1: $S[I; S_i, f_{j,i}]$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisi ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere $P_i = \langle A_i | R_i \rangle$, S_i ($i \in I$) yarıgrupları için takdimler olsun. $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ olmak üzere

$$P = \langle A | R, a_i a_j = (a_i f_{i,ij})(a_j f_{j,ij}) \ (a_i \in A_i, a_j \in A_j) \ i \neq j \rangle$$

$S[I; S_i, f_{j,i}]$ için bir takdimdir.

İspat: İspat için Ayık G., Ayık H. ve Ünlü Y. (2005a)'ya bakınız.

<

3. S , r ve S/r İÇİN SONLULUK KOŞULLARI

S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Bu bölümde, sonluluk koşullarından; periyodiklik, yerel sonluluk, residual sonluluk, kelime probleminin çözülebilirliği ve yerel sonlu takdim edilebilirlik gibi koşulların S , r ve S/r yarıgruplarının birinde sağlanması durumunda diğerlerinde sağlanıp sağlanmadığı incelenecektir.

3.1. Periyodiklik

Önerme 3.1.1: S bir yarıgrup, r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer S periyodik ise S/r da periyodiktir.

İspat: S periyodik bir yarıgrup ve $sr \in S/r$ olsun. O zaman $s \in S$ ve S periyodik olduğundan $s^{m+r} = s^m$ olacak şekilde m, r pozitif tamsayıları vardır. Böylece

$$(sr)^{m+r} = (s^{m+r})r = (s^m)r = (sr)^m$$

olduğunda S/r da periyodik olur. <

Bu önermenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $S = \langle a \rangle$ sonsuz monojenik yarıgrupunu (aslında bu yarıgrup $(\mathbb{Z}^+, +)$ yarıgrupuna izomorfiktir) ve r da S üzerinde tanımlı $\{(a, a^2)\}$ yi içeren en küçük kongrüans olsun. O zaman $(a^m, a^n) \in S \times S$ için $m < n$ ise

$$(a^m, a^m) \xrightarrow{(a, a^2)} (a^m, a^{m+1}) \xrightarrow{(a, a^2)} \mathbf{L} \xrightarrow{(a, a^2)} (a^m, a^{n-1}) \xrightarrow{(a, a^2)} (a^m, a^n)$$

olduğundan $(a^m, a^n) \in r$ dir. Benzer şekilde $m > n$ için de $(a^m, a^n) \in r$ olur. Son olarak r yansımali elemanları da içereceğinden $r = S \times S$ olup, S/r sadece bir tek elemandan oluşan yani sonlu bir yarıgrup olup, periyodiktir. Fakat açıkça görülür ki S periyodik değildir.

S bir yarıgrup ve herhangi bir $s \in S$ için $s^{m+r} = s^m$ olacak şekilde m, r pozitif tamsayıları mevcut olsun. O zaman, her $k \in \mathbf{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} s^{m+kr} &= s^{m+r} s^{(k-1)r} = s^m s^{(k-1)r} \\ &= s^{m+r} s^{(k-2)r} = \mathbf{L} = s^{m+r} = s^m \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.1.2: S bir yarıgrup, r da S üzerinde herhangi bir kongrüans olsun. S yarıgrupunun periyodik olabilmesi için gerek ve yeter koşul r nun periyodik olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ S periyodik ve $(s, t) \in r$ olsun. O zaman $s, t \in S$ ve S de periyodik olduğundan

$$s^{m_1+r_1} = s^{m_1} \text{ ve } t^{m_2+r_2} = t^{m_2}$$

olacak şekilde m_1, m_2, r_1, r_2 pozitif tamsayıları vardır. Şimdi biz $(s, t)^{m+r} = (s, t)^m$ olacak şekilde m, r tamsayılarının varlığını göstermeliyiz.

Bunun için $m = \max\{m_1, m_2\}$ ve $r = [r_1, r_2]$ yani r , r_1 ile r_2 nin en küçük ortak katı olarak alalım. Genelliği bozmaksızın $m_1 \leq m_2$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$m_2 = m_1 + n$ olacak şekilde bir n negatif olmayan tamsayısı vardır. r , r_1 ile r_2 nin en küçük ortak katı olduğundan $r = r_1 k_1$ ve $r = r_2 k_2$ olacak şekilde k_1, k_2 pozitif tamsayıları vardır. Bu durumda $m = m_2$ olup,

$$\begin{aligned} (s, t)^{m+r} &= (s^{m+r}, t^{m+r}) = (s^{m_2+r}, t^{m_2+r}) \\ &= (s^{m_1+n+r}, t^{m_2+r}) = (s^{m_1+r} s^n, t^{m_2+r}) \\ &= (s^{m_1+r_1 k_1} s^n, t^{m_2+r_2 k_2}) = (s^{m_1} s^n, t^{m_2}) \\ &= (s^{m_1+n}, t^{m_2}) = (s^{m_2}, t^{m_2}) = (s, t)^{m_2} \\ &= (s, t)^m \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece r nun da periyodik olduğu gösterilmiş olur.

($\Leftarrow$) r periyodik olsun. Bir $s \in S$ alalım. r , S üzerinde bir kongrüans (dolayısıyla yansılmalı) olduğundan $(s, s) \in r$ dir. Ayrıca r periyodik olduğundan $(s, s)^{m+r} = (s, s)^m$ olacak şekilde m, r pozitif tamsayıları vardır. Buradan;

$$\begin{aligned} (s, s)^{m+r} = (s, s)^m &\Leftrightarrow (s^{m+r}, s^{m+r}) = (s^m, s^m) \\ &\Leftrightarrow s^{m+r} = s^m \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece S de periyodiktir. <

Böylece yukarıdaki önerme ve teoremden dolayı aşağıdaki sonuca sahibiz:

Sonuç 3.1.3: S bir yarıgrup, r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r periyodik ise S/r bölüm yarıgrubu da periyodiktir. <

3.2. Yerel Sonluluk

Önerme 3.2.1: S bir yarıgrup, r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer S yerel sonlu ise S/r bölüm yarıgrubu da yerel sonludur.

İspat: S yerel sonlu ve $U = \{v_1 r, \mathbf{K}, v_n r\}$ kümesi de S/r nun sonlu bir alt kümesi olsun. O zaman $V = \{v_1, \mathbf{K}, v_n\} \subseteq S$ sonlu ve S yerel sonlu olduğundan $\langle V \rangle$ alt yarıgrubu sonludur.

