



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI YENİ FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER İLE
İLGİLİ YENİ SONUÇLAR**

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

**Gamze YILDIZ
172110016**

2021

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI YENİ FEJER TIPLI EŞİTSİZLİKLER İLE
İLGİLİ YENİ SONUÇLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Gamze YILDIZ

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 12/08/2021

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Sercan TURHAN

**Temmuz 2021
GİRESUN**

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BAZI YENİ FEJER TIPLİ EŞİTSİZLİKLER İLE
İLGİLİ YENİ SONUÇLAR**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze YILDIZ

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik

Bu tez 14/07/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Prof. Dr.
Selahattin MADEN
Jüri Başkanı**

**Prof. Dr.
İmdat İŞCAN
Üye**

**Doç. Dr.
Sercan TURHAN
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Gamze YILDIZ

14/07/21

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarımın başlangıcından bu yana bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım, bu araştırmanın yürütülmesi ve yazım aşamasında yapmış olduğu, her türlü destek, yardım ve büyük katkılarından dolayı değerli danışman hocam Doç. Dr. Sercan TURHAN'a ve ders aldığım matematik bölümü öğretim üyelerine saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam boyunca desteklerini esirgemeyen aileme ve tüm arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	V
ÖZET	VI
SUMMARY.....	VII
BÖLÜM 1. GİRİŞ.....	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	4
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler.....	4
2.2.Bazı Önemli Eşitsizlikler.....	15
2.3. Bazı Özel Ortalamalar	16
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	17
3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler ve Elde Edilmiş Bazı Sonuçlar.....	17
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	34
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	73

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$L[a, b]$	: $[a, b]$ Aralığında İntegrallenebilen Fonksiyonların Kümesi
f'	: f Fonksiyonunun Birinci Mertebeden Türevi
f''	: f Fonksiyonunun İkinci Mertebeden Türevi
I	: $\mathbb{R}$ ' de Herhangi Bir Aralık
I°	: I 'nin İçi
$\mathbb{R}^n$	: n-Boyutlu Öklid Uzayı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Konveks Kümeler ve Konveks Olmayan Kümeler.....	4
Şekil 2.2. Konveks Fonksiyonun Şekli.....	5
Şekil 2.3. Konkav Fonksiyonun Şekli.....	6
Şekil 2.4. Konveks Fonksiyonun Geometrik Yorumu.....	7
Şekil 2.5. Bir Aralıkta Konveks Fonksiyon.....	10
Şekil 2.6. Quasi Konveks Olup Konveks Olmayan Fonksiyon.....	14
Şekil 2.7. Aralıkta Quasi Konveks Fonksiyon.....	14

BAZI YENİ FEJER TİPLİ EŞİTSİZLİKLER İLE İLGİLİ YENİ SONUÇLAR

ÖZET

Bu tez çalışması, konveks fonksiyonlar için elde edilmiş eşitsizliklerden yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizliklerin elde edilmesi ile ilgilidir. Birinci bölümde bölümde sırasıyla eşitsizlik teorisi, konveks fonksiyonların tarihçesi, konvekslik teorisi hakkında giriş niteliğinde bilgiler yer almaktadır. İkinci bölümde tez için gerekli temel kavramlar, tanımlar, teoremler verilmiş ayrıca konveks fonksiyon sınıflarının birbiriyle olan ilişkisi literatür çalışmasıyla da desteklenerek aktarılmıştır. Üçüncü bölümde tez çalışmasında kullanılan klasik eşitsizlikleri içeren teoremler, ispatları ve bu çalışmaya temel teşkil eden bazı eşitsizlikler verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Hermite-Hadamard-Fejér tipli yeni eşitsizliklere yer verilmiştir. Elde edilen eşitsizliklerin literatürle uyumlu olduğu gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Konveks Fonksiyon, Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Hermite-Hadamard-Fejér Eşitsizliği.

NEW RESULTS ON SOME NEW FEJER-TYPE INEQUALITIES SUMMARY

This thesis is related to making the new type of Hermite-Hadamard-Fejér inequalities by the light of inequalities that are acquired by convex functions. At the first section theory of inequality, history of the convex system, introductory information of the study of convexity are presented. At the second section, basic concepts which are required for this thesis, descriptions, theorems are given and relations of the class of functions are conveyed by the support of literature research. At the third section, theorems which contain classic inequalities, proofs and some inequalities which are the base of this thesis are given. At the fourth section, new inequalities of Hermite-Hadamard-Fejér type are included. Finally it is shown that acquired inequalities match with the literature.

Keywords: Convex function, Hermite-Hadamard inequality, Hermite-Hadamard Fejér inequality

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Eşitsizlikler son yüzyılda matematiğin tüm alanlarında, çok önemli bir yere sahip olmakla birlikte günümüzde de çok aktif ve ilgi çekici bir araştırma alanıdır. Eşitsizlikler, iki değerin birbirine göre durumlarını ifade eden ilişkidir. Eşitsizlikler teorisinin temeli 18. yüzyıla kadar dayanmakta, 19. yüzyıldan itibaren ise matematiğin çeşitli alanlarında önemli rol oynamaktadır. Eşitsizliklerin fizik ve mühendislik gibi çeşitli bilim dallarında birçok uygulaması bulunmaktadır. Bu yüzden eşitsizlik teorisi birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve tarihsel gelişimini diğer alanlarla ilişkili olarak bugüne kadar sürdürmüştür. G.H. Hardy, D.S. Mitronovic, J.E. Pecaric, A.M. Fink, Niculescu, S.S. Dragomir ve daha birçok bilim insanı tarafından bu konudaki eserler literatüre kazandırılmıştır. Hardy, Littlewood ve Polya tarafından 1934 yılında yazılan "Inequalities" adlı eser bu alanda verilen ilk eserdir ve temel bir kaynaktır. Bu eserde konveks fonksiyonlarla ilgili klasik ve yeni eşitsizlikler, problemler, ispat yöntemleri ve sonuçları bulunur. [1] Eşitsizlikler teorisi için E.F.Beckenbach ve R.Bellman'ın birlikte yazdığı eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren "Inequalities" adlı eser[2], Mitronovic tarafından yazılan "Analytic Inequalities"[3] ve "Classical and New Inequalities in Analysis"adlı iki eserler[4] ve Pachpatte'nin "Mathematical Inequalities" [5] adlı eseri önemli kaynaklar arasında yer almıştır. Bu eserler birçok matematikçiyi etkilemiş ve daha sonraki dönemlerde bu alanda birçok çalışmalar yapılmıştır. Son yıllarda da Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham, Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından eşitsizlikler konusunda pek çok kitap ve makale yazılmıştır.

Eşitsizlikler yaygın olarak matematik ve uygulamalı matematiğin gelişiminin arkasındaki temel itici güçlerinden biri olarak kabul edilmektedir. Son yıllarda

matematiğin birçok farklı alanlarındaki uygulamalara, literatürde yerini almış temel eşitsizlikler büyük bir katkı sağlamıştır. Eşitsizlikler alanının gelişmesinde etkili olan kavramlardan birisi de konveks fonksiyonlar kavramıdır. Konveksliğin tanımı eşitsizlikle ifade edildiğinden ve geometrik olarak bir karşılaştırma içerdiğinden, Konveks Fonksiyonlar Teorisinde eşitsizliklerin önemli bir yeri vardır.

Konvekslik, tarihi M.Ö. 250 yılında Archimedes'in ünlü π değerini hesaplamasına kadar uzanan basit ve bilinen bir kavramdır. [6] Aslında biz konveksliği sürekli olarak ve birçok yolla yaşamaktayız. Örneğin; ayakta duruş pozisyonumuz, ayaklarımızın kapladığı konveks alanın içine ağırlık merkezimizin dik izdüşümü boyunca dengemizi korumaktadır. Bu kavram fizik, endüstri, tıp, mühendislik, veri analizi, bankacılık, sanat gibi bilim dallarının nümerik uygulamalarında da kullanılmaktadır. Günümüzde gelişen disiplini ve artan uygulamalarıyla matematiksel analizin merkezi alanlarından biri olarak yerini almıştır. Geometri, analiz, lineer cebir ve topolojide kullanılır ve sayı teorisi, klasik ekstremum problemleri, lineer programlama, oyun teorisi ve eşitsizlikler teorisi (lineer, klasik ve matris) gibi çeşitli konularda önemli rol oynar.

“Konvekslik” kavramı ilk olarak 1883 yılında Charles Hermite tarafından dile getirilmiştir[7]. Daha sonra Hadamard'ın 1893 yılındaki çalışmasında [8] konveksliğe rastlansa da konveks fonksiyonların sistematik olarak çalışılması 1905-1906 yıllarında J.L.W.V. Jensen ile başlar. 19.-20. yy'da bulunan eşitsizliklerin bir kısmı konveks fonksiyonlarla ilişkilendirilerek temel eşitsizlikler haline gelmiştir. Konveks fonksiyonlar daha kapsamlı bir şekilde A. W. Roberts ve D. E. Varberg tarafından "Convex Functions" adlı eserde kaleme alınmıştır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler hakkında ise Pecaric 1987 yılında "Convex Functions: Inequalities" adlı eseri yayınlamıştır.

Eşitsizlikler teorisi içerisinde ön plana çıkmış birçok eşitsizlik vardır. En önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard (veya

Hadamard) integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), Ekim 1881’de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak yazdığı aşağıdaki ifadeyi bir mektup ile sundu. Bu mektup Mathesis 3 de (1883, p.82) (1.1) ve (1.2) gibi basıldı.

