

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kemal TOKER

BAZI YARIGRUP YAPILARININ SONLU TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2008

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BAZI YARIGRUP YAPILARININ SONLU TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ

**Kemal TOKER
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Bu Tez 16/09/2008 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği İle Kabul Edilmiştir.

İmza:.....
Doç.Dr. Hayrullah AYIK
DANIŞMAN

İmza:.....
Doç.Dr. Gonca AYIK
ÜYE

İmza:.....
Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL
ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında Hazırlanmıştır.

Kod No:

**Prof. Dr. Aziz ERTUNÇ
Enstitü Müdürü
İmza ve Mühür**

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BAZI YARIGRUP YAPILARININ SONLU TAKDİM EDİLEBİLİRLİĞİ

Kemal TOKER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman: Doç.Dr.Hayrullah AYIK
Yıl : 2008, Sayfa: 59
Jüri : Doç.Dr.Hayrullah AYIK
Doç.Dr.Gonca AYIK
Yrd.Doç.Dr.Ersin KIRAL

Bu çalışmada, S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, S/r nun sonlu takdim edilebilir olup olmadığı incelenmiştir. r kongrüansını $S \times S$ direk çarpım yarıgrubunun bir altarıgrubu olarak ele aldık. r sonlu takdimli bir yarıgrup ise S ve S/r nun sonlu takdimli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca r için verilen bir takdimden S ve S/r için takdimler inşa edilmiştir.

I bir yarılatıs, S_i ($i \in I$) ayrık yarıgrupların bir ailesi ve $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ bu yarıgrupların bir güçlü yarılatısı olsun. S yarıgrubunun takdimi verildiğinde S_i ($i \in I$) yarıgruplarının takdimini ve S_i ($i \in I$) yarıgruplarının takdimleri verildiğinde S yarıgrubunun takdimi inşa edilmiştir. Ayrıca bulunan bu takdimler için sonlu takdimli olma koşulu incelenmiştir. Son olarak, yarıgrupların birleşimlerinin, yarıgrup bandlarının, monoid bandlarının veya yarıgrup yarılatılarının sonlu takdim edilebilirliği araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Yarıgrup yapıları, sonlu takdim edilebilirlik, güçlü yarılatıs, bandlar.

ABSTRACT

MSc THESIS

FINITE PRESENTABILITY OF SOME SEMIGROUP CONSTRUCTIONS

Kemal TOKER

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Asst. Dr. Hayrullah AYIK

Year : 2008, **Pages:** 59

Jury : Asst. Dr. Hayrullah AYIK

Asst. Dr. Gonca AYIK

Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

In this study, we investigated whether S/r is finite presentable or not where S is a semigroup and r is a congruence on S . We consider r as a subsemigroup of the semigroup of direct product $S \times S$. We showed that S and S/r is finite presentable if r is finite presentable as a semigroup. In addition, we construct presentations for S and S/r from a given presentation of r .

Let I be a semilattice, let S_i ($i \in I$) be a family of disjoint semigroups, and let $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ be a strong semilattice of S_i ($i \in I$). We construct presentations for S_i ($i \in I$) if a presentation for S is given, and a presentation for S if presentations for S_i ($i \in I$) are given. Moreover, we investigated the conditions for finite presentability for these presentations. Finally, finite presentability of unions of semigroups, bands of semigroups, bands of monoids and semilattices of semigroups are investigated.

Key Words: Semigroup constructions, finite presentability, strong semilattice, bands.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bilgi, birikim, deneyim ve emeğini esirgemeyen sayın danışmanım Doç. Dr. Hayrullah AYIK'a saygılarımı sunar, teşekkür ederim. Ayrıca bana çalışmalarım sırasında yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Gonca AYIK'a teşekkür ederim.

Tüm üniversite öğrenimim boyunca emeklerinden dolayı tüm matematik bölümü hocalarına, yardımlarından dolayı araştırma görevlileri N. Şahin Öğüşlü ve Orhan Sönmez'e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca desteklerinden dolayı TÜBİTAK'a teşekkür ederim. Yardımları ve öneriler için annem İlhan Toker'e ve babam İlker Toker'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖZ.....	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
1. GİRİŞ.....	1
2. YARIGRUP TEORİSİ.....	4
2.1 Temel Tanım ve Teoremler	4
2.2 Bağıntılar ve Denklik	8
2.3 Kongrüanslar	13
2.4 Takdimler	14
3. KONGRÜANS TAKDİMİNDEN YARIGRUBUN TAKDİMİNİ ELDE ETME	23
4. YARIGRUPLARIN GÜÇLÜ YARILATİSLERİ İÇİN TAKDİMLER	30
5. YARIGRUPLARIN BİRLEŞİMLERİ İÇİN DOĞURAYLAR VE İLİŞKİLER ..	36
5.1 Yarıgrupların Genel Birleşimi.....	38
5.2 Yarıgrupların Bandları	40
5.3 Monoidlerin Bandları	44
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ	59

1. GİRİŞ

Yarıgrup yapılarında sonlu takdim edilebilirlik yarıgruplar teorisinin son yıllarda sıkça çalışılan bir konusudur. Bu tezin ikinci bölümünde, sonlu takdim edilebilirlik üzerine araştırma yapabilmek için kullandığımız yarıgruplar teorisinin temel tanım ve teoremleri verilmiştir. Yarıgrup yapılarının içinde, S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, S/r nun sonlu takdim edilebilir olup olmadığını üçüncü bölümde araştırdık. Bunu araştırırken r kongrüansını $S \times S$ direk çarpım yarıgrupunun bir altarı grubu olarak ele aldık. Üçüncü bölümde r sonlu takdimli bir yarıgrup ise S ve S/r nun sonlu takdimli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca r için verilen bir takdimden S ve S/r için takdim elde edeceğiz. X , r için yansımali bir doğuray kümesi ve $\langle X|R \rangle$ de r için bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer biz j_i izdüşüm fonksiyonunu X^+ dan $j_i(X)^+$ e bir homomorfizm olacak şekilde genişletirsek o zaman $w \equiv (x_1, y_1) \mathbf{L} (x_m, y_m) \in X^+$ için

$$j_1(w) = x_1 \mathbf{L} x_m \text{ ve } j_2(w) = y_1 \mathbf{L} y_m$$

olur. Bu durumda $X_i = j_i(X)$ ve $R_i = j_i(R) = \{(j_i(r), j_i(s)) : (r, s) \in R\}$ ($i = 1, 2$) olmak üzere $\langle X_i | R_i \rangle$ ($i = 1, 2$) nin S için bir yarıgrup takdimi olduğu üçüncü bölümde gösterilmiştir. Ayrıca S bir yarıgrup ve r da S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olmak üzere r sonlu takdimli ise S ve S/r nunda sonlu takdimli olduğu yine üçüncü bölümde gösterilmiştir.

Bir yarıgrup çalışılırken en genel yaklaşımlardan biri yarıgrup hakkında daha kolay bilgi edinilebilecek parçalanışını bulmaktır. Örneğin tamamen regüler yarıgruplar grupların birleşimi olduğu gibi tamamen basit yarıgrupların yarılatisidir. Diğer bir klasik parçalanış ta Clifford yarıgrupları grupların yarılatisi olduğu gibi grupların güçlü yarılatisidir. Bu sonuçları [Howie, 1995] te bulabilirsiniz. Yarıgrupların bandları hakkında da önemli çalışmalar mevcuttur. Bakınız [Schein,

1974] ve [Schein, 1996]. Dördüncü bölümde, $S = S[I, S_i; f_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi olmak üzere; S yarıgrubunun takdimi verildiğinde $S_i (i \in I)$ yarıgruplarının takdimi ve $S_i (i \in I)$ yarıgruplarının takdimleri verildiğinde S yarıgrubunun takdimi inşa edilmiştir. Ayrıca bulunan bu takdimler için sonlu takdimli olma koşulu incelenmiştir.

Genel olarak bahsedecek olursak dördüncü ve beşinci bölümde bir yarıgrubun bazı alt yarıgruplarının birleşimi olarak yazılması ve bu durumda bu yarıgrubun takdimini ve bu yarıgrubu oluşturan alt yarıgrupların takdimini bulmaya çalışacağız. Bunu, araştırmaları temel dört soruya yanıt arayarak yapacağız. Bu sorular aşağıda yer almaktadır.

S yarıgrubunu ayrık altarıgrupları $S_i (i \in I)$ ların birleşimi olarak göz önünde bulunduralım.

S1. Eğer tüm $S_i (i \in I)$ ler sonlu doğuraylı ise, S de sonlu doğuraylı mıdır?

S2. Eğer S sonlu doğuraylı ise, tüm $S_i (i \in I)$ ler sonlu doğuraylı mıdır?

S3. Eğer tüm $S_i (i \in I)$ ler sonlu takdimli ise, S de sonlu takdimli midir?

S4. Eğer S sonlu takdimli ise, tüm $S_i (i \in I)$ ler sonlu takdimli midir?

Bu konuda bulunan tüm sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Eğer tüm $S_i (i \in I)$ ler grup ise bu soruların yanıtlarının ispatlarını [Ruskuc, 1999] çalışmasında bulabilirsiniz. Tablo 1 de sd, st kısaltmaları sırasıyla sonlu doğuraylı ve sonlu takdimli anlamındadır.

	S1 $\forall S_i \text{ sd} \Rightarrow S \text{ sd.}$	S2 $S \text{ sd} \Rightarrow \forall S_i \text{ sd.}$	S3 $\forall S_i \text{ st} \Rightarrow S \text{ st.}$	S4 $S \text{ st} \Rightarrow \forall S_i \text{ st.}$
Yarıgrupların birleşimi	EVET	HAYIR	HAYIR	HAYIR
Monoidlerin birleşimi	EVET	HAYIR	HAYIR	HAYIR
Grupların birleşimi	EVET	EVET	EVET	EVET
Yarıgrupların bandı	EVET	HAYIR	EVET	HAYIR
Monoidlerin bandı	EVET	EVET	EVET	EVET
Yarıgrupların yarılatısı	EVET	HAYIR	EVET	HAYIR
Yarıgrupların güçlü yarılatısı	EVET	EVET	EVET	EVET

Tablo1

Dördüncü ve beşinci bölümde bu sorular sırasıyla, yarıgrupların genel birleşimleri, yarıgrupların bandında, monoidlerin bandında ve yarıgrupların güçlü yarılatılarında incelenmiştir.

2. YARIGRUP TEORİSİ

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız yarıgrup teorisinde yer alan bağıntılar, denklikler, kongrüanslar, serbest yarıgrup, yarıgrup takdimleri ve yarıgrupların birleşimi v.b. önemli kavramları ve bunlarla birlikte temel teoremleri vereceğiz.

2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1 S boştan farklı bir küme olsun. $S \times S$ den S ye tanımlı bir fonksiyona *ikili işlem* denir. Bu ikili işlem $x, y \in S$ için $x \cdot y$ şeklinde gösterilir. Genelde $x \cdot y$ yerine kısaca xy yazılır. Eğer " $\cdot$ ", S üzerinde bir ikili işlem ise $(S, \cdot)$ ikilisine bir *grupoid* denir.

Tanım 2.2 $(S, \cdot)$ bir grupoid olsun. Eğer " $\cdot$ " ikili işlemi S üzerinde birleşme özelliğine sahip, yani her $x, y, z \in S$ için

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

ise $(S, \cdot)$ grupoidine bir *yarıgrup* denir.

$(S, \cdot)$ yerine kısaca S yazacağız ve “ikili işlem” yerine “çarpma işlemi” diyeceğiz.

Tanım 2.3 S yarıgrubu değişme özelliğine sahip, yani her $x, y \in S$ için

$$xy = yx$$

ise S ye *değişmeli yarıgrup* denir.

Tanım 2.4 S bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için

$$1s = s = s1$$

olacak şekilde bir $1 \in S$ varsa, bu 1 elemanına S nin *birim elemanı* ve S ye de bir *monoid* denir.

Bir S yarıgrupunun en fazla bir tane birim elemanı vardır. Eğer S birim elemana sahip değil ise ekstra bir birim eleman kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için

$$s1 = 1s = s \text{ ve } 11 = 1$$

olarak tanımlarsak $S \cup \{1\}$ bir monoid olur. S^1 kümesini

$$S^1 = \begin{cases} S, & S \text{ birim elemana sahip ise} \\ S \cup \{1\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. S^1 kümesine (eğer gerekli ise) *birim eleman eklenerek S den elde edilen monoid* denir.

S en az iki elemanı olan bir yarıgrup olsun. Eğer her $s \in S$ için $0s = s0 = 0$ olacak şekilde $0 \in S$ elemanı varsa 0 elemanına S nin *sıfır elemanı*, S ye de *sıfırlı yarıgrup* denir. Bir S monoidin de sadece bir tek sıfır elemanı olduğu açıktır. Eğer S yarıgrupunun sıfır elemanı yoksa ekstra bir sıfır eleman benzer şekilde kolayca eklenebilir. Her $s \in S$ için $0s = s0 = s$ ve $0.0=0$ olarak tanımlayalım. Bu durumda S^0 kümesi

$$S^0 = \begin{cases} S, & S \text{ sıfır elemana sahip ise} \\ S \cup \{0\}, & \text{aksi halde} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ve S^0 kümesine (eğer gerekli ise) *sıfır eleman eklenerek S den elde edilen yarıgrup* denir.