$u \in \langle U \rangle$ alalım. O zaman $u = v_{i_1} r \dots v_{i_k} r$ olacak şekilde $v_{i_1}, \dots, v_{i_k} \in V$ vardır. Ayrıca S/r üzerinde tanımlı çarpmadan dolayı $u = (v_{i_1} \mathbf{L} v_{i_k}) r$ yazabiliriz. Eğer biz $v = v_{i_1} \mathbf{L} v_{i_k}$ alırsak, böylece, her $u \in \langle U \rangle$ için $u = vr$ olacak şekilde bir $v \in \langle V \rangle$ vardır. Böylece $\langle U \rangle \subseteq \{vr : v \in \langle V \rangle\}$ olup,

$$|\{vr : v \in \langle V \rangle\}| \leq |\langle V \rangle|$$

olduğundan $\langle U \rangle$ sonlu olur. O halde S/r de yerel sonlu olur. <

Bu önermenin tersi de her zaman doğru değildir. Yine $S = \langle a \rangle$ sonsuz monojenik yarıgrup ve $n \in \mathbf{Z}^+$ olmak üzere r yu da S nin $\{(a, a^{n+1})\}$ bağıntısını içeren en küçük kongrüans olarak alalım. O zaman $S/r \cong (\mathbf{Z}_n, +)$ olup, S/r sonlu dolayısıyla yerel sonludur. Fakat, açıkça görülüyor ki, S yerel sonlu değildir.

Teorem 3.2.2: S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. r nun yerel sonlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul S nin yerel sonlu olmasıdır.

İspat: $(\Leftarrow)$ S yerel sonlu olsun. $s = \{(a_1, b_1), \mathbf{K}, (a_n, b_n)\}$ kümesi r nun herhangi sonlu bir alt kümesi olsun. Bu durumda $A = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ ve $B = \{b_1, \mathbf{K}, b_n\}$ sonlu kümelerini ele alalım. $A, B \subseteq S$ ve S de yerel sonlu olduğundan $\langle A \rangle$ ve $\langle B \rangle$ alt yarıgrupları sonlu olacağından $\langle A \rangle \times \langle B \rangle$ direk çarpım yarıgrubu da sonludur. O halde $\langle s \rangle \subseteq \langle A \rangle \times \langle B \rangle$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Şimdi $u \equiv (a_{i_1}, b_{i_1}) \mathbf{L} (a_{i_k}, b_{i_k}) \in \langle s \rangle$ olsun. O zaman $a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_k} \in A$ ve $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \in B$ olup, $x \equiv a_{i_1} \mathbf{L} a_{i_k} \in \langle A \rangle$ ve $y \equiv b_{i_1} \mathbf{L} b_{i_k} \in \langle B \rangle$ olur. Ayrıca $u = (x, y)$ bağıntısı $\langle s \rangle$ yarı grubunda sağlandığından $(x, y) \in \langle A \rangle \times \langle B \rangle$ olduğundan istenilen gösterilmiş olur. Böylece r yarı grubu da yerel sonludur.

$(\Rightarrow)$ r yerel sonlu olsun. $A = \{a_1, \mathbf{K}, a_n\}$ kümesi S yarı grubunun sonlu bir alt kümesi olsun. $B = \{(a_i, a_i) \mid 1 \leq i \leq n\}$ olarak alalım. O zaman r yansımali elemanların tümünü içerdiğinden $B \subseteq r$ olur. Ayrıca r yerel sonlu olduğundan $\langle B \rangle$ sonlu bir yarı grup olup,

$$\begin{aligned} |\langle B \rangle| &= \left| \{(a_{i_1}, a_{i_1}) \mathbf{L} (a_{i_k}, a_{i_k}) : k \in \mathbb{Z}^+ \text{ ve } a_{i_1}, \mathbf{K}, a_{i_k} \in A\} \right| \\ &= \left| \{(a_{i_1} \mathbf{L} a_{i_k}, a_{i_1} \mathbf{L} a_{i_k}) : a_{i_1} \mathbf{L} a_{i_k} \in \langle A \rangle\} \right| \\ &= |\langle A \rangle| \end{aligned}$$

olur. Yani $\langle A \rangle$ sonludur, dolayısıyla S yarı grubu yerel sonlu olur. <

Ayrıca yukarıdaki önerme ve teoremden dolayı ispat gerektirmeyen aşağıdaki sonuca sahibiz:

Sonuç 3.2.3: S bir yarı grup, r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r yerel sonlu ise S/r bölüm yarı grubu da yerel sonludur. <

3.3. Residual Sonluluk

Önerme 3.3.1: S ve T iki yarıgrup, r da S üzerinde bir kongrüans ve $f: S \rightarrow T$ örten bir homomorfizm olsun. O zaman

$$r' = \{(f(s), f(t)) : (s, t) \in r\}$$

bağıntısı T üzerinde bir kongrüansdır. Ayrıca her $sr \in S/r$ için

$$f'(sr) = (f(s))r'$$

şeklinde tanımlanan $f': S/r \rightarrow T/r'$ dönüşümü de bir örten homomorfizmdir.

İspat: Açıkça görülür ki r yansımali ve f örten olduğundan r' de yansımali. Ayrıca, r simetrik ve geçişmeli olduğundan r' nün de simetrik ve geçişmeli olduğu açıktır. Dolayısıyla r' bir denklik bağıntısıdır. Son olarak r bir kongrüans olduğundan her $(f(s_1), f(t_1)), (f(s_2), f(t_2)) \in r'$ için

$$(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in r \Rightarrow (s_1 s_2, t_1 t_2) \in r \Rightarrow (f(s_1 s_2), f(t_1 t_2)) \in r'$$

dir. Ayrıca f bir homomorfizm olduğundan

$$\begin{aligned} (f(s_1), f(t_1))(f(s_2), f(t_2)) &= (f(s_1)f(s_2), f(t_1)f(t_2)) \\ &= (f(s_1 s_2), f(t_1 t_2)) \in r' \end{aligned}$$

olur. Böylece r' de T üzerinde bir kongrüans olur.

Şimdi $s_1 r, s_2 r \in S/r$ olsun. Eğer

$$\begin{aligned} s_1 r = s_2 r &\Rightarrow (s_1, s_2) \in r \Rightarrow (f(s_1), f(s_2)) \in r' \\ &\Rightarrow (f(s_1)) r' = (f(s_2)) r' \end{aligned}$$

olup, f' iyi tanımlıdır. Ayrıca, f' nin tanımından açıkça görüleceği gibi f' örten bir dönüşümdür. Son olarak, her $s_1 r, s_2 r \in S/r$ için

$$\begin{aligned} f'((s_1 r)(s_2 r)) &= f'((s_1 s_2) r) = (f(s_1 s_2)) r' \\ &= (f(s_1) f(s_2)) r' = (f(s_1)) r' (f(s_2)) r' \\ &= f'(s_1 r) f'(s_2 r) \end{aligned}$$

olduğundan, f' örten bir homomorfizmdir. <

Önerme 3.3.2: S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. S residual sonlu ise S/r da residual sonludur.