“Sur deux limites d’une integrale definie. Soit $\xi(x)$ une Fonction qui varie toujours dans le même sens de $u = a$; au ; $= b$. On aura les relations

$$(b - a)\xi\left(\frac{a + b}{2}\right) < \int_a^b \xi(u)du < (b - a)\frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \quad (1.1)$$

ou bien

$$(b - a)\xi\left(\frac{a + b}{2}\right) > \int_a^b \xi(u)du > (b - a)\frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \quad (1.2)$$

Suivant que la courbe $v = \xi(u)$ tourne sa convexité o usa concavite vers l’axe des abscisses

Bu önemli eşitsizlikler, integraller için ortalama değer teoreminin fonksiyon ve görüntülerinin ortalama değerlerine ilişkin bir eşitsizlik olup fonksiyonun konkav veya konvekslik durumuna göre değişir. Çeşitli konveks fonksiyon sınıfları için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin detaylı anlatımı S.S. Dragomir ve C.E.M Pearce tarafından yazılan "Selected Topics on Hermite Hadamard Inequalities and Applications" adlı eserde bulunabilir.

1906 yılında ise Fejér, trigonometrik polinomları çalışırken Hermite’in sonuçlarının genelleştirilmesi olan

$$\frac{a + b}{2} \int_a^b \gamma(u)du \leq \int_a^b \xi(u)\gamma(u) \leq \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b \gamma(u)du \quad (1.3)$$

eşitsizliklerini elde etmiştir. $\gamma(u) = 1$ ve $u \in (a, b)$ için Hermite-Hadamard eşitsizliğinin elde edildiği açıkça görülmektedir. Fejér’in bu sonucu ile ilgili özellikle son yıllarda olmak üzere birçok çalışma literatürde mevcuttur.

Bu tezin amacı Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikleri bir araya getirerek sistematik bir şekilde okuyucuya sunmak ve çeşitli konveks fonksiyonlar için elde edilen yeni Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizlikleri vermektir. Bu amaçla ikinci

bölümde konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizliklerle ilgili bazı tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir. Dördüncü bölümde ise Hermite-Hadamard ve Hermite-Hadamard-Fejer tipli eşitsizliklerle ilgili yeni teorem ve sonuçlar verilmiştir.



BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

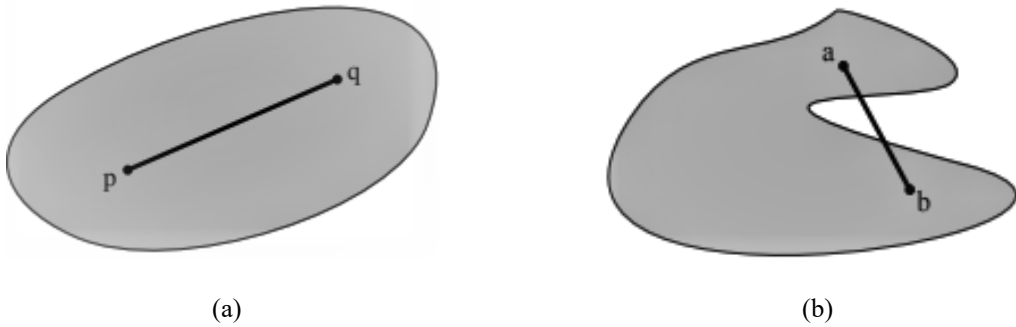
2.1. Konveks Fonksiyonlarla İlgili Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde literatürde geçen ve tezin hazırlanmasında kullanılan tanımlar, teoremler, bazı önemli eşitsizlikler ve temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Konveks Küme): L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olmak üzere $\forall u, v \in A$ için

$$B = \{z \in L : z = \alpha u + (1 - \alpha)v, 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A \quad (2.1)$$

ise A kümesine konveks küme denir. Eğer $z \in B$ ise $z = \alpha u + (1 - \alpha)v$ eşitliğindeki x ve y nin katsayıları için $\alpha + (1 - \alpha) = 1$ bağıntısı her zaman doğrudur. Bu sebeple konveks küme tanımındaki $\alpha, (1 - \alpha)$ yerine $\alpha + \beta = 1$ şartını sağlayan ve negatif olmayan α, β reel sayılarını alınabiliriz. Geometrik olarak B kümesi uç noktaları u ve v olan bir doğru parçasıdır. Bu durumda sezgisel olarak konveks küme, Şekil 2.1’de görüldüğü gibi boş olmayan ve herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçasını ihtiva eden kümedir [9].



Şekil 2.1 Konveks (a) ve Konveks olmayan (b) kümeler

Tanım 2.1.2. (J-Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olmak üzere her $u, v \in I$ için

$$\xi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{\xi(u) + \xi(v)}{2} \quad (2.2)$$

şartını sağlayan bir f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir [2].

Tanım 2.1.3. (Kesin J-Konveks Fonksiyon): Her $u, v \in I$ ve $u \neq v$ için

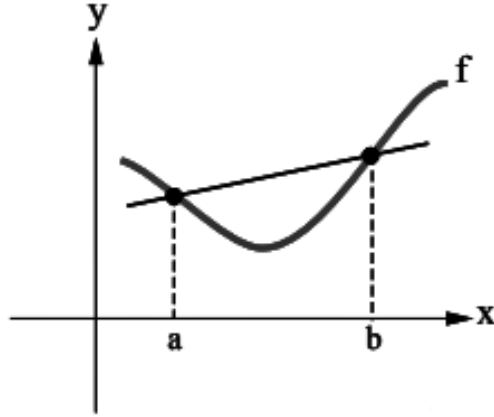
$$\xi\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{\xi(u) + \xi(v)}{2} \quad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna I üzerinde kesin J –konveks fonksiyon denir [2].

Tanım 2.1.4. (Konveks Fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $u, v \in I$ için ve $t \in [0,1]$ için,

$$\xi(tu + (1-t)v) \leq t\xi(u) + (1-t)\xi(v) \quad (2.4)$$

eşitsizliği geçerli ise f fonksiyonuna I üzerinde konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonun grafiği Şekil 2.2'deki gibidir [10].

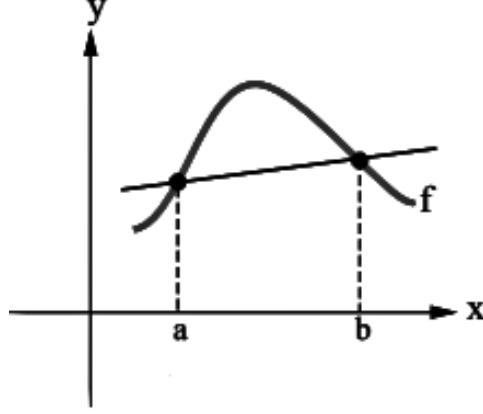


Şekil 2.2 Konveks fonksiyon şekli

Eşitsizlikte " $\geq$ " olması durumunda ise

$$\xi(tu + (1-t)v) \geq t\xi(u) + (1-t)\xi(v) \quad (2.5)$$

f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir. Konkav fonksiyonun grafiği Şekil 2.3'teki gibidir [10].



Şekil 2.3 Konkav fonksiyon şekli

Eğer f fonksiyonu hem konveks hem de konkav ise f afin dönüşüm olur. (2.4) eşitsizliğinde $t \in [0,1]$ kapalı aralığındaki uç noktaları dışarıda bırakırsak, o zaman konveks fonksiyon şartındaki " $\leq$ " yerine " $<$ " gelir, yani;

$$\xi(tu + (1 - t)v) < t\xi(u) + (1 - t)\xi(v) \quad (2.6)$$

olur. Bu durumda f fonksiyonuna kesin konveks fonksiyon denir.

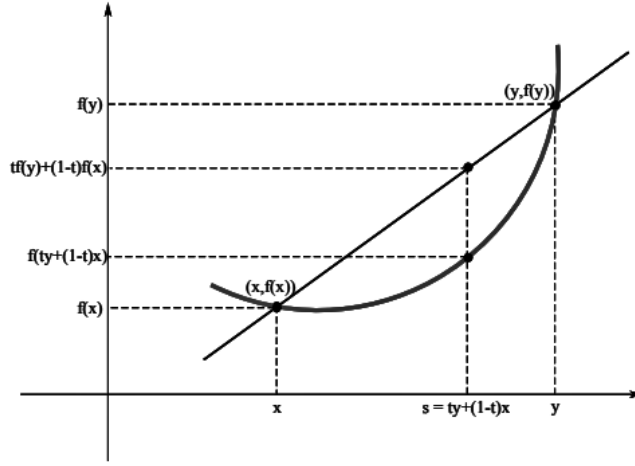
Sonuç 2.1.1 Her konveks fonksiyon J –konveks fonksiyondur.

Sonuç 2.1.2 $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun I 'da konveks olması için gerek ve yeter şart, her $u, v \in I$ için $p + q > 0$ olan $\forall p, q \geq 0$ için

$$\xi\left(\frac{pu + qv}{p + q}\right) \leq \frac{p\xi(u) + q\xi(v)}{p + q} \quad (2.7)$$

olmasıdır [2].

Geometrik olarak Şekil 2.4'te görüldüğü gibi $tu + (1 - t)v$ noktasında ξ 'nin eğri üzerinde aldığı değer $(u, \xi(u))$ ve $(v, \xi(v))$ noktalarını birleştiren doğru parçasının üzerinde aldığı değerlerden her zaman daha küçüktür, yani bu iki noktayı birleştiren kiriş (doğru parçası) her zaman eğrinin $[u, v]$ aralığında kalan kısmının üstündedir.



