

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI YENİ PARANORMLU FARK DİZİ UZAYLARI VE
GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

SERKAN DEMİRİZ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

Aralık 2011

T.C.
İNÖNÜ UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL
AND APPLIED SCIENCES

ON SOME NEW PARANORMED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES AND
THEIR GEOMETRIC PROPERTIES

SERKAN DEMİRİZ

PHD THESIS
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MALATYA
December 2011

Tezin Başlığı : Bazı Yeni Paranormlu Fark Dizi Uzayları ve Geometrik
Özellikleri Üzerine

Tezi Hazırlayan : Serkan DEMİRİZ

Sınav Tarihi : 26/12/2011

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerdendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
oybirliđi/oyçokluđu ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiřtir.

Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK

Başkan

Prof. Dr. Hüsamettin COŞKUN

Üye

Prof. Dr. Bilal ALTAY

Üye

Doç. Dr. Celal ÇAKAN

Üye

Yrd. Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN

Üye

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..... / /

Prof.Dr.Asım KÜNKÜL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum “ Bazı Yeni Paranormlu Fark Dizi Uzayları ve Geometrik Özellikleri Üzerine ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Serkan DEMİRİZ

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI YENİ PARANORMLU FARK DİZİ UZAYLARI VE GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ ÜZERİNE

Serkan DEMİRİZ

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

57 + viii sayfa

2011

Danışman : Doç. Dr. Celal ÇAKAN

Dört bölümden oluşan bu çalışmada genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi ve fark matrisi kullanılarak bazı yeni paranormlu fark dizi uzayları tanımlanmış ve bu uzayların bazı topolojik ve geometrik özellikleri incelenmiştir.

Birinci bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayları tanımlanıp, bu uzayların izomorf olduğu uzaylar belirlendi ve tam lineer metrik uzay oldukları gösterildi. Ayrıca, tanımlanan bu uzayların α -, β - ve γ - dualleri belirlenerek $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzaylarının Schauder tabanı hesaplandı.

Üçüncü bölümde; ilk olarak yeni çeşit metod ikilileri hakkında bilgi verildi. Daha sonra da bu kavram yardımıyla $X \in \{c_0(u, v; p, \Delta), c(u, v; p, \Delta), \ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}$ ve $Y \in \{c_0(q), c(q), \ell_\infty(q), \ell(q)\}$ olmak üzere $(X : Y)$ matris sınıfları karakterize edildi. Bunun yanı sıra, $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayından ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları içerisine matris sınıflarını karakterize eden teoremler ifade ve ispat edildi.

Son bölümde ise, $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı üzerinde bir modüler tanımlanarak elde edilen $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ modüler dizi uzayının bazı geometrik özellikleri incelendi.

ANAHTAR KELİMELELER : Paranormlu Dizi Uzayları, Bir Üçgensel Matrisin Etki Alanı, Schauder Baz, α –, β – ve γ – Dual, Matris Dönüşümleri, Kadec-Klee Özelliği.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ON SOME NEW PARANORMED DIFFERENCE SEQUENCE SPACES AND THEIR GEOMETRIC PROPERTIES

Serkan DEMİRİZ

İnönü University

Graduate School of Natural And Applied Sciences

Department of Mathematics

57 + viii pages

2011

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Celal ÇAKAN

In this study, we define some new paranormed difference sequence spaces by using generalized weighted mean and difference matrices and investigate some topological and geometrical properties of them. This study consists of four chapters.

The first chapter reviews some basic definitions and theorems which will be used in the next chapters.

In the second chapter the sequence spaces $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ and $\ell(u, v; p, \Delta)$ are defined and the spaces to which these spaces are isomorphic are determined and it is shown that these spaces are complete linear metric spaces. In addition, α -, β - and γ - duals of these sequence spaces are established and their Schauder bases are calculated.

The third chapter starts with discussing a new kind of method pairs, which enables us to characterize the matrix classes $(X : Y)$ where $X \in \{c_0(u, v; p, \Delta), c(u, v; p, \Delta), \ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}$ and $Y \in \{c_0(q), c(q), \ell_\infty(q), \ell(q)\}$. Also; the theorems that characterize the matrix classes from the sequence space $\ell(u, v; p, \Delta)$ to the sequence spaces ℓ_∞ , c and c_0 are stated and proved.

In the fourth chapter some geometric properties of the modular sequence space $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ are investigated which is based on defining a modular on $\ell(u, v; p, \Delta)$.

KEYWORDS : Paranormed Sequence Spaces, Matrix Domain of a Triangle Matrix, Schauder Basis, α –, β – and γ – Dual, Matrix Transformations, Kadec-Klee Property.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında değerli görüş ve katkılarıyla beni yönlendiren, hiçbir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç.Dr. Celal ÇAKAN' a ve her zaman maddi manevi desteklerini hissettiğim aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında desteklerini aldığım başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU olmak üzere bölümdeki bütün hocalarıma sonsuz teşekkürle rimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
GÖSTERİMLER	viii
GİRİŞ	1
1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	5
1.1 Temel Kavramlar	5
1.1.1 Bazı Eşitsizlikler	10
1.1.2 Standart Paranormlu Dizi Uzayları	11
1.2 Matris Dönüşümleri	12
1.3 Modüler Uzaylar ve Zayıf Yakınsaklık	14
2 BAZI YENİ PARANORMLU DİZİ UZAYLARI	17
2.1 $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ Paranormlu Dizi Uzayları	17
2.2 Kapsama Bağlılıkları	30
2.3 Dual Uzaylar	31
3 MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ	35
3.1 Yeni Çeşitli Metod İkilipleri	35
3.2 Bazı Matris Sınıflarının Karakterizasyonu	37
4 GEOMETRİK ÖZELLİKLER	45
4.1 $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ Modüler Dizi Uzayı	45
4.2 $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ Uzayının Kadec-Klee Özelliği	51
KAYNAKLAR	54

GÖSTERİMLER

$\mathbb{R}$	: Reel sayıların cümlesi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayıların cümlesi
ω	: Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı
ℓ_∞	: Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
c	: Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0	: Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
cs	: Yakınsak seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
bs	: Sınırlı seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
ℓ_1	: Mutlak yakınsak seri oluşturan reel terimli dizilerin uzayı
$B = (b_{nk})$	: Reel terimli sonsuz bir matris
$(E : F)$	: E' den F' ye tanımlı matrislerin cümlesi
$\lim_n$	: $\lim_{n \rightarrow \infty}$
$\sum_k$	: $\sum_{k=0}^{\infty}$
A'	: A kümesinin limit noktalarının kümesi
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanışı
$\overset{\circ}{B}$	: B kümesinin içi
X_A	: A sonsuz matrisinin X etki alanı
N_q	: Nörlund ortalamasına karşılık gelen üçgensel matris
$\sup_k$	: $\sup_{k \in \mathbb{N}}$
H	: $\sup_k p_k$
M	: $\max\{1, H\}$
$\mathcal{F}$	: N'nin bütün sonlu alt kümelerinin koleksiyonu

GİRİŞ

Bütün kompleks veya reel terimli dizilerin uzayını ω ile gösterelim. ω uzayının herhangi bir alt uzayı, bir dizi uzayı olarak adlandırılır. Toplanabilme teorisinde genel olarak dizi uzayları ile ilgili problemler incelenir.

Toplanabilme teorisinde dizi uzayları ile ilgili olarak yapılan nitelikli çalışmalar;

- (a) Yeni bir dizi uzayı inşa etmek,
- (b) Bu uzayın, üzerinde tanımlanan bir norm veya paranormla tamlığını göstermek,
- (c) Bu uzayla, bilinen dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelemek,
- (d) Varsa uzayın Schauder tabanını belirlemek,
- (e) Uzayın α -, β - ve γ - duallerini hesaplamak,
- (f) Bu uzaydan, bilinen dizi uzaylarına ve bilinen uzaylardan, bu uzaya matris dönüşümlerini karakterize etmek

gibi problemlerin bir veya birkaçını ele alarak çözüme kavuşturur.

X bir dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris olmak üzere, $x = (x_k) \in X$ için $(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$ ($n \in \mathbb{N}$) serileri yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A - dönüşümü denir.

A - dönüşümü X dizi uzayında yatan dizilerin

$$X_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in X\}$$

cümlesi, A matrisinin X etki alanı olarak adlandırılır. X_A cümlesi, dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemleriyle vektör uzayı teşkil ettiğinden bir dizi uzayıdır. Bu düşünce ile yeni dizi uzayları inşa etmek üzere birtakım çalışmalar yapıldı. 1978 yılında Ng ve Lee [1], 1.mertebeden Cesàro ortalamasının ℓ_p etki alanını kullanarak X_p dizi uzayını inşa etti ve bu uzayı inceledi. Aynı yıl Wang [2], Nörlund ortalamasına karşılık gelen üçgensel matrisin ℓ_p dizi uzayı üzerindeki etki alanını kullanarak $(\ell_p)_{N_q}$ ile gösterdiği Nörlund dizi uzayını tanımladı ve bu uzayın bir Banach uzayı olduğunu göstererek bazı kapsama bağıntılarını inceledi. $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, X_p

ve ℓ_p dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri ise 2000 yılında Başar tarafından [3]'de çalışıldı.

$$a_{nk}^r = \begin{cases} \frac{1+r^k}{1+n}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $A^r = (a_{nk}^r)$ üçgensel matrisinin $0 < r < 1$ için regüler olduğu ve $C_1 -$ Cesàro metodundan kuvvetli olduğu Başar tarafından [4]'de ispat edildi. $A^r = (a_{nk}^r)$ matrisinin c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki sırasıyla a_0^r ve a_c^r ile gösterilen etki alanları Aydın ve Başar tarafından [5] künyeli çalışmada incelendi. Bu çalışmada, a_0^r ve a_c^r dizi uzaylarının sırasıyla c_0 ve c uzaylarını kapsadığı gösterilerek bu uzayların $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ dualleri hesaplandı. Aynı matrisin ℓ_p dizi uzayı üzerindeki a_p^r ile gösterilen etki alanı Aydın tarafından doktora tezi çalışması olarak sunuldu [6].

Fark dizi uzayları ilk olarak 1981 yılında Kızmaz tarafından $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere

$$\mu(\Delta) = \{x = (x_k) \in \omega : \Delta x = (x_k - x_{k+1}) \in \mu\}$$

şeklinde tanımlandı [7]. Daha sonraki yıllarda fark dizi uzayları ile ilgili bir çok çalışma yapıldı. 2003 yılında Altay ve Başar [8] farkları ℓ_p uzayında olan bütün dizilerin oluşturduğu bv_p dizi uzayını tanımladılar ve bu uzayı incelediler. Başar ve Altay bv_p dizi uzayını tanımlarken , Kızmaz ve onu izleyen yazarların yaptığından çok farklı olarak

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & n-1 \leq k \leq n, \\ 0, & 0 \leq k < n-1 \quad \text{or} \quad k > n, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\Delta = (\delta_{nk})$ fark matrisinin etki alanını kullandılar. Yani, bv_p dizi uzayını

$$bv_p = (\ell_p)_\Delta$$

olarak tanımladılar. 2004 yılında Aydın ve Başar, fark matrisinin a_0^r ve a_c^r dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak sırasıyla $a_0^r(\Delta)$ ve $a_c^r(\Delta)$ dizi uzaylarını inşa ettiler [9].

(p_k) pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun. $c(p), c_0(p), \ell_\infty(p)$ ve $\ell(p)$ standart

paranormlu dizi uzayları Maddox tarafından sırasıyla

$$\begin{aligned} c(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \exists l \in \mathbb{C} \ni \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - l|^{p_k} = 0 \right\}, \\ c_0(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^{p_k} = 0 \right\}, \\ \ell_\infty(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}, \\ \ell(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k|^{p_k} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlandı [10, 11].

Üçgensel matrislerin standart paranormlu dizi uzayları üzerindeki etki alanları kullanılarak yeni dizi uzayı inşa etme yaklaşımı pek çok yazar tarafından çalışıldı. Bu anlamda, ilk olarak 1993 yılında Choudhary ve Mishra

$$s_{nk} = \begin{cases} 1, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $S = (s_{nk})$ toplam matrisinin $\ell(p)$ dizi uzayı üzerindeki etki alanını kullanarak $\overline{\ell(p)}$ dizi uzayını tanımladı ve bu uzay üzerinde çalıştı [12]. 2002 yılında Başar ve Altay, yine aynı matrisin bu kez $\ell_\infty(p)$ paranormlu dizi uzayı üzerindeki etki alanını kullanarak

$$bs(p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{i=0}^k x_i \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

dizi uzayını tanımladı [13].

$\mathcal{U}$ ile her $n \in \mathbb{N}$ için $u_n \neq 0$ olacak şekildeki bütün $u = (u_n)$ dizilerinin cümlesini gösterelim. $u, v \in \mathcal{U}$ için

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $G(u, v) = (g_{nk})$ matrisine genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi denir. Çok yakın zamanlarda Başar ve Altay, $G(u, v)$ matrisinin standart paranormlu dizi uzayları üzerindeki etki alanını kullanarak $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere

$$\mu(u, v; p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{j=0}^k u_k v_j x_j \right) \in \mu(p) \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar [14]. $G(u, v)$ matrisinin $\ell(p)$ uzayı üzerindeki etki alanı da yine aynı yazarlar tarafından [15] künyeli çalışmada incelendi.

Ağırlıklı ortalama matrisi ile fark matrisinin çarpımı kullanılarak elde edilen $G(u, v)\Delta$ matrisi [16]'da tanımlandı. Bu matrisin, ℓ_∞ , c ve c_0 dizi uzayları üzerindeki etki alanı yine aynı çalışmada ele alındı.

Bir paranormlu dizi uzayı üzerinde modüler tanımlamak suretiyle elde edilen yeni modüler dizi uzayının geometrik özelliklerinin incelenmesi son zamanlarda yoğun olarak çalışılmaktadır. 2003 yılında Suantai, $ces(p)$ genelleştirilmiş Cesáro dizi uzayının locally uniform rotund (LUR) olduğunu ve Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu göstermiştir [17]. 2009 yılında Şimşek ve Karakaya, Altay ve Başar tarafından [15]'de tanımlanan $\ell(u, v; p)$ dizi uzayı üzerinde bir modüler tanımlayarak elde ettikleri $\ell_\rho(u, v; p)$ genelleştirilmiş modüler dizi uzayının bazı geometrik özelliklerini incelemişlerdir [18].

Bu tez çalışmasında, $G(u, v)\Delta$ matrisinin standart paranormlu dizi uzayları üzerindeki etki alanı kullanılarak yeni paranormlu dizi uzayları tanımlanarak bu uzaylar için yukarıda bahsedilen problemler üzerinde çalışılacaktır. Ayrıca, bu çalışmada $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı üzerinde bir modüler tanımlayarak elde edilen $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ modüler dizi uzayının bazı geometrik özellikleri de incelenecektir.