İspat: S residual sonlu, $s_1 r, s_2 r \in S/r$ ve $s_1 r \neq s_2 r$ olsun. O zaman $s_1 r \neq s_2 r$ olduğundan $(s_1, s_2) \notin r$ olup, ve ayrıca r yansımali elemanları içereceğinden $s_1 \neq s_2$ olur. Böylece S de residual sonlu olduğundan $f(s_1) \neq f(s_2)$ olacak şekilde S den sonlu bir T yarıgrupuna tanımlı bir örten $f: S \rightarrow T$ homomorfizmi vardır. Şimdi r' kongrüansını ve $f': S/r \rightarrow T/r'$ homomorfizmini yukarıdaki önermede olduğu gibi tanımlayalım. Yukardaki önermede gösterildiği üzere $f: S \rightarrow T$ örten olduğundan $f': S/r \rightarrow T/r'$ de örtendir. Ayrıca $(s_1, s_2) \notin r$ olduğundan $(f(s_1), f(s_2)) \notin r'$ olup

$$f(s_1) r' \neq f(s_2) r'$$

olur, ve dolayısıyla

$$f'(s_1 r) = f(s_1) r' \neq f(s_2) r' = f'(s_2 r)$$

olur. Böylece S/r de residual sonludur. <

Yukarıdaki önermenin tersi de her zaman doğru değildir. Örneğin; S yi residual sonlu olmayan herhangi bir yarıgrup ve $r = S \times S$ alınırsa, S/r (sadece bir elemandan oluşan) sonlu bir yarıgrup olup, residual sonludur.

Teorem 3.3.3: S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin residual sonlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul r nun residual sonlu olmasıdır.

İspat : $(\Rightarrow)$ S residual sonlu olsun. Eğer $(s_1, t_1) \neq (s_2, t_2) \in r$ ise o zaman $s_1 \neq s_2$ veya $t_1 \neq t_2$ dir. r simetrik olduğundan genelliği bozmaksızın $s_1 \neq s_2$ kabul edelim. S residual sonlu olduğundan öyle bir sonlu T yarıgrubu ve $f: S \rightarrow T$ örten homomorfizmi vardır ki $f(s_1) \neq f(s_2)$ dir. Şimdi T yarıgrubu üzerinde r' kongrüansı Önerme 3.3.1'deki gibi tanımlanmak üzere $f': r \rightarrow r'$ dönüşümünü her $(s, t) \in r$ için $f'(s, t) = (f(s), f(t))$ olarak tanımlayalım. Önce, tanımlanan bu f' dönüşümünün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r$ ve $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ olsun. O zaman $x_1 = x_2$ ve $y_1 = y_2$ olup, $f(x_1) = f(x_2)$ ve $f(y_1) = f(y_2)$ olur. Dolayısıyla

$$f'((x_1, y_1)) = (f(x_1), f(y_1)) = (f(x_2), f(y_2)) = f'((x_2, y_2))$$

olduğundan f' dönüşümü iyi tanımlıdır.

Şimdi de f' dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu gösterelim. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in r$ olsun. O zaman, sırasıyla, r bir kongrüans, f' dönüşümünün tanımından, f de bir homomorfizm olduğundan ve Önerme 3.3.1'de tanımlan r' nün bir kongrüans oluşundan

$$\begin{aligned} f'((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= f'(x_1 x_2, y_1 y_2) \\ &= (f(x_1 x_2), f(y_1 y_2)) \\ &= (f(x_1) f(x_2), f(y_1) f(y_2)) \\ &= (f(x_1), f(y_1))(f(x_2), f(y_2)) \\ &= f'(x_1, y_1) f'(x_2, y_2) \end{aligned}$$

olur. Böylece f' dönüşümü de bir homomorfizmdir. Ayrıca f' nün tanımından kolayca görülür ki f' örten bir homomorfizmdir, ve ayrıca $f(s_1) \neq f(s_2)$ olduğundan

$$f'(s_1, t_1) = (f(s_1), f(t_1)) \neq (f(s_2), f(t_2)) = f'(s_2, t_2)$$

olup, r da residual sonludur.

($\Leftarrow$) r residual sonlu ve $s_1 \neq s_2 \in S$ olsun. O zaman, r yansımali olduğundan $(s_1, s_1), (s_2, s_2) \in r$ olup, $(s_1, s_1) \neq (s_2, s_2)$ olur. Ayrıca r residual sonlu olduğundan $j(s_1, s_1) \neq j(s_2, s_2)$ olacak şekilde r dan sonlu bir T yarıgrubuna tanımlı bir örten j homomorfizmi vardır. S nin residual sonlu olduğunu göstermek için $j': S \rightarrow T$ dönüşümünü, her $s \in S$ için, $j'(s) = j(s, s)$ olarak tanımlayalım. Açıkça görülüyor ki $j': S \rightarrow T$ iyi tanımlı olup, her $s, t \in S$ için, r bir kongrüans ve j de homomorfizm olduğundan

$$\begin{aligned}
j'(st) &= j((st, st)) = j((s, s)(t, t)) \\
&= j((s, s))j((t, t)) \\
&= j'(s)j'(t)
\end{aligned}$$

olur. O halde j' de bir homomorfizmdir. Ayrıca, $\text{im}(j') = \{j'(s) : s \in S\}$, T nin bir alt yarıgrubu olup, $j' : S \rightarrow \text{im}(j')$ bir örten homomorfizmdir. Son olarak $s_1 \neq s_2 \in S$ ise,

$$j'(s_1) = j(s_1, s_1) \neq j(s_2, s_2) = j(s_2)$$

olduğundan S residual sonludur. <

Yukarıdaki önerme ve teoremlerden dolayı ispat gerektirmeyen aşağıdaki sonuca sahibiz:

Sonuç 3.3.4: S bir yarıgrup, r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r residual sonlu ise S/r bölüm yarıgrubu da residual sonludur. <

3.4. Kelime Problemi

Teorem 3.4.1: S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Ayrıca r bir yarıgrup olarak sonlu doğuraylı olsun. O zaman r nun çözülebilir kelime problemine sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul S nin çözülebilir kelime problemine sahip olmasıdır.

İspat: r bir yarıgrup olarak sonlu doğuraylı olsun. O zaman Önerme 2.4.13 den S de sonlu doğuraylıdır.