Şekil 2.4 Konveks fonksiyonun geometrik yorumu

Gerçekten, $(u, \xi(u))$ ve $(v, \xi(v))$ noktalarından geçen doğrunun denklemi;

$$L(s) = \xi(u) + \frac{\xi(v) - \xi(u)}{v - u}(s - u)$$

dir. Burada $s = tv + (1 - t)u$ yazılırsa

$$\begin{aligned} L(tv + (1 - t)u) &= \xi(u) + \frac{\xi(v) - \xi(u)}{v - u}(t(v - u)) \\ &= \xi(u) + t(\xi(v) - \xi(u)) \\ &= t\xi(v) + (1 - t)\xi(u) \end{aligned}$$

olur. Böylece (2.4) eşitsizliği

$$\xi(tv + (1 - t)u) \leq L(tv + (1 - t)u) = t\xi(v) + (1 - t)\xi(u)$$

elde edilir.

Şekil 2.4'ten de görüldüğü üzere, eğer $\xi(u) \leq \xi(v)$ ise her $t \in [0,1]$ için $\xi(u) \leq t\xi(u) + (1 - t)\xi(v) \leq \xi(v)$ dır. Konkav fonksiyon için doğru parçası ξ 'nin grafiğinin $[u, v]$ aralığında kalan kısmının altındadır.

Eğer ξ fonksiyonu, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve konveks (konkav) ve u_0 noktasında diferensiyellenebilen bir fonksiyon ise $u \in (a, b)$ için,

$$\xi(u) - \xi(u_0) \leq (\geq) \xi'(u_0)(u - u_0) \quad (2.8)$$

eşitsizliği yazılır. Yani (a, b) aralığında diferansiyellenebilen konveks fonksiyon (2.8) eşitsizliğini sağlar [11].

Aşağıdaki kriterler konveks fonksiyon tanımına eşdeğerdir [11].

- a. I aralığı üzerinde ξ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $c \in I$ noktası için, $\frac{\xi(u) - \xi(c)}{(u - c)}$ fonksiyonunun I aralığında artan olmasıdır.
- b. $\xi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $c, u \in (a, b)$ için,

$$\xi(u) - \xi(c) = \int_c^u \gamma(t) dt$$

olacak şekilde $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ artan fonksiyonun olmasıdır.

- c. ξ diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere, ξ 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul ξ' fonksiyonunun artan olmasıdır.
- d. ξ'' , (a, b) de mevcut olsun. Bu durumda ξ 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\xi''(u) \geq 0$ olmasıdır.
- e. $\xi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $u_0 \in (a, b)$ için ξ fonksiyonun en az bir destek doğrusuna sahip olmasıdır.

Yani

$$\xi(u) \geq \xi(u_0) + \lambda(u - u_0) \quad \forall u \in (a, b) \quad (2.9)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır. Burada λ, u_0 'a bağlıdır ve eğer ξ' varsa o zaman $\lambda = \xi'(x_0)$ ya da $\xi'_-(u_0) \neq \xi'_+(u_0)$ ise $\lambda \in [\xi'_-(u_0), \xi'_+(u_0)]$ dir.

- f. $\xi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul P, Q ve R noktaları ξ fonksiyonun grafiği üzerinde herhangi üç nokta olmak üzere,

$$eğimPQ \leq eğimPR \leq eğimQR$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Aşağıda konveks fonksiyonun bazı özellikleri verilmiştir:

- i. Kapalı aralıkta tanımlı konveks fonksiyon sınırlıdır.
- ii. $\xi : I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise, I° (I nin içi) inde herhangi bir $[\alpha, b]$ kapalı aralığında Lipschiz şartını sağlar. Bu nedenle, ξ fonkiyonu $[\alpha, b]$ aralığında mutlak sürekli ve I° de sürekli.

- iii. $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon ise I° 'de $\xi'_-(u)$ ve $\xi'_+(u)$ türevleri vardır ve artandır.
- iv. $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu I açık aralığında konveks ise, sayılabilir bir E kümesi haricinde ξ' mevcuttur ve süreklidir.
- v. k tane fonksiyon $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ye konveks fonksiyonlar olsun. Bu takdirde;

$$\xi(u) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \xi_j(u), \quad \alpha_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, k)$$

fonksiyonu da konvektir.

- vi. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ azalmayan konveks fonksiyon ve $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. $\xi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(u) = (goh)(u)$ bileşke fonksiyonu da konvektir [10].

Örnek 2.1.1 Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerindeki konveks fonksiyon örnekleri verilmiştir.

- a. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için $\xi(u) = au + b$ afın fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- b. $|u|^p$ mutlak değer fonksiyonu $p \geq 1$ için $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- c. $\xi(u) = u^t$ fonksiyonu $t \geq 1$ veya $t \leq 0$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_{++} = (0, \infty)$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.
- d. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için $\xi(u) = e^{au}$ eksponansiyel fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konveks bir fonksiyondur.

Örnek 2.1.2 $\xi: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\xi(u) = |u|$ fonksiyonu I üzerinde konveks bir fonksiyondur.

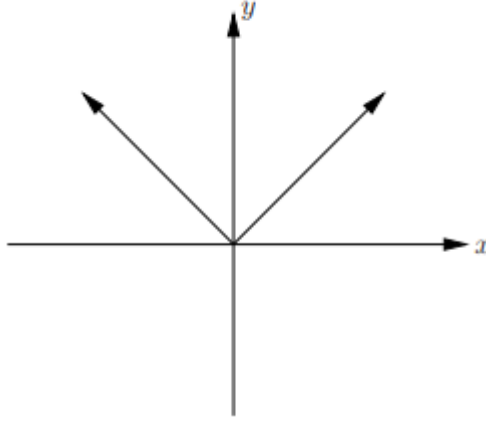
Çözüm: ξ fonksiyonu konveks ise $u, v \in I$ ve $t \in [0, 1]$ için

$$\xi(tu + (1 - t)v) \leq t\xi(u) + (1 - t)\xi(v)$$

olmalıdır. Buna göre;

$$\begin{aligned} \xi(tu + (1 - t)v) &= |t\xi(u) + (1 - t)\xi(v)| \\ &\leq |t\xi(u)| + |(1 - t)\xi(v)| \\ &\leq |t|\xi(u) + |(1 - t)|\xi(v) \\ &\leq t\xi(u) + (1 - t)\xi(v) \end{aligned}$$

elde edilir ve ξ fonksiyonunun konveks olduğu ispatlanmış olur. $\xi(u) = |u|$ mutlak değer fonksiyonu $u = 0$ 'da türeve sahip olmamasına rağmen konveks bir fonksiyondur ve grafiği Şekil 2.5'teki gibidir.



Şekil 2.5 Bir aralıkta konveks fonksiyon

Örnek 2.1.3 Aşağıda $\mathbb{R}$ üzerindeki konkav fonksiyon örnekleri verilmiştir.

- a. Herhangi bir $a, b \in \mathbb{R}$ için $\xi(x) = ax + b$ afın fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.
- b. $\xi(u) = \log(u)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_{++}$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.
- c. $\xi(u) = u^t$ fonksiyonu $0 \leq t \leq 1$ için pozitif reel sayılar kümesi $\mathbb{R}_{++}$ üzerinde konkav bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.1 ξ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise

- a. ξ , (a, b) aralığında süreklidir.
- b. ξ , $[a, b]$ aralığında sınırlıdır [12].

Önerme 2.1.1

- i. ξ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks ise bu aralığın herhangi bir alt aralığı olan $[u, v]$ üzerinde de aynı şekilde konvektir.
- ii. Herhangi $u, v \in [a, b]$ için,

$$\xi\left(\frac{u+v}{2}\right) \leq \frac{\xi(u) + \xi(v)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir ki burada konveks fonksiyon için verilen tanımda $t = \frac{1}{2}$ yapıldığı açık bir şekilde görülmektedir.

- iii. ξ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında konveks, $t_1, t_2, \dots, t_n \in [0, 1]$ için $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ ve $u_1, u_2, \dots, u_n \in [a, b]$ olmak üzere,

$$\xi(t_1 u_1 + t_2 u_2 + \dots + t_n u_n) \leq t_1 \xi(u_1) + t_2 \xi(u_2) + \dots + t_n \xi(u_n)$$

olarak verilen ‘Jensen eşitsizliği’ geçerlidir.

- iv. Özel olarak $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ seçimi yapılırsa $u_1, u_2, \dots, u_n \in [a, b]$ için

$$\xi\left(\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} (\xi(u_1) + \xi(u_2) + \dots + \xi(u_n))$$

eşitsizliği geçerlidir [13].

Tanım 2.1.5 (Artan ve Azalan Fonksiyonlar): ξ , I aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. $u_1 < u_2$ olan $\forall u_1, u_2 \in I$ için

- i. $\xi(u_2) > \xi(u_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde artandır,
- ii. $\xi(u_2) < \xi(u_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde azalandır,
- iii. $\xi(u_2) \geq \xi(u_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde azalmayandır,
- iv. $\xi(u_2) \leq \xi(u_1)$ ise ξ fonksiyonu I üzerinde artmayandır.

denir [14].

Teorem 2.1.2 ξ fonksiyonunun I aralığında ikinci türevi varsa, ξ fonksiyonunun bu aralık üzerinde konveks olması için gerek ve yeter şart $u \in I$ için

$$\xi''(u) \geq 0$$

olmasıdır [2].