Bu ekstra birim ve sıfır elemanı eklerken yarıgrupun hayati özelliklerini kurban etmemeliyiz. Eğer grup olan bir yarıgruba sıfır elemanı eklersek grup olmayan bir yarıgrup elde ederiz. Eğer S de birim eleman olduğu halde S ye 1 birimi eklenirse S deki birim $S \cup \{1\}$ için artık birim değildir ve $S \cup \{1\}$ in birimi yeni eklenen 1 elemanıdır.

Sıfırlı yarıgruplar içerisinde herhangi iki elemanın çarpımı sıfır olan yarıgruplarla karşılaşırız. Boştan farklı herhangi bir S yarı grubunda çarpma her $s, t \in S$ için $st = s$ olarak tanımlanırsa S yarı grubuna *sol sıfır yarıgrup* denir. Sağ sıfır yarıgrup benzer şekilde tanımlanır. m elemanlı sol sıfır yarıgrup L_m ile sağ sıfır yarıgrup R_m ile gösterilir.

Tanım 2.5 S bir yarıgrup ve $e \in S$ olsun. Eğer

$$e^2 = e \cdot e = e$$

ise e ye S nin bir *idempotent elemanı* denir. S yarı grubunun tüm idempotent elemanlarının kümesi $E(S)$ ile gösterilir. Eğer $E(S) = S$ ise S yarı grubuna bir *band* denir. Eğer S yarı grubu değişmeli bir band ise S ye bir *yarılatis* denir. Örneğin $X_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ kümesi üzerinde tanımlı tüm sabit fonksiyonların kümesi fonksiyonların bileşkesi işlemiyle bir yarıgrup oluşturur. Bu yarıgrup aynı zamanda bir banddır.

Tanım 2.6 S bir yarıgrup ve T de S nin boştan farklı bir altkümesi olsun. Eğer T çarpma işlemine göre kapalı, yani her $s, t \in T$ için $st \in T$ ise T ye S nin bir *altarı grubu* denir ve $T \leq S$ şeklinde yazılır.

S birim elemanı 1_S olan bir monoid ve T de S nin bir altarı grubu olsun. Eğer $1_S \in T$ ise T de bir monoid olup, bu monoide S nin bir *altmonoidi* denir.

Tanım 2.7 S ve T iki yarıgrup ve f de S den T ye bir dönüşüm (fonksiyon) olsun. Eğer her $x, y \in S$ için

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

ise f ye bir *homomorfizm* denir.

Tanım 2.8 S ve T iki yarıgrup ve f de S den T ye bir homomorfizm olsun.

- (i) Eğer f birebir ise f ye bir *monomorfizm* denir.
- (ii) Eğer f örten ise f ye bir *epimorfizm* denir.
- (iii) Eğer f hem monomorfizm hem de epimorfizm ise f ye bir *izomorfizm* denir.

Başka bir ifade ile; $1_S : S \rightarrow S$ ve $1_T : T \rightarrow T$ birim dönüşümler olmak üzere, eğer $f \circ f^{-1} = 1_T$ ve $f^{-1} \circ f = 1_S$ olacak şekilde bir $f^{-1} : T \rightarrow S$ homomorfizmi varsa f ye bir *izomorfizm* denir. Eğer S den T ye bir izomorfizm mevcut ise S ile T ye *izomorfik yarıgruplar* denir ve $S \cong T$ şeklinde yazılır.

Tanım 2.9 $f : S \rightarrow S$ bir dönüşüm olsun.

- (i) Eğer f , S den S ye bir homomorfizm ise f ye bir *endomorfizm* denir.
- (ii) Eğer f , S den S ye bir izomorfizm ise f ye bir *otomorfizm* denir.

S ve T iki monoid ve f de S den T ye bir (yarıgrup) homomorfizm olsun. Eğer $f(1_S) = 1_T$ ise f ye bir *monoid homomorfizm* denir.

Benzer şekilde yukarıdaki diğer tanımlarda monoidler için genelleştirilebilir.

Tanım 2.10 S ve T iki yarıgrup olsun. $s, s' \in S$ ve $t, t' \in T$ olmak üzere, $S \times T$ kartezyen çarpımı üzerinde çarpma işlemini

$$(s, t)(s', t') = (ss', tt')$$

olarak tanımlayalım. Bu çarpma işlemi ile $S \times T$ de bir yarıgruptur. Bu yarıgruba S ile T nin *direkt çarpımı* denir.

2.2 Bağıntılar ve Denklik

Tanım 2.11 X boştan farklı bir küme olmak üzere $X \times X$ in bir r altkümüne X üzerinde bir *bağıntı* denir. Tüm bağıntılarının kümesi $B(X)$ ile gösterilir.

Örneğin, $1_x = \{(x, x) : x \in X\}$ ve $X \times X$ kümeleri X üzerinde birer bağıntıdır. r , X üzerinde bir bağıntı olmak üzere $(x, y) \in r$ yi xry şeklinde veya $x \equiv y \pmod{r}$ şeklinde de yazabiliriz. Ayrıca, her $r \in B(X)$ için r nun *ters bağıntısı* (*tersi*)

$$r^{-1} = \{(x, y) \in X \times X : (y, x) \in r\}$$

olarak tanımlanır. $B(X)$ üzerindeki çarpma işlemi herhangi iki $r, s \in B(X)$ elemanı için

$$r \circ s = \{(x, y) \in X \times X : \exists z \in X, (x, z) \in r, (z, y) \in s\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 2.12 $(B(X), \circ)$ ikilisi bir yarıgruptur.

İspat: Herhangi $r, s, t \in B(X)$ alalım. $p \circ s \in B(X)$ olduğu açıktır. Şimdi

$$(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (x, y) \in (r \circ s) \circ t &\Leftrightarrow (x, z) \in (r \circ s) \text{ ve } (z, y) \in t \quad (\exists z \in X) \\ &\Leftrightarrow (x, u) \in r, (u, z) \in s \text{ ve } (z, y) \in t \quad (\exists u, z \in X) \\ &\Leftrightarrow (x, u) \in r \text{ ve } (u, y) \in (s \circ t) \quad (\exists u \in X) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in r \circ (s \circ t) \end{aligned}$$

Böylece $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$ olup, $(B(X), \circ)$ ikilisi bir yarıgruptur. ■

Ayrıca $(B(X), \circ)$, birim elemanı 1_x olan bir monoiddir.

Tanım 2.13 r , X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. Eğer

- (i) $1_x \subseteq r$ ise r ya *yansımali*;
- (ii) $r^{-1} = r$ ise r ya *simetrik*;
- (iii) $r \circ r \subseteq r$ ise r ya *geçişmeli*;

bağıntı denir.

Tanım 2.14 Eğer r bağıntısı yansımali, simetrik ve geçişmeli bağıntı ise r ya X üzerinde bir *denklik bağıntısı* denir. $xr = \{y \in X : (x, y) \in r\}$ olarak tanımlanan bu kümeye x in *denklik sınıfı* denir. Ayrıca

$$X/r = \{xr : x \in X\}$$

kümesine X in r vasıtasıyla oluşturulan *bölüm kümesi* denir.

Tanım 2.15 r , X üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere, her $x \in X$ için $r^*(x) = xr$ olarak tanımlanan $r^* : X \rightarrow X/r$ dönüşümüne X üzerindeki *doğal dönüşüm* denir.

Tanım 2.16 $f : X \rightarrow Y$ ye bir dönüşüm olmak üzere,

$$f^{-1} \circ f = \{(x, y) \in X \times X : f(x) = f(y)\}$$

kümesine f nin *çekirdeği* denir ve $\text{Ker}f$ şeklinde yazılır.

r , X üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. O zaman açıkça görülür ki, $\text{Ker}r^* = r$ dur.

Eğer $\{r_i : i \in I\}$, X kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının boştan farklı bir ailesi ise $\bigcap_{i \in I} r_i$ de X üzerinde bir denklik bağıntısıdır.

R , X kümesi üzerinde herhangi bir bağıntı ise $R \subseteq X \times X$ olduğundan R yi içeren denklik bağıntılarının ailesi boştan farklıdır. O halde R yi içeren tüm denklik bağıntılarının kesişimi yine R yi içeren bir denklik bağıntısı olup, bu denklik bağıntısı R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. Bu en küçük denklik bağıntısına R tarafından *doğrulan denklik bağıntısı* denir ve R^e ile gösterilir.

R , X üzerinde yansılmalı bir bağıntı, yani $1_X \subseteq R$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} R = 1_X \circ R &\subseteq R \circ R &\Rightarrow R &\subseteq R^2; \\ R^2 = 1_X \circ R^2 &\subseteq R \circ R^2 &\Rightarrow R^2 &\subseteq R^3; \end{aligned}$$

dır. Bu şekilde devam edilir ise

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \mathbf{L} \subseteq R^n \subseteq \mathbf{L}$$

olur. Bu durumda X üzerinde R^∞ bağıntısını

$$R^\infty = \bigcup \{R^n, n \geq 1\}$$

olarak tanımlayalım.

Önerme 2.17 X üzerindeki herhangi bir R yansımali bağıntısı için tanımlanan R^∞ , X üzerinde R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır.

İspat: Eğer $(x, y), (y, z) \in R^\infty$ ise $(x, y) \in R^m$ ve $(y, z) \in R^n$ olacak şekilde $\exists m, n \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman,

$$(x, z) \in R^m \circ R^n = R^{m+n} \subseteq R^\infty$$

olup $(x, z) \in R^\infty$ dur. Ayrıca $R \subseteq R^\infty$ olup R^∞ , R yi içeren bir geçişmeli bağıntıdır. Şimdi R^∞ un en küçük bağıntı olduğunu gösterelim.

T , R yi içeren herhangi bir geçişmeli bağıntı olsun. T geçişmeli olduğundan $T \circ T \subseteq T$ olup

$$R \subseteq T \Rightarrow R^2 = R \circ R \subseteq T \circ T \subseteq T \Rightarrow R^2 \subseteq T$$

olur. Benzer şekilde devam edilir ise her $n \geq 1$ için $R^n \subseteq T$ olduğu ve dolayısıyla $R^\infty \subseteq T$ olduğu gösterilir. Böylece R^∞ , R yi içeren en küçük geçişmeli bağıntıdır. ■

Tanım 2.18 X boş olmayan bir küme ve R de X üzerinde bir yansımali bağıntı olsun. O zaman $R^\infty = \bigcup \{R^n, n \geq 1\}$ olarak tanımlanan R^∞ bağıntısına R nin *geçişmeli kapanışı* denir.

Önerme 2.19 X boş olmayan bir küme ve R de X üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. O zaman,

$$R^e = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]^\infty$$

olur.

İspat: $S = [R \cup R^{-1} \cup 1_X]$ ve $E = S^\infty$ olsun. $1_X \subseteq S \subseteq E$ olduğundan E yansımali bir bağıntıdır. E , Önerme 2.17 den dolayı da R yi içeren geçişmeli bir bağıntıdır. Ayrıca S simetrik olduğundan $S^{-1} = S$ olup, her $n \in \mathbf{Z}^+$ için

$$\begin{aligned} (S^n)^{-1} &= (S \circ S \circ \dots \circ S)^{-1} = (S^{-1} \circ S^{-1} \circ \dots \circ S^{-1})^{-1} \\ &= (S^{-1})^{-1} \circ (S^{-1})^{-1} \circ \dots \circ (S^{-1})^{-1} = S \circ S \circ \dots \circ S = S^n \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$E^{-1} = (S^\infty)^{-1} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S^n \right)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (S^n)^{-1} = \bigcup_{n=1}^{\infty} S^n = E$$

olup E simetriktir. O halde E , R yi içeren bir denklik bağıntısıdır.

Şimdi, E nin bu şekildeki en küçük bağıntı olduğunu gösterelim. s , X üzerinde R yi içeren bir denklik bağıntısı olsun. O zaman, s nun yansımali ve simetrik oluşundan

$$1_X \subseteq s \quad \text{ve} \quad R \subseteq s \quad \Rightarrow \quad R^{-1} \subseteq s^{-1} = s$$

olup $S = [R \cup R^{-1} \cup 1_X] \subseteq s$ olur. Ayrıca s nin geçişmeli oluşundan

$$S \circ S \subseteq s \circ s = s \quad \Rightarrow \quad S^2 \subseteq s$$

olur. Benzer şekilde devam edilir ise, her $n \in \mathbf{Z}^+$ için, $S^n \subseteq s$ olacağından $E = S^\infty \subseteq s$ olur. O halde E , R yi içeren en küçük denklik bağıntısıdır. ■

2.3 Kongrüanslar

Tanım 2.20 S bir yarıgrup ve R de S üzerinde bir bağıntı olsun. Eğer her $a \in S$ ve $(s, t), (s', t') \in R$ için

- (i) $(as, at) \in R$ ise R bağıntısına *sol uyumlu*;
- (ii) $(sa, ta) \in R$ ise R bağıntısına *sağ uyumlu*;
- (iii) $(ss', tt') \in R$ ise R bağıntısına *uyumlu*

bağıntı denir.

Ayrıca, sol uyumlu denklik bağıntısına bir *sol kongrüans*, sağ uyumlu denklik bağıntısına bir *sağ kongrüans* ve uyumlu denklik bağıntısına *kongrüans* denir.

Tanım 2.21 R , bir S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olmak üzere R^c kümesi

$$R^c = \{(xay, xby) : x, y \in S^1, (a, b) \in R\}$$

olarak tanımlanır.

Bu durumda kolayca görülür ki; R^c , S yarıgrubu üzerinde R yi içeren en küçük sol ve sağ uyumlu bağıntıdır.