BÖLÜM 1

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

1.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek olan konu ve kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1.1. [19, sf.50] X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi olsun.

$$+ : X \times X \longrightarrow X$$

ve

$$\cdot : \mathbb{C} \times X \longrightarrow X$$

olmak üzere eğer her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$\text{L1)} \quad x + y = y + x,$$

$$\text{L2)} \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\text{L3)} \quad x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır,}$$

$$\text{L4)} \quad x + (-x) = \theta \text{ olacak şekilde bir } -x \in X \text{ vardır,}$$

$$\text{L5)} \quad 1 \cdot x = x,$$

$$\text{L6)} \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y,$$

$$\text{L7)} \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x,$$

$$\text{L8)} \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$$

şartları sağlanıyorsa, X cümlesine $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir *lineer uzay* denir.

$X, \mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $Y \subset X$ olsun. Bu durumda; her $y_1, y_2 \in Y$ vektörleri ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ skalerleri için $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$ olması halinde Y uzayına, X uzayının bir *lineer altuzay*ı denir.

Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin uzayı ω , dizilerin toplama ve skalerle çarpma işlemine göre bir lineer uzay yapısına sahiptir.

Tanım 1.1.2. [19, sf.53] X bir lineer uzay M cümlesi de X uzayının boş olmayan bir alt kümesi olsun. M deki vektörlerin bütün lineer kombinasyonlarının cümlesine M 'nin *gereni* denir ve $\text{span}M$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. [19, sf.59] X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in X$ ve her α skaleri için;

$$\text{N1)} \quad \|x\| \geq 0$$

$$\text{N2)} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\text{N3)} \quad \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|,$$

$$\text{N4)} \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

şartları sağlanıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir.

Tanım 1.1.4. [19, sf.67] (i) X bir normlu uzay ve (x_k) da bu uzayda bir dizi olsun. Eğer, X uzayı,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$$

olacak şekilde bir x elemanı içeriyorsa, (x_k) dizisi *yakınsaktır* denir. Bu durum $x_k \rightarrow x$ olarak yazılır ve x noktasına (x_k) dizisinin *limiti* adı verilir.

(ii) Normlu bir X uzayında bir (x_k) dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n, k > N$ oldukça,

$$\|x_n - x_k\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa, (x_k) dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 1.1.5. [20, sf.96] X bir normlu uzay olsun. Eğer, X uzayında ki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X 'e *Banach uzayı* denir.

ℓ_∞, c ve c_0 uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile ve ℓ_p ($p \geq 1$) uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_k |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile Banach uzaylardır.

Tanım 1.1.6. [20, sf.85] X bir vektör uzayı ve $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

$$\text{PN1)} \quad g(0) = 0,$$

$$\text{PN2)} \quad g(x) \geq 0,$$

$$\text{PN3)} \quad g(-x) = g(x),$$

$$\text{PN4)} \quad g(x + y) \leq g(x) + g(y),$$

$\text{PN5)} \quad (t_k)$ skalerlerin bir dizisi ve $t_k \rightarrow t$ olmak üzere $g(x_n - x) \rightarrow 0$ olan $(x_k) \subset X$ için

$$g(t_k x_k - tx) \rightarrow 0 \quad (\text{skalerle çarpımın sürekliliği}),$$

şartları sağlanıyorsa g fonksiyonuna X uzayı üzerinde bir *paranorm* ve (X, g) ikilisine de *paranormlu uzay* denir.

$X = \mathbb{C}$ olsun. Her $a \in X$ için $g(a) = |a|$ ile tanımlı $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde bir paranormdur.

Tanım 1.1.7. [20, sf.102] X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ skaları için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

şartlarını sağlayan bir $T : X \rightarrow Y$ operatörüne *lineer operatör* denir.

X uzayından Y uzayına olan bütün lineer operatörlerin cümlesi $L(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$ alınırsa, T lineer operatörüne X uzayı üzerinde bir *lineer fonksiyonel* denir.

Tanım 1.1.8. [20, sf.103] X, Y normlu lineer uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|T(x)\| \leq M\|x\|$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ varsa, T operatörüne *sınırlı lineer operatör* denir.

X uzayından Y uzayına olan bütün sınırlı lineer operatörlerin cümlesi $B(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $Y = \mathbb{C}$ alınırsa, bu durumda $B(X, \mathbb{C})$ cümlesi X üzerindeki bütün sınırlı lineer fonksiyonların cümlesine karşılık gelir. Bu cümleye X 'in *sürekli duali* denir ve X^* ile gösterilir.

Teorem 1.1.1. [20, sf.104] X, Y normlu lineer uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olsun. Bu taktirde, T lineer operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır.

Tanım 1.1.9. $(X, \|\cdot\|_1)$ ve $(Y, \|\cdot\|_2)$ birer normlu uzay ve $T : X \rightarrow Y$ bir lineer dönüşüm olsun. T dönüşümü normu koruyorsa, yani her $x \in X$ için $\|Tx\|_2 = \|x\|_1$ oluyorsa T dönüşümüne *lineer izometri* denir. Böyle bir dönüşümün birebir olacağı açıktır. Eğer bu dönüşüm örten ise T 'ye *lineer izomorfizm* denir. Bu durumda X ile Y normlu uzayları *izomorfik uzaylar* adını alır.

Tanım 1.1.10. Eğer X ve Y uzayları izometrik olarak izomorf ise X ve Y uzaylarına *denk uzaylar* denir. Bu durumda X uzayından Y uzayına bir lineer izometri vardır.

Teorem 1.1.2. [19, sf.67] Bir X Banach uzayının bir Y alt uzayının tam olması için gerek ve yeter şart Y uzayının X uzayında kapalı olmasıdır.

Teorem 1.1.3. [19, sf.30] (X, d) bir metrik uzay $M \subset X$ ve $\overline{M}$, M cümlesinin kapanışını gösterebilir. $x \in \overline{M}$ olması için gerek ve yeter şart $x_k \rightarrow x$ olacak şekilde M cümlesinde bir (x_k) dizisinin mevcut olmasıdır.

Tanım 1.1.11. [21, sf.147] X bir lineer uzay ve d , X üzerinde bir metrik olsun. Eğer, X üzerinde cebirsel operatörler sürekli fonksiyonlar ise, yani (x_k) ve (y_k) X uzayında iki dizi (λ_k) , skalerlerin bir dizisi olmak üzere

$$d(x_k, x) \rightarrow 0, d(y_k, y) \rightarrow 0 \Rightarrow d(x_k + y_k, x + y) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

ve

$$\lambda_k \rightarrow \lambda, d(x_k, x) \rightarrow 0 \Rightarrow d(\lambda_k x_k, \lambda x) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

ise, (X, d) metrik uzayına *lineer metrik uzay* denir.

Tanım 1.1.12. [21, sf.152] Bir tam lineer metrik uzaya F - uzay (Frechet uzay), her $k \in \mathbb{N}$ için

$$p_k : X \rightarrow \mathbb{C}$$

$$x \rightarrow p_k(x) = x_k$$

şeklinde tanımlı koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan topolojiye sahip λ dizi uzayına K - uzay denir. K - uzay olan F - uzayı, FK - uzay olarak adlandırılır. Topolojisi bir normdan elde edilebilen FK - uzayına BK - uzay denir.

ω dizi uzayı, üzerindeki

$$d(x, y) = \sum_k \frac{1}{2^k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$$

metriğinden elde edilen τ_ω topolojisine göre K - uzaydır.

$e^{(k)}$, k . terimi 1 diğer terimleri sıfır olan diziyi; e bütün terimleri 1 olan diziyi ve φ ; $\{e^{(k)}\}$ cümlesinin gerdiği sonlu adette terimi sıfırdan farklı, diğer bütün terimleri sıfır olan dizilerin uzayını gösterebilir.

Tanım 1.1.13. [19, sf.68] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir $\{b_k\} \subset X$ dizisi verilsin. Her $x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=0}^n \alpha_k b_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir tek $(\alpha_k) \subset \mathbb{K}$ dizisi mevcut ise $\{b_k\}$ cümlesine X uzayının *Schauder bazı* denir.

$\{e^{(k)}\}$ cümlesi, c_0 ve ℓ_p uzayları ve $\{e, e^{(k)}\}$ cümlesi de c uzayı için bir Schauder bazdır.

Tanım 1.1.14. Bir BK - uzayındaki $x = (x_k)$ dizisinin n . kısmı

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^n x_k e^{(k)}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 1.1.15. φ uzayını kapsayan bir BK - uzayındaki $x = (x_k)$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x^{[n]} - x\| = 0$$

ise, x dizisi AK - özelliğine sahiptir denir.

Bir λ uzayındaki AK özelliğine sahip dizilerin cümlesi S_λ ile gösterilir. $S_\lambda = \lambda$ eşitliğini sağlayan λ uzayına, AK - uzay denir.

Teorem 1.1.4. BK -uzayı olan bir $\lambda \supset \varphi$ uzayının AK -uzay olması için gerek ve yeter şart $\{e^{(k)}\}$ cümlesinin λ uzayı için bir Schauder bazı teşkil etmesidir.

c_0 ve ℓ_p ($p \geq 1$) dizi uzayları birer AK - uzayıdır.

Tanım 1.1.16. $a_{nk} = 0$ ($k > n$) ve $a_{nn} \neq 0$ olacak şekilde tanımlı $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisine *üçgen matris* denir.

Teorem 1.1.5. [22, sf.66] X bir BK - uzayı ve A da bir üçgen matris olsun. Bu taktirde, $f \in (X_A)^*$ olması için gerek ve yeter şart en az bir $g \in X^*$ için

$$f = g \circ A$$

olmasıdır.

Tanım 1.1.17. [23] λ bir dizi uzayı olsun. Bu durumda;

$$\lambda^\alpha = \{a = (a_k) \in \omega : \text{her } x \in \lambda \text{ için } ax \in \ell_1\},$$

$$\lambda^\beta = \{a = (a_k) \in \omega : \text{her } x \in \lambda \text{ için } ax \in cs\},$$

$$\lambda^\gamma = \{a = (a_k) \in \omega : \text{her } x \in \lambda \text{ için } ax \in bs\}$$

cümlelerine sırasıyla λ uzayının α -, β - ve γ - duali denir. $\lambda^\alpha, \lambda^\beta$ ve λ^γ birer dizi uzayı olup, $\lambda^\alpha \subset \lambda^\beta \subset \lambda^\gamma$ kapsamaları mevcuttur.

1.1.1 Bazı Eşitsizlikler

Bu kısımda, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı eşitsizlikler verildi.

(1) *Üçgen Eşitsizliği*: a ve b herhangi iki kompleks sayı olsun. Bu durumda,

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (1.1.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(2) *Minkowski Eşitsizliği*: $p \geq 1$, $a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$ ve $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$ olsun. Bu taktirde,

$$\left(\sum_{k=1}^n (a_k + b_k)^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^n b_k^p \right)^{1/p} \quad (1.1.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(3) a_k, b_k kompleks sayıları verilsin. (p_k) pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $0 < p_k \leq \sup p_k = H < \infty$ ve $M = \max\{1, H\}$ olsun. O zaman,

$$\left(\sum_k |a_k + b_k|^{p_k} \right)^{1/M} \leq \left(\sum_k |a_k|^{p_k} \right)^{1/M} + \left(\sum_k |b_k|^{p_k} \right)^{1/M} \quad (1.1.3)$$

eşitsizliği geçerlidir.

(4) $p_k > 1$ ve $p^{-1} + q^{-1} = 1$ olsun. Herhangi bir $B > 0$ ve a, b kompleks sayıları için

$$|ab| \leq B(|a|^{q_k} B^{-q_k} + |b|^{p_k}) \quad (1.1.4)$$

eşitsizliği sağlanır.

1.1.2 Standart Paranormlu Dizi Uzayları

Bu kısımda, Maddox tarafından tanımlanan $c(p), c_0(p), \ell_\infty(p)$ ve $\ell(p)$ paranormlu dizi uzaylarından kısaca bahsedildi.

(p_k) pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi, $0 < p_k \leq \sup p_k = H < \infty$ ve $M = \max\{1, H\}$ olsun. O zaman, $c(p), c_0(p), \ell_\infty(p)$ ve $\ell(p)$ paranormlu dizi uzayları sırasıyla

$$\begin{aligned} c(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \exists l \in \mathbb{C} \ni \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - l|^{p_k} = 0 \right\}, \\ c_0(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k|^{p_k} = 0 \right\}, \\ \ell_\infty(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|^{p_k} < \infty \right\}, \\ \ell(p) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k|^{p_k} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

olarak tanımlanır [10, 11].

$c_0(p)$ uzayı

$$h_1(x) = \sup_k |x_k|^{p_k/M} \quad (1.1.5)$$

ile tanımlı h_1 paranormuna göre bir tam lineer metrik uzaydır. (1.1.5)'de tanımlanan h_1 fonksiyonunun $\ell_\infty(p)$ ve $c(p)$ uzayları üzerinde bir paranorm olması ancak ve ancak $\inf p_k > 0$ için sağlanır. Ayrıca, $\ell_\infty(p)$ ve $c(p)$ uzayları bu paranorma göre birer tam lineer metrik uzaydır. $\ell(p)$ uzayı üzerindeki paranorm ise

$$h_2(x) = \left(\sum_k |x_k|^{p_k} \right)^{1/M} \quad (1.1.6)$$

olarak tanımlanır. (1.1.6)'da tanımlanan paranorma göre de $\ell(p)$ uzayı bir tam lineer metrik uzaydır [24, sf.5-6].

1.2 Matris Dönüşümleri

Bu kısımda; dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri tanımlanarak, ileri bölümlerde kullanılacak olan matris dönüşümleri ile ilgili teoremler ispatsız olarak verildi.

Tanım 1.2.1. $A = (a_{nk})$ reel terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k$$

serileri yakınsak ise $((Ax)_n)$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen *dönüşüm dizisi* denir.

λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve A da bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için $((Ax)_n)$ dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayında ise A matrisi, λ uzayından μ uzayına bir *matris dönüşümü* tanımlıyor denir. λ uzayından μ uzayına tanımlı bütün matrislerin sınıfı $(\lambda : \mu)$ ile gösterilir.

Teorem 1.2.1. [21, sf.153] BK - uzayları arasındaki matris dönüşümleri süreklidir.

Tanım 1.2.2. [22, sf.3] $c \subset c_A$ olan bir A matrisine, *yapıyı koruyan matris* denir. Eğer A , yapıyı koruduğu gibi üstelik limiti de koruyorsa o zaman A , bir *regüler matris* olarak adlandırılır .