Örnek 2.1.4 $\xi(u) = e^u$ üstel fonksiyonu $\forall u \in \mathbb{R}$ için $\xi''(u) = e^u > 0$ olduğundan konvektir.

Örnek 2.1.5 $n \geq 1$ için $\xi(u) = u^n$ fonksiyonu $\mathbb{R}^+$ da konveks iken n çift olmak şartıyla $\xi(u) = u^n$ fonksiyonu da $\mathbb{R}$ üzerinde konvektir.

Gerçekten de $\xi''(u) = n(n-1)u^{n-2} > 0$ olduğundan her iki durumda da ξ konvektir.

Tanım 2.1.6 (Süreklilik): $\xi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun. Eğer

$$|u - u_0| \text{ olan } \forall u \in S \text{ için } |\xi(u) - \xi(u_0)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa ξ , u_0 da süreklidir denir [15].

Tanım 2.1.7 (Lipschitz Şartı): $\xi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$|\xi(u) - \xi(v)| \leq M|u - v| \quad (2.10)$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa ξ , S de Lipschitz şartını sağlıyor denir [15].

Tanım 2.1.8 (Düzgün Süreklilik): $\xi: S \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_0 \in S$ ve $\epsilon > 0$ verilmiş olsun.

$$u \in S \text{ ve } |u_1 - u_2| < \delta \text{ şartını sağlayan } \forall u_1, u_2 \in S \text{ için } |\xi(u_1) - \xi(u_2)| < \epsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa ξ , S de düzgün süreklidir denir [15].

Sonuç 2.1.3 ξ , S de Lipschitz şartını sağlıyorsa ξ , S de düzgün süreklidir [15].

Tanım 2.1.9 (Mutlak Süreklilik): I , $\mathbb{R}$ nin boştan farklı bir alt kümesi ve $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. I nin $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ ayrık açık alt aralıklarının bir birleşimini göz önüne alalım. Eğer $\forall \epsilon > 0$ için $\sum_{i=1}^n |b_i - a_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |\xi(b_i) - \xi(a_i)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa ξ fonksiyonuna I kümesinde mutlak süreklidir denir[16].

Konveklilik, Lipschitz şartı, süreklilik ve mutlak süreklilik arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.1.3 L lineer uzay, $U \in L$ bir açık küme ve $\xi: U \rightarrow R$ fonksiyon olsun.

- a. ξ , U açık kümesinde konveks olsun. Eğer ξ , U 'da bir noktanın komşuluğunda üstten sınırlı bir fonksiyon ise U 'da yerel Lipschitz'dir ve bu nedenle U 'nun kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U 'da süreklidir.
- b. $\xi: U \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde konveks ise ξ , U 'nun her kompakt alt kümesinde Lipschitz şartını sağlar ve U 'da süreklidir [10].

Tanım 2.1.10 (Quasi-Konveks Fonksiyon): $\xi: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall u, v \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\xi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \max\{\xi(u), \xi(v)\}$$

ise ξ 'ye quasi-konveks fonksiyon denir. Eğer

$$\xi(\lambda u + (1 - \lambda)v) < \max\{\xi(u), \xi(v)\}$$

ise ξ 'ye kesin quasi-konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$\xi(\lambda u + (1 - \lambda)v) \geq \max\{\xi(u), \xi(v)\}$$

ise ξ 'ye quasi-konkav fonksiyon ve

$$\xi(\lambda u + (1 - \lambda)v) > \max\{\xi(u), \xi(v)\}$$

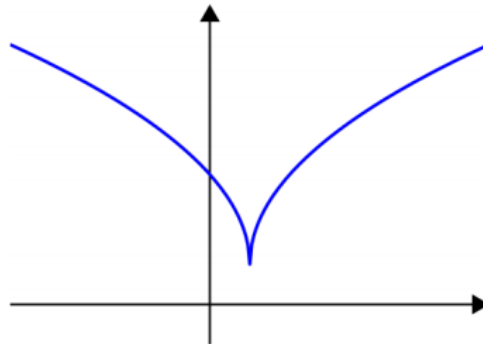
ise ξ 'ye kesin quasi-konkav fonksiyon denir [17].

Tanım 2.1.11 ξ hem quasi konveks hem de quasi konkav ise ξ 'ye quasi monotonik denir [18].

Sonuç 2.1.4 Herhangi bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir quasi-konveks fonksiyondur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Yani quasi-konveks olup konveks olmayan fonksiyonlar da vardır. Örneğin,

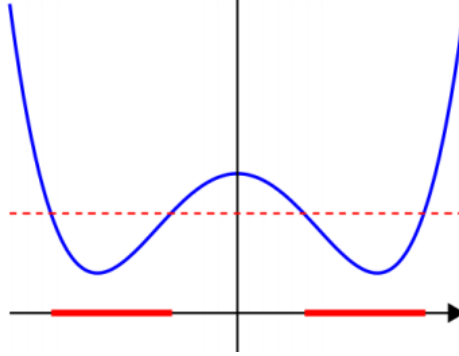
$$g(t) = \begin{cases} t & , t \in [-2, -1] \\ t^2 & , t \in [-1, 2] \end{cases}$$

ile tanımlanan $g : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında konveks değildir fakat g fonksiyonu $[-2, 2]$ aralığında quasi-konveks fonksiyondur [19].



Şekil 2.6 Quasi konveks olup konveks olmayan fonksiyon

Aşağıdaki grafikte, kırmızı ile gösterilen aralıklarda fonksiyon quasi-konvektir. Ama eğrinin tamamını düşünülürse bu fonksiyon quasi-konveks değildir.



Şekil 2.7 Aralıkta quasi konveks fonksiyon

Tanım 2.1.12 (Geometrik-Aritmetik (GA) Konveks Fonksiyon): $\xi: I \subseteq \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer ξ fonksiyonu $\forall u, v \in I, \lambda \in [0,1]$ için,

$$\xi(u^\lambda v^{1-\lambda}) \leq \lambda \xi(u) + (1 - \lambda) \xi(v) \quad (2.11)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa ξ fonksiyonuna GA-konveks fonksiyon denir. Burada $u^\lambda v^{1-\lambda}$ ifadesi u ve v pozitif sayılarının ağırlıklı geometrik ortalaması ve $\lambda \xi(u) + (1 - \lambda) \xi(v)$ ifadesi ise $\xi(u)$ ve $\xi(v)$ ağırlıklı aritmetik ortalamasıdır [20].

2.2. Bazı Önemli Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1 (Üçgen Eşitsizliği): Herhangi u, v reel sayıları içi

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

$$||u| - |v|| \leq |u - v|$$

$$||u| - |v|| \leq |u + v|$$

ve tümevarım metoduyla

$$|u_1 + \dots + u_n| \leq |u_1| + \dots + |u_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [4].

Teorem 2.2.2 (Üçgen Eşitsizliğinin İntegral Versiyonu): ξ , $[a, b]$ aralığında tanımlı sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu takdirde,

$$\left| \int_a^b \xi(u) du \right| \leq \int_a^b |\xi(u)| du \quad (a < b) \quad (2.12)$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

Teorem 2.2.3 (Ostrowski Eşitsizliği): $\xi: I \subset [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, I° (I 'nin içi) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon, $\xi' \in L[a, b]$ ve $a, b \in I$ için $a < b$ olsun. Eğer $|\xi'(u)| \leq M$ ise,

$$\left| \xi(u) - \frac{1}{(b-a)} \int_a^b \xi(t) dt \right| \leq \frac{M}{b-a} \left[\frac{(u-a)^2 + (b-u)^2}{2} \right] \quad (2.13)$$

eşitsizliği elde edilir [21].

Teorem 2.2.4 (Simpson Eşitsizliği): $\xi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde dört kez sürekli diferansiyellenebilir ve $\|\xi^{(4)}\|_\infty = \sup_{x \in (a,b)} |\xi^{(4)}(x)| < \infty$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{1}{3} \left[\frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} + 2\xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| < \frac{1}{2880} \|\xi^{(4)}\|_\infty (b-a)^4$$

eşitsizliği elde edilir [22].

2.3. Bazı Özel Ortalamalar

Bu başlık altında a, b gibi iki pozitif reel sayı için bazı ortalamalar verilecektir.

- Aritmetik ortalama:

$$A = A(a, b) := \frac{a + b}{2}$$

- Geometrik ortalama:

$$G = G(a, b) := \sqrt{ab}$$

- Harmonik ortalama:

$$H = H(a, b) := \frac{2ab}{a + b}$$

- Logaritmik ortalama:

$$L = L(a, b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \frac{b - a}{\ln b - \ln a} & , a \neq b \end{cases}$$

- p -logaritmik ortalama:

$$L_p = L_p(a, b) := \begin{cases} a & , a = b \\ \left[\frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{(p+1)(b-a)} \right]^{\frac{1}{p}} & , a \neq b \end{cases}$$

ortalamaları vardır.

Ayrıca $p \in \mathbb{R}$ olmak üzere L_p 'nin monoton artan olduğu bilinir. $L_0 = I$, $L_{-1} = L$ ile gösterilir. Bu ortalamalar arasındaki ilişki literatürde

$$H \leq G \leq L \leq I \leq A$$

şeklinde yer almaktadır.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Konveks Fonksiyonlar İçin Temel Eşitsizlikler ve Elde Edilmiş Bazı Sonuçlar

Teorem 3.1.1 (Hermite-Hadamard Eşitsizliği): $\xi: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun.

Eğer $a, b \in I$, $a < b$ ise

$$\xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \leq \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \quad (3.1)$$

sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği denir. Burada ξ fonksiyonunun konkav olması eşitsizliği tersine çevirir [23].