Tanım 2.22 R , bir S yarıgrubu üzerinde herhangi bir bağıntı olsun. S üzerinde R yi içeren en küçük kongrüansa R nin *doğurduğu kongrüans* denir ve $R^\#$ ile gösterilir. Bu durumda R bağıntısına, $R^\#$ kongrüansının *doğuray kümesi* denir.

Önerme 2.23 R, S yarıgrubu üzerinde bir bağıntı olsun. $R^\# = (R^c)^e$ dir.

İspat: İspat için [Proposition 1.5.8, Howie] bakınız. ■

Tanım 2.24 S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. S nin r vasıtasıyla oluşturulan bölüm kümesi S/r üzerinde çarpma işlemi, her $xr, yr \in S/r$ için

$$(xr)(yr) = (xy)r$$

şeklinde tanımlansın. S/r , bu çarpma işlemi ile bir yarıgrup olup bu yarıgruba S nin r vasıtasıyla oluşturulan *bölüm yarıgrubu* denir.

Tanım 2.25 S ve T iki yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer $S/r \cong T$ ise S ye T nin r ile bir *genişlemesi* denir.

2.4 Takdimler

Tanım 2.26 S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. S nin, X altkümesini içeren S nin en küçük altarıgrubuna S nin X tarafından doğurulan *altarıgrubu* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. Özel olarak X alt kümesi için $S = \langle X \rangle$ oluyorsa X alt kümesine, S nin *doğuray kümesi* denir.

Tanım 2.27 S bir yarıgrup ve $\emptyset \neq X \subseteq S$ olsun. Eğer $S = \langle X \rangle$ olacak şekilde S nin sonlu bir X altkümesi mevcut ise S ye *sonlu doğuraylı yarıgrup* denir.

Tanım 2.28 S bir yarıgrup ve $S = \langle X \rangle$ olsun. Eğer $X = \{x\}$ şeklinde tek elemanlı bir küme ise S ye *monojenik (tek doğuraylı) yarıgrup* denir.

Önerme 2.29 S bir yarıgrup ve X de S için bir doğuray kümesi olsun. O zaman $(S \setminus S^2) \subseteq X$ olur.

İspat: Bir $t \in S \setminus S^2$ için biz $t \notin X$ olduğunu kabul edelim. $S = \langle X \rangle$ olduğundan

$$t = x_1 x_2 \mathbf{L} x_n$$

olacak şekilde $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ ($n \geq 2$) vardır. Bu durumda $t = x_1(x_2 \dots x_n) \in S^2$ olur ki bu $t \in S \setminus S^2$ olması ile çelişir. O halde $t \in X$ dir. ■

Tanım 2.30 A boş olmayan bir küme (alfabe) olsun. Her $a_1, \dots, a_n \in A$ için

$$w \equiv a_1 \mathbf{L} a_n$$

ifadesine *uzunluğu(boyu) n olan bir kelime* denir ve kelimenin uzunluğu (boyu) $l(w)$ ile gösterilir. Eğer $l(w)$ sonlu bir tamsayı ise w kelimesine bir *sonlu kelime* denir. Eğer $l(w) = 0$ ise w kelimesine *boş kelime* denir ve boş kelime e veya 1 ile gösterilir.

A boş olmayan bir küme olmak üzere, A üzerindeki tüm boş olmayan sonlu kelimelerin kümesi A^+ ile gösterilir. Diğer bir ifade ile;

$$A^+ = \{a_1 \mathbf{L} a_n : n \in \mathbb{N}^+ \text{ ve } a_1, \mathbf{K}, a_n \in A\}$$

olur. Ayrıca

$$A^* = \{a_1 \mathbf{L} a_n : n \in \mathbb{N}^+ \cup \{0\} \text{ ve } a_1, \mathbf{K}, a_n \in A\} = A^+ \cup \{e\} = A^+ \cup \{1\}$$

olarak tanımlanır.

A^+ üzerindeki çarpmayı her $a_1 \mathbf{L} a_n \in A^+$ ve $b_1 \mathbf{L} b_m \in A^+$ için

$$(a_1 \mathbf{L} a_n)(b_1 \mathbf{L} b_m) = a_1 \mathbf{L} a_n b_1 \mathbf{L} b_m$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda A^+ kümesi üzerinde tanımlanan çarpma işlemi ile bir yarıgrup olur. A^+ yarıgrubuna, A üzerindeki *serbest yarıgrup* denir.

Tanım 2.31 F bir yarıgrup, $A \subseteq F$ ve $a : A \rightarrow F$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her S yarıgrubu ve her $f : A \rightarrow S$ fonksiyonu için

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & F \\ f \downarrow & \mathbf{L}_y & \\ S & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani $y \circ a = y a = f$ olacak şekilde bir tek $y : F \rightarrow S$ homomorfizmi var ise F ye A üzerinde *serbest yarıgrup* denir.

Teorem 2.32 Bir A kümesi üzerinde (izomorfizme göre) bir tek serbest yarıgrup vardır.

İspat: A^+ nın A üzerinde bir serbest yarıgrup olduğunu gösterelim. $a : A \rightarrow A^+$ dönüşümünü her $a \in A$ için $a(a) = a$ olarak tanımlayalım. Herhangi bir S yarıgrubu ve bir $f : A \rightarrow S$ fonksiyonu verilmiş olsun. Biz $y : A^+ \rightarrow S$ dönüşümünü, $\forall a_1 \mathbf{L} a_n \in A^+$ için

$$y(a_1 \mathbf{L} a_n) = f(a_1) \mathbf{L} f(a_n)$$

olarak tanımlayalım. O zaman, $y(a(a)) = f(a)$ olduğundan $ya = f$ olup

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A^+ \\ f \downarrow & \mathbf{I}_y & \\ S & & \end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Ayrıca, A^+ nın tanımından dolayı y nin bir homomorfizm olduğu açıktır. Şimdi, y nin tek olduğunu gösterelim. $y': A^+ \rightarrow S$ bir homomorfizm ve $y'a = f$ olsun. O zaman, $\forall a \in A$ için

$$y(a) = y(a(a)) = f(a) = y'(a(a)) = y'(a)$$

olup y ve y' homomorfizm olduklarından $\forall a_1 \mathbf{L} a_n \in A^+$ için

$$y(a_1 \mathbf{L} a_n) = y(a_1) \mathbf{L} y(a_n) = y'(a_1) \mathbf{L} y'(a_n) = y'(a_1 \mathbf{L} a_n)$$

olur. Böylece $y = y'$ olup y tektir. Kabul edelim ki F , A üzerinde başka bir serbest yarıgrup olsun. O zaman,

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A^+ \\ a' \downarrow & \mathbf{I}_y & \\ F & & \end{array} \quad \text{ve} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a'} & F \\ a \downarrow & \mathbf{I}_{y'} & \\ A^+ & & \end{array}$$

değişmeli diyagramlarını elde ederiz. Buradan kolayca görülür ki, $yy': F \rightarrow F$ ve $y'y: A^+ \rightarrow A^+$ birim homomorfizmler olup y ve y' izomorfizm olurlar. O halde, $A^+ \cong F$ dır. ■

Tanım 2.33 S ve T iki yarıgrup olsun. Eğer $f : S \rightarrow T$ örten homomorfizmi varsa T ye S nin bir *homomorfik görüntüsü* denir.

Önerme 2.34 Her yarıgrup bir serbest yarıgrupun homomorfik görüntüsüdür.

İspat: S bir yarıgrup olsun. $A \subseteq S$ de S nin bir doğurayı olsun. $f : A \rightarrow S$ dönüşümünü her $a \in A$ için $f(a) = a$ olarak tanımlayalım. A^+ , A üzerinde serbest olduğundan

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{a} & A^+ \\ f \downarrow & \mathbf{I}_y & \\ S & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli, yani $ya = f$ olacak şekilde bir tek $y : A^+ \rightarrow S$ homomorfizmi vardır. $S = \langle A \rangle$ olduğundan her $s \in S$ için $s = a_1 \mathbf{L} a_n$ olacak şekilde $a_1, \dots, a_n \in A$ vardır. Aynı zamanda $a_1 \mathbf{L} a_n \in A^+$ olup,

$$y(a_1 \mathbf{L} a_n) = y(a_1) \mathbf{L} y(a_n) = f(a_1) \mathbf{L} f(a_n) = a_1 \mathbf{L} a_n = s$$

oldüğundan y örtendir. Böylece S , A^+ nın bir homomorfik görüntüsüdür. ■

Tanım 2.35 A bir alfabe ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olmak üzere, $\langle A | R \rangle$ ikilisine bir *yarıgrup takdimi* denir ve s , A^+ üzerinde R tarafından doğrulmuş kongrüans olmak üzere, $\langle A | R \rangle$ tarafından takdim edilen yarıgrup A^+/s bölüm yarıgrupudur. Eğer S yarıgrubu A^+/s ya izomorfik ise $\langle A | R \rangle$ ye S nin bir *yarıgrup takdimi* denir.

Eğer A ve R sonlu kümeler ise $\langle A | R \rangle$ ye bir *sonlu takdim* ve eğer bir S yarıgrupunun bir sonlu takdimi var ise S ye *sonlu takdimli yarıgrup* denir.

Tanım 2.36 $\langle A|R \rangle$ bir yarıgrup takdimi ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $w_1 \equiv aub$ ve $w_2 \equiv avb$ olacak şekilde $a, b \in A^*$ ve $(u, v) \in R$ (veya $(v, u) \in R$) varsa w_2 , R deki bir ilişki bir kez kullanılarak w_1 den elde edilmiştir denir. Eğer $w_1 \equiv w_2$ ise veya $i = 1, 2, \mathbf{L}, n-1$ için a_{i+1} , R deki bir ilişki bir kez kullanılarak a_i den elde edilmiş olmak üzere, kelimelerin sonlu bir

$$w_1 \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \mathbf{L} \rightarrow a_n \equiv w_2$$

dizisi varsa w_2 , R deki ilişkiler kullanılarak w_1 den elde edilmiştir denir. Ayrıca, $w_1 = w_2$ ilişkisi $\langle A|R \rangle$ nin bir sonucudur veya sadece R nin bir sonucudur da denilebilir.

Teorem 2.37 S bir yarıgrup, $A \subseteq S$ ve $S = \langle A \rangle$ olsun. O zaman, $\langle A|R \rangle$ takdiminin S nin bir takdimi olabilmesi için gerek ve yeter koşul

- i) R deki tüm ilişkilerin S de sağlanıyor olması ve
- ii) her $u, v \in A^+$ için $u = v$ S de sağlanıyor iken $u = v$ bağıntısının R nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $S = \langle A|R \rangle = A^+ / R^\#$ olsun. $y : A^+ \rightarrow S$ serbest yarıgrup tanımındaki tek homomorfizm olmak üzere, Önerme 2.34 den dolayı y örtendir ve birinci izomorfizm teoreminden $S \cong A^+ / Kery$ olur. O halde $Kery = R^\#$ olup, R deki tüm ilişkiler S de sağlanır. Ayrıca, her $u, v \in A^+$ için $u = v$ ilişkisi S de sağlanıyor, yani $y(u) = y(v)$ ise $(u, v) \in R^\# = Kery$ olup $u = v$ ilişkisi R nin bir sonucudur.

($\Leftarrow$) i) ve ii) sağlansın ve $T \cong \langle A|R \rangle$ yani $T \cong A^+ / R^\#$ olsun. S yarıgrubu R deki ilişkileri sağladığından, $y : A^+ \rightarrow S$ serbest yarıgrup tanımındaki tek homomorfizm ve $R^\# = s$ olmak üzere, her $ws \in T$ için $y^\#(ws) = wy$ olarak tanımlanan $y^\# : T \rightarrow S$ dönüşümü bir örten homomorfizmdir. Ayrıca, her $us, vs \in T$ için $y^\#(us) = y^\#(vs)$ iken $y(u) = y(v)$ olup $u = v$ S de sağlanır. O halde, ii) den dolayı $u = v$ bağıntısı R nin bir sonucudur. Böylece, $(u, v) \in s$ olup $us = vs$ olduğundan $y^\#$ bire-birdir. Dolayısıyla $y^\#$ bir izomorfizm olup, $S \cong \langle A|R \rangle$ dir. ■

Teorem 2.38 S bir yarıgrup, $X \subseteq S$ olmak üzere $S = \langle X \rangle$, A da herhangi bir küme ve $a : A \rightarrow X$ bir örten fonksiyon ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ olsun. O zaman, $\langle A|R \rangle$ ikilisinin S nin bir yarıgrup takdimi olması için gerek ve yeter koşul, y serbest yarıgrup tanımındaki tek homomorfizm olmak üzere,

i) $\forall (r, s) \in R$ için $y(r) = y(s)$ olması ve

ii) $\forall u, v \in A^+$ için $y(u) = y(v)$ ise $u = v$ bağıntısının R nin bir sonucu olmasıdır.

İspat: İspatı için [Ruskuc, 1995] bakınız. ■

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi yazabiliriz.

Teorem 2.39 S bir yarıgrup, A herhangi bir küme ve $a : A \rightarrow S$ bir fonksiyon olsun. O zaman, $\langle A|R \rangle$ ikilisinin S nin bir yarıgrup takdimi olması için gerek ve yeter koşul, y serbest yarıgrup tanımındaki tek homomorfizm olmak üzere,

i) $a(A)$ nın S için bir doğuray kümesi olması,

ii) $\forall (r, s) \in R$ için $y(r) = y(s)$ olması ve

iii) $\forall u, v \in A^+$ için $y(u) = y(v)$ ise $u = v$ bağıntısının R nin bir sonucu olmasıdır. ■

Teorem 2.40: T bir yarıgrup, S de $T \setminus S$ sonlu olacak şekilde T nin alt yarıgrubu olsun. T nin sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul S nin sonlu doğuraylı olmasıdır. Özel olarak bir S yarıgrubu için S^1 in sonlu takdimli olması için gerek ve yeter koşul S nin sonlu takdimli olmasıdır.