Tanım 1.2.3. [25, sf.2] Sınırlı dizilerden sınırlı dizilere tanımlı lineer dönüşüme *limitleme metodu* denir .

Şimdi önemli limitleme metodlarından bazılarını verelim.

Tanım 1.2.4. [20, sf.216] Birinci mertebeden Cesàro dönüşümü, $C_1 = (c_{nk})$ matrisi ile verilir. Burada c_{nk} ;

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & 0 \leq k \leq n, \\ 0, & k > n \end{cases}$$

şeklindedir .

Tanım 1.2.5. (q_k) , pozitif sayıların bir dizisi ve

$$Q_n = \sum_{k=0}^n q_k, \quad (n \in \mathbb{N})$$

olsun. Bu durumda; (R, q_n) Riesz ortalamasına karşılık gelen $R^q = (r_{nk}^q)$ matrisi

$$r_{nk}^q = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n}, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanır. λ normlu ya da paranormlu dizi uzayının λ_{R^q} Riesz ortalaması altındaki etki alanı, bir *Riesz uzayı* olarak adlandırılır. $Q_n \rightarrow \infty$ iken R^q matrisinin regüler olduğu bilinir, [25].

Şimdi, bazı matris sınıflarının karakterizasyonlarını veren teoremleri ispatsız olarak sunalım. Burada ve sonrasında $(p_k)^{-1} + (p'_k)^{-1} = 1$ olarak alınacaktır.

Teorem 1.2.2. [27] $A \in (\ell_\infty(p) : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart her $B > 1$ tamsayısı için

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} a_{nk} B^{1/p_k} \right| < \infty \quad (1.2.1)$$

olmasıdır.

Teorem 1.2.3. [27] Her k için $p_k > 0$ olsun. $A \in (\ell_\infty(p) : c)$ olması için gerek ve yeter şart her $B > 1$ tamsayısı için

$$\sum_k |a_{nk}| B^{1/p_k} \text{ serisi } n\text{'ye göre düzgün yakınsak}, \quad (1.2.2)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \alpha_k, \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \quad (1.2.3)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 1.2.4. [28] Her k için $p_k > 0$ olsun. $A \in (\ell_\infty(p) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart her $B > 1$ tamsayısı için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}| B^{1/p_k} < \infty \quad (1.2.4)$$

olmasıdır.

Teorem 1.2.5. [27] (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(p) : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in K} a_{nk} B^{-1} \right|^{p'_k} < \infty \quad (1.2.5)$$

olacak biçimde enaz bir $B > 1$ tamsayısının mevcut olmasıdır.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. $A \in (\ell(p) : \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right|^{p_k} < \infty \quad (1.2.6)$$

şartının sağlanmasıdır.

Teorem 1.2.6. [27] (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(p) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk} B^{-1}|^{p'_k} < \infty \quad (1.2.7)$$

olacak biçimde enaz bir $B > 1$ tamsayısının mevcut olmasıdır.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. $A \in (\ell(p) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n, k \in \mathbb{N}} |a_{nk}|^{p_k} < \infty \quad (1.2.8)$$

şartının sağlanmasıdır.

Teorem 1.2.7. [27] Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(p) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (1.2.7), (1.2.8) şartlarının yanısıra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \beta_k, \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (1.2.9)$$

şartının da sağlanmasıdır.

1.3 Modüler Uzaylar ve Zayıf Yakınsaklık

Bu kısımda, çalışmamızın son bölümünde incelenecek olan bazı geometrik özellikler ile ilgili temel kavramlar verildi.

Tanım 1.3.1. [29] X bir reel vektör uzayı ve $\sigma : X \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon olsun.

- (i) $\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- (ii) $|\alpha| = 1$ olacak şekilde her α skaleri için $\sigma(\alpha x) = \sigma(x)$,
- (iii) Her $x, y \in X$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde her $\alpha, \beta \geq 0$ için,

$$\sigma(\alpha x + \beta y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$$

şartları sağlanıyorsa, σ fonksiyonuna X üzerinde bir *modüler* denir. Ayrıca, eğer

- (iii) şartı her $x, y \in X$ ve $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde her $\alpha, \beta \geq 0$ için,

$$\sigma(\alpha x + \beta y) \leq \alpha \sigma(x) + \beta \sigma(y)$$

şartı ile değiştirilirse, bu durumda σ fonksiyonuna bir *konveks modüler* denir.

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Bu durumda, $\sigma(x) = \|x\|$ olarak tanımlanırsa σ , X üzerinde bir konveks modülerdir.

Tanım 1.3.2. [30] σ , X üzerinde herhangi bir modüler olsun.

$$X_\sigma = \{x \in X : \exists \lambda > 0 \ni \sigma(\lambda x) < \infty\}$$

şeklinde tanımlı uzaya *modüler uzay* denir.

σ , X üzerinde bir konveks modülerse $x \in X_\sigma$ için

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \lambda > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\lambda}\right) \leq 1 \right\}$$

eşitliği, X_σ üzerinde bir norm tanımlar. Bu norma *Luxemburg norm* denir [38].

Şimdi, zayıf yakınsaklık kavramının tanımını verelim.

Tanım 1.3.3. [19, sf.256] X bir lineer normlu uzay ve (x_k) , X uzayında herhangi bir dizi olsun. Her $f \in X^*$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(x_0)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ mevcutsa, bu durumda (x_k) dizisine *zayıf yakınsaktır* denir.

Tanım 1.3.4. [19, sf.257] $X = (X, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve (x_k) , X uzayında herhangi bir dizi olsun.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ mevcutsa (x_k) dizisine *kuvvetli yakınsak* (veya *norma göre yakınsak*) denir.

Kuvvetli yakınsaklık ile zayıf yakınsaklık kavramları arasında ne tür bir ilişki olduğunu aşağıdaki teorem ifade eder.

Teorem 1.3.1. [19, sf.259] $X = (X, \|\cdot\|)$ bir lineer normlu uzay ve (x_k) , X uzayında herhangi bir dizi olsun.

- (i) Eğer (x_k) dizisi kuvvetli yakınsak ise, bu durumda zayıf yakınsaktır.
- (ii) (i)'nin tersi genelde doğru değildir.
- (iii) Eğer $\dim X < \infty$ ise, bu durumda zayıf yakınsaklık kuvvetli yakınsaklığı gerektirir.

Teorem 1.3.1'de ifade edildiği gibi sonlu boyutlu lineer normlu uzaylarda bu iki kavram birbirine denktir. Fakat, zayıf yakınsaklığın kuvvetli yakınsaklığı gerektirdiği sonsuz boyutlu uzaylar da vardır. Schur tarafından l_1 uzayının böyle bir uzay olduğu gösterildi [31].

Şimdi, zayıf yakınsaklık kavramı ile ilgili Banach uzaylarının bir geometrik özelliğinin (Kadec-Klee özelliği) tanımını verelim.

Tanım 1.3.5. [30] X bir Banach uzayı olsun. $\|x_k\| \rightarrow 1$ ($k \rightarrow \infty$) olacak şekilde X uzayında ki herhangi bir (x_k) dizisi için, (x_k) dizisinin x noktasına zayıf yakınsaması $\|x_k - x\| \rightarrow 0$ olmasını gerektiriyorsa, bu durumda X uzayına Kadec-Klee özelliğine sahiptir denir. Yani, X 'in birim küresi üzerindeki her zayıf yakınsak dizi aynı zamanda norma göre de yakınsak oluyorsa, bu durumda X uzayı *Kadec-Klee özelliğine* sahiptir denir.

BÖLÜM 2

BAZI YENİ PARANORMLU DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzaylarının tanımları verildikten sonra, bu uzayların bazı topolojik özellikleri incelendi.

2.1 $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$

Paranormlu Dizi Uzayları

$\mathcal{U}$, her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ olacak şekildeki bütün $u = (u_k)$ dizilerinin cümlesini gösterebilir. $u, v \in \mathcal{U}$ için

$$g_{nk} = \begin{cases} u_n v_k, & (0 \leq k \leq n), \\ 0, & (k > n), \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $G(u, v) = (g_{nk})$ matrisine genelleştirilmiş ağırlıklı ortalama matrisi denir. $X \in \{\ell_\infty, c, c_0, \ell_p\}$ olmak üzere, $G(u, v)$ -dönüşümleri X uzayında yatan bütün dizilerin $Z(u, v; X)$ cümlesi Malkowsky ve Savaş tarafından [32]'de tanımlandı. Bu uzayların paranormlu karşılıkları Altay ve Başar tarafından farklı iki çalışmada ele alındı. İlk olarak, 2006 yılında Altay ve Başar $\mu \in \{\ell_\infty, c, c_0\}$ olmak üzere

$$\mu(u, v; p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{j=0}^k u_k v_j x_j \right) \in \mu(p) \right\}$$

dizi uzaylarını tanımladılar [14]. Daha sonra, 2007 yılında $G(u, v)$ -dönüşümleri $\ell(p)$ uzayında olan bütün dizilerin $\ell(u, v; p)$ cümlesi yine aynı yazarlar tarafından

$$\ell(u, v; p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \left(\sum_{j=0}^k u_k v_j x_j \right) \in \ell(p) \right\}$$

şeklinde tanımlandı [15].

Fark dizi uzayı kavramı ilk olarak 1981 yılında Kızmaz [7] tarafından verildi. Fark dizi uzayları ile ilgili olarak daha sonraki yıllarda pek çok çalışma yapıldı.

Başar ve Altay 2003 yılında,

$$\delta_{nk} = \begin{cases} (-1)^{n-k}, & n-1 \leq k \leq n, \\ 0 & , \quad 0 \leq k < n-1 \quad \text{veya} \quad k > n, \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\Delta = (\delta_{nk})$ fark matrisinin ℓ_p uzayındaki etki alanını kullanarak

$$(\ell_p)_\Delta = bv_p = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k - x_{k-1}|^p < \infty \right\}$$

uzayını tanımladılar [8]. 2008 yılında Başar, Altay ve Mursaleen bu uzayı paranormlu olması durumuna genelleyerek $bv(u, p)$ dizi uzayını

$$bv(u, p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |u_k \Delta x_k|^{p_k} < \infty \right\}; \quad (0 < p_k \leq H < \infty)$$

şeklinde tanımladılar ve bu uzayı incelediler [33].

Ağırlıklı ortalama matrisi ile fark matrisinin çarpımı kullanılarak elde edilen $G = G(u, v; \Delta) = (g_{nk}^\Delta)$ üçgensel matrisi

$$g_{nk}^\Delta = \begin{cases} u_n(v_k - v_{k+1}), & (0 \leq k \leq n-1), \\ u_k v_k & , \quad (k = n), \\ 0 & , \quad (k > n), \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin ℓ_∞, c ve c_0 dizi uzayları üzerindeki etki alanı 2011 yılında Polat, Karakaya ve Şimşek tarafından çalışıldı [16].

Bu matrisin standart paranormlu uzaylar üzerindeki etki alanı kullanılarak $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta), c(u, v; p, \Delta), c_0(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayları sırasıyla

$$\begin{aligned} \ell_\infty(u, v; p, \Delta) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_n \left| \sum_{k=1}^n u_n v_k \Delta x_k \right|^{p_n} < \infty \right\}, \\ c(u, v; p, \Delta) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \exists l \in \mathbb{C} \ni \lim_n \left| \sum_{k=1}^n u_n v_k \Delta x_k - l \right|^{p_n} = 0 \right\}, \\ c_0(u, v; p, \Delta) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \lim_n \left| \sum_{k=1}^n u_n v_k \Delta x_k \right|^{p_n} = 0 \right\}, \\ \ell(u, v; p, \Delta) &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_n \left| \sum_{k=1}^n u_n v_k \Delta x_k \right|^{p_n} < \infty \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dizi uzayları

$$\ell_\infty(u, v; p, \Delta) = \{\ell_\infty(p)\}_{G(u, v; \Delta)} \quad c(u, v; p, \Delta) = \{c(p)\}_{G(u, v; \Delta)}$$

$$c_0(u, v; p, \Delta) = \{c_0(p)\}_{G(u, v; \Delta)} \quad \ell(u, v; p, \Delta) = \{\ell(p)\}_{G(u, v; \Delta)}$$

şeklinde $G(u, v; \Delta)$ üçgensel matrisinin etki alanı olarak da düşünülebilir. Bu tanımda $u = (u_n), v = (v_k)$ ve $p = (p_k)$ dizileri özel seçildiğinde aşağıdaki dizi uzayları elde edilir:

Tanımlanan Uzay	$u = (u_n)$	$v = (v_k)$	$p = (p_k)$	İndirgenen Uzay	Bkz
$\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$	u	v	e	$\ell_\infty(u, v; \Delta)$	[16]
$c(u, v; p, \Delta)$	u	v	e	$c(u, v; \Delta)$	[16]
$c_0(u, v; p, \Delta)$	u	v	e	$c_0(u, v; \Delta)$	[16]
$c(u, v; p, \Delta)$	$1/(n+1)$	$1+r^k$	e	$a_c^r(\Delta)$	[9]
$c_0(u, v; p, \Delta)$	$1/(n+1)$	$1+r^k$	e	$a_0^r(\Delta)$	[9]
$\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$	$1/(n+1)$	$1+r^k$	e	$a_\infty^r(\Delta)$	[34]
$\ell(u, v; p, \Delta)$	$1/(n+1)$	$1+r^k$	e	$a_p^r(\Delta)$	[35]
$\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$	$1/\sum_{k=0}^n q_k$	q_k	p	$r_\infty^q(p, \Delta)$	[36]
$c(u, v; p, \Delta)$	$1/\sum_{k=0}^n q_k$	q_k	p	$r_c^q(p, \Delta)$	[36]
$c_0(u, v; p, \Delta)$	$1/\sum_{k=0}^n q_k$	q_k	p	$r_0^q(p, \Delta)$	[36]
$\ell(u, v; p, \Delta)$	$1/\sum_{k=0}^n q_k$	q_k	p	$r^q(p, \Delta)$	[37]

Çalışmamız boyunca sıkça kullanılan bir $x = (x_k)$ dizisinin $G(u, v; \Delta)$ – dönüşümüne karşılık gelen $y = (y_k)$ dizisi $\nabla v_j = (v_j - v_{j+1})$ olmak üzere

$$y_k = \sum_{j=0}^k u_k x_j \nabla v_j = \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j; \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (2.1.1)$$

eşitliği ile tanımlanır.

Teorem 2.1.1.

$$g(x) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k/M} \quad (2.1.2)$$

ile tanımlı g fonksiyonu $c_0(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir paranormdur. Bu paranorma göre $c_0(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı bir tam lineer metrik uzaydır.