Teorem 3.1.2 (Hermite-Hadamard-Fejer Eşitsizliği) $\xi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, konveks bir fonksiyon olsun. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik ve $w \in L[a, b]$ ise

$$\xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(u) du \leq \int_a^b \xi(u) w(u) du \leq \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du \quad (3.2)$$

Sağlanır ve bu eşitsizliğe konveks fonksiyonlarda Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ağırlıklı genellemesi olan Hermite-Hadamard-Fejér eşitsizliği denir [24].

Teorem 3.1.3 (İntegraller İçin Hölder Eşitsizliği) : $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. ξ ve γ , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\xi|^p$ ve $|\gamma|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |\xi(u)\gamma(u)| du \leq \left(\int_a^b |\xi(u)|^p du \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |\gamma(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.3)$$

eşitsizliği geçerlidir [4].

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sonucu olan power-mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 3.1.1(Power Mean Eşitsizliği): $q \geq 1$ ve $\xi, \gamma, [a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|\xi|$ ve $|\gamma|^q, [a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise,

$$\int_a^b |\xi(u)\gamma(u)| du \leq \left(\int_a^b |\xi(u)| du \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |\xi(u)||\gamma(u)|^q du \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.4)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.1.1 $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere, $\xi: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $\xi' \in L[a, b]$ ise,

$$\frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du = \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \quad (3.5)$$

eşitliği geçerlidir [25].

İspat.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \\ &= \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} (1-2t) \Big|_0^1 + 2 \int_0^1 \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{\xi(a) + \xi(b)}{b-a} - \frac{2}{b-a} \cdot \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt = \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du$$

bulunarak ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.4 $\xi: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. Eğer $|\xi'|, [a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| \leq \frac{(b-a)(|\xi'(a)| + |\xi'(b)|)}{8} \quad (3.6)$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

İspat. (3.5) eşitliğinden

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| = \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right|$$

elde edilir. Buradan,

$$\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt$$

konveks fonksiyon özelliğinden

$$\begin{aligned} &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| [t|\xi'(a)| + (1-t)|\xi'(b)|] dt \\ &= \frac{(b-a)(|\xi'(a)| + |\xi'(b)|)}{2} \int_0^1 |1-2t| t dt \\ &= \frac{(b-a)(|\xi'(a)| + |\xi'(b)|)}{8} \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.5 $\xi: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. $p < 1$ için $|\xi'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\begin{aligned} &\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{|\xi'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + |\xi'(b)|^{\frac{p}{p-1}}}{2} \right]^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

eşitsizliği geçerlidir [25].

İspat. (3.5) eşitliğinden ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| &= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |(1-2t)| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |(1-2t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $|\xi'|^q$ 'in konveksliğinden

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt &\leq \int_0^1 [t|\xi'(a)|^q + (1-t)|\xi'(b)|^q] dt \\ &= \frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{2} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_0^1 |(1-2t)|^p dt = \int_0^{1/2} (1-2t)^p dt + \int_{1/2}^1 (2t-1)^p dt = \frac{1}{p+1}$$

olduğundan

$$\leq \frac{(b-a)}{2(p+1)^{1/p}} \left[\frac{|\xi'(a)|^{p/(p-1)} + |\xi'(b)|^{p/(p-1)}}{2} \right]^{(p-1)/p}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.6 $\xi: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. $q \geq 1$ için $|\xi'|^q$, $[a, b]$ aralığında konveks ise,

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-\frac{1}{q}} \left[\frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \quad (3.8)$$

eşitsizliği geçerlidir [26].

İspat. (3.5) eşitliğinde her iki tarafın mutlak değeri alınıp

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| = \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right|$$

power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \\ & \leq \left(\int_0^1 |1-2t| \right)^{1-1/q} \left(\int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $|\xi'|^q$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned} \int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt & \leq \int_0^1 |1-2t| [t|\xi'(a)|^q + (1-t)|\xi'(b)|^q] dt \\ & = \frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{4} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \\ & \leq \left(\int_0^1 |1-2t| \right)^{1-1/q} \left(\frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{4} \right)^{1/q} \end{aligned}$$

ve $\int_0^1 |1-2t| = \frac{1}{2}$ ise

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^{1-1/q} \left(\frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{4} \right)^{1/q}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.2 $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $\xi' \in L[a, b]$ ise,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du - \xi\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$= (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t \xi'(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right] \quad (3.9)$$

eşitliği elde edilir [27].

İspat. (3.9) eşitliğinden

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{1}{2}} t \xi'(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \xi'(ta + (1-t)b) dt \\ &= \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} t \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &+ \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} (t-1) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \xi(u) du - \frac{1}{b-a} \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \end{aligned}$$

olur. Burada $u = ta + (1-t)b$ değişken değişimi yapılırsa

$$= (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t \xi'(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right]$$

eşitliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.7 $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. Eğer $\xi' \in L[a, b]$ ise,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du - \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{b-a}{8} (|\xi'(a)| + |\xi'(b)|) \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir [27].

İspat. (3.9) eşitliğinden ve $|\xi'|$ 'in konveksliğinden,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du - \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} t \xi'(ta + (1-t)b) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 (t-1) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right] \right| \\
&\leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} |t| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 |t-1| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \right] \\
&\leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} (t^2 |\xi'(a)| + (1-t)t |\xi'(b)|) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 ((1-t)t |\xi'(a)| + (1-t)^2 |\xi'(b)|) dt \right] \\
&\leq \frac{b-a}{8} (|\xi'(a)| + |\xi'(b)|)
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\int_0^{1/2} t^2 dt = \int_{1/2}^1 (1-t)^2 dt = \frac{1}{24}, \quad \int_0^{1/2} (1-t)t dt = \int_{1/2}^1 (1-t)t dt = \frac{1}{12}$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.8 $\xi: I^\circ \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$, $a < b$ olsun. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için $|\xi'|^{p/(p-1)}$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(x) dx - \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
&\leq \frac{b-a}{16} \left(\frac{4}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left[\left(|\xi'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + 3|\xi'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \left(3|\xi'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + |\xi'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \tag{3.11}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir [27].

İspat. (3.9) ifadesinden ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(x) dx - \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\
& \leq (b-a) \left[\int_0^{1/2} t |\xi'(ta + (1-t)b)| dt + \int_{1/2}^1 |t-1| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \right] \\
& \leq (b-a) \left[\left(\int_0^{1/2} t^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{1/2} |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{1/2}^1 |t-1|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_{1/2}^1 |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{1/q} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\int_0^{1/2} t^p dt = \int_{1/2}^1 |t-1|^p dt = \int_0^{1/2} (1-t)^p dt = \frac{1}{(p+1)2^{p+1}}$$

ve $|\xi'|^q$ 'in konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2} |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt & \leq \int_0^{1/2} [t|\xi'(a)|^q + (1-t)|\xi'(b)|^q] dt \\
& = \frac{|\xi'(a)|^q + 3|\xi'(b)|^q}{8} \\
\int_{1/2}^1 |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt & \leq \int_{1/2}^1 [t|\xi'(a)|^q + (1-t)|\xi'(b)|^q] dt \\
& = \frac{3|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{8}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak integraller yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır.

Lemma 3.1.3 $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilebilsin. Eğer $\xi' \in L[a, b]$ ise,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u)w(u)du - \frac{1}{b-a} \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(u)du \\
&= (b-a) \int_0^1 k(t)\xi'(ta + (1-t)b)dt
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olur. Burada $t \in [0,1]$ için

$$k(t) = \begin{cases} \int_0^t w(as + (1-s)b)ds & , \quad t \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ -\int_t^1 w(as + (1-s)b)ds & , \quad t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

olur [28].

İspat. (3.12) eşitliğinin sağ tarafında $k(t)$ fonksiyonunu yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 k(t)\xi'(ta + (1-t)b)dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(as + (1-s)b)ds \right) \xi'(ta + (1-t)b)dt \\
&\quad + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\int_t^1 w(as + (1-s)b)ds \right) \xi'(ta + (1-t)b)dt \\
&= I_1 + I_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
I_1 &= \left(\int_0^t w(as + (1-s)b)ds \right) \left\{ \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \right\} \\
&= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b)ds \right) \left\{ \frac{\xi\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a-b} - \int_0^{\frac{1}{2}} w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \right\}
\end{aligned}$$

benzer şekilde,

$$I_2 = \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 w(as + (1-s)b)ds \right) \left\{ \frac{\xi\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a-b} - \int_{\frac{1}{2}}^1 w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \right\}$$

olacağından,

$$I = I_1 + I_2$$

$$= \left(\int_0^1 w(as + (1-s)b)ds \right) \left\{ \frac{\xi\left(\frac{a+b}{2}\right)}{a-b} - \int_0^1 w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \right\}$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için $u = ta + (1-t)b$ değişken değişimi yapılırsa ve her iki taraf $(b-a)$ ile çarpılırsa (3.12) ifadesine ulaşılarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.2 (3.12) eşitliğinde $w(x) = 1$ alınırsa (3.9) eşitliği elde edilir.