İspat: İspat için [Ruskuc,1998] çalışmasındaki Teorem 1.1 ve Teorem 1.3 lerine bakınız. ■

Tanım 2.41 r , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve $(x_1, x_2) \in r$ olsun. Her bir $i = 1, 2$ için $j_i(x_1, x_2) = x_i$ olarak tanımlanan dönüşüme r dan S ye i . *izdüşüm* denir.

Tanım 2.42 r , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans ve X de r için bir doğuray kümesi olsun. Eğer her $(x, y) \in X$ için $(x, x), (y, y) \in X$ ise X kümesine r için bir *yansımali doğuray kümesi* denir.

Tanım 2.43 $P = \langle A | R \rangle$ S nin bir yarıgrup takdimi ve $W \subseteq A^+$ olsun. Eğer W kümesi, S nin her bir elemanını sadece bir elemanla temsil eden kelimelerden oluşuyor ise W ya S nin *kanonik formu* veya *normal formu* denir.

Tanım 2.44 S bir yarıgrup olsun. Eğer S , ayrık altarıgruplarının bir birleşimi ise S ye *yarıgrupların birleşimi* denir.

Tanım 2.45 S bir yarıgrup, Y bir band ve $a \in Y$ için S_a lar S nin ayrık altarıgrupları olsun. Eğer $S = \bigcup_{a \in Y} S_a$ ve her $a, b \in Y$ için $S_a S_b \subseteq S_{ab}$ ise S ye *yarıgrupların bandı* denir ve $B[Y, S_a]$ ile gösterilir.

Tanım 2.46 S bir monoid olsun. Eğer S , ayrık altmonoidlerinin bir birleşimi ise S ye *monoidlerin birleşimi* denir.

Tanım 2.47 S bir monoid, Y bir band ve $a \in Y$ için S_a lar S ayrık altmonoidleri olsun. Eğer $S = \bigcup_{a \in Y} S_a$ ve her $a, b \in Y$ için $S_a S_b \subseteq S_{ab}$ ise S ye *monoidlerin bandı* denir ve $B[Y, S_a]$ ile gösterilir.

Tanım 2.48 $B[Y, S_a]$ yarıgrupların bir bandı olsun. Eğer Y ayrıca bir yarılatı ise S ye *yarıgrupların yarılatısı* denir ve $S = S[Y, S_a]$ ile gösterilir.

Tanım 2.49 I bir yarılatı, $(\forall i \in I)$ S_i ayrık yarıgrupların bir ailesi ve $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ olsun. Eğer her $i \leq j$ ($i, j \in I$) için $f_{j,i} : S_j \rightarrow S_i$ homomorfizmi var ve bu homomorfizmler

(i) her bir $i \in I$ için $f_{i,i}$, S_i üzerindeki birim dönüşüm

(ii) her bir $i \leq j \leq k$ ($i, j, k \in I$) için $f_{k,j} f_{j,i} = f_{k,i}$

özelliklerini sağlıyor ise S ye *yarıgrupların güçlü yarılatısı* denir ve $S = S[I, S_i; f_{j,i}]$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, *monoidlerin yarılatıları* ve *güçlü yarılatıları* de tanımlanabilir.

3. KONGRÜANS TAKDİMİNDEN YARIGRUBUN TAKDİMİNİ ELDE ETME

S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. r kongrüansı $S \times S$ direk çarpım yarıgrubunun bir altarıgrubudur. Böylece biz bu bölümde r yu bir yarıgrup olarak ele alacağız. Eğer r sonlu takdimli bir yarıgrup ise S ve S/r nun sonlu takdimli olduğunu göstereceğiz. Ayrıca r için verilen bir takdimden S ve S/r için takdim elde edeceğiz.

Tanım 3.1 G ve H iki grup ve N de G nin bir normal alt grubu olsun. Eğer G/N bölüm grubu H ye izomorfik, yani $G/N \cong H$ ise G ye H nin N ile olan *genişlemesi* denir.

Eğer H ve N sonlu takdimli gruplar ise G de sonlu takdimli bir gruptur (bakınız [Johnson, 1990]). Bu sonuçtan hareketle S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere, r yu $S \times S$ nin bir altarıgrubu olarak ele alacağız. Yarıgruplar da normal altarıgrupların gördüğü işlemi kongrüanslar yaptığından, biz r nun sonlu takdimli olması durumunda S ve S/r nun sonlu takdimli olup olmadığını inceledik.

S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Biz r yu bir yarıgrup olarak incelediğimizden, aksi söylemedikçe doğuray kümesi ile yarıgrup doğuray kümesini anlayacağız.

Lemma 3.2 S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer X kümesi, r için bir doğuray kümesi ise j_i de i . izdüşüm olmak üzere $j_i(X)$ ($i=1,2$) S için bir doğuray kümesidir.

İspat: $s \in S$ olsun. r S üzerinde kongrüans olduğundan r yansımalıdır. O halde $(s, s) \in r$ dur. X , r için bir doğuray kümesi olduğundan $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in X$ olmak üzere

$$(s, s) = (x_1, y_1) \dots (x_m, y_m) \text{ dir.}$$

Bu eşitliğe j_i dönüşümü uygulanırsa

$$j_i(s, s) = j_i\{(x_1, y_1) \dots (x_m, y_m)\} \quad (i=1, 2)$$

$$s = x_1 \dots x_m = y_1 \dots y_m$$

elde edilir. O halde $s \in \langle j_i(X) \rangle$ ($i=1, 2$) dir. Böylece $j_i(X)$ ($i=1, 2$) de S için bir doğuray kümesidir. ■

Sonuç olarak, S bir yarıgrup ve r da S üzerinde bir kongrüans olmak üzere r bir monojenik yarıgruba izomorfik ise o zaman S de monojeniktir. Çünkü r monojenik bir yarıgruba izomorfik ise $r \cong \langle (a, b) \rangle$ şeklindedir. O halde Lemma 3.2 den dolayı $j_i(a, b)$ ($i=1, 2$) S için bir doğuray kümesi olup $S \cong \langle a \rangle$ ve $S \cong \langle b \rangle$ dir. Böylece S de monojeniktir.

Önerme 3.3 r , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r sonlu doğuraylı ise r için sonlu yansımali bir doğuray kümesi vardır.

İspat: X sonlu bir küme olmak üzere $X = \{(x_i, y_i) \mid i \in I\}$ r için bir doğuray kümesi olsun. $X_1 = \{x_i \mid i \in I\}$ ve $X_2 = \{y_i \mid i \in I\}$ alalım. r S üzerinde yansımali olduğundan $\{(x, x) \mid x \in X_1 \cup X_2\} \subseteq r$ dur. Şimdi $Y = X \cup \{(x, x) \mid x \in X_1 \cup X_2\}$ alalım. Y , r için yansımali doğuray kümesidir ve X sonlu olduğundan Y de sonludur. ■

Önerme 3.4 X , r için yansılalı bir doğuray kümesi ve $\langle X|R \rangle$ de r için bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer biz j_i izdüşüm fonksiyonunu X^+ dan $j_i(X)^+$ e bir homomorfizm olacak şekilde genişletirsek o zaman $w \equiv (x_1, y_1) \dots (x_m, y_m) \in X^+$ için

$$j_1(w) = x_1 \dots x_m \text{ ve } j_2(w) = y_1 \dots y_m$$

olur. $X_i = j_i(X)$ ve $R_i = j_i(R) = \{(j_i(r), j_i(s)) : (r, s) \in R\}$ ($i=1, 2$) alalım. O zaman $\langle X_i | R_i \rangle$ ($i=1, 2$) S için bir yarıgrup takdimidir.

İspat: Lemma 3.2 den X_i kümesinin S için bir doğuray kümesi olduğunu biliyoruz. $(r, s) \in R$ için

$$r \equiv (x_{i_1}, y_{i_1}) \dots (x_{i_m}, y_{i_m}) \text{ ve } s \equiv (x_{j_1}, y_{j_1}) \dots (x_{j_n}, y_{j_n})$$

olacak şekilde $(x_{i_1}, y_{i_1}), \dots, (x_{i_m}, y_{i_m}), (x_{j_1}, y_{j_1}), \dots, (x_{j_n}, y_{j_n}) \in X$ elemanları vardır. $r = s$ r da sağlandığından

$$x_{i_1} \dots x_{i_m} = x_{j_1} \dots x_{j_n}$$

$$y_{i_1} \dots y_{i_m} = y_{j_1} \dots y_{j_n}$$

ilişkileri de S de sağlanır. Böylece $j_1(r) = j_1(s)$ ve $j_2(r) = j_2(s)$ dir. Bundan dolayı R_i deki tüm bağıntılar S de sağlanır. $u, v \in X_i^+$, S de aynı elemanı temsil eden iki kelime olsun. O zaman

$$u \equiv x_1 \dots x_m, v \equiv y_1 \dots y_n$$

olacak şekilde $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n \in X_i$ elemanları vardır. X, r için yansımali bir doğuray kümesi ve $X_i = j_i(X)$ olduğundan

$$(x_1, x_1), \dots, (x_m, x_m), (y_1, y_1), \dots, (y_n, y_n) \in X$$

dir. $\bar{u} \equiv (x_1, x_1) \dots (x_m, x_m)$ ve $\bar{v} \equiv (y_1, y_1) \dots (y_n, y_n)$ olarak alalım. $\bar{u}$ ve $\bar{v}$ r da aynı elemanı temsil eder ve böylece $\bar{u} = \bar{v}$ ilişkisi r da sağlanır. Bundan dolayı $\bar{u}$ den $\bar{v}$ ye sonlu bir zincir vardır. Yani $i = 1, 2, \dots, n-1$ için a_{i+1} , R deki bir ilişki bir kez kullanılarak a_i den elde edilmiş olmak üzere, $a_1, a_2, \dots, a_n \in X^+$ kelimelerinin sonlu bir

$$\bar{u} \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \equiv \bar{v}$$

dizisi vardır. Burada $1 < j \leq n$ için, $(r_j, s_j) \in R$ veya $(s_j, r_j) \in R$ olmak üzere $a_{j-1} \equiv u_j r_j v_j$ ve $a_j \equiv u_j s_j v_j$ olacak şekilde $u_j, v_j \in X^*$ vardır. Şimdi a_{j-1} ve a_j ye X^+ dan $j_i(X)^+$ e genişlemesi olan j_i homomorfizmini uygularsak

$$a_{j-1}^i \equiv j_i(u_j) j_i(r_j) j_i(v_j)$$

$$a_j^i \equiv j_i(u_j) j_i(s_j) j_i(v_j)$$

elde edilir. $j_i(r_j) = j_i(s_j)$ bağıntısı R_i de sağlandığından,

$$\bar{u} \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_n \equiv \bar{v}$$

zincirindeki tüm elemanlara bu homomorfizmi uygularsak u dan v ye sonlu bir zincirin olduğu görülür. Yani $a_1^i, a_2^i, \dots, a_k^i \in X_i^+$ kelimelerinin sonlu bir dizisi

$$u \equiv a_1^i \rightarrow a_2^i \rightarrow \dots \rightarrow a_k^i \equiv v$$

vardır öyle ki $a_j^i (1 < j \leq n)$ kelimesi R_i bağıntılarından bir tanesi kullanılarak a_{j-1}^i den elde edilir. Böylece $u = v$ R_i nin bir sonucudur. O halde $\langle X_i | R_i \rangle$, S yarıgrubunun bir takdimidir. ■

r , S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r , $S \times S$ nin bir altarıgrubu olarak $X \subseteq S \times S$ tarafından sonlu doğrulmuş ise r nun S üzerinde bir kongrüans olarak da X kümesi tarafından sonlu doğrulduğu açıktır. Yani r yarıgrup olarak sonlu doğrulmuş ise kongrüans olarak da sonlu doğrulur. Fakat bunun tersi doğru değildir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Örnek 3.5 $S = (\mathbb{C}^+, +)$ yarıgrubunu ve $r = \{(1, 2)\}^\#$ kongrüansını alalım. $(\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+, \oplus)$ nin yarıgrup olarak sonlu doğrulmadığını fakat kongrüans olarak sonlu doğrulduğunu gösterelim.