İspat. İlk olarak, $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayının lineer olduğunu gösterelim. $s, x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ için (1.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta(s_j + x_j) \right|^{p_k/M} &\leq \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta s_j \right|^{p_k/M} \\ &+ \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k/M} \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

yazılabilir. (2.1.3) eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse $(s + x) \in c_0(u, v; p, \Delta)$ olduğu görülür. Diğer taraftan, herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$|\alpha|^{p_k} \leq \max\{1, |\alpha|^M\} = K \quad (2.1.4)$$

yazılabilir [10]. (2.1.4) eşitsizliği kullanılarak $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta(\alpha x_j) \right|^{p_k/M} &= |\alpha|^{p_k/M} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k/M} \\ &\leq K^{1/M} \cdot \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k/M} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\alpha x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ olduğunu gösterir. Böylece $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayının bir lineer uzay olduğu gösterildi.

Şimdi (2.1.2)'de tanımlı g fonksiyonunun $c_0(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir paranorm olduğunu gösterelim. $g(\theta) = 0$ ve her $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ için $g(x) = g(-x)$ olduğu açıktır. $x, y \in c_0(u, v; p, \Delta)$ için (2.1.3) eşitsizliği g fonksiyonunun alt toplamsal olduğunu gösterir. Skalerle çarpma işleminin sürekli olduğunu gösterelim. $\{x^n\}$, $g(x^n - x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayında herhangi bir dizi ve (α_n) de $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olacak biçimde skalerlerin herhangi bir dizisi olsun. g alt toplamsal olduğundan ve (2.1.4) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} g(\alpha_n x^n - \alpha x) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta(\alpha_n x_j^n - \alpha x_j) \right|^{p_k/M} \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| g(x^n) + |\alpha| g(x^n - x) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

yazılabilir. Yine g fonksiyonunun alt toplamsallığını kullanarak

$$g(x^n) \leq g(x) + g(x^n - x)$$

yazabiliriz ki bu eşitsizlik $\{g(x^n)\}$ dizisinin sınırlı olduğunu gösterir. Bu gerçek akılda tutularak, (2.1.5) eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$g(\alpha_n x^n - \alpha x) \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu ise, skalerle çarpma işleminin sürekli olduğunu gösterir. Sonuç olarak g , $c_0(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir paranormdur.

Son olarak, $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayının tam olduğunu göstererek ispatı tamamlayalım. $\{x^i\}$, $x^i = \{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \dots\}$ olacak biçimde $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$g(x^i - x^j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir $n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı mevcuttur. g paranormunun tanımı kullanılarak her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |\{G(u, v; \Delta)x^i\}_k - \{G(u, v; \Delta)x^j\}_k|^{p_k/M} &\leq \sup_{k \in \mathbb{N}} |\{G(u, v; \Delta)x^i\}_k - \{G(u, v; \Delta)x^j\}_k|^{p_k/M} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

yazılabilir. Bu ise her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $\{(G(u, v; \Delta)x^0)_k, (G(u, v; \Delta)x^1)_k, \dots\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ cümlesi üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Yani,

$$\{G(u, v; \Delta)x^i\}_k \rightarrow \{G(u, v; \Delta)x\}_k \quad (i \rightarrow \infty)$$

limiti mevcuttur. $(G(u, v; \Delta)x)_0, (G(u, v; \Delta)x)_1, \dots$ limitlerini kullanarak $\{(G(u, v; \Delta)x)_0, (G(u, v; \Delta)x)_1, \dots\}$ dizisini tanımlayabiliriz. (2.1.6) eşitsizliğinde $j \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\{G(u, v; \Delta)x^i\}_k - \{G(u, v; \Delta)x\}_k|^{p_k/M} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (i \geq n_0(\varepsilon)) \quad (2.1.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan, $x^i = \{x_k^{(i)}\} \in c_0(u, v; p, \Delta)$ olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|\{G(u, v; \Delta)x^i\}_k|^{p_k/M} < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.1.8)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.1.7) ve (2.1.8) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} |\{G(u, v; \Delta)x\}_k|^{p_k/M} &\leq |\{G(u, v; \Delta)x\}_k - \{G(u, v; \Delta)x^i\}_k|^{p_k/M} \\ &+ |\{G(u, v; \Delta)x^i\}_k|^{p_k/M} \\ &< \varepsilon \quad (i \geq n_0(\varepsilon)) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\{G(u, v; \Delta)x\} \in c_0(p)$ olduğunu gösterir. Yani, $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ dır. Sonuç olarak $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayındaki keyfi $\{x^i\}$ Cauchy dizisinin bu uzayda yakınsak olduğu gösterildi. O halde, $c_0(u, v; p, \Delta)$ tamdır. $\square$

Teorem 2.1.2. (i) $c(u, v; p, \Delta)$ uzayı (2.1.2) eşitliğinde tanımlı g ile bir tam lineer metrik uzaydır.

(ii) $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ uzayı (2.1.2) eşitliğinde tanımlı g ile bir tam lineer metrik uzaydır.

İspat. Teorem 2.1.1'e benzer olarak yapılır. $\square$

Teorem 2.1.3.

$$g_1(x) = \left(\sum_k \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k} \right)^{1/M} \quad (2.1.9)$$

ile tanımlı g_1 fonksiyonu $\ell(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir paranormdur. Bu paranorma göre $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı bir tam lineer metrik uzaydır.

İspat. $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayının koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre lineerliği; $x, z \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için

$$\begin{aligned} \left[\sum_k \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta (x_j + z_j) \right|^{p_k} \right]^{1/M} &\leq \left[\sum_k \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k} \right]^{1/M} \\ &+ \left[\sum_k \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta z_j \right|^{p_k} \right]^{1/M} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ve herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$|\alpha|^{p_k} \leq \max\{1, |\alpha|^M\} \quad (2.1.11)$$

eşitsizliklerinden hemen görülür (bkz Maddox[5, p.30] ve [6]).

Her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için $g_1(\theta) = 0$ ve $g_1(x) = g_1(-x)$ olduğu açıktır. Diğer taraftan (2.1.10) ve (2.1.11) eşitsizlikleri akılda tutularak ve

$$g_1(\alpha x) \leq \max\{1, |\alpha|\} g_1(x)$$

eşitsizliği kullanılarak g_1 fonksiyonunun alttoplamsallığı elde edilir. Son olarak skalarla çarpma işleminin sürekliliğini gösterelim. $\{x^n\}$, $g_1(x^n - x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayında herhangi bir dizi ve (α_n) de $\alpha_n \rightarrow \alpha$ olacak şekilde skalarların bir dizisi olsun. g_1 alttoplamsal olduğundan

$$g_1(x^n) \leq g_1(x) + g_1(x^n - x)$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısı ile $\{g_1(x^n)\}$ sınırlıdır.

$$\begin{aligned} g_1(\alpha_n x^n - \alpha x) &= \left[\sum_k \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta(\alpha_n x_j^n - \alpha x_j) \right|^{p_k} \right]^{1/M} \\ &\leq |\alpha_n - \alpha| g_1(x^n) + |\alpha| g_1(x^n - x) \end{aligned}$$

eşitsizliğinde $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$g_1(\alpha_n x^n - \alpha x) \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu ise, skalerle çarpmanın sürekli olması anlamına gelir. Dolayısı ile g_1 , $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı üzerinde bir paranormdur.

Teoremin ispatını tamamlamak için $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayının tam olduğunu göstermemiz gerekiyor. $\{x^i\}$, $x^i = \{x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots\}$ olacak şekilde $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olsun. Bu taktirde, verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $i, j > n_0(\varepsilon)$ için

$$g_1(x^i - x^j) < \varepsilon \quad (2.1.12)$$

olacak şekilde pozitif bir $n_0(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur. g_1 'in tanımı kullanılarak her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ ve her $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned} |(G(u, v; \Delta)x^i)_k - (G(u, v; \Delta)x^j)_k| &\leq \left[\sum_k |(G(u, v; \Delta)x^i)_k - (G(u, v; \Delta)x^j)_k|^{p_k} \right]^{1/M} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise her bir sabit $k \in \mathbb{N}$ için $\{(G(u, v; \Delta)x^0)_k, (G(u, v; \Delta)x^1)_k, \dots\}$ dizisinin $\mathbb{R}$ cümlesi üzerinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan,

$$(G(u, v; \Delta)x^i)_k \rightarrow (G(u, v; \Delta)x)_k; \quad i \rightarrow \infty$$

yazılabilir. Bu sonsuz $(G(u, v; \Delta)x)_0, (G(u, v; \Delta)x)_1, (G(u, v; \Delta)x)_2, \dots$, limitleri kullanarak $\{(G(u, v; \Delta)x)_0, (G(u, v; \Delta)x)_1, \dots\}$ dizisini tanımlayalım. (2.1.12) eşitsizliğinden her bir $m \in \mathbb{N}$, $i, j \geq n_0(\varepsilon)$ ve her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^m |(G(u, v; \Delta)x^i)_k - (G(u, v; \Delta)x^j)_k|^{p_k} \leq g_1(x^i - x^j)^M < \varepsilon^M \quad (2.1.13)$$

yazılabilir. Herhangi bir $i \geq n_0(\varepsilon)$ sayısı alalım. (2.1.13) eşitsizliğinde önce $j \rightarrow \infty$ daha sonra $m \rightarrow \infty$ üzerinden limite geçilirse $g_1(x^i - x) \leq \varepsilon$ elde edilir. $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ olduğunu göstererek ispatı tamamlayalım. (2.1.13) eşitsizliğinde $\varepsilon = 1$ alalım ve bu ε seçimine karşılık gelen $n_0(\varepsilon)$ sayısını $n_0(1)$ ile gösterelim. Bu durumda $i \geq n_0(1)$ ve her sabit $m \in \mathbb{N}$ için Minkowski eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left[\sum_{k=0}^m |(G(u, v; \Delta)x)_k|^{p_k} \right]^{1/M} \leq g_1(x^i - x) + g_1(x^i) \leq 1 + g_1(x^i)$$

elde edilir ki, bu $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ olması anlamına gelir. $\{x^i\}$, $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayında keyfi bir Cauchy dizisi olduğu için $\ell(u, v; p, \Delta)$ tamdır. $\square$

Sonuç 2.1.1. $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayının tanımında her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ olarak alınırsa $\ell_p(u, v, \Delta)$ dizi uzayı elde edilir. Yani $\ell_p(u, v, \Delta)$ dizi uzayı

$$\ell_p(u, v, \Delta) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^p < \infty \right\}; \quad (1 \leq p < \infty)$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzay

$$\|x\|_{\ell_p(u, v, \Delta)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_n v_k \Delta x_k \right|^p \right)^{1/p} \quad (2.1.14)$$

ile tam normlu lineer uzaydır.

Şimdi, $\ell_p(u, v, \Delta)$ dizi uzayı üzerindeki (2.1.14) normunun $p \neq 2$ için bir iç çarpımdan elde edilemeyeceğini ifade eden teoremi ispat edelim.

Teorem 2.1.4. $p \neq 2$ için $\ell_p(u, v, \Delta)$ uzayı üzerindeki (2.1.14) normu, bir iç çarpımdan elde edilemez.

İspat. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizilerini $\ell_2(u, v, \Delta)$ uzayından alalım. O zaman,

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \{G(u, v; \Delta)x\}_k \overline{\{G(u, v; \Delta)y\}_k}$$

olarak tarif edilirse, $\ell_2(u, v, \Delta)$ bir iç çarpım uzayıdır. Şimdi,

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_n v_k \Delta x_k \right|^2 \right)^{1/2}$$

iç çarpım normunu düşünelim. Sonuç 2.1.1'den $\ell_p(u, v, \Delta)$ uzayının (2.1.14) normuyla Banach uzayı olduğunu biliyoruz. O halde, $\ell_2(u, v, \Delta)$ bir Hilbert uzayıdır.

Öte yandan,

$$\tilde{z} = \left(\frac{1}{v_0 - v_1}, \frac{1}{v_1 - v_2}, \frac{-2}{v_2 - v_3}, 0, 0, \dots \right)$$

ve

$$\tilde{\omega} = \left(\frac{1}{v_0 - v_1}, \frac{-3}{v_1 - v_2}, \frac{2}{v_2 - v_3}, 0, 0, \dots \right)$$

olarak seçilirse

$$\tilde{z} + \tilde{\omega} = \left(\frac{2}{v_0 - v_1}, \frac{-2}{v_1 - v_2}, 0, 0, \dots \right)$$

ve

$$\tilde{z} - \tilde{\omega} = \left(0, \frac{4}{v_1 - v_2}, \frac{-4}{v_2 - v_3}, 0, 0, \dots \right)$$

elde edilir. Böylece

$$\|\tilde{z}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_n \nabla v_k \tilde{z}_k \right|^p \right)^{1/p} = \left(|u_0|^p + |2u_1|^p \right)^{1/p},$$

$$\|\tilde{\omega}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_n \nabla v_k \tilde{\omega}_k \right|^p \right)^{1/p} = \left(|u_0|^p + |2u_1|^p \right)^{1/p}$$

ve

$$\|\tilde{z} + \tilde{\omega}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_n \nabla v_k (\tilde{z} + \tilde{\omega})_k \right|^p \right)^{1/p} = 2|u_0|$$

ve

$$\|\tilde{z} - \tilde{\omega}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^n u_n \nabla v_k (\tilde{z} - \tilde{\omega})_k \right|^p \right)^{1/p} = 4|u_1|$$

olup buradan

$$\begin{aligned} \|\tilde{z} + \tilde{\omega}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)}^2 + \|\tilde{z} - \tilde{\omega}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)}^2 &= 4|u_0|^2 + 16|u_1|^2 \\ &\neq 4 \left(|u_0|^p + |2u_1|^p \right)^{2/p} \\ &= 2 \left(\|\tilde{z}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)}^2 + \|\tilde{\omega}\|_{\ell_p(u, v, \Delta)}^2 \right); \quad (p \neq 2) \end{aligned}$$

bulunur. Yani $p \neq 2$ için paralelkenar özdeşliği sağlanmaz. Bu da $\ell_p(u, v, \Delta)$ uzayının normunun $p \neq 2$ iken iç çarpımdan elde edilemeyeceğini gösterir. Böylece $\ell_p(u, v, \Delta)$ uzayı bir Banach uzayı olduğu halde $p \neq 2$ için bir iç çarpım uzayı ve dolayısıyla Hilbert uzayı olmadığı sonucuna varılır. $\square$

Teorem 2.1.5. $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$ ve $c_0(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayları sırasıyla $\ell_\infty(p)$, $c(p)$ ve $c_0(p)$ dizi uzaylarına lineer olarak izomorftur.