Teorem 3.1.9 [28] $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|\xi'|^q$, $[a, b]$ üzerinde konveks ve $q > 1$ ise $1/p + 1/q = 1$ için,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(x)w(u)du - \frac{1}{b-a} \xi\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(u)du \right| \leq (b-a) \left\{ \left(\frac{1}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(u - \frac{a+b}{2}\right) w^p(u)du \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{|\xi'(a)|^q + 2|\xi'(b)|^q}{24} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \quad (3.13)$$

Lemma 3.1.4 [28] $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olsun. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilsin. Eğer $\xi' \in L[a, b]$ ise,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) w(u) du \\ &= \frac{(b-a)}{2} \int_0^1 p(t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \end{aligned}$$

$t \in [0,1]$ için

$$p(t) = \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds. \quad (3.14)$$

İspat. (3.14) eşitliğinin sağ tarafı düzenlenirse

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 P(t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b) ds \right) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left(- \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right\} \\ &= J_1 + J_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} J_1 &= \left\{ \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b) ds \right) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} \Big|_0^1 \right\} \\ &\quad + \int_0^1 w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ &= \left\{ - \left(\int_0^1 w(as + (1-s)b) ds \right) \frac{\xi(b)}{a-b} \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \right\} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Benzer şekilde,

$$J_2 = - \left(\int_0^1 w(as + (1-s)b) ds \right) \frac{\xi(a)}{a-b} \\ - \int_0^1 w(at + (1-t)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt$$

elde edilir. Burada

$$J = J_1 + J_2$$

olduğundan

$$2 \int_0^1 w(as + (1-s)b) \frac{\xi(ta + (1-t)b)}{a-b} dt \\ - \left(\int_0^1 w(as + (1-s)b) ds \right) \frac{\xi(a) + \xi(b)}{a-b}$$

elde edilir. $t \in [0,1]$ için $u = ta + (1-t)b$ değişken değişimi yapılırsa ve her iki taraf $\frac{(b-a)}{2}$ ile çarpılırsa (3.14) ifadesine ulaşılarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.1.3 (3.14) eşitliğinde $w(x) = 1$ alınırsa (3.5) elde edilir.

Teorem 3.1.10 [28] $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|\xi'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise,

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) w(u) du \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(u)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.15)$$

Burada $t \in [0,1]$ için $\gamma(u) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(u) du \right|$ dır.

İspat. (3.14) ifadesinden

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) w(u) du \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(u) du - \int_{b-(b-a)t}^b w(u) du \right| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \right]
\end{aligned}$$

olur. $w(u)$, $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik ve $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(u) du - \int_{b-(b-a)t}^b w(u) du = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(u) du$$

$t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(u) du - \int_{b-(b-a)t}^b w(u) du = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(u) du$$

olacağından eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) w(u) du \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(u) |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\gamma(u) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(u) du \right|$ olur. Hölder eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) w(u) du \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(u)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_0^1 |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $|\xi'|^q$ konveks olduğundan

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} \int_a^b w(u) du - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) w(u) du \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \gamma(u)^p dt \right]^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1.4 (3.15) ifadesinde $w(x) = 1$ alınırsa (3.7) elde edilir.

Teorem 3.1.11 (Hölder-İşcan İntegral Eşitsizliği [29]) $p > 1$ ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. Eğer ξ ve γ , $[a, b]$ üzerinde tanımlı gerçekte fonksiyonlar ve $|\xi|^p, |\gamma|^q$ $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonlar ise

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\xi(u)\gamma(u)| du \\ & \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-u) |\xi(u)|^p du \right)^{1/p} \left(\int_a^b (b-u) |\gamma(u)|^q du \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (u-a) |\xi(u)|^p du \right)^{1/p} \left(\int_a^b (u-a) |\gamma(u)|^q du \right)^{1/q} \right\} \end{aligned} \quad (3.16)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.12 (Improved Power-mean İntegral Eşitsizliği [30]) $q \geq 1$ olsun. Eğer ξ ve γ , $[a, b]$ aralığında tanımlı gerçekte fonksiyonlar, $|\xi|, |\xi||\gamma|^q$ bu aralıkta integrallenebilir ise

$$\begin{aligned} & \int_a^b |\xi(u)\gamma(u)| du \\ & \leq \frac{1}{b-a} \left\{ \left(\int_a^b (b-u) |\xi(u)| du \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (b-u) |\xi(u)||\gamma(u)|^q du \right)^{1/q} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_a^b (u-a) |\xi(u)| du \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b (u-a) |\xi(u)||\gamma(u)|^q du \right)^{1/q} \right\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 3.1.13 $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $\xi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|\xi'|, [a, b]$ üzerinde quasi konveks ise,

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| \leq \frac{(b-a) \cdot \max\{|\xi'(a)|, |\xi'(b)|\}}{4} \quad (3.18)$$

eşitsizliği elde edilir [19].

İspat. (3.5) eşitliğinden ve $|\xi'|$, quasi-konveks olduğundan,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| &= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |(1-2t)| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |(1-2t)| \max\{|\xi'(a)|, |\xi'(b)|\} dt \\ &\leq \frac{(b-a) \cdot \max\{|\xi'(a)|, |\xi'(b)|\}}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right) \\ &\leq \frac{(b-a) \cdot \max\{|\xi'(a)|, |\xi'(b)|\}}{4} \end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.14 $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olmak üzere, $\xi: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, (a, b) aralığında diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $p > 1$ için $|\xi'|^{p/(p-1)}, [a, b]$ aralığında quasi -konveks ise,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| &\leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\max \left\{ |\xi'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, |\xi'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right\} \right]^{\frac{p-1}{p}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

eşitsizliği elde edilir [19].

İspat. (3.5) ifadesinden ve Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| &= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \\ &\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$|\xi'|^{p/(p-1)}$, quasi konveks olduğundan

$$\begin{aligned} &\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 \max\{|\xi'(a)|^q, |\xi'(b)|^q\} dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \frac{b-a}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} [\max\{|\xi'(a)|^q, |\xi'(b)|^q\}]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

bulunur ve

$$\leq \frac{b-a}{2(p+1)^{1/p}} [\max\{|\xi'(a)|^{p/(p-1)}, |\xi'(b)|^{p/(p-1)}\}]^{(p-1)/p}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Theorem 3.1.15 [31] $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere, $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° aralığında diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$ için $\xi' \in L[a, b]$ aralığında $|\xi'|^q$ quasi-konveks ise,

$$\left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| \leq \frac{b-a}{4} (\max\{|\xi'(a)|^q, |\xi'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \quad (3.20)$$

İspat. (3.5) ifadesinden ve Power Mean eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi(a) + \xi(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b \xi(u) du \right| &= \left| \frac{b-a}{2} \int_0^1 (1-2t) \xi'(ta + (1-t)b) dt \right| \\ &\leq \frac{b-a}{2} \int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)| dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{b-a}{2} \left[\left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |1-2t| |\xi'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left(\int_0^1 |1-2t| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\max\{|\xi'(a)|^q, |\xi'(b)|^q\} \int_0^1 |1-2t| dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{b-a}{4} (\max\{|\xi'(a)|^q, |\xi'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Theorem 3.1.16 $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$ olmak üzere, $\xi: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° aralığında diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. $q \geq 1$ için $\xi' \in L[a, b]$ aralığında $|\xi'|^q$ konveks ise

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\
&\leq \frac{(b-a)}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left[\left(\frac{|\xi'(a)|^q + 2|\xi'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|\xi'(a)|^q + |\xi'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \quad (3.21)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [29].

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili bazı türevlenebilir fonksiyonlar için Fejér tipi yeni teorem ve sonuçlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ $a < b$, ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında integrallenebilir, $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, eğer $|f'|^q, [a, b]$ aralığında konveks, $q > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \\ & \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right. \\ & \times \left[\left(\frac{5|f'(a)|^q + 11|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{11|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \left. + \left[\left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right. \\ & \times \left[\left(\frac{3|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \left. \right\} \quad (4.1) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.12) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right. \\ \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b) ds \right) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte integral sırası değiştirilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ \leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right. \\ \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right] \quad (4.2)$$

ifadesine ulaşılır. Burada (4.2) eşitsizliğine Hölder-İşcan integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ \leq (b-a) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\ \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ + \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \\ \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

$$+(b-a) \left\{ \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\ \left. \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ \left. + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\ \left. \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right] \right\}$$

elde edilir ve $|f'|^q$ konveks olduğundan

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ \leq (b-a) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s\right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\ \left. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s\right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ \left. + \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\ \left. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right] \right\}$$

$$+ (b-a) \left\{ \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $x = as + (1-s)b$ ve $dx = (a-b)ds$ olacağından

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \leq (b-a) \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{4(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)^2 w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{5|f'(a)|^q + 11|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\frac{1}{2(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)(2x-a-b) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{3|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (b-a) \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{2(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(a+b-2x)w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{5|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left[\left(\frac{1}{4(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x)^2 w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left(\frac{11|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \left. \right\} \quad (4.3)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $w(x)$ fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan burada

$$\begin{cases} I_1 = \frac{1}{4(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)^2 w^p(x)dx \\ I_2 = \frac{1}{4(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x)^2 w^p(x)dx \end{cases} \quad I_1=I_2 \quad (4.4)$$

$$\begin{cases} I_3 = \frac{1}{2(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)(2x-a-b)w^p(x)dx \\ I_4 = \frac{1}{2(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(a+b-2x)w^p(x)dx \end{cases} \quad I_3=I_4 \quad (4.5)$$

yazılabilir. (4.4)-(4.5) eşitlikleri (4.3) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\leq (b-a) \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ & \times \left[\left(\frac{5|f'(a)|^q + 11|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{11|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ & \times \left[\left(\frac{3|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \right\}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.1 (4.1) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq (b-a) \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{5|f'(a)|^q + 11|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{11|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left(\frac{1}{48} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{3|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{384} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \right\} \\ & \leq (b-a) \\ & \times \left\{ \begin{aligned} & \left(\frac{1}{24} \right) \times \left[\left(\frac{5|f'(a)|^q + 11|f'(b)|^q}{16} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{11|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{16} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left(\frac{1}{48} \right) \times \left[\left(\frac{3|f'(a)|^q + 5|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{5|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{8} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.6) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.13) eşitsizliğine göre daha iyi bir sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.2 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ $a < b$, ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında integrallenebilir $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, eğer $f' \in L[a, b]$ aralığında quasi-konveks, $q > 1$ ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq 2(b-a) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left(\frac{1}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