Kongrüansın sol uyumluluk özelliğinden $\forall t \in \mathbb{C}^+$ için

$$(t, t) \oplus (1, 2) = (t+1, t+2) \in r$$

dur. Yani $\forall t \in \mathbb{C}^+$ için $(t, t+1) \in r$ dur. Herhangi bir $t < s$ koşulunu sağlayan $s \in \mathbb{C}^+$ için

$$(t, s) = (t, t+1) \circ (t+1, t+2) \circ \dots \circ (s-2, s-1) \circ (s-1, s) \in r$$

olur. Simetri özelliğinden $(s, t) \in r$ dur. r bir kongrüans olduğundan $(1, 1) \in r$ ve $t \geq 2$ için $(t-1, t-1) \in S \times S$ olup kongrüansın sağ uyumluluk özelliğinden

$$(1, 1) \oplus (t-1, t-1) = (t, t) \in r$$

dir. O halde $S \times S$, r tarafından kongrüans olarak sonlu doğuraylıdır. $(m, n) \in S^2$ ise $m, n \geq 2$ olmak zorundadır. O halde

$$\{(1, n), (m, 1) : m, n \in \mathbb{C}^+\} \subseteq S \setminus S^2$$

dır. Çünkü $(m, 1) = (x, y) \oplus (u, v)$ $m, x, y, u, v \in \mathbb{C}^+$ olsaydı

$$m = x + u \text{ ve } 1 = y + v$$

olup $1 = y + v$ çelişkisi elde edilir. $(m, 1) \notin S^2$ dir ve benzer şekilde $(1, n) \notin S^2$ dir. Önerme 2.29 dan dolayı $\{(1, n), (m, 1) : m, n \in \mathbb{C}^+\}$ kümesini $(\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+, \oplus)$ nin her doğuray kümesi içermek zorundadır. $\{(1, n), (m, 1) : m, n \in \mathbb{C}^+\}$ kümesi sonlu olmadığından $(\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}^+, \oplus)$ yarıgrup olarak sonlu doğuray kümesine sahip değildir.

Lemma 3.6 Eğer S sonlu takdimli bir yarıgrup ve r da S üzerinde kongrüans olarak sonlu doğuraylı ise S/r da sonlu takdimlidir.

İspat: $\langle X | R \rangle$, S yarıgrubu için bir sonlu takdim ve r da $Y = \{(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)\}$ sonlu kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. $S/r = \{ar : a \in S\}$ dir. $a \in S$ olup $a = x_1 \dots x_n$ olacak şekilde $x_1, \dots, x_n \in X$ elemanları vardır. $x_m r = \{x : (x_m, x) \in r\}$ olup bu x elemanı S nin bir elemanı olduğundan X kümesi S/r için bir doğuray kümesidir.

$$S/r \cong \frac{X^+ / R^\#}{r} = X^+ / (R \cup Y)^\#$$

olduğundan $\langle X | R \cup \{a_1 = b_1, \dots, a_k = b_k\} \rangle$ ikilisi S/r için bir takdimdir. ■

Teorem 3.7 S bir yarıgrup ve r da S yarıgrubu üzerinde bir kongrüans olsun. Eğer r sonlu takdimli ise S ve S/r da sonlu takdimlidir.

İspat: Eğer r sonlu takdimli ise o zaman r için bir sonlu doğuray kümesi bulunabilir. Önerme 3.3 den r için X gibi bir sonlu yansımali doğuray kümesi vardır. $\langle X|R \rangle$ takdimi, r için bir takdim olsun. Önerme 3.4 den $\langle j_1(X)|j_1(R) \rangle$ S için bir takdimdir ve bu takdim sonludur. Böylece S sonlu takdimlidir. r yarıgrup olarak sonlu doğuraylı olduğundan, kongrüans olarak ta sonlu doğuraylıdır. Lemma 3.6 dan S/r da sonlu takdimlidir. ■

4. YARIGRUPLARIN GÜÇLÜ YARILATISLERİ İÇİN TAKDİMLER

Bu bölümde $S = S[I, S_i; f_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi olmak üzere; S yarıgrubunun takdimi verildiğinde $S_i (i \in I)$ yarıgruplarının takdimini ve $S_i (i \in I)$ yarıgruplarının takdimleri verildiğinde S yarıgrubunun takdimini bulacağız. Bulunan bu takdimler için sonlu takdimli olma koşulunu inceledik.

Önerme 4.1 $S = S[I, S_i; f_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi olsun. Her bir $i \in I$ için A_i ile S_i nin doğuray kümesini ve A ile de S nin doğuray kümesini gösterelim. $a \in A_i$ ve $u \in A_j^+ (i \neq j)$ olsun. O zaman $ua = v$ bağıntısı $a_j a = (a_j f_{j,ij})(af_{i,ij})$ ($a \in A_i, a_j \in A_j$) bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $v \in A_j^+$ vardır.

İspat: u nun boyu üzerinden tümevarım yapalım. Eğer $|u| = 1$ ise $v \equiv (u f_{j,ij})(af_{i,ij})$ alınır. Önerme, boyu $n-1$ olan kelimeler için doğru olsun. Tümevarım hipotezinden $b \in A_j$ ve $v_1 \in A_j^*$ için bv_1 kelimesi vardır ve $(a_2 \dots a_n)a = bv_1$ bağıntısı $a_j a = (a_j f_{j,ij})(af_{i,ij})$ ($a \in A_i, a_j \in A_j$) nin bir sonucudur. $|u| = n$ olsun. u , A_j deki n tane elemanın çarpımı olarak

$$u \equiv a_1 \dots a_n, \quad (a_1, \dots, a_n \in A_j)$$

şeklinde yazılır. I bir yarılatis olduğundan $jij = jji = j^2i = ji = ij$ dir. $f_{ij,ij}$, S_{ij} üzerinde birim dönüşümü göstermektedir. O halde $|a_2 \dots a_n| = n-1$ olduğundan

$$ua \equiv a_1((a_2 \dots a_n)a) = (a_1 b)v_1 = ((a_1 f_{j,jij})(bf_{ij,jij}))v_1 \equiv ((a_1 f_{j,ij})b)v_1$$

dir. $(a_1 f_{j,ij}) \in A_j^+$ olduğundan $v \equiv (a_1 f_{j,ij})bv_1$ alınarak ispat tamamlanır. ■

Önerme 4.2 Eğer $u \equiv a_{i_1} \dots a_{i_m}$ ($a_{i_1}, \dots, a_{i_m} \in A$) ve $k = i_1 \dots i_m$, ise o zaman $u = \bar{u}$ bağıntısı $a_i a_j = (a_i f_{i,ij})(a_j f_{j,ij})$ ($a_i \in A_i, a_j \in A_j$) bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $\bar{u} \in A_k^+$ kelimesi vardır.

İspat: m üzerinden tümevarım yapalım. Eğer $m=1$ ise o zaman $u \equiv \bar{u} \equiv a_{i_1}$ dir. $m \geq 2$ ve önerme boyu $m-1$ olan kelimeler için doğru olsun. $k_1 = i_1 \dots i_{m-1}$ alalım. Tümevarım hipotezinden $u_1 \equiv a_{i_1} \dots a_{i_{m-1}} = \bar{u}_1$ bağıntısı $a_i a_j = (a_i f_{i,ij})(a_j f_{j,ij})$ ($a_i \in A_i, a_j \in A_j$) bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $\bar{u}_1 \in A_{k_1}^+$ kelimesi vardır. Önerme 4.1 den $\bar{u}_1 a_{i_m} = \bar{u}$ olacak şekilde $\bar{u} \in A_{k_1 i_m}^+$ vardır. $k_1 i_m = k$ olduğundan $\bar{u} \in A_k^+$ için

$$u \equiv (a_{i_1} \dots a_{i_{m-1}}) a_{i_m} = \bar{u}_1 a_{i_m} = \bar{u}$$

olup ispat biter. ■

Teorem 4.3 $S = S[I, S_i; f_{j,i}]$ yarıgrupların güçlü yarılatisi ve $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ olmak üzere $P_i = \langle A_i | R_i \rangle$, $S_i (i \in I)$ için bir yarıgrup takdimi olsun. Eğer $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ alınırsa

$$P = \langle A | R, a_i a_j = (a_i f_{i,ij})(a_j f_{j,ij})(a_i \in A_i, a_j \in A_j, i \neq j) \rangle$$

$S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ için bir takdimdir.

İspat: $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ yi A nın doğurduğu ve P deki tüm bağıntıların $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ de sağlandığı açıktır. $f_{i,i}$, S_i üzerinde birim dönüşüm olup $i^2 = i (i \in I)$ dır. $P = \langle A | R, a_i a_j = (a_i f_{i,j})(a_j f_{j,i})(a_i \in A_i, a_j \in A_j, i \neq j) \rangle$ alalım.

$u = v$ bağıntısı $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ de sağlanacak şekilde u ve v , A^+ da iki kelime olsun. Böylece u ve v kelimeleri $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ nin aynı elemanını temsil eder. Önerme 4.2 den $\bar{u} \in A_k^+$ ve $\bar{v} \in A_l^+$ olacak şekilde $k, l \in I$ vardır. Ayrıca $u = \bar{u}$ ve $v = \bar{v}$ bağıntıları $a_i a_j = (a_i f_{i,j})(a_j f_{j,i})$ ($a_i \in A_i, a_j \in A_j$) bağıntısının bir sonucudur. S_k ve S_l ayrık yarıgruplar olup $\bar{u} = \bar{v}$ bağıntısı hem S_k da hem de S_l de sağlanır. O halde $k = l$ olup $\bar{u} = \bar{v}$, R_k nın bir sonucudur. Böylece $u = v$, P nin bir sonucudur. ■

Önerme 4.4 A , $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ için bir doğuray kümesi ve $B_j = \{a \in A : a \in S_j\}$ ($j \in I$) olsun. O zaman her bir $i \in I$ için,

$$A_i = \bigcup_{j \geq i} \{a_{j,i} \in S_i : a_j \in B_j, a_j f_{j,i} = a_{j,i}\}$$

kümesi S_i için bir doğuray kümesidir.

İspat: $A_i \subset S_i$ olduğundan $S_i \subseteq \langle A_i \rangle$ olduğunu göstermek yeterlidir. $s \in S_i$ için $a_{i(1)}, \dots, a_{i(m)} \in A$ olmak üzere $s = a_{i(1)} \dots a_{i(m)}$ dır. S üzerindeki çarpmanın tanımından $i(1), \dots, i(m) \geq i$ dir ve $i(k) = i$ olacak şekilde bir $k \in \{1, \dots, m\}$ vardır. Böylece

$$s = a_{i(1)} \dots a_{i(m)} = (a_{i(1)} f_{i(1),i}) \dots (a_{i(m)} f_{i(m),i}) \equiv a_{i(1),i} \dots a_{i(m),i} \in \langle A_i \rangle$$

olup ispat biter. ■

Dikkat edilecek olursa $a_i f_{i,i} = a_{i,i} \equiv a_i$ dır. Üstelik $a_j, a'_j \in B_j$ için $a_j \neq a'_j$ iken $a_j f_{j,i} = a'_j f_{j,i}$ sonucuyla karşılaşabiliriz. Her bir $a_{j,i} \in A_i$ için $a_j f_{j,i} = a_{j,i}$ olacak şekilde bir $a_j \in B_j$ belirleyelim. Bu belirlediğimiz a_j elemanını $\bar{a}_{j,i}$ ile gösterelim.

$\langle A|R \rangle$, $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ için bir takdim olsun. A_i vasıtasıyla $S_i (i \in I)$ için bir takdim inşa edelim. $\Phi_i : (\bigcup_{j \geq i} B_j)^+ \rightarrow A_i^+$ şeklinde tek homomorfizmi, her bir $a \in B_j$ ve $j \geq i$ olmak üzere $a\Phi_i = a f_{j,i}$ olarak tanımlansın. $W_i = (\bigcup_{j \geq i} B_j)^* B_i (\bigcup_{j \geq i} B_j)^*$ olsun.

Dikkat edilecek olursa $w \in A^+$ olmak üzere w nun S_i nin bir elemanını temsil etmesi için gerek ve yeter koşul $w \in W_i$ olmasıdır. Böylece W_i kümesi S_i için bir kanonik formdur.

Teorem 4.5 $P = \langle A|R \rangle$, $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ için bir yarıgrup takdimi olsun. Yukarıdaki notasyonlar la

$$R_i = \{(r\Phi_i, s\Phi_i) : (r,s) \in R \cap ((\bigcup_{j \geq i} B_j)^* \times (\bigcup_{j \geq i} B_j)^*)\}$$

olmak üzere $P_i = \langle A_i | R_i \rangle$ takdimi $S_i (i \in I)$ yarıgrubu için bir takdimdir.

İspat: Önerme 4.4 ten dolayı A_i kümesinin S_i yarıgrubu için bir doğuray kümesi olduğunu biliyoruz.

$$R_i = \{(r\Phi_i, s\Phi_i) : (r,s) \in R \cap ((\bigcup_{j \geq i} B_j)^* \times (\bigcup_{j \geq i} B_j)^*)\}$$

kümesindeki tüm bağıntılar S_i de sağlanır.

$a_{j(1),i}, \dots, a_{j(m),i}, a_{l(1),i}, \dots, a_{l(n),i} \in A_i$ olmak üzere $u \equiv a_{j(1),i} \dots a_{j(m),i}$ ve $v \equiv a_{l(1),i} \dots a_{l(n),i}$ olarak alalım. $u = v$ bağıntısı S_i de sağlanıyor olsun. Bu durumda $u = v$ bağıntısının R_i nin bir sonucu olduğunu gösterelim.