İspat. İspatı sadece $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ uzayı için yapalım. Diğerleri için de tamamen benzer olarak yapılabilir. $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell_\infty(p)$ uzayları arasında lineer birebir ve örten bir dönüşümün varolduğunu göstermeliyiz. $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ uzayından $\ell_\infty(p)$ 'ye bir T dönüşümünü

$$\begin{aligned} T : \ell_\infty(u, v; p, \Delta) &\mapsto \ell_\infty(p) \\ x &\mapsto y = Tx = \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

şeklinde tanımlayalım. T dönüşümünün lineerliği açıktır. T lineer dönüşümünün birebir olduğunu gösterelim. Bunun için; $Tx = \theta$ iken $x = \theta$ olduğunu yani;

$$\sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j = \theta \Rightarrow x_k = \theta$$

önermesinin her $k \in \mathbb{N}$ için sağlandığını göstermeliyiz.

$k = 0$ için $u_0 v_0 \Delta x_0 = \theta$ eşitliğinden $x_0 = 0$,

$k = 1$ için $u_1 [v_0 \Delta x_0 + v_1 \Delta x_1] = \theta$ eşitliğinden $x_1 = 0$,

.

.

.

$k = n$ için $u_n [v_0 \Delta x_0 + v_1 \Delta x_1 + \dots + v_n \Delta x_n] = \theta$ eşitliğinden $x_n = \theta$ çıkar ki buradan da $x = \theta$ elde edilir. Böylelikle T lineer dönüşümünün çekirdeğinin sadece sıfır vektöründen ibaret olduğu görüldü. O halde, T birebirdir.

T lineer dönüşümünün örtenliği için, her bir $y \in \ell_\infty(p)$ alındığında $Tx = y$ olacak şekilde enaz bir $x \in \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ elemanının varlığı gösterilmelidir. $y = (y_k) \in \ell_\infty(p)$ alalım ve $x = (x_k)$ dizisini,

$$x_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{v_j} \left[\frac{y_j}{u_j} - \frac{y_{j-1}}{u_{j-1}} \right]; \quad (k \in \mathbb{N})$$

ile tanımlayalım. Bu durumda,

$$(\Delta x)_k = \frac{1}{v_k} \left[\frac{y_k}{u_k} - \frac{y_{k-1}}{u_{k-1}} \right]; \quad (k \in \mathbb{N})$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
g(x) &= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j \right|^{p_k/M} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^k u_k v_j \frac{1}{v_j} \left[\frac{y_j}{u_j} - \frac{y_{j-1}}{u_{j-1}} \right] \right|^{p_k/M} \\
&= \sup_{k \in \mathbb{N}} |y_k|^{p_k/M} = h_1(y) < \infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $x \in \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ olduğunu ve üstelik T dönüşümünün paranormu koruduğunu gösterir. O halde, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ uzayı $\ell_\infty(p)$ uzayına lineer olarak izomorftur. $\square$

Teorem 2.1.6. $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı $\ell(p)$ uzayına lineer olarak izomorftur.

İspat. Teorem 2.1.5'e benzer olarak yapılabilir. $\square$

Şimdi $c_0(u, v; p, \Delta)$, $\ell(u, v; p, \Delta)$ ve $c(u, v; p, \Delta)$ uzaylarının Schauder bazı ile ilgili teoremleri ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.1.7. $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayının elemanlarının $b^{(k)} = \{b_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini

$$b_n^{(k)} = \begin{cases} \frac{1}{u_k} \left[\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right], & (0 \leq k \leq n-1) \\ \frac{1}{u_n v_n}, & (k = n) \\ 0, & (k > n) \end{cases} \quad (2.1.16)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu taktirde,

(i) $\{b^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi, $c_0(u, v; p, \Delta)$ uzayı için bir Schauder bazdır ve her $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ için $\mu_k = (G(u, v; \Delta)x)_k$ olmak üzere

$$x = \sum_k \mu_k b^{(k)} \quad (2.1.17)$$

şeklinde birtek gösterime sahiptir.

(ii) $l = \lim_{k \rightarrow \infty} (G(u, v; \Delta)x)_k$ ve $z = (z_k)$ dizisi de

$$z_k = \sum_{j=0}^k \frac{1}{v_j} \left[\frac{1}{u_j} - \frac{1}{u_{j-1}} \right]$$

şeklinde tanımlı olmak üzere $\{z, b^{(k)}\}$ cümlesi, $c(u, v; p, \Delta)$ uzayı için bir Schauder bazdır ve her $x \in c(u, v; p, \Delta)$ için

$$x = lz + \sum_k (\mu_k - l)b^{(k)} \quad (2.1.18)$$

şeklinde birtek gösterime sahiptir.

İspat.

$$G(u, v; \Delta)b^{(k)} = e^{(k)} \in c_0(p), \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.1.19)$$

olduğundan $\{b^{(k)}\} \subset c_0(u, v; p, \Delta)$ yazılabilir.

$x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ verilsin. Her $m > 0$ tamsayısı için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^m \mu_k b^{(k)} \quad (2.1.20)$$

olsun. Şimdi, (2.1.19) eşitliğini aklımızda tutarak (2.1.20) eşitliğine $G(u, v; \Delta)$ matrisi ni uygulayalım. Böylece,

$$G(u, v; \Delta)x^{[m]} = \sum_{k=0}^m \mu_k G(u, v; \Delta)b^{(k)} = \sum_{k=0}^m (G(u, v; \Delta)x)_k e^{(k)}$$

ve

$$\{G(u, v; \Delta)(x - x^{[m]})\}_i = \begin{cases} 0, & (0 \leq i \leq m) \\ (G(u, v; \Delta)x)_i, & (i > m) \end{cases} ; (i, m \in \mathbb{N})$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda öyle bir m_0 tamsayısı vardır ki $m \geq m_0$ için

$$\sup_{i \geq m} |(G(u, v; \Delta)x)_i|^{p_k/M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

kalır. Buradan her $m \geq m_0$ için

$$\begin{aligned} g(x - x^{[m]}) &= \sup_{i \geq m} |(G(u, v; \Delta)x)_i|^{p_k/M} \\ &\leq \sup_{i \geq m_0} |(G(u, v; \Delta)x)_i|^{p_k/M} < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ise $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ noktasının (2.1.17) gösterimine sahip olduğunu belirtir.

Şimdi bu gösterimin tekliğini ispat edelim. x dizisinin

$$x = \sum_k \lambda_k b^{(k)} \quad (2.1.21)$$

şeklinde başka bir gösterimi olduğunu kabul edelim. (2.1.19) eşitliğini aklımızda tutarak (2.1.21) eşitliğine $G(u, v; \Delta)$ matrisini uyguladığımızda,

$$(G(u, v; \Delta)x)_n = \sum_k \lambda_k [G(u, v; \Delta)b^{(k)}]_n = \sum_k \lambda_k e_n^{(k)} = \lambda_n; \quad (n \in \mathbb{N})$$

elde ederiz. Halbuki bu, $(G(u, v; \Delta)x)_n = \mu_n$ olması kabulü ile çelişir. O halde $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ dizisinin (2.1.17) gösterimi birtektir. Bu ise Teoremin (i) kısmının ispatını tamamlar.

(ii) $\{b^{(k)}\} \subset c_0(u, v; p, \Delta)$ ve $z \in c(u, v; p, \Delta)$ olduğundan $\{z, b^{(k)}\} \subset c(u, v; p, \Delta)$ yazılabilir. $x \in c(u, v; p, \Delta)$ verilsin. Bu durumda, $l = \lim_{k \rightarrow \infty} (G(u, v; \Delta)x)_k$ olacak biçimde birtek l sayısı mevcuttur. $t = x - lz$ diyelim. Bu taktirde, $t \in c_0(u, v; p, \Delta)$ olur. Teoremin (i) kısmından dolayı $t \in c_0(u, v; p, \Delta)$, (2.1.17) deki gibi birtek temsile sahiptir. Yani

$$t = x - lz = \sum_k (\mu_k - l)b^{(k)}$$

yazılabilir. Bu ise, $x \in c(u, v; p, \Delta)$ noktasının (2.1.18) eşitliğindeki gibi temsil edilebileceğini ve bu temsilin birtek olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 2.1.8. $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayının elemanlarının $b^{(k)} = \{b_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisini (2.1.16) daki gibi tanımlayalım. Bu taktirde, $\{b^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi, $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayı için bir Schauder bazdır ve her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için $\mu_k = (G(u, v; \Delta)x)_k$ olmak üzere

$$x = \sum_k \mu_k b^{(k)} \tag{2.1.22}$$

şeklinde birtek gösterime sahiptir.

İspat. $0 < p_k \leq H < \infty$ için

$$G(u, v; \Delta)b^{(k)} = e^{(k)} \in \ell(p) \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{2.1.23}$$

olduğundan $\{b^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \ell(u, v; p, \Delta)$ yazılabilir.

Herhangi bir $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ verilsin. Her pozitif m tamsayısı için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^m \mu_k b^{(k)} \tag{2.1.24}$$

yazalım. Şimdi, (2.1.23) eşitliğini aklımızda tutarak (2.1.24) eşitliğine $G(u, v; \Delta)$ matrisini uygulayalım. Böylece,

$$\begin{aligned} G(u, v; \Delta)x^{[m]} &= \sum_{k=0}^m \mu_k G(u, v; \Delta)b^{(k)} \\ &= \sum_{k=0}^m (G(u, v; \Delta)x)_k e^{(k)} \end{aligned}$$

ve

$$\{G(u, v; \Delta)(x - x^{[m]})\}_i = \begin{cases} 0 & , \quad (0 \leq i \leq m) \\ (G(u, v; \Delta)x)_i, & (i > m) \end{cases} ; (i, m \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Diğer taraftan keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $m \geq m_0$ için

$$\left[\sum_{i=m}^{\infty} |(G(u, v; \Delta)x)_i|^{p_k} \right]^{1/M} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bir m_0 tamsayısı vardır. Bu yüzden, her $m \geq m_0$ için

$$\begin{aligned} g_1(x - x^{[m]}) &= \left[\sum_{i=m}^{\infty} |(G(u, v; \Delta)x)_i|^{p_k} \right]^{1/M} \\ &\leq \left[\sum_{i=m_0}^{\infty} |(G(u, v; \Delta)x)_i|^{p_k} \right]^{1/M} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki bu $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ noktasının (2.1.22) eşitliğindeki gibi temsil edilmesi anlamına gelir. Temsilin tekliği Teorem 2.1.7'nin ispatındaki gibi yapılabilir. $\square$

2.2 Kapsama Bağıntıları

Bu kısımda, $\lambda \in \{c_0, c, \ell_\infty\}$ olmak üzere $\lambda(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayları ile ilgili bazı kapsama bağıntıları verilecektir.

Teorem 2.2.1. $c_0(u, v; p, \Delta) \subset c(u, v; p, \Delta) \subset \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ kapsaması geçerlidir.

İspat. $c(u, v; p, \Delta) \subset \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ kapsamasının sağlandığını gösterelim. Herhangi bir $x \in c(u, v; p, \Delta)$ alalım. Bu durumda, $G(u, v; \Delta)x \in c(p)$ yazılabilir. $c(p) \subset \ell_\infty(p)$ olduğundan $G(u, v; \Delta)x \in \ell_\infty(p)$ olur. Bu ise, $x \in \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ olduğunu gösterir. Dolayısı ile $c(u, v; p, \Delta) \subset \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ kapsaması geçerlidir.

$c_0(u, v; p, \Delta) \subset c(u, v; p, \Delta)$ kapsaması da benzer olarak gösterilebilir ve böylece Teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Teorem 2.2.2. λ, c_0, c ve ℓ_∞ uzaylarından herhangi birisini gösterebilir.

- (i) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 1$ ise $\lambda(u, v; \Delta) \subset \lambda(u, v; p, \Delta)$ kapsaması geçerlidir.
- (ii) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n < 1$ ise $\lambda(u, v; p, \Delta) \subset \lambda(u, v; \Delta)$ kapsaması geçerlidir.

İspat. (i) $x \in c_0(u, v; \Delta)$ olsun. Bu durumda, $G(u, v; \Delta)x \in c_0$ yazılabilir. Sıfıra yakınsama tanımı kullanılırsa her $n \geq n_0$ için $|G(u, v; \Delta)x| < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir n_0 doğal sayısının mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 1$ olduğundan her $n \geq n_0$ için

$$|G(u, v; \Delta)x|^{p_n} < |G(u, v; \Delta)x|$$

elde edilir. Bu ise, $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ olduğunu gösterir.

(ii) $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ olsun. Bu durumda, $G(u, v; \Delta)x \in c_0(p)$ yazılabilir. $c_0(p)$ uzayının tanımından her $n \geq n_0$ için $|G(u, v; \Delta)x|^{p_n} < 1$ eşitsizliğini sağlayan bir n_0 doğal sayısının mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Buradan her $n \geq n_0$ için

$$|G(u, v; \Delta)x| = (|G(u, v; \Delta)x|^{p_n})^{\frac{1}{p_n}} < |G(u, v; \Delta)x|^{p_n}$$

elde edilir ki bu $x \in c_0(u, v; \Delta)$ olduğunu gösterir.

λ yerine c ve ℓ_∞ uzaylarından herhangi birisi alınarak diğer kapsamlarda benzer olarak gösterilebilir. $\square$

2.3 Dual Uzaylar

Bu kısımda, $c_0(u, v; p, \Delta), c(u, v; p, \Delta), \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzaylarının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleri belirlenecektir.

Teorem 2.3.1. $B \in \mathbb{N}_2$ ve $K \in \mathcal{F}$ için $K^* = \{k \in \mathbb{N} : 0 \leq k \leq n\} \cap K$ olsun. $G_1(p), G_2(p), G_3(p), G_4(p), G_5(p), G_6(p), G_7(p)$ ve $G_8(p)$ cümlelerini aşağıdaki gibi

tanımlayalım:

$$\begin{aligned}
G_1(p) &= \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K^*} \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n \right] B^{-1/p_k} \right| < \infty \right\}, \\
G_2(p) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_n \left| \sum_k \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n \right] \right| < \infty \right\}, \\
G_3(p) &= \bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K^*} \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n \right] B^{1/p_k} \right| < \infty \right\}, \\
G_4(p) &= \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] \right| B^{-1/p_k} < \infty \right\}, \\
G_5(p) &= \bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] \right| B^{1/p_k} \right. \\
&\quad \left. n \text{ 'ye göre düzgün yakınsak} \right\}, \\
G_6(p) &= \bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \left(\frac{1}{u_k v_k} a_k B^{1/p_k} \right) \in c_0 \right\}, \\
G_7(p) &= \bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] \right| B^{1/p_k} < \infty \right\}, \\
G_8(p) &= \bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \left\{ \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] \right\} B^{1/p_k} \in \ell_\infty \right\}.
\end{aligned}$$

Bu taktirde,

$$\begin{aligned}
\{c_0(u, v; p, \Delta)\}^\alpha &= G_1(p), \quad \{c(u, v; p, \Delta)\}^\alpha = G_1(p) \cap G_2(p), \\
\{\ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}^\alpha &= G_3(p), \quad \{c_0(u, v; p, \Delta)\}^\beta = \{c_0(u, v; p, \Delta)\}^\gamma = G_4(p), \\
\{c(u, v; p, \Delta)\}^\beta &= G_4(p) \cap cs, \quad \{\ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}^\beta = G_5(p) \cap G_6(p), \\
\{c(u, v; p, \Delta)\}^\gamma &= G_4(p) \cap bs, \quad \{\ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}^\gamma = G_7(p) \cap G_8(p)
\end{aligned}$$

dır.