İspat. (3.12) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \left\{ \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(as + (1-s)b)ds \right) |f'(ta + (1-t)b)|dt \right] \right. \\ & \quad \left. + \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b)ds \right) |f'(ta + (1-t)b)|dt \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadede integral sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right] \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\leq (b-a) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s |f'(ta + (1-t)b)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

elde edilir ve $|f'|^q$ quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \right| \\ & \leq (b-a) (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \times \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte $x = as + (1-s)b$ ve $dx = (a-b)ds$ olacağından

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \right| \\ & \leq (b-a) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \left(\frac{1}{2(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x)w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$$

elde edilir. Ayrıca $w(x)$ fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq 2(b-a) \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{q}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\ & \times \left(\frac{1}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

elde edilir Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2 (4.7) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{4} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.8)$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.3 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ $a < b$, ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında integrallenebilir $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, eğer $f' \in L[a, b]$ aralığında quasi-konveks, $q > 1$ ise

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2(b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left\{ \left[\left(\frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right)^2 w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right. \\
&\left. + \left[\left(\frac{1}{48} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) \left(x - \frac{a+b}{2} \right) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\} \quad (4.9)
\end{aligned}$$

İspat. (3.12) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alındığında

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
&\leq (b-a) \left\{ \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(as + (1-s)b)ds \right) |f'(ta + (1-t)b)|dt \right] \right. \\
&\left. + \left[\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b)ds \right) |f'(ta + (1-t)b)|dt \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadede integral sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
&\leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right. \\
&\left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada Hölder-İşcan integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\begin{aligned}
& \leq (b-a) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \\
& \quad + \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \\
& \quad + (b-a) \left\{ \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \\
& \quad + \left\{ \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $|f'|^q$ quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \right| \\
& \leq (b-a) (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\frac{1}{2} - s \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(s - \frac{1}{2} \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w^p(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right)^2 ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \right\}.$$

Son eşitsizlikte $x = as + (1-s)b$ ve $dx = (a-b)ds$ olacağından

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ \leq (b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \left[\left(\frac{1}{4(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)^2 w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\frac{1}{2(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)(2x-a-b) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{48} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\frac{1}{2(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(a+b-2x) w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{48} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & + \left[\left(\frac{1}{4(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x)^2 w^p(x) dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{24} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

elde edilir. Ayrıca $w(x)$ fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan (4.4) ve (4.5) eşitlikleri (4.10) eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
& \leq 2(b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left[\left(\frac{1}{24}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\left(\frac{1}{48}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x) \left(x - \frac{a+b}{2}\right) w^p(x)dx \right)^{\frac{1}{p}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.3 (4.9) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b dx \right| \\
& \leq \frac{(b-a)}{8} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.8) eşitsizliğine göre daha iyi bir sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.4 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ $a < b$, ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında integrallenebilir $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, eğer $f' \in L[a, b]$ aralığında quasi-konveks ise,

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
& \leq 2(b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \frac{1}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) w(x)dx \right\}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

İspat. (3.12) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(as + (1-s)b)ds \right) |f'(ta + (1-t)b)|dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b)ds \right) |f'(ta + (1-t)b)|dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadede integral sırası değiştirilirse

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right] \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır. Burada power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ & \leq (b-a) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\ & \quad \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \\ & \quad \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte $|f'|^q$ quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
& \leq (b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $x = as + (1-s)b$ ve $dx = (a-b)ds$ olacağından

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
& \leq (b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left\{ \left[\frac{1}{2(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b) w(x) dx \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{1}{2(b-a)^2} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x) w(x) dx \right] \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $w(x)$ fonksiyonu $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\
& \leq 2(b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

$$\times \left\{ \frac{1}{(b-a)^2} \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2} \right) w(x) dx \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.4 (4.12) eşitsizliğinde $w(x)=1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{4} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Teorem 4.1.5 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ $a < b$, ve $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında integrallenebilir $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik bir fonksiyon olsun, eğer $f' \in L[a, b]$ aralığında quasi-konveks ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \right| \\ & \leq (b-a) (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)^2 w(x) dx \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)(2x-a-b) w(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. (3.12) eşitliğinin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \right| \\ & \leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_t^1 w(as + (1-s)b) ds \right) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifadede integral sırası değiştirilirse

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\leq (b-a) \left[\int_0^{\frac{1}{2}} \int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right. \\ \left. + \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)| dt ds \right]$$

elde edilir. Burada İmproved power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\leq (b-a) \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\ \left. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s \right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \\ + \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\ \left. \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

$$+(b-a)$$

$$\times \left\{ \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2}\right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte $|f'|^q$ quasi konveks olduğundan

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right|$$

$$\leq (b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s\right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} - s\right) \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] + \left[\left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \left(\int_0^{\frac{1}{2}} s \left(\int_s^{\frac{1}{2}} w(as + (1-s)b) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

$$+(b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \right. \\ \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-s) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ + \left[\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{1-\frac{1}{q}} \times \right. \\ \left. \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(s - \frac{1}{2} \right) \left(\int_{\frac{1}{2}}^s w(as + (1-s)b) dt \right) ds \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte $x = as + (1-s)b$ ve $dx = (a-b)ds$ olacağından

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ \leq (b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\ \times \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{4(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)^2 w(x)dx \\ & + \frac{1}{2(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)(2x-a-b)w(x)dx \\ & + \frac{1}{2(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (x-a)(a+b-2x)w(x)dx \\ & + \frac{1}{4(b-a)^3} \int_a^{\frac{a+b}{2}} (a+b-2x)^2 w(x)dx \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

elde edilir. Ayrıca $w(x)$ fonksiyonu $x = \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan (4.4) ve (4.5) eşitlikleri (4.15) eşitsizliğinde yerine yazıldığında

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx - \frac{1}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x)dx \right| \\ \leq (b-a)(\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (2x-a-b)^2 w(x) dx \\ & + \frac{1}{(b-a)^3} \int_{\frac{a+b}{2}}^b (b-x)(2x-a-b) w(x) dx \end{aligned} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.5 (4.14) eşitsizliğinde $w(x)=1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{16} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.16)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.13) eşitsizliğine göre daha iyi bir sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.6 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.17)$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| \right. \\ & \quad \left. |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

$w(x)$, $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx$$

$t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x) dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx \right|$ olmak üzere bu ifadeye Hölder-İşcan integral eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte $|f'|^q$ konveks olduğundan

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t (t|f'(a)|^q + (1-t)|f'(b)|^q) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliğinde gerekli integral uygulamaları yapıldığında

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.6 (4.17) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 t \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{6} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilen ifadede gerekli integral uygulamaları yapıldığında

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ \leq \frac{(b-a)}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

(3.21) eşitsizliği elde edilir. Burada

$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^s, 0 < s \leq 1$, konkav fonksiyonu her $u, v \geq 0$ ise

$$h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2}\right)^s \geq \frac{h(u) + h(v)}{2} = \frac{u^s + v^s}{2}$$

olduğundan

$$\frac{1}{2} \left[\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{2} \left[\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

buradan

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)}{4} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\left(\frac{|f'(a)|^q + 2|f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{2|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{3} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \times \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

olacağından burada bulunan sonuç (3.7) eşitsizliğinden daha iyi bir sonuçtur.

Teorem 4.1.7 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi-konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned} \quad (4.18)$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| \right. \\ & \quad \left. |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

$w(x)$, $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan $t \in [0, \frac{1}{2}]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx$$

$t \in [\frac{1}{2}, 1]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x) dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx \right|$ olmak üzere Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte $|f'|^q$ 'quasi-konveks olduğundan

$$\leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.7 (4.18) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

(3.19) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.8 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi-konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{2} \right)^{1+\frac{1}{q}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \end{aligned} \quad (4.19)$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

$w(x), \frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x)dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x)dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x)dx$$

$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x)dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x)dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x)dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x)dx \right|$ olmak üzere Hölder-İşcan integral

eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve bu eşitsizlikte $|f'|^q$ quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 (1-t) dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^1 t dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

$$\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 t |g(x)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right]$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.8 (4.19) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{q}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t) \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_0^1 t \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)}{2} \left(\frac{1}{p+1}\right)^{\frac{1}{p}} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

(3.19) eşitsizliği elde edilir. Böylece sonuç 4.1.7 ile aynı sonuçlar elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.9 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 |g(x)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |g(x)| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

$w(x)$, $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olduğundan $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx$$

$t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ için

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x) dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

elde edilir.. Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx \right|$ olmak üzere power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 |g(x)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |g(x)| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

elde edilir. İspat tamamlanır.

Sonuç 4.1.9 (4.20) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınır

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

olacağından ve $|f'|^q$ konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{4} \left[\left(\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

elde edilir.