$\bar{u}, \bar{v} \in A^+$ kelimeleri ile $a_{j,i}$ yerine $\bar{a}_{j,i}$ yazarak u ve v den elde ettiğimiz kelimeleri gösterelim. Bu durumda $\Phi_i(\bar{u}) = u$ ve $\Phi_i(\bar{v}) = v$ dir. $\bar{u} = \bar{v}$ bağıntısının S de sağlandığı açıktır. Böylece $a_1, a_2, \dots, a_m \in A^+$ olmak üzere

$$\bar{u} \equiv a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a_m \equiv \bar{v}$$

şeklinde sonlu bir zincir vardır. Burada her bir $a_{k+1} (1 \leq k < m)$ terimi R deki bağıntılardan biri kullanılarak bir önceki a_k teriminden elde edilmiştir. Eğer $b_k, g_k \in A^*$ ve $(r_k, s_k) \in R$ (veya $(s_k, r_k) \in R$) olmak üzere $a_k \equiv b_k r_k g_k$ ve $a_{k+1} \equiv b_k s_k g_k$ ise $b_k, g_k, r_k, s_k \in (\bigcup_{j \geq i} B_j)^*$ olmalıdır. Böylece $b_k \Phi_i, g_k \Phi_i \in A_i^*$ ve $(r_k \Phi_i, s_k \Phi_i) \in R_i$ (veya $(s_k \Phi_i, r_k \Phi_i) \in R_i$) olmak üzere

$$a_k \Phi_i \equiv (b_k \Phi_i)(r_k \Phi_i)(g_k \Phi_i)$$

$$a_{k+1} \Phi_i \equiv (b_k \Phi_i)(s_k \Phi_i)(g_k \Phi_i)$$

dir. O halde $a_1 \Phi_i, a_2 \Phi_i, \dots, a_m \Phi_i \in A_i^+$ olmak üzere

$$u \equiv a_1 \Phi_i \rightarrow a_2 \Phi_i \rightarrow \dots \rightarrow a_m \Phi_i \equiv v$$

şeklinde sonlu bir zincir vardır. Böylece $u = v$ bağıntısı R_i nin bir sonucudur. ■

Teorem 4.6 $S_i(i \in I)$ ayrık yarıgruplarının güçlü yarılatisi $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ nin sonlu takdimli olması için gerek ve yeter koşul I kümesinin sonlu ve her bir $S_i(i \in I)$ yarıgrubunun sonlu takdimli olmasıdır.

İspat: $S_i(i \in I)$ ayrık yarıgruplarının güçlü yarılatisi $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ sonlu takdimli olsun. $W_i = (\bigcup_{j \geq i} B_j)^* B_i (\bigcup_{j \geq i} B_j)^*$ kümesi S_i nin her bir elemanını temsil eder ve W_i kümesi S_i için bir kanonik formdur. S nin doğuray kümesi olan A sonlu ve $S_i(i \in I)$ yarıgrupları ayrık olduklarından sonlu sayıda $B_i = \{a \in A : a \in S_i\}$ kümesi vardır. Böylece sonlu sayıda W_i kümesi vardır. Üstelik $W = \bigcup_{i \in I} W_i$ olup I sonludur. Teorem 4.5 den her bir $S_i(i \in I)$ sonlu takdimlidir.

I kümesi sonlu ve her bir $S_i(i \in I)$ yarıgrubu sonlu takdimli olsun. $\langle A_i | R_i \rangle$, $S_i(i \in I)$ nin takdimi olsun. Bu durumda A_i ve R_i sonludur. I sonlu olduğundan $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ve $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ de sonludur. Teorem 4.3 den $S = S[I; S_i, f_{j,i}]$ yarıgrubu da sonlu takdimlidir. ■

5. YARIGRUPLARIN BİRLEŞİMLERİ İÇİN DOĞURAYLAR VE İLİŞKİLER

Bu bölümde yarıgrupların birleşimi için doğuray kümesi ve ilişkiler araştırılacaktır. Yarıgrupların bandları, monoidlerin bandları, yarıgrupların yarılatısı ve yarıgrupların güçlü yarılatısı gibi genel birleşimler için bu araştırmaları yapacağız.

S yarıgrubunu, S nin ayrık altarıgrupları S_i ($i \in I$) nın birleşimi olarak göz önünde bulunduralım. Bu durumda aşağıdaki dört soruyu ele alacağız.

S1. Eğer tüm S_i ($i \in I$) ler sonlu doğuraylı ise, S de sonlu doğuraylı mıdır?

S2. Eğer S sonlu doğuraylı ise, tüm S_i ($i \in I$) ler sonlu doğuraylı mıdır?

S3. Eğer tüm S_i ($i \in I$) ler sonlu takdimli ise, S de sonlu takdimli midir?

S4. Eğer S sonlu takdimli ise, tüm S_i ($i \in I$) ler sonlu takdimli midir?

Bu konuda bulunan tüm sonuçlar aşağıdaki tabloda özetlenmiştir. Eğer tüm S_i ($i \in I$) ler grup ise bu soruların yanıtlarının ispatlarını [Ruskuc, 1999] çalışmasında bulabilirsiniz. Tablo 2 de sd, st kısaltmaları sırasıyla sonlu doğuraylı sonlu takdimli anlamındadır.

	S1 $\forall S_i \text{ sd} \Rightarrow S \text{ sd.}$	S2 $S \text{ sd} \Rightarrow \forall S_i \text{ sd.}$	S3 $\forall S_i \text{ st} \Rightarrow S \text{ st.}$	S4 $S \text{ st} \Rightarrow \forall S_i \text{ st.}$
Yarıgrupların birleşimi	EVET	HAYIR	HAYIR	HAYIR
Monoidlerin birleşimi	EVET	HAYIR	HAYIR	HAYIR
Grupların birleşimi	EVET	EVET	EVET	EVET
Yarıgrupların bandı	EVET	HAYIR	EVET	HAYIR
Monoidlerin bandı	EVET	EVET	EVET	EVET
Yarıgrupların yarılatısı	EVET	HAYIR	EVET	HAYIR
Yarıgrupların güçlü yarılatısı	EVET	EVET	EVET	EVET

Tablo 2

Bu soruları sırasıyla, yarıgrupların genel birleşimleri, yarıgrupların bandında, monoidlerin bandında ve yarıgrupların güçlü yarılatılarında inceleyeceğiz.

5.1 Yarıgrupların Genel Birleşimi

S , bazı ayrık alt yarıgruplarının birleşimi olan bir yarıgrup olsun. Bu S yarıgrubuna *yarıgrupların birleşimi* denir. Bu durumda ispatı açık olan aşağıdaki önermeye sahibiz.

Önerme 5.1 S yarıgrubu, ayrık alt yarıgrupları $(S_i)_{(i \in I)}$ nın birleşimi olsun. Eğer her bir S_i yarıgrubu, X_i ($i \in I$) tarafından doğruluyor ise S yarıgrubu da $\bigcup_{i \in I} X_i$ tarafından doğrulur.

Bu önermenin sonucu olarak tüm S_i ($i \in I$) ler sonlu doğuraylı ise, S de sonlu doğuraylıdır. Böylece Önerme 5.1 den dolayı S1 sorusunun yanıtı Tablo 2 de evettir.

S2, S4 soruların yarıgrupların genel birleşimlerinde sağlanmadığını aksi örnekler vererek gösterelim.

Örnek 5.2 S monoidi

$$\langle a, b, c \mid ab = ba = 1, ac = c, bc = c, c^2 = c, \rangle$$

(monoid) takdimine sahip olsun. S_1 monoidi $\langle a, b \mid ab = ba = 1 \rangle$ takdimine ve $S_2 = \{cb^i, ca^i : i \geq 0\}$ takdimine sahip olmak üzere $S = S_1 \cup S_2$ dir. Dikkat edilecek olursa S_1 sonsuz devirli grup ve S_2 ise sonsuz sol sıfır yarıgruptur. Bundan dolayı

S_1 ve S_2 sonlu takdimli değildirler. Yani S sonlu doğuraylıdır fakat S_2 sonlu doğuraylı değildir. Ayrıca S sonlu takdimlidir fakat S_2 sonlu takdimli değildir.

Yukarıdaki Örnek 5.2 den dolayı S sonlu doğuraylı bir yarıgrup iken tüm $S_i (i \in I)$ ler sonlu doğuraylı olmak zorunda değildir. Dahası, S sonlu takdimli bir yarıgrup ise tüm $S_i (i \in I)$ ler sonlu takdimli olmak zorunda değildir. Böylece yarıgrupların birleşiminin S2 ve S4 sorularının yanıtları Tablo 2 de hayırdır.

Örnek 5.3 T bir yarıgrup ve T nin Cayley Tablosu aşağıdaki gibi olsun.

	a	b	c	0
a	a	a	c	0
b	b	b	c	0
c	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Tablo 3

U herhangi bir sonlu takdimli fakat sonsuz bir yarıgrup olsun. [Araujo, Ruskuc, 2000] çalışmasından $S = T \times U$ nin sonlu takdimli olmadığı gösterilmiştir. $S_1 = \{a\} \times U$ ve $S_2 = \{b, c, 0\} \times U$ yarıgrupları S nin altarıgrupları ve $S = S_1 \cup S_2$ olduğu açıktır. S_1 yarıgrubu, U yarıgrubuna izomorfik olduğundan sonlu takdimlidir. [Araujo, Ruskuc, 2000] çalışmasındaki Örnek 3.2 den dolayı S_2 yarıgrubu da sonlu takdimlidir. O halde S_1 ve S_2 sonlu takdimli olduğu halde S sonlu takdimli değildir. ■

Bu aksi Örnek 5.3 ten dolayı S3 sorusunun yanıtı Tablo 2 de hayırdır.

Yukarıdaki Örnek 5.2 ve Örnek 5.3 de S yi monoid olarak göz önünde bulundurmamak demek yeni bir birim elemanı S ye eklemek demektir. Böylece S_1^1 ve S_2^1 monoidlerine izomorfik ayrık iki yarıgrubun birleşimi olarak S^1 monoidi inşa edilmiş olur. Teorem 2.40 dan dolayı S_i ($i \in I$) ler monoid olması durumunda da S2, S3, S4 sorularının yanıtı da Tablo 2 de hayırdır.

5.2 Yarıgrupların Bandları

$S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı olsun. Yarıgrupların bandı için S1, S2, S3 ve S4 için yanıt arayacağız. Önerme 5.1 den dolayı S1 in yanıtı Tablo 2 de evettir. Bir yarılatı aynı zamanda bir band olduğundan Örnek 5.2 deki S yi, S_1 ve S_2 yarıgruplarının bandı olarak alabiliriz. Böylece Örnek 5.2 de bu duruma aksi örnek teşkil edeceğinden Tablo 2 de S2 ve S4 ün yanıtı hayırdır.

Şimdi $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı için S3 sorusuna yanıt arayalım. Bunun için öncelikle $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı olmak üzere her bir $a \in Y$ için S_a yarıgrubu $a \neq b$ için $A_a \cap A_b = \emptyset$ olmak üzere $\langle A_a | R_a \rangle$ takdimi tarafından tanımlandığında S için bir takdim inşa edelim. S için bir takdimi inşa ederken aşağıdaki bazı ekstra lemmalara ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 5.4 $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı, S nin doğuray kümesi A ve S_a ($a \in Y$) nin da doğuray kümesi A_a olsun. $x \in A_a$, $u' \in A^*$ olmak üzere her bir $u \equiv xu'$ kelimesi için $a_1, \dots, a_k \in Y$ ve $a \geq_R a_1 \geq_R \dots \geq_R a_k$ ile $u_1 \in A_{a_1}^+, \dots, u_k \in A_{a_k}^+$

kelimeleri vardır öyle ki ve $u = u_1 \dots u_k$ bağıntısı $ab = z(a, b) (a, b \in A)$ bağıntısının bir sonucudur.

İspat: İspatı u nun uzunluğu üzerinden tümevarımla yapalım. Eğer $|u| = 1$ ise $k = 1$ alınır ve $u_1 \equiv u$ olur. Boyu n olan kelimeler için önerme doğru olsun ve $|u| = n + 1$ olsun. $a_1 \in A_{u_1}, a_2 \in A_{u_2}$ ve $u' \in A^*$ olmak üzere $u \equiv a_1 a_2 u'$ olarak alalım.

$$u = z(a_1, a_2)u'$$

bağıntısı $ab = z(a, b) (a, b \in A)$ bağıntısının bir sonucudur. $u_1 \in A_{u_1 a_2}^*$ ve $x \in A_{u_1 a_2}$ olmak üzere $z(a_1, a_2) \equiv u_1 x$ olarak alalım. Bu durumda $|xu'| = n$ olup tümevarım hipotezini ve $a_1 \geq_R a_1 a_2$ bağıntısını kullanalım. $|xu'| = n$ olup $a_3, \dots, a_m \in Y$ vardır ve $u_3 \in A_{a_3}^+, \dots, u_m \in A_{a_m}^+$ olup $xu' = u_3 \dots u_m$ bağıntısı $ab = z(a, b) (a, b \in A)$ bağıntısının bir sonucudur.

$$u = u_1 xu' = u_1 u_3 \dots u_m$$

dir. $u_1 \in A_{a_1 a_2}^*, u_3 \in A_{a_3}^+, \dots, u_m \in A_{a_m}^+$ ve $a_1 a_2 \geq_R a_3 \geq_R \dots \geq_R a_m$ olup ispat biter. ■

Lemma 5.5 $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı olsun. S nin doğuray kümesi A , $S_a (a \in Y)$ nin doğuray kümesi A_a ve $S_b (b \in Y)$ nin da doğuray kümesi A_b olsun. $a, b \in Y$ ve $a \geq_R b$ olmak üzere, $u \in A_a^+$ ve $v \in A_b^+$ ise $uv = w$ bağıntısı $ab = z(a, b) (a, b \in A)$ bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $w \in A_b^+$ vardır.