($\Leftarrow$) S çözülebilir kelime problemine sahip ve X de r nun bir sonlu doğuray kümesi olsun. $X_1 = \{x : (x, y) \in X\}$ ve $X_2 = \{y : (x, y) \in X\}$ alınırsa, Önerme 2.4.13'den her bir $i = 1, 2$ için X_i kümesi S nin sonlu bir doğuray kümesidir.

Şimdi

$$(x_{11}, y_{11}), \mathbf{K}, (x_{1m}, y_{1m}) \in X \text{ ve } (x_{21}, y_{21}), \mathbf{K}, (x_{2n}, y_{2n}) \in X$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} w_1 &\equiv (x_{11}, y_{11})(x_{12}, y_{12}) \mathbf{L} (x_{1m}, y_{1m}) \text{ ve} \\ w_2 &\equiv (x_{21}, y_{21})(x_{22}, y_{22}) \mathbf{L} (x_{2m}, y_{2m}) \end{aligned}$$

olsun. Kabul edelim ki

$$w_1 = w_2$$

eşitliği r da sağlansın. O zaman

$$\begin{aligned} u_1 &\equiv x_{11}x_{12} \mathbf{L} x_{1m}, & v_1 &\equiv y_{11}y_{12} \mathbf{L} y_{1m} \\ u_2 &\equiv x_{21}x_{22} \mathbf{L} x_{2n}, & v_2 &\equiv y_{21}y_{22} \mathbf{L} y_{2n} \end{aligned}$$

olmak üzere r , S üzerinde bir kongrüans olduğundan $w_1 = w_2$ eşitliğinin r da sağlanması için gerek ve yeter koşul $u_1 = u_2$ ve $v_1 = v_2$ eşitliklerinin S de sağlanmasıdır. Ayrıca, S çözülebilir kelime problemine sahip olduğundan S her bir $i=1,2$ için sonlu doğuray kümeleri X_i 'ler üzerinde de çözülebilir kelime problemine sahiptir. O halde S , X_1 ve X_2 üzerinde çözülebilir kelime problemine sahip olduğundan, sırasıyla $u_1 = u_2$ ve $v_1 = v_2$ eşitliklerinin S de sonlu adımda sağlanıp sağlanmadığına karar verebileceğimiz algoritmalar vardır. Dolayısıyla, bu algoritmalarla yaralanarak

$$w_1 = (u_1, v_1) = (u_2, v_2) = w_2$$

eşitliğinin r da sonlu adımda sağlanıp sağlanmadığına karar verebiliriz. O halde r da çözülebilir kelime problemine sahiptir.

($\Rightarrow$) r bir yarıgrup olarak sonlu doğuraylı ise S de sonlu doğuraylıdır ve Önerme 2.4.14'den dolayı r nun yansımali bir sonlu doğuray kümesi vardır.

r çözülebilir kelime problemine sahip ve X de r nun yansımali sonlu bir doğuray kümesi olsun. Benzer şekilde Önerme 2.4.13'den

$$X_1 = \{x : (x, y) \in X\}$$

kümesi S nin bir sonlu doğuray kümesidir. Herhangi $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_m, y_1, y_2, \mathbf{K}, y_n \in X_1$ için

$$u \equiv x_1 x_2 \mathbf{L} x_m \in X_1^+ \text{ ve } v \equiv y_1 y_2 \mathbf{L} y_n \in X_1^+$$

olsun.

$$u = v$$

bağıntısının S de sağlandığını kabul edelim. O zaman X yansımali doğuray kümesi olduğundan,

$$(x_1, x_1), (x_2, x_2), \mathbf{K}, (x_m, x_m), (y_1, y_1), (y_2, y_2), \mathbf{K}, (y_n, y_n) \in X$$

olup,

$$\begin{aligned} w_1 &\equiv (x_1, x_1)(x_2, x_2) \mathbf{L} (x_m, x_m) \\ w_2 &\equiv (y_1, y_1)(y_2, y_2) \mathbf{L} (y_n, y_n) \end{aligned}$$

alınırsa, $w_1 = w_2$ bağıntısı r da sağlanır. Ayrıca, r da X üzerinde çözülebilir kelime problemine sahip olduğundan

$$w_1 = w_2$$

eşitliğinin r da sonlu adımda sağlanıp sağlanmadığına karar verebilen bir algoritma vardır. O halde $w_1 = w_2$ eşitliğinin r da sağlanması için gerek ve yeter koşul $u = v$ eşitliğinin S de sağlanması olduğundan bu algoritma sayesinde sonlu adımda $u = v$ eşitliğinin S de sağlanıp sağlanmadığına karar verebiliriz. O halde S de çözülebilir kelime problemine sahiptir. <

3.5. Yerel Sonlu Takdim Edilebilirlik

Teorem 3.5.1: S bir yarıgrup r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r yerel sonlu takdim edilebilir ise S de yerel sonlu takdim edilebilirdir.

İspat: r yerel sonlu takdim edilebilir ve A da S nin sonlu bir alt kümesi olsun. Biz A nın doğurduğu S nin alt yarıgrubu $\langle A \rangle = T$ nin sonlu takdim edilebilir olduğunu göstermeliyiz.

$B = \{(a, a) : a \in A\}$ kümesini tanımlayalım. Açıkça görülüyor ki, A kümesi sonlu olduğundan B kümesi de r nun sonlu bir alt kümesidir. Ayrıca r yerel sonlu takdim edilebilir olduğundan B nin doğurduğu, r nun $\langle B \rangle = s$ alt yarıgrubunun sonlu bir takdimi vardır. Şimdi T ile s nin izomorfik olduğunu gösterelim. Böylece s nin sonlu takdimi T nin de sonlu bir takdimi olacağından S nin de yerel sonlu takdim edilebilir olduğunu göstermiş oluruz.

$f : T \rightarrow s$ dönüşümünü her $u \in \langle A \rangle = T$ için $u \equiv a_1 \mathbf{L} a_n$ ise

$$f(u) = (u, u) \equiv (a_1, a_1) \mathbf{L} (a_n, a_n)$$

olarak tanımlayalım. Önce f nin iyi tanımlı ve birebir dönüşüm olduğunu aynı anda gösterelim. Her $u_1, u_2 \in T$ için

$$f(u_1) = f(u_2) \Leftrightarrow (u_1, u_1) = (u_2, u_2) \Leftrightarrow u_1 = u_2$$

olduğundan f dönüşümü iyi tanımlı ve birebirdir.