Teorem 4.1.10 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t) |g(x)| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_0^1 t |g(x)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t |g(x)| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınır

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

$w(x)$ simetrik olduğundan $x = \frac{a+b}{2}$ yazılırsa

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x)dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x)dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x)dx$$

$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için ve

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x)dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x)dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x)dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]$$

elde edilir. Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x)dx \right|$ olmak üzere improved power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t) |g(x)| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1 t |g(x)| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t |g(x)| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

Sonuç 4.1.10 (4.21) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınır

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\begin{aligned} & \left(\int_0^1 (1-t) \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \left(\int_0^1 (1-t) \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & + \left(\int_0^1 t \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\ & \left(\int_0^1 t \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| |f'(ta + (1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \right]$$

olacağından ve $|f'|^q$ konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ & \leq \frac{(b-a)}{8} \left[\left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. Burada

$h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, h(x) = x^s, 0 < s \leq 1$, konkav fonksiyonu her $u, v \geq 0$ ise

$$h\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2}\right)^s \geq \frac{h(u) + h(v)}{2} = \frac{u^s + v^s}{2}$$

olduğundan

$$\frac{1}{2} \left[\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} + \frac{1}{2} \left[\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} \right]^{\frac{1}{q}} \leq \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}$$

Oodduğundan

$$\begin{aligned} & \frac{(b-a)}{8} \left[\left(\frac{|f'(a)|^q + 3|f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} + \left(\frac{3|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \leq \frac{(b-a)}{4} \left[\frac{|f'(a)|^q + |f'(b)|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (4.21) eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.11 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |g(x)| dt \right) \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| \left| \frac{f'(ta + (1-t)b)}{-t} \right| dt \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

$w(x)$ simetrik olduğundan $x = \frac{a+b}{2}$ yazılırsa

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx$$

$t \in [0, \frac{1}{2}]$ için ve

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x) dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x)dx \right|$ olmak üzere power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 |g(x)|dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 |g(x)||f'(ta+(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

olur ve $|f'|^q$ quasi-konveks olduğundan

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 |g(x)|dt \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.11 (4.23) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \\ & \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| dt \right) \right] \\ & \leq \frac{(b-a)}{4} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.12 $f: I^\circ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, I° üzerinde türevlenebilen bir fonksiyon ve $a, b \in I^\circ$ ve $a < b$. $w: [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ aralığında türevlenebilir ve $\frac{a+b}{2}$ 'ye göre simetrik olsun. Eğer $|f'|$, $[a, b]$ üzerinde quasi konveks ise,

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b w(x)dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)w(x)dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \\
&\times \left[\left(\int_0^1 (1-t) |g(x)| dt \right) + \left(\int_0^1 t |g(x)| dt \right) \right] \tag{4.24}
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 3.1.4 de eşitliğin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\
&\leq \frac{b-a}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_t^1 w(as + (1-s)b) ds - \int_0^t w(as + (1-s)b) ds \right| \right. \\
&\quad \left. |f'(ta + (1-t)b)| dt \right] \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 \left| \int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx \right| |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]
\end{aligned}$$

$w(x)$ simetrik olduğundan $x = \frac{a+b}{2}$ yazılırsa

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx$$

$t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ için ve

$$\int_a^{b-(b-a)t} w(x) dx - \int_{b-(b-a)t}^b w(x) dx = - \int_{b-(b-a)t}^{a+(b-a)t} w(x) dx$$

olacağından elde edilenler son eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2} \left[\int_0^1 g(x) |f'(ta + (1-t)b)| dt \right]
\end{aligned}$$

Burada $g(x) = \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} w(x) dx \right|$ olmak üzere improved power-mean eşitsizliği uygulanırsa

$$\left| \frac{1}{b-a} \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) w(x) dx \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t)|g(x)|dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)|g(x)||f'(ta+(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 t|g(x)|dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t|g(x)||f'(ta+(1-t)b)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right]$$

olur ve $|f'|^q$ quasi-konveks olduğundan

$$\leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t)|g(x)|dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 (1-t)|g(x)| \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 t|g(x)|dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_0^1 t|g(x)|dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ \leq \frac{1}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t)|g(x)|dt \right) + \left(\int_0^1 t|g(x)|dt \right) \right]$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.12 (4.24) eşitsizliğinde $w(x) = 1$ alınırsa

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \right| \\ \leq \frac{1}{2} \left[\left(\int_0^1 (1-t) \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| dt \right) + \left(\int_0^1 t \left| \int_{a+(b-a)t}^{b-(b-a)t} dx \right| dt \right) \right] \\ \leq \frac{(b-a)}{2} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}} \left[\left(\int_0^1 (1-t)|1-2t|dt \right) \right. \\ \left. + \left(\int_0^1 t|1-2t|dt \right) \right] \\ \leq \frac{(b-a)}{4} (\max\{|f'(a)|^q, |f'(b)|^q\})^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Sonuç 4.1.11 ile aynı sonuçlar elde edilmiş olur.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada konveks fonksiyonlar için elde edilmiş eşitsizliklerden yeni Hermite-Hadamard-Fejér tipli eşitsizlikler elde edilmiştir. Literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği ile ilgili olarak verilen lemmalara Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve Improved power-mean eşitsizliği uygulanmış, çeşitli teorem ve sonuçlara ulaşılmıştır. Hölder-İşcan integral eşitsizliği ve Improved power-mean eşitsizliği başka eşitsizlik ve lemmalara uygulanarak farklı ve daha iyi sonuçlar elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Hardy, G.H., Littlewood, J.E., and Polya, G., Inequalities 2nd Edition, Cambridge University Press, 324, 1952.
- [2] Beckenbach, E.F., Bellman, R., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 198, 1961.
- [3] Mitrinović, D. S., Analytic Inequalities , Springer-Verlang, Berlin, 1970.
- [4] Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E., Fink, A.M., Classical and new inequalities in Analysis , Kluwer Academic Publishers, Boston, 1993.
- [5] Pachpatte, B.G., Mathematical inequalities, Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands, 67, 591, 2005.
- [6] Niculescu, C.P., Persson, L.E., Convex Function and Their Application, Springer, Berlin Heidelberg NewYork, 2004.
- [7] Hermite, C., Sur deuxlimitesd'une integrale, Mathesis, 3, 82-83, 1883.
- [8] Hadamard, J., Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considerée par Riemann, Journal De Mathématiques Pures Et Appliquées, 58, 171-215, 1893.
- [9] Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, ISBN 975-442-035-1, 2000.
- [10] Pečarić, J., Proschan, F. and Tong Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc., Boston, 469, 1992.
- [11] Roberts, A.W., Varberg, D.E., Convex Functions. Academic Press, New York, 300, 1973.
- [12] Azpeitia, A.G., Convex functions and the Hadamard inequality, Revista Colombiana Matemáticas, 28, 7-12, 1994.
- [13] Manfrino, R.B., Ortega, J.A.G., and Delgado, R.V., Inequalities: A Mathematical, 2009.

- [14] Adams, R.A., Essex, C., Calculus A Complete Course, Pearson Canada Inc., Toronto, Ontario, 934, 2010.
- [15] Bayraktar, M., Analiz, ISBN 978-605-395-412-5, 2010.
- [16] Carter, M., Van Brunt, B., The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction, ISBN: 0387950125, 2000.
- [17] Dragomir, S.S., Pearce, C.E.M., Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, Bulletin of the Australian Mathematical Society 57, 377-385, 1998.
- [18] Greenberg, H.J., Pierskalla, W.P., A review of quasi convex functions. 19, 7, 1970.
- [19] Ion, D.A., Some estimates on the Hermite-Hadamard inequality through quasi-convex functions, Annals of the University of Craiova Mathematics and Computer Science Series, 34, 82-87, 2007.
- [20] Niculescu, C.P., Convexity according to the geometric mean, Mathematics Inequal. Applied. 155-167, 2000.
- [21] Ostrowski, A., Über die Absolutabweichung einer differentienbaren Funktionen von ihren Integralmittelwert, Comment. Mathematics Hel, 10, 226-227, 1938.
- [22] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Cerone, P., On Simpson's Inequality and Applications. J. of Inequal. & Appl, 5, 533-579, 2000.
- [23] Pečarić, J.E., Proschan F., and Tong Y.L., Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, New York, 1991.
- [24] Fejér, L., Über die Fourierreihen II, Hungarian, 1906.
- [25] Dragomir, S.S., Agarwal, R.P., Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and trapezoidal formula, Applied Mathematics Letters, 91-95, 1998.
- [26] Pearce, C.E.M., Pečarić, J.E., Inequalities for differentiable mappings with application to special means and quadrature formula, Applied Mathematics Letters 51-55, 2000.
- [27] Kırmacı, U.S., Inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to midpoint formula, Applied Mathematics Computation, 137-146, 2004.

- [28] Sarıkaya, M.Z., On new Hermite Hadamard Fejer type integral inequalities, *Studia Universitatis Babeş-Bolyai Mathematics* 57, N.3, 377-386, 2012.
- [29] İşcan, İ., New refinements for integral and sum forms of Hölder inequality, *Journal of Inequalities and Applications*, 304, 2019.
- [30] Kadakal, M., İşcan, İ., Kadakal, H., and Bekar, K., On improvements of some integral inequalities, *Turkic World Mathematical Society Journal of Applied*, 2019.
- [31] Darus, M., Dragomir, S.S., and Alomari, M.W., Inequalities of Hermite-Hadamard's type for functions whose derivatives absolute values are quasi-convex, 2010.



ÖZGEÇMİŞ

Gamze YILDIZ İlk, orta ve lise eğitimini Giresun'da tamamladı. 2012 yılında Hamdi Bozbağ Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2013 yılında başladığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü 2017 yılında bitirdi. 2018 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Kervansaray Ortaokulu'nda görev yapmaktadır.