İspat: u nun uzunluğu üzerinden tümevarım yapalım. $y \in A_b$, $v' \in A_b^*$ olmak üzere $v \equiv yv'$ koyalım. Eğer $|u|=1$ ise $w \equiv z(u, y)v'$ şeklindedir. Önerme boyu n olan tüm kelimeler için doğru olduğunu kabul edelim. $u \in A_a^+$ olacak şekilde $|u|=n+1$ olsun. $u' \in A_a^+$ ve $x \in A_a$ olmak üzere $u \equiv u'x$ koyalım. O zaman $xy = z(x, y)$ ilişkisini kullanarak

$$uv \equiv u'xyv' = u'z(x, y)v'$$

dir. $|u'|=n$ ve $z(x, y) \in A_{ab}^+ = A_b^+$ olduğundan $u'(z(x, y)v')$ ye tümevarım hipotezini uygularsak $ab = z(a, b)$ ($a, b \in A$) bağıntısının bir sonucu olarak $w_1 \in A_b^+$ ile

$$w_1 = u'z(x, y)v' = uv$$

elde edilir. ■

Lemma 5.6 $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı olsun. S nin doğuray kümesi A , her bir $1 \leq j \leq k$ için $S_{a_j}(a_j \in Y)$ nin doğuray kümesi A_{a_j} olsun. Eğer $a_1, \dots, a_k \in Y$, $a_1 \geq_R \dots \geq_R a_k$ olmak üzere $u_1 \in A_{a_1}^+, \dots, u_k \in A_{a_k}^+$ ise $u_1 \dots u_k = w$ bağıntısı $ab = z(a, b)$ ($a, b \in A$) bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $w \in A_{a_k}^+$ vardır.

İspat: k üzerinden tümevarım yapalım. Eğer $k=1$ ise ispatlanacak bir şey yoktur. Önerme k için doğru olsun. $a_1 \geq_R a_2 \geq_R \dots \geq_R a_k \geq_R a_{k+1}$ olmak üzere

$u_1 \in A_{a_1}^+, \dots, u_k \in A_{a_k}^+, u_{k+1} \in A_{a_{k+1}}^+$ olsun. $u_1 \dots u_k = w_1$ bağıntısı $ab = z(ab)(a, b \in A)$ bağıntısının bir sonucu olacak şekilde bir $w_1 \in A_{a_k}^+$ kelimesi vardır. Lemma 5.5 den $w_1 u_{k+1} = w$ olacak şekilde $w \in A_{a_{k+1}}^+$ var olup ispat biter. ■

Teorem 5.7 $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bandı olsun. Her bir $a \in Y$ için S_a yarıgrubu $a \neq b$ için $A_a \cap A_b = \emptyset$ olmak üzere $\langle A_a | R_a \rangle$ takdimi tarafından tanımlandığını kabul edelim. O zaman S yarıgrubu

$$\left\langle \bigcup_{a \in Y} A_a \mid \bigcup_{a \in Y} R_a, ab = z(a, b) \left(a, b \in \bigcup_{a \in Y} A_a \right) \right\rangle$$

takdimi ile tanımlıdır.

İspat: $R = \bigcup_{a \in Y} R_a, ab = z(a, b) \left(a, b \in \bigcup_{a \in Y} A_a \right)$ olsun. Önerme 5.1 den, S yarıgrubu $\bigcup_{a \in Y} A_a$ tarafından doğurulur. İddia edilen takdimdeki tüm bağıntıların S de sağlandığı açıktır. A alfabesi üzerindeki u ve v kelimeleri, S nin aynı elemanını temsil etsin. Lemma 5.4 ve Lemma 5.6 den $u = \bar{u}$ ve $v = \bar{v}$ bağıntıları $ab = z(ab)(a, b \in A)$ bağıntısının bir sonucu olacak şekilde $b, g \in Y$, $\bar{u} \in A_b^+$ ve $\bar{v} \in A_g^+$ vardır. $ab = z(a, b)(a, b \in A)$ bağıntısı S de sağlandığından $\bar{u} = \bar{v}$ bağıntısı da S de sağlanır. S nin altyarıgrupları ayrık olduğundan $b = g$ dır. Böylece $\bar{u} = \bar{v}$ bağıntısı S_b da sağlanır ve R_b nin bir sonucudur. $u = v$ bağıntısı da R nin bir sonucudur. ■

Teorem 5.7 den dolayı aşağıdaki sonuca sahibiz.

Sonuç 5.8 $S = B[Y, S_a]$ yarıgrupların bir bandı olsun. Eğer Y sonlu ve her bir $S_a (a \in Y)$ yarıgrubu sonlu takdimli ise S yarıgrubu da sonlu takdimlidir.

İspat: Her bir $S_a (a \in Y)$ sonlu takdimli ise her bir $A_a (a \in Y)$ ve $R_a (a \in Y)$ sonludur. Y bandı sonlu olduğundan sonlu kümelerin sonlu birleşimleri sonlu olup $\bigcup_{a \in Y} A_a = A$ ve $\bigcup_{a \in Y} R_a$ de sonludur. Sonuç 5.8 Teorem 5.7 nin bir sonucudur. ■

5.3 Monoidlerin Bandları

$S = B[Y, S_a]$ ve her bir $S_a (a \in Y)$ monoid olsun. S_a monoidinin birimini 1_a ile gösterelim.

Teorem 5.9 $S = B[Y, S_a]$ monoidlerin bandı A kümesi tarafından doğuruluyor olsun. O zaman her bir $x \in Y$ için, S_x monoidi

$$X = \{1_x a 1_b : a \in S_a \cap A, a, b \in Y, xab = x\}$$

kümesi tarafından doğurulur.

İspat: Monoidlerin bandlarının tanımından öncelikle X kümesinin S_x tarafından içerildiğini ve $S_x = \{s 1_b : s \in S_a, a, b \in Y, ab = x\}$ olduğunu gösterelim. $ab = x$ olacak şekilde $s \in S_a, a, b \in Y$ ile $s 1_b \in S_x$ olsun. Eğer $s \in A$ ise $s 1_b = 1_x s 1_b \in X$

olur. $s_1 \in S_{a_1}, a \in S_{a_2} \cap A$ olmak üzere $s = s_1 a$ olduğunu varsayalım. Böylece $a_1 a_2 = a$ dır. Üstelik $a_1 b \in S_{a_2 b}$ ve $s_1 a_2 b \in S_{a_1 a_2 b} = S_{ab} = S_x$ olup böylece

$$s_1 b = s_1 a_1 b = s_1 a_2 b a_1 b = (s_1 a_2 b)(1_x a_1 b)$$

dir ve $(1_x a_1 b) \in X$ tir. Şimdi A nın elemanlarının çarpımı olarak s nin uzunluğu üzerinden tümevarım yapalım. $|s|=1$ ise $s = a_1, a_1 \in A$ ve $s_1 b = 1_x s_1 b = 1_x a_1 b \in X$ olur. Önerme boyu n olan kelimeler için doğru ve $|s|=n+1$ olsun. Bu durumda $s_2 \in S_{a_k}, b \in A \cap S_{a_m}$ ve $a_k a_m = a$ olacak şekilde $s = s_2 b$ vardır. $|s_2|=n$ olup önerme s_2 için doğrudur. Yani $a_2 \in S_{a_k} \cap A, a_k, b \in Y, x a_k b = x$ olacak şekilde $1_x a_2 b \in X$ şeklindeki elemanların çarpılmasıyla s_2 oluşturulur. Böylece $s_2 \in \langle X \rangle$ dir. $s_1 b = s_2 b_1 b = (1_x a_2 b) \dots (1_x a_t b)(1_x b_1 b)$ ve $(1_x a_2 b), \dots, (1_x a_t b), (1_x b_1 b) \in X$ olduğu açıktır. Yani $s_1 b$ elemanı X in elemanlarının bir çarpımı olarak yazılıp istenilen ispatlanmış olur. ■

Sonuç 5.10 $S = B[Y, S_a]$ monoidlerin bandı sonlu doğuraylı olması için gerek ve yeter koşul Y nin sonlu ve her bir $S_a (a \in Y)$ monoidinin sonlu doğuraylı olmasıdır.

İspat: $S = B[Y, S_a]$ sonlu doğuraylı ve S nin doğuray kümesi olan A nın sonlu olduğunu kabul edelim. A ve Y de sonlu olup Teorem 5.9 daki S_x için X kümesi sonludur. Bunun tersi Önerme 5.1 den dolayı doğrudur. ■

Monoidlerin bandında S4 sorusuna cevap verebilmek için yarıgrup takdimlerinin genel teorisini kullanacağız. Bu yüzden önce bazı tanımlamaları yapalım.

S yarıgrubu $\langle A|R \rangle$ ikilisi ile takdim edilsin. T de S nin bir altarıgrubu ve $X = \{z_i | i \in I\} \subseteq A^+$ kümesi T nin doğuray kümesi olsun. Buradaki amacımız X kümesi vasıtasıyla T için bir takdim elde etmek olacaktır. Bunu yapabilmek için $B = \{b_i | i \in I\}$ şeklinde yeni bir alfabe inşa edelim ve $b_i \rightarrow z_i (i \in I)$ olacak şekilde birebir eşlensin. $p : B^+ \rightarrow A^+$ tek homomorfizm genişlemesi olmak üzere $u, v \in B^+$ verilsin, $u = v$ bağıntısı S de sağlanıyor olmasının anlamı S de $p(u) = p(v)$ olmasıdır. $L(A, T)$ ile T nin elemanlarını temsil eden A^+ daki tüm kelimelerin kümesini gösterelim. $L(A, T)$ daki bir kelime B^+ ın bir elemanı ile temsil edilebilir.

$$f : L(A, T) \rightarrow B^+$$

dönüşümü vardır öyle ki her $w \in L(A, T)$ için S de $p(f(w)) = w$ sağlanır. Tanımlanan bu f dönüşümüne *yeniden yazılabilir dönüşüm* denir.

Teorem 5.11 Yukarıdaki gösterimle B doğuray kümesi ve $i \in I, w_1, w_2 \in L(A, T)$, $(u = v) \in R, w_3, w_4 \in A^*$ $w_3 u w_4 \in L(A, T)$ olmak üzere

$$b_i = f(z_i),$$

$$f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2),$$

$$f(w_3 u w_4) = f(w_3 v w_4),$$

bağıntıları ile T yarıgrubu tanımlanır.

İspat: İspatı için [Campbell ve ark. Theorem 2.1 , 1995] bakınız. ■

Bu takdim daima sonsuzdur fakat bazı özel durumlarda bu takdime denk olan sonlu takdimler bulunabilir. Önemli adımlardan biride kullanışlı yeniden yazılabilir dönüşüm bulmaktır.

Şimdi bu yöntemi kullanarak $S = B[Y, S_a]$ monoidlerin bandının takdiminde bileşenler için takdim bulalım.

$S = B[Y, S_a]$ monoidlerin bandı ve $\langle A|R \rangle$ ikilisi S için takdim olsun. Amacımız S_x için takdim bulmaktır. Sabit bir $x \in Y$ alalım. Her bir $a \in Y$ için S_a nın 1_a birimini e_a ile temsil edelim. O zaman Teorem 5.9 dan

$$X = \{e_x a e_b : a \in S_a \cap A, a, b \in Y, xab = x\}$$

kümesi S_x yi doğurur. Monoidlerin bandı için Y üzerinde S nin sol aksiyon ve sağ aksiyon tanımları vardır. Her bir $s \in S$ ve $a \in Y$ için $sa = ba$ ve $as = ab$ ise $b \in Y$ ve $s \in S_b$ dır. Ayrıca her $a, g \in Y$ ve $s \in S$ için $(as)g = a(sg)$ dır.

$$B = \{[a, b] : a \in S_a \cap A, a, b \in Y, xab = x\}$$

kümesi ile S_x nın X doğuray kümesini temsil edelim. $p : B^+ \rightarrow A^+$ tek homomorfizm genişlemesi olmak üzere her $[a, b] \in B$ için

$$p : [a, b] \rightarrow e_x a e_b$$

dır. Şimdi kullanışlı yeniden yazılabilir dönüşümünü bulalım.

$$y : \{(w, b) \in A^+ \times Y : xwb = x\} \rightarrow B^+$$

dönüşümü

$$y(a, b) = [a, b], \quad a \in A, b \in Y, xab = x \text{ ise,}$$

$$y(wa, b) = y(w, ab)[a, b], \quad w \in A^+, a \in A, b \in Y, xwab = x \text{ ise}$$

şeklinde tanımlansın.

Lemma 5.12 Bu tanımlardan her $w_1, w_2 \in A^+, b \in Y$ için öyle ki $xw_1w_2b = x$ ise

$$y(w_1w_2, b) \equiv y(w_1, w_2b)y(w_2, b)$$

dır.

İspat: w_2 nin uzunluğu üzerinden tümevarım yapalım.

Eğer $|w_2|=1$ ise $w_2 = a$, $a \in A$ olur, bu durumda önerme y nin tanımından doğrudur. Önerme boyu n olan kelimeler için doğru olsun ve $|w_2|=n+1$ alalım. Bu durumda $w \in A^+$, $|w|=n$, $a \in A$ olacak şekilde $w_2 = wa$ dır.

$$y(w_1 w_2, b) \equiv y(w_1 wa, b)$$

olup $w_3 \in A^+$ olmak üzere $w_1 w = w_3$ olsun.

$$y(w_1 wa, b) = y(w_3 a, b)$$

$x w_3 ab = x$ olduğundan

$$y(w_3 a, b) = y(w_3, ab)[a, b]$$

dır. $|w|=n$ olduğundan

$$y(w_3, ab)[a, b] = y(w_1 w, ab)[a, b]$$

$$= y(w_1, wab)y(w, ab)[a, b]$$

$$= y(w_1, wab)y(wa, b)$$

$$= y(w_1, w_2 b)y(w_2, b)$$

olup tümevarım hipotezinden önerme ispatlanmış olur. ■

Her $w \in L(A, S_x)$ için $f : L(A, S_x) \rightarrow B^+$ dönüşümü $f(w) = y(w, x)$ olarak tanımlansın.