Şimdi tanımlanan bu f dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu gösterelim. Her $u_1 \equiv a_1 \mathbf{L} a_m, u_2 \equiv b_1 \mathbf{L} b_n \in T$ için

$$\begin{aligned} f(u_1 u_2) &\equiv f(a_1 \mathbf{L} a_m b_1 \mathbf{L} b_n) \\ &= (a_1 \mathbf{L} a_m b_1 \mathbf{L} b_n, a_1 \mathbf{L} a_m b_1 \mathbf{L} b_n) \\ &= (a_1 \mathbf{L} a_m, a_1 \mathbf{L} a_m)(b_1 \mathbf{L} b_n, b_1 \mathbf{L} b_n) \\ &= f(a_1 \mathbf{L} a_m) f(b_1 \mathbf{L} b_n) \\ &= f(u_1) f(u_2) \end{aligned}$$

olduğundan f dönüşümü bir homomorfizmdir.

Son olarak f nin örten olduğunu gösterelim. Her $(a_1, a_1) \mathbf{L} (a_m, a_m) \in s$ için

$$f(a_1 \mathbf{L} a_m) = (a_1, a_1) \mathbf{L} (a_m, a_m)$$

olduğundan f dönüşümü örtendir. O zaman f bir izomorfizm olup, S nin yerel sonlu takdim edilebilir olduğu gösterilmiş olur. <

4. r_N YARIGRUBU İÇİN BİR SONLU TAKDİM

G herhangi bir grup ve N de G nin herhangi bir normal alt grubu olsun. G yi bir yarıgrup olarak düşündüğümüzde G üzerinde tanımlı

$$r_N = \{(s, t) : st^{-1} \in N\}$$

bağıntısı bir kongrüansdır. Tersine r , G grubu üzerinde bir kongrüans ise

$$N_r = \{st^{-1} : (s, t) \in r\}$$

şeklinde tanımlı N_r , G nin bir normal alt grubudur (Howie J.M., 1995).

Bu bölümde gruplar üzerinde tanımlı kongrüansların sonlu doğuraylı ve sonlu takdim edilebilir olup olmadığını araştıracağız.

4.1. r_N İçin Doğuray Kümesi

G bir grup $\langle X | R \rangle$ de G nin bir grup takdimi olsun. O zaman $e \notin X$ ve $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ olmak üzere

$$Y = X \cup X^{-1} \cup \{e\}$$

olsun. Bu durumda Y de G yi bir yarıgrup olarak doğurur. Böylece bir grup, grup olarak sonlu doğuraylı ise yarıgrup olarak da sonlu doğuraylıdır. Ayrıca R_0 bağıntılar kümesi R den R deki bağıntılarda var ise 1 (grubun birim elemanı) yerine e yazılarak elde edilmiş ve

$$\begin{aligned}
R_1 &= \{(xx^{-1}, e) : x \in X\} \cup \{(x^{-1}x, e) : x \in X\}, \\
R_2 &= \{(xe, x) : x \in X\} \cup \{(ex, x) : x \in X\}, \\
R_3 &= \{(x^{-1}e, x^{-1}) : x \in X\} \cup \{(ex^{-1}, x^{-1}) : x \in X\}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$Q = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup \{(e^2, e)\}$$

olsun. Bu durumda $\langle Y|Q \rangle$ da G nin bir yarıgrup takdimi olur. Böylece bir grup grup olarak sonlu takdim edilebilir ise yarıgrup olarak da sonlu takdim edilebilir.

Yukarıdaki takdimde bazı ilişkileri Tietze dönüşümlerinden faydalanarak çıkartabiliriz. Örneğin

$$\begin{aligned}
x^{-1}e &= x^{-1}(xx^{-1}) \equiv (x^{-1}x)x^{-1} = ex^{-1} \\
xe &= x(x^{-1}x) \equiv (xx^{-1})x = ex
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
R_2 &= \{(ex, x) : x \in X\} \\
R_3 &= \{(x^{-1}e, x^{-1}) : x \in X\}
\end{aligned}$$

olarak alınabilir. Aslında $|R| \geq |X|$ ise G nin $|Q| - |Y| = |R| - |X|$ olacak şekilde bir yarıgrup takdimi $\langle Y|Q \rangle$ mevcuttur (Campell C.M., Mitchell J.D., Ruskuc N., 2002).

Biz bu bölümün geri kalanında grupları yarıgrup, doğuraylarını yarıgrup doğurayları ve takdimlerini de yarıp takdimleri olarak kabul edeceğiz.

Teorem 4.1.1: G herhangi bir grup ve N de G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Eğer G sonlu doğuraylı ise, $r_N = \{(s, t) : st^{-1} \in N\}$ kongrüansı da sonlu doğuraylı bir yarıgruptur.

İspat : G sonlu doğuraylı ve N nin G deki indeksi sonlu olduğundan Teorem 2.4.17'den dolayı N de sonlu doğuraylıdır. O zaman X kümesini N için bir sonlu doğuray kümesi, e yi de G nin birim elemanı olarak alalım. Ayrıca $[G : N] = n$ ise $u_1 = e, u_2, \mathbf{K}, u_n \in G$ olmak üzere

$$G/N = \{Nu_1, Nu_2, \mathbf{K}, Nu_n\}$$

olsun. Bu durumda

$$U = \{u_1, u_2, \mathbf{K}, u_n\}$$

ve

$$Y = \{(e, x), (x, e), (u, u) : x \in X, u \in U\}$$

olarak alalım. O zaman $Y \subseteq r_N$ olup, biz $\langle Y \rangle = r_N$ olduğunu gösterelim.

Herhangi bir $(s, t) \in r_N$ alalım. O zaman $st^{-1} \in N$ olduğundan, $s, t \in Nt$ olup, $s, t \in Nu$ olacak şekilde bir $u \in U$ vardır. Ayrıca X kümesi N için bir doğuray kümesi olduğundan,

$$s = x_1 x_2 \mathbf{L} x_k u \text{ ve } t = y_1 y_2 \mathbf{L} y_l u$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \mathbf{K}, x_k, y_1, y_2, \mathbf{K}, y_l \in X$ vardır. Böylece,

$$(s, t) = (x_1, e)(x_2, e) \mathbf{L} (x_k, e)(e, y_1)(e, y_2) \mathbf{L} (e, y_l)(u, u)$$

oldüğundan Y kümesi r_N için bir doğuray kümesi olur.

Ayrıca N , G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu ve G sonlu doğuraylı olduğunda N de sonlu doğuraylı olup, yukardaki X kümeleri de sonlu seçilebileceğinden Y de r_N için bir sonlu doğuray kümesi olur. $<$

4.2. r_N İçin Takdim

Şimdi N için bir takdim verildiğinde r_N için bir takdim bulalım. $X = \{x_i, \mathbf{K}, x_m\}$, N için doğuray kümesi olmak üzere, her $1 \leq i \leq m$ için, yukarda tanımlanan Y nin (x_i, e) ve (e, x_i) elemanlarını kolaylık sağlaması amacıyla sırasıyla x_{1i} ve x_{2i} ile göstereyim. Ayrıca her $1 \leq j \leq n$ için Y nin (u_j, u_j) elemanlarını v_j ile göstereyim. O zaman,

$$X_1 = \{x_{11}, \mathbf{K}, x_{1m}\}, X_2 = \{x_{21}, \mathbf{K}, x_{2m}\} \text{ ve } X_3 = \{v_1, \mathbf{K}, v_n\}$$

olarak alınırsa ise $Y = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ kümesi r_N için bir sonlu doğuray kümesi olur.