İspat. İspatı sadece $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ uzayı için yapacağız. Diğerleri için de benzer yöntem izlenerek ispat yapılabilir. $a = (a_n) \in \omega$ alalım.

$$y_k = \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j$$

olduğu hatırla tutulursa

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n y_j = (Dy)_n; \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (2.3.1)$$

elde edilir. Burada $D = (d_{nk})$ matrisi,

$$d_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{u_k} \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) a_n, & (0 \leq k \leq n-1) \\ \frac{a_n}{u_n v_n}, & (k = n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}; \quad (n, k \in \mathbb{N}) \quad (2.3.2)$$

şeklinde tanımlanmıştır. O halde (2.3.1) ile " $x = (x_n) \in \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ için $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması ancak ve ancak $y = (y_n) \in \ell_\infty(p)$ için $Dy \in \ell_1$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine sahip olunur. Böylece, Teorem 1.2.2 gereği

$$\bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K^*} \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n \right] B^{1/p_k} \right| < \infty \right\}$$

elde edilir ki bu ise $\{\ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}^\alpha = G_3(p)$ olduğunu gösterir.

Şimdi, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ uzayının β - dualini hesaplayalım. $a = (a_n) \in \omega$ alalım. x ve y dizileri arasındaki (2.3.1) ilişkisi akılda tutulursa $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^n a_k x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] y_k + \frac{1}{u_n v_n} a_n y_n = (Ey)_n \quad (2.3.3)$$

elde edilir. Burada $E = (e_{nk})$ matrisi,

$$e_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right], & (0 \leq k \leq n-1) \\ \frac{1}{u_n v_n} a_n, & (k = n) \\ 0, & (k > n) \end{cases}; \quad (n, k \in \mathbb{N}) \quad (2.3.4)$$

şeklinde tanımlanmıştır. O halde (2.3.3) ile " $x = (x_n) \in \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ için $ax = (a_n x_n) \in cs$ olması ancak ve ancak $y = (y_n) \in \ell_\infty(p)$ için $Ey \in c$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine sahip olunur. Bu durumda Teorem 1.2.3 ile

$$\bigcap_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] \right| B^{1/p_k} \right. \\ \left. n \text{ 'ye göre düzgün yakınsak} \right\}$$

ve

$$\lim_k \frac{1}{u_k v_k} a_k B^{1/p_k} = 0$$

elde edilir. Bu ise $\{\ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}^\beta = G_5(p) \cap G_6(p)$ olduğunu gösterir.

Yine (2.3.3) eşitliğinden " $x = (x_n) \in \ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ için $ax = (a_n x_n) \in bs$ olması ancak ve ancak $y = (y_n) \in \ell_\infty(p)$ için $Ey \in \ell_\infty$ olmasıyla mümkündür" çift gerektirmesine sahip olunur. Böylece Teorem 1.2.4 den

$$\{\ell_\infty(u, v; p, \Delta)\}^\gamma = G_7(p) \cap G_8(p)$$

sonucu çıkar. $\square$

Teorem 2.3.2. Her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $G_9(p), G_{10}(p)$ ve $G_{11}(p)$ cümlelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} G_9(p) &= \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in K^*} \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n \right] B^{-1} \right|^{p'_k} < \infty \right\}, \\ G_{10}(p) &= \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sum_k \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] B^{-1} \right|^{p'_k} < \infty \right\}, \\ G_{11}(p) &= \bigcup_{B>1} \left\{ a = (a_k) \in \omega : \left\{ \left(\frac{1}{u_k v_k} a_k B^{-1} \right)^{p'_k} \right\} \in \ell_\infty \right\}. \end{aligned}$$

Bu taktirde, $\{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\alpha = G_9(p)$, $\{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\beta = G_{10}(p) \cap G_{11}(p) \cap cs$ ve $\{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\gamma = G_{10}(p) \cap G_{11}(p)$ dir.

İspat. Teorem 2.3.1'in ispatında kullanılan yöntemle yapılabilir. $\square$

Teorem 2.3.3. Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. $G_{12}(p), G_{13}(p)$ ve $G_{14}(p)$ cümlelerini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\begin{aligned} G_{12}(p) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{K \in \mathcal{F}} \sup_{k \in K} \left| \sum_{n \in K} \left[\sum_{j=k-1}^k (-1)^{k-j} \frac{1}{u_j v_k} a_n \right] \right|^{p_k} < \infty \right\}, \\ G_{13}(p) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{n, k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_k}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_j \right] \right|^{p_k} < \infty \right\}, \\ G_{14}(p) &= \left\{ a = (a_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{u_k v_k} a_k \right|^{p_k} < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Bu taktirde, $\{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\alpha = G_{12}(p)$, $\{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\beta = G_{13}(p) \cap G_{14}(p) \cap cs$ ve $\{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\gamma = G_{13}(p) \cap G_{14}(p)$ dir.

İspat. Teorem 2.3.1'in ispatında kullanılan yöntemle yapılabilir. $\square$

BÖLÜM 3

MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

3.1 Yeni Çeşit Metod İkilipleri

Bu kısımda, Başar [3] tarafından X_p ve ℓ_p uzaylarına uygulanan metodlar için verilen toplama metodu ikilisi kavramı, $\lambda \in \{c_0, c, \ell_\infty, \ell\}$ olmak üzere $\lambda(u, v; p, \Delta)$ uzaylarına uygulanan metodlar bakımından tanımlanacaktır.

$x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri,

$$y_k = \sum_{j=0}^k u_k v_j \Delta x_j = \sum_{j=0}^k u_k x_j \nabla v_j; \quad (k \in \mathbb{N})$$

bağıntısı ile birbirlerine bağlı olsunlar. $x = (x_k)$ dizisinin A dönüşümü $z = (z_n)$ ve $y = (y_k)$ dizisinin B dönüşümü de $t = (t_n)$ olsun. Yani;

$$z_n = (Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1.1)$$

ve

$$t_n = (By)_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} y_k, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1.2)$$

olsun. Uygun bir yolla (z_n) dizisi, (t_n) dizisine (veya (t_n) dizisi (z_n) dizisine) dönüştürülebiliyorsa o zaman ” A ve B , yeni çeşit bir metod ikilisidir” denir. Burada $A = (a_{nk})$ ile $B = (b_{nk})$ matrislerinin elemanları arasında

$$a_{nk} = \sum_{j=k}^{\infty} u_j b_{nj} \nabla v_j \quad \text{veya} \quad b_{nk} = \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right]; \quad (n, k \in \mathbb{N}) \quad (3.1.3)$$

bağıntısı vardır.

$t = (t_n)$ dizisi, $z = (z_n)$ dizisine aşağıdaki yolla dönüştürülebilir:

$$\begin{aligned}
t_n = \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} y_k &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{nk} \left(\sum_{j=0}^k u_k x_j \nabla v_j \right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=k}^{\infty} u_j b_{nj} \nabla v_j \right) x_k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \\
&= z_n
\end{aligned}$$

Ancak toplamın sırasını değiştirmek daima mümkün olmayabilir. Bu sebeple A ve B metodları denk olmak zorunda değildir. (3.1.1) ve (3.1.2) sonsuz serilerinin kısmi toplamları arasında

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^m a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^m a_{nk} \left\{ \sum_{j=0}^k \frac{1}{v_j} \left[\frac{y_j}{u_j} - \frac{y_{j-1}}{u_{j-1}} \right] \right\} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^m a_{nj} \right] y_k + \frac{1}{u_m v_m} a_{nm} y_m \quad (3.1.4)
\end{aligned}$$

bağıntısı mevcuttur. Şu halde, her bir $n \in \mathbb{N}$ için (3.1.1) ve (3.1.2) serilerinden biri yakınsarken diğeri de ancak ve ancak

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{u_m v_m} a_{nm} y_m = w_n \quad (3.1.5)$$

mevcut olması halinde yakınsar. (3.1.5) eşitliğinin sağlanması şartıyla (3.1.4) eşitliğin de $m \rightarrow \infty$ iken limit alarak

$$z_n = t_n + w_n \quad (3.1.6)$$

eşitliğine sahip olunur. Demek ki $y = (y_n)$ dizisi, A ve B metodlarından birisi ile toplanabiliyorsa diğeri ile de ancak ve ancak her bir $n \in \mathbb{N}$ için (3.1.6) eşitliğinin sağlanması ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \alpha \quad (3.1.7)$$

mevcut olması halinde toplanabilir. Böylece A ve B metodlarından birinin limitlediği bir dizinin A ve B limitleri ancak ve ancak (3.1.7) eşitliğinin $\alpha = 0$ ile sağlanması halinde çıkarılır. $\alpha \neq 0$ ise A ve B metodları tutarsızdır ve bunun tersi de doğrudur.

3.2 Bazı Matris Sınıflarının Karakterizasyonu

Bu kısımda, $c_0(u, v; p, \Delta)$, $c(u, v; p, \Delta)$, $\ell_\infty(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzaylarından verilen herhangi bir dizi uzayı içerisinde matris dönüşümleri karakterize edilecektir.

Her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{a}_{nk} = \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right]$$

ve

$$a(n, k) = \sum_{i=0}^n a_{ik}$$

yazalım.

Teorem 3.2.1. $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ matrislerinin elemanları arasında (3.1.3) bağıntısının olduğunu kabul edelim. μ verilen herhangi bir dizi uzayı olsun. $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : \mu)$ olması için gerek ve yeter şart

$$B \in (c_0(p) : \mu) \quad (3.2.1)$$

ve her sabit $n \in \mathbb{N}$ için

$$B^{(n)} \in (c_0(p) : c) \quad (3.2.2)$$

sağlanmasıdır. Burada $B^{(n)} = (b_{mk}^{(n)})$ matrisi her $m, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{mk}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^m a_{nj} \right], & (0 \leq k \leq m-1) \\ \frac{1}{u_m v_m} a_{nm}, & (k = m) \\ 0, & (k > m) \end{cases} \quad (3.2.3)$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ sonsuz matrislerinin (3.1.3) bağıntısı ile birbirine bağlı olduklarını kabul edelim. μ verilen herhangi bir dizi uzayı olsun. $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : \mu)$ ve herhangi bir $y \in c_0(p)$ alalım. BG mevcut ve $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in [c_0(u, v; p, \Delta)]^\beta$ olduğundan her bir $n \in \mathbb{N}$ için $(b_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in \{c_0(p)\}^\beta$ yazılabilir. Dolayısı ile her $y \in c_0(p)$ için By mevcuttur. (3.1.3) eşitliği akılda tutularak

$$\sum_{k=0}^m b_{nk} y_k = \sum_{k=0}^m x_k \sum_{j=k}^m u_j b_{nj} \nabla v_j, \quad (n, m \in \mathbb{N}) \quad (3.2.4)$$

(3.2.4) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse $By = Ax$ elde edilir. Bu ise $B \in (c_0(p) : \mu)$ olduğunu gösterir.

Tersine olarak (3.2.1) ve (3.2.2) şartları sağlansın ve herhangi bir $x \in c_0(u, v; p, \Delta)$ alalım. Bu taktirde, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $(a_{nk})_{k \in \mathbb{N}} \in [c_0(u, v; p, \Delta)]^\beta$ olur. Dolayısı ile Ax mevcuttur.

$$\sum_{k=0}^m a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m-1} b_{nk}y_k + \frac{1}{u_mv_m}a_{nm}y_m; \quad (n, m \in \mathbb{N})$$

eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse $Ax = By$ elde edilir. Bu ise, $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : \mu)$ olduğunu gösterir. $\square$

Aşağıdaki teoremler Teorem 3.2.1'deki gibi ispat edilebileceğinden, ispatsız olarak verildi.

Teorem 3.2.2. μ verilen herhangi bir dizi uzayı olsun. Bu taktirde,

- (i) $A \in (c(u, v; p, \Delta) : \mu)$ olması için gerek ve yeter şart $B^{(n)} \in (c(p) : c)$ ve $B \in (c(p) : \mu)$ şartlarının sağlanmasıdır.
- (ii) $A \in (\ell_\infty(u, v; p, \Delta) : \mu)$ olması için gerek ve yeter şart $B^{(n)} \in (\ell_\infty(p) : c)$ ve $B \in (\ell_\infty(p) : \mu)$ şartlarının sağlanmasıdır.

Şimdi, Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 ile ilgili bazı sonuçlar verelim. (q_n) , pozitif reel sayıların azalmayan sınırlı bir dizisi olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki şartları göz önüne alalım:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sum_k |\tilde{a}_{nk}| M^{1/p_k} \right]^{q_n} < \infty, \quad (\forall M \in \mathbb{N}), \quad (3.2.5)$$

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} \tilde{a}_{nk} M^{1/p_k} \right|^{q_n} < \infty, \quad (\forall M \in \mathbb{N}), \quad (3.2.6)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| M^{1/p_k} < \infty, \quad (\forall M \in \mathbb{N}), \quad (3.2.7)$$

$$\exists(\alpha_k) \subset \mathbb{R} \ni \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_k |\tilde{a}_{nk} - \alpha_k| M^{1/p_k} \right]^{q_n} = 0, \quad (\forall M \in \mathbb{N}), \quad (3.2.8)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\sum_k |\tilde{a}_{nk}| M^{-1/p_k} \right]^{q_n} < \infty, \quad (\exists M \in \mathbb{N}), \quad (3.2.9)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_k \tilde{a}_{nk} \right|^{q_n} < \infty, \quad (3.2.10)$$

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} \tilde{a}_{nk} M^{-1/p_k} \right|^{q_n} < \infty, \quad (\exists M \in \mathbb{N}), \quad (3.2.11)$$

$$\sum_n \left| \sum_k \tilde{a}_{nk} \right|^{q_n} < \infty, \quad (3.2.12)$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \ni \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_k \tilde{a}_{nk} - \alpha \right|^{q_n} = 0, \quad (3.2.13)$$

$$\exists (\alpha_k) \subset \mathbb{R} \ni \lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{a}_{nk} - \alpha_k|^{q_n} = 0, \quad (\forall k \in \mathbb{N}), \quad (3.2.14)$$

$$\exists (\alpha_k) \subset \mathbb{R} \ni \sup_{n \in \mathbb{N}} K^{1/q_n} \sum_k |\tilde{a}_{nk} - \alpha_k| M^{-1/p_k} < \infty, \quad (\forall K, \exists M \in \mathbb{N}). \quad (3.2.15)$$

Sonuç 3.2.1. (i) $A \in (\ell_\infty(u, v; p, \Delta) : \ell_\infty(q))$ olması için $B^{(n)} \in (\ell_\infty(p) : c)$ ve (3.2.5) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) $A \in (\ell_\infty(u, v; p, \Delta) : \ell(q))$ olması için $B^{(n)} \in (\ell_\infty(p) : c)$ şartının yanısıra (3.2.5)-(3.2.6) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(iii) $A \in (\ell_\infty(u, v; p, \Delta) : c(q))$ olması için $B^{(n)} \in (\ell_\infty(p) : c)$, (3.2.7) ve (3.2.8) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(iv) $A \in (\ell_\infty(u, v; p, \Delta) : c_0(q))$ olması için $B^{(n)} \in (\ell_\infty(p) : c)$ şartının yanısıra her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ olması şartıyla (3.2.8)'in sağlanması gerek ve yeterdir.