Lemma 5.13 Yukarıdaki notasyonlar la $xwb = x$ olacak şekildeki her $w \in A^+, b \in Y$ için $py(w, b) = e_x we_b$ bağıntısı S de sağlanır. Özel olarak f yeniden yazılabilir dönüşümdür.

İspat: w nun uzunluğu üzerinden tümevarım yapalım. Eğer $|w| = 1$ ise bir $a_k \in A$ için $w = a_k$ dır. Bu durumda p ve y nin tanımlarından

$$py(a_k, b) \equiv p([a_k, b]) \equiv e_x a_k e_b$$

dır. Önerme boyu $n-1$ olan kelimeler için doğru olsun ve $|w| = n$ alalım. Bu durumda $w = (a_1 \dots a_{n-1})a$ ve $(a_1 \dots a_{n-1}) = w_1$ olarak tanımlayalım. $w = w_1 a$ dır.

$$\begin{aligned} py(w, b) &\equiv py(w_1 a, b) \equiv p(y(w_1, ab)[a, b]) \\ &\equiv (py(w_1, ab))(p([a, b])), \quad (p \text{ bir homomorfizm olduğundan dolayı}) \\ &= e_x w_1 e_{ab} e_x a e_b, \quad |w_1| = n-1 \text{ olup tümevarım hipotezinden} \\ &= e_x w_1 e_{ab} a e_b, \quad e_x w_1 e_{ab} \in S_x \text{ olduğundan} \\ &= e_x w_1 a e_b = e_x w e_b, \quad a e_b \in S_{ab} \text{ olduğundan} \end{aligned}$$

dır. $w \in L(A, S_x)$ için

$$pf(w) \equiv py(w, x) = e_x w e_x = w$$

olduğundan f yeniden yazılabilir bir dönüşümdür. ■

Lemma 5.13 ve Teorem 5.11 den S_x için sonsuz takdim oluşturabiliriz. B doğuray kümesi ve $[a, b] \in B, w_1, w_2 \in L(A, S_x), (u = v) \in R, w_3, w_4 \in A^*, w_3 u w_4 \in L(A, S_x)$ olmak üzere

$$[a, b] = f(e_x a e_x), \quad (1)$$

$$f(w_1 w_2) = f(w_1) f(w_2), \quad (2)$$

$$f(w_3 u w_4) = f(w_3 v w_4), \quad (3)$$

bağıntıları verilsin. O halde $\langle B | (1), (2), (3) \rangle$ ikilisi S_x için bir takdimdir.

Tüm $w_1, w_2 \in L(A, S_x)$ ler için

$$f(w_1 w_2) \equiv y(w_1 w_2, x)$$

$$\equiv y(w_1, w_2 x) y(w_2, x)$$

$$\equiv y(w_1, x) y(w_2, x)$$

$$\equiv f(w_1) f(w_2)$$

olduğundan dolayı (2) bağıntısını yazmamıza gerek yoktur. Bu durumda $\langle B|(1),(3) \rangle$ S_x için bir takdimdir.

Teorem 5.14 $S = B[Y, S_a]$ monoidlerin bir bandı, $\langle A|R \rangle$ de S nin takdimi ve $x \in Y$ herhangi bir eleman olsun. $e_a \in A^+(a \in Y)$ ile S_a nın birimini temsil edelim. $B = \{[a, b] : a \in S_a \cap A, a, b \in Y, xab = x\}$ yeni alfabe ve y daha önce tanımlandığı gibi olsun.

$$y(e_x a e_b, x) = [a, b] \quad (a \in A, b \in Y, xab = x), \quad (4)$$

$$y(u, gx) = y(v, gx) \quad ((u = v) \in R, g \in Y, xugx = x) \quad (5)$$

olsun. Bu durumda $\langle B|(4),(5) \rangle$ S_x monoidi için bir takdimdir.

İspat: $[a, b] = f(e_x a e_b) = y(e_x a e_b, x)$ olduğundan (4) bağıntısı (1) bağıntısının bir sonucudur. Şimdi (5) bağıntısının S_x da sağlandığını gösterelim. $(u = v) \in R$ ve $xugx = x$ olacak şekilde $g \in Y$ olsun. $y(u, gx)$ kelimesi $py(u, gx)$ elemanını ve $y(v, gx)$ kelimesi de $py(v, gx)$ elemanını temsil eder. Lemma 5.13 ten

$$py(u, gx) = e_x u e_{gx}$$

$$py(v, gx) = e_x v e_{gx}$$

dır. $u = v$ bağıntısı S de sağlandığından $y(u, gx) = y(v, gx)$ bağıntısı S_x da sağlanır. Böylece $\langle B|(3),(4),(5) \rangle$, S_x için bir takdimdir.

Şimdi de (5) bağıntısının (3) ün bir sonucu olduğunu gösterelim. Böylece $\langle B|(4),(5) \rangle$, S_x için bir takdimdir. $w_3uw_4 \in L(A, S_x)$ olacak şekilde, $w_3, w_4 \in A^*$ ve $(u, v) \in R$ olsun. Varsayalım $w_3, w_4 \in A^+$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(w_3uw_4) &\equiv y(w_3uw_4, x) \\ &\equiv y(w_3, uw_4x)y(uw_4, x) \\ &\equiv y(w_3, uw_4x)y(u, w_4x)y(w_4, x) \end{aligned}$$

olur. (u, v) bağıntısı S de sağlandığından $w_3vw_4 \in L(A, S_x)$ ve

$$\begin{aligned} f(w_3vw_4) &\equiv y(w_3vw_4, x) \\ &\equiv y(w_3, vw_4x)y(vw_4, x) \\ &\equiv y(w_3, vw_4x)y(v, w_4x)y(w_4, x) \end{aligned}$$

dır. $uw_4x, vw_4x \in Y$ elemanları eşittir ve böylece

$$y(w_3, uw_4x) \equiv y(w_3, vw_4x)$$

dır. $xuw_4x = x$ olup $y(u, w_4x) = y(v, w_4x)$ bağıntısı $f(w_3uw_4) = f(w_3vw_4)$ bağıntısının bir sonucudur. w_3 ve w_4 birim eleman olduğu zamanda sonuç aynıdır. ■

Sonuç 5.15 $S = B[Y, S_a]$ monoidlerin bir bandı sonlu takdimli olması için gerek ve yeter koşul Y nin sonlu ve her bir S_a ($a \in Y$) monoidinin sonlu takdimli olmasıdır.

Sonuç 5.8 den Y sonlu ve her bir S_a ($a \in Y$) sonlu takdimli ise S de sonlu takdimlidir. Ayrıca $S = B[Y, S_a]$ sonlu takdimli ise Y bandı sonlu, A doğuray kümesi sonlu ve R bağıntı kümesi de sonludur. Teorem 5.14 ten her bir S_a ($a \in Y$) monoidi sonlu doğuraylıdır.

Sonuç 5.16 $S = B[Y, S_a]$ monoidlerin yarılatısı, $\langle A|R \rangle$ de S için bir takdim, $x \in Y$ herhangi bir eleman ve $e_x \in A^+$ de S_x monoidinin birimini temsil eden kelime olsun. $A_x = \{a \in A : ax = x\}$ olmak üzere S_x monoidinin takdimi

$$\langle A_x | e_x = 1, u = v \quad ((u = v) \in R, u \in A_x^+) \rangle,$$

dir.

İspat: Teorem 5.14 ten $\langle B|(4),(5) \rangle$, S_x için bir takdimdir. Y bir yarılatı olduğu için, eğer $w \in A^+$ kelimesi $wx = x$ koşulunu sağlıyorsa $w \in A_x^+$ dir. Özel olarak $e_x \in A_x^+$ dir. Eğer $w \equiv a_1 \dots a_n \in A_x^+$ ise $a_n \in A_x$ olup $a_n x = x$ olduğundan

$$y(w, x) = y(a_1 \dots a_n, x) = y(a_1 \dots a_{n-1}, a_n x) y(a_n, x)$$

dir. $a_{n-1} \in A_x$ olup $a_{n-1} x = x$ olduğundan

$$y(w, x) = y(a_1 \dots a_{n-1}, x) y(a_n, x) = y(a_1 \dots a_{n-1}, x) [a_n, x]$$

$$y(w, x) = y(a_1 \dots a_{n-1}, x) [a_n, x] = y(a_1 \dots a_{n-2}, a_{n-1}x) y(a_n, x) [a_n, x]$$

$$y(w, x) = y(a_1 \dots a_{n-2}, x) [a_{n-1}, x] [a_n, x]$$

dir. Bu şekilde devam edilirse $y(w, x) = [a_1, x] \dots [a_n, x]$, (6) olduğu görülür. Eğer $a \in A, b \in Y$ ve $xab = x$ ise o zaman $e_x a e_b x = x$ olur böylece (4) bağıntısındaki $y(e_x a e_b, x)$ elemanı (6) ya benzer şekilde yazılabilir. Böylece bazı $a_1, \dots, a_n \in A_x^+$ için (4) bağıntısı

$$y(e_x a e_b, x) = [a, b] = [a_1, x] \dots [a_n, x]$$

şeklinde yazılır. Eğer $b \neq x$ ise $[a, b]$ elemanını $\{[a, x] : a \in A_x\}$ doğuray kümesinden atabiliriz. Lemma 5.13 ten

$$p y(e_x, x) = e_x e_x e_x = e_x$$

dır. Böylece $y(e_x, x) = 1$ bağıntısı S_x da sağlanır ve bu bağıntıyı takdime eklediğimiz zaman S_x monoidi için takdim elde etmiş oluruz. $[a, x]$ yerine a yazarsak $y(w, x) \equiv w$ elde edilir. $e_x a e_x = a$ bağıntısı $e_x = 1$ bağıntısının bir sonucudur. Bundan dolayı (4) bağıntısını atabiliriz.

$$x u g x = x \Leftrightarrow g x = x \text{ ve } u x = x \Leftrightarrow g x = x \text{ ve } u \in A_x^+ \text{ dir. } (u = v) \in R,$$

$u \in A_x^+$ için bu bağıntılar $u = v$ şeklinde daha sade olarak yazılabilir. Böylece

$$\langle A_x \mid e_x = 1, u = v \quad ((u = v) \in R, u \in A_x^+) \rangle$$

takdimi S_x monoidi için bir takdimdir. ■

KAYNAKLAR

- ARAUJO, I.M., and RUSKUC, N., (2000).** On finite presentability of direct products of semigroups. *Algebra Colloq.* 7 : 83—91.
- ARAUJO, I.M., BRANCO, M.J.J., FERNANDES, V.H., GOMES, G.M.S., and RUSKUC, N., (2001).** On generators and relations for unions of semigroups. *Semigroup Forum.* 63 : 49—62.
- AYIK, G., AYIK, H., and ÜNLÜ, Y., (2005a).** Presentations for S and S/ρ from a given presentation ρ . *Semigroup Forum.* 70 : 146—149.
- AYIK, G., AYIK, H., ÜNLÜ, Y., (2005b).** Presentations and word problems for strong semilattices of semigroups. *Algebra & Discrete Mathematics.* 4: 28-35.
- AYIK, H., and RUSKUC, N., (1999).** Generators and Relations of Rees Matrix Semigroups. *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 42 : 482—495.
- CAMPBELL, C.M., ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and THOMAS R.M., (1995).** Reidemeister-Schreier type rewriting for semigroups. *Semigroup Forum.* 51 : 47—62.
- HOWIE, J. M., (1995).** *Fundamentals of Semigroup Theory.* Clarendon Press, Oxford. 366s.
- HOWIE, J. M., RUSKUC, N., (1994).** Constructions and presentations for monoids. *Comm. Algebra* 22 : 6209—6224.
- JOHNSON, D.L., (1990).** *Presentations of Groups.* Cambridge University Press.
- LAVERS, T.G., (1998).** Presentations of general products of monoids. *J. Algebra* 204 : 733—741.
- PETRICH, M. and REILLY N.R., (1999).** *Completely regular semigroups.* Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts 23, John Wiley & Sons, New York.
- ROBERTSON, E.F., RUSKUC, N., and WIEGOLD, J., (1998).** Generators and relations of direct product of semigroups. *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 : 2665—2685.

- RUSKUC, N., (1998).** On large subsemigroups and finiteness conditions of semigroups. *Proc. London Math. Soc.* 76: 383—405.
- RUSKUC, N., (1999).** Presentations for subgroups of monoids. *J. Algebra* 220 : 365—380.
- SCHEIN, B.M., (1974).** Bands of monoids. *Acta Sci. Math (Szeged)* 36 : 145—154.
- SCHEIN, B.M., (1996).** Bands of semigroups: variations on a Clifford theme, In K.H. Hofmann and M.W. Mislove(eds.), “Semigroups theory and its applications”, *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Cambridge University Press 231 : 53—80.

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Mersin’de doğdum. İlk, orta ve lise eğitimimi Mersin’de tamamladıktan sonra 2001 yılında Ç.Ü. Matematik Bölümünde lisans eğitime başladım. 2005 yılında mezun olduktan sonra aynı yılın Eylül ayında Ç.Ü. Matematik Bölümünde yüksek lisans eğitime başladım. 2006 yılının Eylül ayında ise Mersin Pozitif Bilgi Dershanesinde matematik öğretmeni olarak işe başladım ve halen aynı yerde çalışmaktayım.