Herhangi bir $w \equiv x_{i_1} \mathbf{L} x_{i_k} \in X^+ (x_{i_1}, \mathbf{K}, x_{i_k} \in X)$ için

$$x_{1i_1} \mathbf{L} x_{1i_k} \equiv (x_{i_1}, e) \mathbf{L} (x_{i_k}, e) \text{ ve } x_{2i_1} \mathbf{L} x_{2i_k} \equiv (e, x_{i_1}) \mathbf{L} (e, x_{i_k})$$

şeklindeki tanımlanan kelimeleri sırasıyla $\bar{w}$ ve $\bar{\bar{w}}$ ile göstereceğiz. Ayrıca N normal olduğundan, herhangi $u_i, u_j \in U$ için, $(Nu_i)(Nu_j) = Nu_{ij}$ olacak şekilde bir $u_{ij} \in U$ elemanı ve $u_i u_j = w_{ij} u_{ij}$ olacak şekilde de bir $w_{ij} \in N$ vardır. Ayrıca $u_j \in U$ ve $x_i \in X$ elemanları için, $u_j x_i \in u_j N = Nu_j$ olduğundan $u_j x_i = w_{u_j, x_i} u$ olacak şekilde bir $w_{u_j, x_i} \in N$ vardır.

Yukarıdaki notasyonlar ile N için bir takdim verildiğinde r_N nin bir takdimini aşağıdaki teoremdе verelim.

Teorem 4.2.1: G herhangi bir grup ve N de G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Eğer G sonlu takdim edilebilir ise o zaman G yarıgrubu üzerindeki

$$r_N = \{(s, t) : st^{-1} \in N\}$$

kongrüansı da sonlu takdim edilebilir bir yarıgruptur.

İspat : G sonlu takdim edilebilir bir grup ve N de G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olduğundan Sonuç 2.4.18'den dolayı N de sonlu takdim edilebilir bir grup olur. Sonlu takdim edilebilir gruplar aynı zamanda yarıgrup olarak da sonlu takdim edilebilirdir. Böylece N nin sonlu bir yarıgrup takdimi vardır.

$P = \langle X | R \rangle$, N nin bir yarıgrup takdimi olsun. Yukarıdaki gösterimlerle Teorem 4.1.1'den dolayı $Y = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ kümesi r_N nin bir sonlu doğuray kümesidir.

Şimdi r_N için bazı bağıntılar kümesi oluşturalım;

$$R_1 = \{\bar{r} = \bar{s} : (r = s) \in R\} \cup \{\bar{\bar{r}} = \bar{\bar{s}} : (r = s) \in R\}$$

$$R_2 = \{x_{2i}x_{1j} = x_{1j}x_{2i} : 1 \leq i, j \leq m\}$$

$$R_3 = \{v_i v_j = \bar{w}_{ij} v_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\} \cup \{v_i v_j = \bar{\bar{w}}_{ij} v_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\}$$

$$R_4 = \{v_i x_{1j} = \bar{w}_{u_i, x_j} v_i : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

$$\cup \{v_i x_{2j} = \bar{\bar{w}}_{u_i, x_j} v_i : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Burada R_1 kümesi, N nin takdimindeki $r = s$ gibi bir bağıntıdaki $r, s \in X^+$ kelimeleri yardımıyla oluşturulan, $\bar{r} = \bar{s}$ bağıntısı $(r, e) = (s, e)$ yi, $\bar{\bar{r}} = \bar{\bar{s}}$ bağıntısı ise $(e, r) = (e, s)$ gibi bağıntıları gösteriyor. R_2 kümesi, her $1 \leq i, j \leq m$ için $x_{1j} \equiv (x_j, e)$ ve $x_{2i} \equiv (e, x_i)$ gibi elemanların çarpımlarının değişmeli olduğunu yani $x_{2i}x_{1j} = x_{1j}x_{2i}$ olduğunu gösteriyor. R_3 kümesi, $v_i = (u_i, u_i)$ ve $v_j = (u_j, u_j)$ olduğundan, her $1 \leq i, j \leq n$ için $v_i v_j$ çarpımlarından elde edilen $u_i u_j$ ler için $\bar{w}_{ij} = (w_{ij}, e)$ ya da $\bar{\bar{w}}_{ij} = (e, w_{ij})$ şeklinde kelimelerin olduğunu ve böylece $v_i v_j$ çarpımlarına karşılık v_{ij} elemanının var olduğunu gösteriyor. Son olarak R_4 kümesi ise, her $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq j \leq m$ için $v_i x_{1j} = (u_i, u_i)(x_j, e)$ veya $v_i x_{2j} = (u_i, u_i)(e, x_j)$ çarpımları için, N nin normal oluşundan dolayı sağ kosetleri düşünülerek, $v_i x_{1j} = \bar{w}_{u_i, x_j} v_i$ ve $v_i x_{2j} = \bar{\bar{w}}_{u_i, x_j} v_i$ olacak şekilde $\bar{w}_{u_i, x_j} = (w_{u_i, x_j}, e)$ ve $\bar{\bar{w}}_{u_i, x_j} = (e, w_{u_i, x_j}) \in Y^+$ olduğunu gösteriyor.

Şimdi $Q = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$ olmak üzere $Q = \langle Y | Q \rangle$ nin r_N için bir takdim olduğunu gösterelim.

Yukarda açıklamalardan sonra Q daki tüm bağıntıların r_N de sağlandığı açıkça görülür. Bu nedenle Teorem 2.4.4'den dolayı r_N , $Q = \langle Y | Q \rangle$ takdimi tarafından tanımlanan yarigrubun homomorfik görüntüsüdür.

Herhangi bir $s \in Y^+$ için s kelimesine sırasıyla R_4 deki bağıntıların, ondan sonra R_3 deki bağıntıların ve daha sonra da R_2 deki bağıntıların olanaklı tüm uygulamaları sonucunda, $s_1 \in X_1^*$, $s_2 \in X_2^*$ ve $v \in X_3$ olmak üzere s den bir $s_1 s_2 v$ kelimesi elde edilir. Diğer bir ifade ile $s = s_1 s_2 v$ bağıntısı $R_2 \cup R_3 \cup R_4$ kümesindeki ilişkilerin bir sonucu olacak şekilde $s_1 \in X_1^*$, $s_2 \in X_2^*$ ve $v \in X_3$ mevcuttur.