Sonuç 3.2.2. (i) $A \in (c(u, v; p, \Delta) : \ell_\infty(q))$ olması için $B^{(n)} \in (c(p) : c)$, (3.2.9) ve (3.2.10) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) $A \in (c(u, v; p, \Delta) : \ell(q))$ olması için $B^{(n)} \in (c(p) : c)$, (3.2.11) ve (3.2.12) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(iii) $A \in (c(u, v; p, \Delta) : c(q))$ olması için $B^{(n)} \in (c(p) : c)$, (3.2.13)-(3.2.15) şartlarının yanısıra her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n = 1$ olması şartıyla (3.2.9)'un da sağlanması gerek ve yeterdir.

(iv) $A \in (c(u, v; p, \Delta) : c_0(q))$ olması için $B^{(n)} \in (c(p) : c)$ şartının yanısıra $\alpha = 0$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ olması şartıyla (3.2.13)-(3.2.15) şartlarının da sağlanması gerek ve yeterdir.

Sonuç 3.2.3. (i) $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : \ell_\infty(q))$ olması için (3.2.2) ve (3.2.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : \ell(q))$ olması için (3.2.2) ve (3.2.11) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(iii) $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : c(q))$ olması için (3.2.2), (3.2.14) ve (3.2.15) şartlarının yanısıra her $n \in \mathbb{N}$ için $q_n = 1$ olması şartıyla (3.2.9)'un da sağlanması gerek ve yeterdir.

(iv) $A \in (c_0(u, v; p, \Delta) : c_0(q))$ olması için (3.2.2) şartının yanısıra her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ olması şartıyla (3.2.8)'in de sağlanması gerek ve yeterdir.

Şimdi, $\ell(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayından ℓ_∞, c, c_0, bs ve cs uzayları içerisine matris dönüşümlerini karakterize eden teoremlerimizi verelim. İspatları sadece $1 < p_k \leq H < \infty$ durumu için yapacağız. $0 < p_k \leq 1$ durumu da benzer olarak yapılabilir.

Teorem 3.2.3. (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$C(B) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk} B^{-1}|^{p'_k} < \infty \quad (3.2.16)$$

ve

$$\left\{ \left[\frac{1}{u_k v_k} a_{nk} B^{-1} \right]^{p'_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.2.17)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : \ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{n, k \in \mathbb{N}} |\tilde{a}_{nk}|^{p_k} < \infty \quad (3.2.18)$$

ve

$$\left\{ \left[\frac{1}{u_k v_k} a_{nk} \right]^{p_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.2.19)$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : \ell_\infty)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olsun. Bu durumda, her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için Ax mevcuttur ki bu, her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in$

$[\ell(u, v; p, \Delta)]^\beta$ olmasını gerektirir. O halde, Teorem 2.3.2 kullanılarak (3.2.16) ve (3.2.17) şartlarının gerekliliği hemen görülür.

Tersine, (3.2.16) ve (3.2.17) şartlarının sağlandığını kabul edelim ve herhangi bir $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ alalım. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in [\ell(u, v; p, \Delta)]^\beta$ olduğundan x 'in A - dönüşümü mevcuttur. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için (2.1.1) bağıntısı kullanılarak elde edilen aşağıdaki eşitliği göz önüne alalım:

$$\sum_{k=0}^m a_{nk} x_k = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^m a_{nj} \right] y_k + \frac{1}{u_m v_m} a_{nm} y_m \quad (3.2.20)$$

Teoremin hipotezi gözönünde bulundurularak (3.2.20) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\begin{aligned} \sum_k a_{nk} x_k &= \sum_k \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} a_{nj} \right] y_k \\ &= \sum_k \tilde{a}_{nk} y_k; \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

yazılabilir. (3.2.21) eşitliğinde n üzerinden supremuma geçilir ve (1.1.4) eşitsizliği dikkate alınır,

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk}| |y_k| \\ &\leq B \left\{ \sum_k |\tilde{a}_{nk} B^{-1}|^{p'_k} + \sum_k |y_k|^{p_k} \right\} \\ &= B[C(B) + h_2^B(y)] < \infty \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $Ax \in \ell_\infty$ olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 3.2.4. Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (3.2.16)-(3.2.19) şartlarının yanı sıra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_{nk} = \alpha_k; \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (3.2.22)$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : c)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $c \subset \ell_\infty$ olması sebebiyle (3.2.16) ve (3.2.17) şartlarının gerekliliği Teorem 3.2.4'ün (i) kısmı kullanılarak elde edilir.

(3.2.22) şartının gerekliliğini ispatlamak için (2.1.16) eşitliği ile tanımlı $b^{(k)} = \{b_n^{(k)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \ell(u, v; p, \Delta)$ dizisini göz önüne alalım. Her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için Ax mevcut ve c uzayında olduğundan her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$Ab^{(k)} = \left\{ \frac{1}{u_k} \left[\frac{a_{nk}}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a_{nj} \right] \right\}_{n \in \mathbb{N}} \in c$$

elde edilir. Bu ise, (3.2.22) şartının gerekliliğini gösterir.

Tersine olarak, (3.2.16), (3.2.17) ve (3.2.22) şartları sağlansın ve $\ell(u, v; p, \Delta)$ uzayında herhangi bir $x = (x_k)$ dizisi alalım. Bu taktirde her $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\beta$ olacağından x 'in A - dönüşümü mevcuttur. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^m |\tilde{a}_{nk} B^{-1}|^{p'_k} \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\tilde{a}_{nk} B^{-1}|^{p'_k}$$

eşitsizliği sağlanır. (3.2.16) ve (3.2.22) ifadeleri akılda tutularak bu eşitsizlikte $m, n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse

$$\sum_k |\alpha_k B^{-1}|^{p'_k} < \infty \quad (3.2.23)$$

elde edilir. Diğer taraftan, (3.2.17) ifadesinde $n \rightarrow \infty$ iken limit alınır

$$\left\{ \left[\frac{1}{u_k v_k} \alpha_k B^{-1} \right]^{p'_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty \quad (3.2.24)$$

yazılabilir. (3.2.23) ve (3.2.24) birlikte düşünüldüğünde $(\alpha_k) \in \{\ell(u, v; p, \Delta)\}^\beta$ olduğu görülür. Bu ise her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için $\sum_k \alpha_k x_k$ serisinin yakınsak olması anlamına gelir. Şimdi, (3.2.21) eşitliğinde a_{nk} yerine $(a_{nk} - \alpha_k)$ olarak elde edilen aşağıdaki eşitliği gözönüne alalım:

$$\sum_k (a_{nk} - \alpha_k) x_k = \sum_k d_{nk} y_k; \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (3.2.25)$$

Burada $D = (d_{nk})$ matrisi her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$d_{nk} = \left\{ \frac{1}{u_k} \left[\frac{(a_{nk} - \alpha_k)}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^{\infty} (a_{nj} - \alpha_j) \right] \right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Teorem 1.2.7 gereğince $D = (d_{nk})$ matrisinin $(\ell(p) : c_0)$ sınıfına ait olduğunu söyleyebiliriz. O halde, (3.2.25) eşitliğinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k (a_{nk} - \alpha_k) x_k = 0$$

elde edilir. Bu ise her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için $Ax \in c$ olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 3.2.4'de c uzayı yerine c_0 uzayı alındığında aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.2.4. Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : c_0)$ olması için gerek ve yeter şart (3.2.16)-(3.2.19) şartlarının yanısıra her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{a}_{nk} = 0; \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (3.2.26)$$

şartının sağlanmasıdır.

Teorem 3.2.5. (i) Her $k \in \mathbb{N}$ için $1 \leq p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : bs)$ olması için

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a(n, k)}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a(n, j) \right] B^{-1} \right|^{p'_k} \quad (3.2.27)$$

ve

$$\left\{ \left[\frac{1}{u_k v_k} a(n, k) B^{-1} \right]^{p'_k} \right\}_{k \in \mathbb{N}} \in \ell_\infty, \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.2.28)$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

(ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq 1$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : bs)$ olması için

$$\sup_{n, k \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{u_k} \left[\frac{a(n, k)}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a(n, j) \right] \right|^{p_k} < \infty \quad (3.2.29)$$

şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

İspat. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : bs)$ ve $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ olsun. $E = (e_{nk})$ matrisini her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$e_{nk} = a(n, k)$$

eşitliği ile tanımlayalım. $\sum_j \sum_k a_{jk} x_k$ serisinin n, m -inci kısmi toplamı kullanılarak

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^m a_{jk} x_k = \sum_{k=0}^m e_{nk} x_k; \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.2.30)$$

eşitliği elde edilir. (3.2.30) eşitliğinde $m \rightarrow \infty$ için limite geçilirse,

$$\sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x_k = \sum_{k=0}^{\infty} e_{nk} x_k; \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (3.2.31)$$

elde edilir. Ayrıca bs ve ℓ_∞ uzaylarının lineer olarak izomorf oldukları akılda tutulursa (3.2.31)'den "her $x \in \ell(u, v; p, \Delta)$ için $Ax \in bs$ olması ancak ve ancak her $x \in$

$\ell(u, v; p, \Delta)$ için $Ex \in \ell_\infty$ olmasıyla mümkündür” çift gerektirmesine sahip oluruz. Böylece teoremin ispatı, Teorem 3.2.3’de a_{nk} yerine e_{nk} koymakla kolayca elde edilir. $\square$

Aşağıdaki teoremin ispatı Teorem 3.2.5’ deki benzerdir.

Teorem 3.2.6. Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(u, v; p, \Delta) : cs)$ olması için gerek ve yeter şart (3.2.27), (3.2.28) ve (3.2.29) şartlarının yanısıra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{u_k} \left[\frac{a(n, k)}{v_k} + \left(\frac{1}{v_k} - \frac{1}{v_{k+1}} \right) \sum_{j=k+1}^n a(n, j) \right] = \alpha_k; \quad (k \in \mathbb{N}) \quad (3.2.32)$$

sağlanmasıdır.

BÖLÜM 4

GEOMETRİK ÖZELLİKLER

Bu bölümde, $\ell(u, v; p, \Delta)$ paranormlu dizi uzayı üzerinde bir modüler tanımlanarak elde edilen $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ modüler dizi uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gösterildi.

4.1 $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ Modüler Dizi Uzayı

Bu kısımda, $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayı üzerinde tanımlanan modüler ile Luxemburg norm arasındaki bağıntılardan söz ettikten sonra $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ modüler uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğu ispat edildi.

$\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ üzerinde $\sigma(x)$ fonksiyoneli

$$\begin{aligned}\sigma(x) &: \ell_\sigma(u, v; p, \Delta) \rightarrow [0, \infty] \\ \sigma(x) &= \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j| \right)^{p_k}\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlayalım. Ayrıca, $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ dizi uzayı üzerindeki Luxemburg normunu da her $x \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ için

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1 \right\}$$

veya buna denk olarak

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \alpha > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j \left| \frac{x_j}{\alpha} \right| \right)^{p_k} \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlayalım.

Şimdi, (4.1.1)'de tanımlanan $\sigma(x)$ fonksiyonelinin $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir konveks modüler olduğunu gösterelim.

Lemma 4.1.1. (4.1.1)'de tanımlanan $\sigma(x)$ fonksiyoneli $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir konveks modülerdir.

İspat. $x, y \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ olsun.

- (i) $\sigma(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ olduğu açıktır.
- (ii) $|\alpha| = 1$ olacak şekildeki her α skaleri için

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha x) &= \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |\alpha x_j| \right)^{p_k} \\
&= \sum_k |\alpha|^{p_k} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j| \right)^{p_k} \\
&= \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j| \right)^{p_k} \\
&= \sigma(x)
\end{aligned}$$

olur.

(iii) $\alpha + \beta = 1$ olacak şekilde α ve β pozitif reel sayılarını göz önüne alalım. Her $k \in \mathbb{N}$ için $t \mapsto |t|^{p_k}$ fonksiyonunun konveks olduğu gerçeği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha x + \beta y) &= \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |\alpha x_j + \beta y_j| \right)^{p_k} \\
&\leq \sum_k \left(\alpha \sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j| + \beta \sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |y_j| \right)^{p_k} \\
&\leq \alpha^{p_k} \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j| \right)^{p_k} + \beta^{p_k} \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |y_j| \right)^{p_k} \\
&\leq \alpha \sigma(x) + \beta \sigma(y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak, (4.1.1)'de tanımlanan $\sigma(x)$ fonksiyoneli $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ üzerinde konveks bir modülerdir. $\square$

Lemma 4.1.2. Her $x \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (i) Eğer $0 < \alpha < 1$ ise, $\alpha^H \sigma(\frac{x}{\alpha}) \leq \sigma(x)$ ve $\sigma(\alpha x) \leq \alpha \sigma(x)$ eşitsizlikleri geçerlidir.
- (ii) Eğer $\alpha > 1$ ise, $\sigma(x) \leq \alpha^H \sigma(\frac{x}{\alpha})$ dır.
- (iii) Eğer $\alpha \geq 1$ ise, $\sigma(x) \leq \alpha \sigma(x) \leq \sigma(\alpha x)$ dır.

İspat. (i) $0 < \alpha < 1$ olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \leq \sup_k p_k = H$ olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &= \sum_k \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j| \right)^{p_k} \\
&= \sum_k \left(\alpha \sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j \left| \frac{x_j}{\alpha} \right| \right)^{p_k} \\
&= \sum_k \alpha^{p_k} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j \left| \frac{x_j}{\alpha} \right| \right)^{p_k} \\
&\geq \alpha^H \sigma\left(\frac{x}{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, σ 'nın konveksliği kullanılırsa $\sigma(\alpha x) \leq \alpha \sigma(x)$ eşitizliğinin sağlandığı hemen görülür.

(ii) (i) kısmının ispatına benzer olarak yapılabilir.