Şimdi herhangi iki $s, t \in Y^+$ kelimeleri için $s = t$ bağıntısının r_N de sağlandığını kabul edelim. O zaman

$$s = s_1 s_2 v_1 \text{ ve } t = t_1 t_2 v_2$$

bağıntıları $R_4 \cup R_3 \cup R_2$ kümesindeki ilişkilerin sonucu olacak şekilde $s_1, t_1 \in X_1^*$, $s_2, t_2 \in X_2^*$ ve $v_1, v_2 \in X_3$ mevcuttur. Ayrıca $s = t$ bağıntısının sağlanması için gerek ve yeter koşul $s_1 = t_1$, $s_2 = t_2$ ve $v_1 \equiv v_2$ bağıntılarının sağlanmasıdır. Dolayısıyla $s_1 = t_1$ ve $s_2 = t_2$ bağıntıları R_1 in bir sonucu olduğundan, $s = t$ bağıntısı Q nun bir sonucu olur, dolayısıyla Q , r_N nin bir takdimidir.

Eğer P , N nin sonlu bir yarıgrup takdimi ise Q da r_N nin sonlu bir takdimi olacağından r_N de sonlu takdim edilebilir bir yarıgruptur. <

5. YARIGRUPLARIN GÜÇLÜ YARILATISI İÇİN SONLULUK KOŞULLARI

Bu bölümde, yarıgrup teoride tam düzgün yarıgruplar için önemli bir yapı olan yarıgrupların bir güçlü yarılatisi için sonluluk koşullarından bazılarının hangi durumlarda sağlanıp sağlanmayacağı incelenecektir. Ayık G., Ayık H. ve Ünlü Y. (2005b)'de güçlü yarılatisin çözülebilir kelime problemine hangi koşullarda sahip olup olmadığını gösterdiler. Bu bölümde ise yarıgrupların güçlü yarılatisinin sonluluk koşullarından periyodiklik, yerel sonluluk ve yerel sonlu takdim edilebilirlik gibi koşulların hangi durumlarda sağlanıp sağlanmayacağı incelenmiştir.

5.1. Periyodiklik

Teorem 5.1.1: I bir yarılatis, S_i ($i \in I$) ayrık yarıgrupların bir ailesi ve $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ yarıgrupların bir güçlü yarılatisi olsun. S nin periyodik olması için gerek ve yeter koşul her bir S_i ($i \in I$) yarıgrupunun periyodik olmasıdır.

İspat : ($\Rightarrow$) Her bir S_i ($i \in I$), $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin bir alt yarıgrubu ve periyodik yarıgrupların alt yarıgrupları da periyodik olduğundan, her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubu da periyodiktir.

($\Leftarrow$) Her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubu periyodik olsun. $s \in S = \bigcup_{i \in I} S_i$ ise yalnız bir $i \in I$ için $s \in S_i$ olup, S_i yarıgrubu da periyodik olduğundan, $s^{m+r} = s^m$ olacak şekilde m ve r pozitif tamsayıları vardır. Dolayısıyla $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisi de periyodiktir. <

5.2. Yerel Sonluluk

Teorem 5.2.1: $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin yerel sonlu olabilmesi için gerek ve yeter koşul her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubunun yerel sonlu olmasıdır.

İspat : ($\Rightarrow$) Her bir S_i ($i \in I$), $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin bir alt yarıgrubu ve yerel sonlu yarıgrupların alt yarıgrupları da yerel sonlu olduğundan, her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubu da yerel sonludur.

($\Leftarrow$) Her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubu yerel sonlu olsun. $S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin sonlu bir X alt kümesini alalım. X tarafından doğurulan alt yarıgrubun sonlu olduğunu gösterelim. Şimdi $J \subseteq I$ kümesini

$$i \in J \Leftrightarrow X \cap S_i \neq \emptyset \quad (i \in I)$$

olarak tanımlayalım. X sonlu olduğundan $J = \{i_1, \mathbf{K}, i_n\}$ kümesi de sonlu olur. Her $i \in J$ için

$$X_i = X \cap S_i$$

kümesini ele alalım. (Böylece $\{X_i\}_{i \in J}$ ’ler X ’in bir parçalanışıdır.) Ayrıca, J nin her bir $\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}$ alt kümesi için $j_1 \mathbf{L} j_k \leq j_l$, ($1 \leq l \leq k$) olduğundan $Y_{\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}}$ kümesini

$$Y_{\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}} = \bigcup_{l=1}^k \{x f_{j_l, j_1 \mathbf{L} j_k} : x \in X_{j_l}\}$$

olarak tanımlayalım. Her $1 \leq l \leq k$ için X_{j_l} sonlu ve sonlu sayıda sonlu kümenin birleşimi de sonlu olduğundan her bir $\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}$ alt kümesi için tanımlanan $Y_{\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}}$

kümesi $S_{j_1 \mathbf{L} j_k}$ yarıgrubunun sonlu bir alt kümesidir. $S_{j_1 \mathbf{L} j_k}$ yerel sonlu olduğundan $\langle Y_{\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}} \rangle$ alt yarıgrubu da sonludur. J nin sonlu sayıda alt kümesi olduğundan

$$T = \bigcup_{\emptyset \neq \{j_1, \mathbf{K}, j_k\} \subseteq J} \langle Y_{\{j_1, \mathbf{K}, j_k\}} \rangle$$

kümesi sonludur.

Şimdi $\langle X \rangle$ nin sonlu olduğunu gösterelim. Herhangi bir $s \in \langle X \rangle$ için

$$s = x_1 x_2 \mathbf{L} x_m$$

olacak şekilde $x_1 \in X_{j_1}, \mathbf{K}, x_m \in X_{j_m}$ vardır. Şimdi $j_1, j_2, \mathbf{K}, j_m$ elemanlarının oluşturduğu kümeyi K ile gösterelim (K nin eleman sayısı m olmak zorunda değildir). O halde $\emptyset \neq K \subseteq J$ olduğundan $s \in \langle Y_K \rangle \subseteq T$ olur. Böylece $\langle X \rangle \subseteq T$ olup $\langle X \rangle$ de sonludur. O halde $S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisi de yerel sonludur. <

5.3. Yerel Sonlu Takdim Edilebilirlik

Teorem 5.3.1: $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin yerel sonlu takdim edilebilir olabilmesi için gerek ve yeter koşul her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubunun yerel sonlu takdim edilebilir olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Her bir S_i ($i \in I$), $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin bir alt yarıgrubu ve yerel sonlu takdim edilebilir yarıgrupların alt yarıgrupları da yerel sonlu takdim edilebilir olduğundan her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubu da yerel sonlu takdim edilebilirdir.

($\Leftarrow$) Her bir S_i ($i \in I$) yarıgrubu yerel sonlu takdim edilebilir olsun.

$S[I; S_i, f_{j,i}]$ güçlü yarılatisinin herhangi sonlu bir X alt kümesini alalım. J kümesini

$$J = \{i \in I : X \cap S_i \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlayalım. Ayrıca, her $\emptyset \neq K \subseteq J$ için $p(K) \in I$ elemanını

$$K = \{i_1, \mathbf{K}, i_m\} \Rightarrow p(K) = i_1 \mathbf{L} i_m$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda J sonlu olduğundan

$$P(J) = \{p(K) : \emptyset \neq K \subseteq J\}$$

şeklinde tanımlanan $P(J) \subseteq I$ kümesi de sonludur. Ayrıca $P(J)$ nin tanımından açıkça görülür ki $P(J)$, I nın J tarafından doğrulan alt yarıgrubu, dolayısıyla bir yarilatistir. Her bir $i \in J$ için

$$X_i = X \cap S_i$$

olmak üzere J nin her bir K alt kümesi için Y_K kümesini

$$Y_K = \bigcup_{i \in K} \{x f_{i, p(K)} : x \in X_i\}$$

ve her $k \in P(K)$ için Z_k kümesini

$$Z_k = \bigcup_{\emptyset \neq K \subseteq J \text{ ve } p(K)=k} Y_K$$

olarak tanımlayalım. O zaman, her bir $k \in P(K)$ için $Z_k \subseteq S_k$ kümesi sonlu ve S_k yerel sonlu takdim edilebilir olduğundan S_k nın Z_k tarafından doğrulan altyarıgrubu $T_k = \langle Z_k \rangle$ sonlu takdim edilebilirdir.

Şimdi $\langle X \rangle$ yarıgrubunun sonlu takdim edilebilir olduğunu gösterelim. Herhangi bir $s \in \langle X \rangle$ için

$$s = x_1 x_2 \mathbf{L} x_m$$

olacak şekilde $x_1 \in X_{j_1}, \mathbf{K}, x_m \in X_{j_m}$ vardır. Şimdi $j_1, j_2, \mathbf{K}, j_m$ elemanlarının oluşturduğu kümeyi K_s ile gösterelim. Eğer $p(K_s) = k_s$ ise $s \in T_{k_s}$ olur. Ayrıca T_k 'ların tanımından $T_k \subseteq \langle X \rangle$ olur. Ayrıca S_k 'lar ayrık olduğundan, T_k 'lar da $\langle X \rangle$ 'in ayrık alt yarıgrupları olup, $P(J)$ de sonlu olduğundan $\langle X \rangle$ sonlu sayıda sonlu takdim edilebilir ayrık T_k yarıgruplarının bir birleşimi

$$\langle X \rangle = \bigcup_{k \in P(J)} T_k$$

olur.

Son olarak $f_{k,i}$ ($i, k \in P(J)$ ve $k \geq i$) homomorfizmlerinin $T_k = \langle Z_k \rangle$ yarıgrubuna kısıtlamasını $j_{k,i}$ ile gösterelim. Böylece $S[P(J); T_k, j_{k,i}]$ güçlü yarılatisinin $\langle X \rangle$ olduğu aşikardır. Arzu edildiği gibi, Teorem 2.7.1'den dolayı $\langle X \rangle$ de sonlu takdim edilebilir bir yarıgrup olur. <

KAYNAKLAR

- AYIK, H., (1998). Presentations and Efficiency of Semigroups. (Ph. D. Thesis), University of St Andrews, 189s.
- AYIK, H., (2005). On Finiteness Conditions for Rees Matrix Semigroups. Czechoslovak Math. J., 55 : 455--463.
- AYIK, G., AYIK, H., and ÜNLÜ, Y., (2005a). Presentations for S and S/ρ from a given presentation ρ . Semigroup Forum. 70 : 146—149.
- AYIK, G., AYIK, H., and ÜNLÜ, Y., (2005b). Presentations and word problems for strong semilattices of semigroups. Algebra & Discrete Mathematics. 4: 28-35.
- ARAUJO, I. M., BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., and RUSKUC, N., (2001). On generators and relations for unions of semigroups. Semigroup Forum. 63 (1): 49—62.
- AYIK, H., and RUSKUC, N., (1999). Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups. Proc. Edinburgh Math. Soc. 42: 481—495.
- BAUMSLAG, G., (1993). Topics in Combinatorial Group Theory. Birkhauser Verlag, Basel.180s.
- CAMPBELL, C.M., MITCHELL, J. D., and RUSKUC, N., (2002). On defining groups efficiently without using inverses, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 133 (2002), 31-36.
- HOWIE, J. M., (1995). Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press, Oxford. 366s.
- JOHNSON, D. L., (1995). Presentations of Groups. Cambridge University Press, Cambridge 228s.
- JURA, A., (1978). Determining ideals of given finite index in a finitely presented semigroup. Demonstratio Math. 11: 814—827.
- RUSKUC, N., (1995). Semigroup Presentations. (Ph. D. Thesis), University of St Andrews. 256s.
- RUSKUC, N., (1998). On large subsemigroups and finiteness conditions of semigroups. Proc. London Math. Soc. 76: 383-405.

RUSKUC, N. and THOMAS, R. M., (1998). Syntactic and Rees indices of subsemigroups. J. Algebra. 205: 435-450.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Adana'nın Gökçeler Köyü'nde doğdum. İlk öğrenimimi Adana Seyhan Denizli İlköğretim Okulu ve Malazgirt İlköğretim Okulu'nda, orta öğrenimimi ise 19 Mayıs Lisesi'nde tamamladım. 1994 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitime başladım. Bir yıl İngilizce hazırlık programını tamamladıktan sonra 1999 yılında mezun oldum. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitime ve Çukurova Üniversitesi Karaisalı Meslek Yüksekokulunda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaya başladım. 2002 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında 'Grup Tanımlayan Bazı Yarıgrup ve Monoid Takdimleri' başlıklı yüksek lisans tez çalışmamı sayın Yrd.Doç.Dr.Fikret KUYUCU'nun danışmanlığında tamamladım. 2002 yılında doktora programına 2004 yılında doktora tez çalışmalarına başladım. Halen Çukurova Üniversitesi Karaisalı Meslek Yüksekokulunda Öğretim Görevlisi olarak çalışmaktayım.