(iii) σ 'nın konveksliği kullanılarak elde edilir. □

Aşağıda $\sigma(x)$ modülleri ile Luxemburg norm arasındaki ilişkiyi veren Lemma ispat edildi.

Lemma 4.1.3. Herhangi bir $x \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) Eğer $\|x\|_L < 1$ ise, $\sigma(x) \leq \|x\|_L$ dır.
- (ii) Eğer $\|x\|_L > 1$ ise, $\sigma(x) \geq \|x\|_L$ dır.
- (iii) $\|x\|_L = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma(x) = 1$ olmasıdır.
- (iv) $\|x\|_L < 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma(x) < 1$ olmasıdır.
- (v) $\|x\|_L > 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma(x) > 1$ olmasıdır.

İspat. (i) $\varepsilon > 0$ sayısını $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|_L$ olacak şekilde seçelim. O zaman $\varepsilon + \|x\|_L < 1$ yazılabilir. Diğer taraftan, $\|x\|_L$ 'nin tanımından $\tau < \|x\|_L + \varepsilon$ olacak biçimde en az bir $\tau > 0$ sayısının mevcut olduğu ve $\sigma\left(\frac{x}{\tau}\right) \leq 1$ eşitsizliğinin sağlandığı söylenebilir. Lemma 4.1.2'nin (i) ve (iii) kısmı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sigma(x) &\leq \sigma\left(\frac{\|x\|_L + \varepsilon}{\tau} x\right) \\
&= \sigma\left((\|x\|_L + \varepsilon) \frac{x}{\tau}\right) \\
&\leq (\|x\|_L + \varepsilon) \sigma\left(\frac{x}{\tau}\right) \\
&\leq \|x\|_L + \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $\sigma(x) \leq \|x\|_L$ olmasını gerektirir.

(ii) $\varepsilon > 0$ sayısını bu kez $0 < \varepsilon < \frac{\|x\|_L - 1}{\|x\|_L}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde seçelim. Buradan $1 < (1 - \varepsilon)\|x\|_L < \|x\|_L$ yazılabilir. $\|x\|_L$ 'nin tanımı ve Lemma 4.1.2'nin (i) kısmı kullanılırsa

$$1 < \sigma\left(\frac{x}{(1 - \varepsilon)\|x\|_L}\right) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)\|x\|_L} \sigma(x)$$

elde edilir. Bu ise her $\varepsilon \in \left(0, \frac{\|x\|_L - 1}{\|x\|_L}\right)$ için $\|x\|_L(1 - \varepsilon) < \sigma(x)$ eşitsizliğinin sağlanması demektir. Şimdi A cümlesini

$$A = \left\{ (1 - \varepsilon)\|x\|_L : 0 < \varepsilon < \frac{\|x\|_L - 1}{\|x\|_L} \right\}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda, $\|x\|_L = \sup A$ olur. Diğer taraftan $\sigma(x)$ 'in A kümesi için bir üst sınır olması sebebiyle $\|x\|_L \leq \sigma(x)$ yazılır. Böylelikle (ii) kısmının ispatı tamamlanır.

(iii) $\|x\|_L = 1$ olsun ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $\|x\|_L$ 'nin tanımından $1 + \varepsilon > \delta > \|x\|_L$ ve $\sigma(\frac{x}{\delta}) \leq 1$ olacak şekilde enaz bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Lemma 4.1.2'nin (ii) kısmından

$$\sigma(x) \leq \delta^H \sigma\left(\frac{x}{\delta}\right) \leq \delta^H < (1 + \varepsilon)^H$$

yazabiliriz ki bu, her $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$(\sigma(x))^{1/H} < 1 + \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması demektir. Bu ise $\sigma(x) \leq 1$ olmasını gerektirir. Şimdi, $\sigma(x) < 1$ olamayacağını göstererek gereklilik kısmının ispatını tamamlayalım. $\sigma(x) < 1$ olduğunu kabul edelim. $\alpha \in (0, 1)$ sayısını da $\sigma(x) < \alpha^H < 1$ eşitsizliği sağlanacak biçimde seçelim. O zaman, Lemma 4.1.2'nin (i) kısmından $\sigma(\frac{x}{\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha^H} \sigma(x) < 1$ yazabiliriz ki bu, $\|x\|_L \leq \alpha < 1$ olması demektir. Bu ise, $\|x\|_L = 1$ olması ile çelişiyor. O halde, $\sigma(x) = 1$ olmak zorundadır.

Tersine $\sigma(x) = 1$ olsun. $\|x\|_L$ 'nin tanımından $\|x\|_L \leq 1$ yazabiliriz. Eğer $\|x\|_L < 1$ ise, o zaman (i) kısmından $\sigma(x) \leq \|x\|_L < 1$ olur. Bu ise, $\sigma(x) = 1$ olduğu kabulümüz ile çelişir. Demek ki $\|x\|_L = 1$ olmak zorundadır. Böylelikle (iii) kısmının ispatı tamamlanır.

(iv) (i) ve (iii) kullanılarak kolayca elde edilir.

(v) (iii) ve (iv) kullanılarak kolayca elde edilir. $\square$

Lemma 4.1.4. Herhangi bir $x \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) Eğer $0 < \alpha < 1$ ve $\|x\|_L > \alpha$ ise, $\sigma(x) > \alpha^H$ dir.

(ii) Eğer $\alpha \geq 1$ ve $\|x\|_L < \alpha$ ise, $\sigma(x) < \alpha^H$ dir.

İspat. (i) $0 < \alpha < 1$ ve $\|x\|_L > \alpha$ olsun. O zaman $\|\frac{x}{\alpha}\|_L > 1$ yazabiliriz. Lemma 4.1.3'ün (ii) kısmı gereğince $\sigma(\frac{x}{\alpha}) > 1$ elde edilir. Dolayısı ile bu eşitsizlik ve Lemma 4.1.2'nin (i) kısmından

$$\sigma(x) \geq \alpha^H \sigma\left(\frac{x}{\alpha}\right) > \alpha^H$$

olduğu görülür.

(ii) $\alpha \geq 1$ ve $\|x\|_L < \alpha$ olsun. O zaman $\|\frac{x}{\alpha}\|_L < 1$ yazabiliriz. Lemma 4.1.3'ün (i) kısmı gereğince $\sigma(\frac{x}{\alpha}) < 1$ elde edilir. Eğer $\alpha = 1$ ise, o zaman $\sigma(x) < 1 = \alpha^H$ olur. $\alpha > 1$ ise, bu durumda; Lemma 4.1.2'nin (ii) kısmından

$$\sigma(x) < \alpha^H \sigma\left(\frac{x}{\alpha}\right) < \alpha^H$$

olduğu görülür. $\square$

Aşağıda $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayındaki herhangi bir dizinin $\|\cdot\|_L$ normuna göre yakınsaması ile bu uzay üzerinde tanımlanan modüllere göre yakınsaması arasındaki ilişkiyi açıklayan Lemma verildi.

Lemma 4.1.5. (x_n) , $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayında herhangi bir dizi olsun.

(i) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_L = 1$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) = 1$ dir.

(ii) Eğer $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) = 0$ ise, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_L = 0$ dır.

İspat. (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_L = 1$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısını, $\varepsilon \in (0, 1)$ olacak şekilde seçelim. Bu taktirde her $n \geq n_0$ için

$$1 - \varepsilon < \|x_n\|_L < 1 + \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir n_0 doğal sayısı mevcuttur. Lemma 4.1.4 kullanılırsa her $n \geq n_0$ için

$$(1 - \varepsilon)^H < \sigma(x_n) < (1 + \varepsilon)^H$$

elde edilir. Bu ise $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma(x_n) = 1$ olduğunu gösterir.

(ii) $\|x_n\|_L \not\rightarrow 0$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisinin sıfıra yakınsamayan en az bir alt dizisi bulunabilir. (x_{n_k}) böyle bir alt dizi olsun. Yani, her $k \in \mathbb{N}$ için $\|x_{n_k}\|_L > \varepsilon$ olacak biçimde en az bir $\varepsilon \in (0, 1)$ sayısı mevcut olsun. Lemma 4.1.4 kullanılırsa her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sigma(x_{n_k}) > \varepsilon^H$$

elde edilir. Bu ise $k \rightarrow \infty$ iken $\sigma(x_{n_k}) \not\rightarrow 0$ olduğunu gösterir. $\square$

Bu kısmı, $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayının Luxemburg normuna göre bir Banach uzayı olduğunu ispatlayarak tamamlayalım.

Teorem 4.1.1. $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayı

$$\|x\|_L = \inf \left\{ \eta > 0 : \sigma\left(\frac{x}{\eta}\right) \leq 1 \right\}$$

ile tanımlı Luxemburg normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat. $(x^n) = (x_j^n)$, $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ 'da herhangi bir Cauchy dizisi olsun ve $\varepsilon \in (0, 1)$ verilsin. Bu durumda, her $m, n \geq n_0$ için

$$\|x^n - x^m\|_L < \varepsilon^H$$

eşitsizliğinin sağlandığı bir n_0 sayısı mevcuttur. Lemma 4.1.3'ün (i) kısmından dolayı her $m, n \geq n_0$ için

$$\sigma(x^n - x^m) \leq \|x^n - x^m\|_L < \varepsilon^H \quad (4.1.2)$$

yazılabilir ki bu, her $m, n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j^n - x_j^m| \right)^{p_k} < \varepsilon^H$$

olması demektir. Son eşitsizlikten her bir sabit j ve her $m, n \geq n_0$ için

$$|x_j^n - x_j^m| < \varepsilon \quad (4.1.3)$$

yazılabilir. Bu ise, (x_j^n) dizisinin $\mathbb{R}$ 'de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan $m \rightarrow \infty$ iken $x_j^m \rightarrow x_j$ olur. (4.1.3)'de $m \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse her $n \geq n_0$ için

$$|x_j^n - x_j| < \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısı ile $m \rightarrow \infty$ iken $\sigma(x^n - x^m) \rightarrow \sigma(x^n - x)$ olur. Yani,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j^n - x_j^m| \right)^{p_k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_j^n - x_j| \right)^{p_k}$$

yazılabilir. Buradan her $n \geq n_0$ için

$$\sigma(x^n - x) < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise $\|x^n - x\|_L < \varepsilon$ olması demektir.

Şimdi, $x = (x_j)$ dizisinin $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayının bir elemanı olduğunu gösterelim. $(x^n - x) \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ ve $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayı bir lineer uzay olduğundan $x = (x - x^n) + x^n$ eşitliğinden istenen elde edilir. Sonuç olarak, $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayı Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır. $\square$

4.2 $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ Uzayının Kadec-Klee Özelliği

Bu kısımda, $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gösterildi.

Lemma 4.2.1. $x \in \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ ve $(x_n) \subseteq \ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ olsun. Eğer her $j \in \mathbb{N}$ için $x_n(j) \rightarrow x(j)$ ($n \rightarrow \infty$) ve $\sigma(x_n) \rightarrow \sigma(x)$ ($n \rightarrow \infty$) ise, bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|_L = 0$$

dır.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} < \infty$ olduğundan

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{6K} \quad (4.2.1)$$

yazılabilir. Burada, $K = \max\{1, 2^{H-1}\}$ ve $H = \sup_k p_k$ olarak tanımlıdır. Diğer taraftan, $n \rightarrow \infty$ iken

$$\sigma(x_n) - \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j)| \right)^{p_k} \rightarrow \sigma(x) - \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k}$$

ve her $j \in \mathbb{N}$ için $x_n(j) \rightarrow x(j)$ olması sebebiyle her $n \geq n_0$ için

$$\left| \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j)| \right)^{p_k} - \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \right| < \frac{\varepsilon}{3K} \quad (4.2.2)$$

eşitsizliğin sağlandığı bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Aynı zamanda, her $j \in \mathbb{N}$ için $x_n(j) \rightarrow x(j)$ olmasından, her $n \geq n_0$ için

$$\sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j) - x(j)| \right)^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4.2.3)$$

eşitsizliğini de yazabiliriz. (4.2.1), (4.2.2) ve (4.2.3) eşitsizlikleri birlikte düşünülürse, $n \geq n_0$ için

$$\begin{aligned} \sigma(x_n - x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j) - x(j)| \right)^{p_k} \\ &= \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j) - x(j)| \right)^{p_k} \\ &\quad + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j) - x(j)| \right)^{p_k} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + K \left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j)| \right)^{p_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + K \left[\sigma(x_n) - \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x_n(j)| \right)^{p_k} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \right] \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + K \left[\sigma(x) - \sum_{k=0}^{k_0} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon}{3K} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \right] \\ &= \frac{\varepsilon}{3} + K \left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \right] + \frac{\varepsilon}{3K} \\ &\quad + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k u_k \nabla v_j |x(j)| \right)^{p_k} \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise, $n \rightarrow \infty$ iken $\sigma(x_n - x) \rightarrow 0$ olduğunu gösterir. Lemma 4.1.5'in

(ii) kısmından $n \rightarrow \infty$ iken $\|x_n - x\|_L \rightarrow 0$ elde edilir. Böylelikle Lemmanın ispatı tamamlanır. $\square$

Aşağıda $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğunu ifade eden Teorem verildi.

Teorem 4.2.1. $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.

İspat. $x \in S(\ell_\sigma(u, v; p, \Delta))$ ve (x_n) , $\|x_n\|_L \rightarrow 1$ olacak şekilde $B(\ell_\sigma(u, v; p, \Delta))$ 'da herhangi bir dizi olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $x_n \rightarrow x$ zayıf yakınsadığını kabul edelim. Lemma 4.1.3'ün (iii) kısmından $\sigma(x) = 1$ yazabiliriz. Bu yüzden, Lemma 4.1.5'in (i) kısmı gereğince $n \rightarrow \infty$ iken $\sigma(x_n) \rightarrow \sigma(x)$ olur. $x_n \rightarrow x$ zayıf yakınsadığından ve

$$\pi_i : \ell_\sigma(u, v; p, \Delta) \rightarrow \mathbb{R}; \quad \pi_i(x) = x_i$$

şeklinde tanımlı i -inci koordinat dönüşümü $\ell_\sigma(u, v; p, \Delta)$ üzerinde bir sürekli lineer fonksiyonel olduğundan, her $i \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(i) = x(i)$$

bulunur. Buradan; Lemma 4.2.1 kullanılırsa, $x_n \rightarrow x$ elde edilir. Bu ise Teoremin ispatını tamamlar. $\square$

KAYNAKLAR

- [1] P. N. Ng, P. Y. Lee *Cesáro sequences spaces of non-absolute type*, Comment. Math. Prace Mat., **20**(2)(1978), 429-433.
- [2] C. S. Wang, *On Nörlund sequence spaces*, Tamkang J. Math., **9**(1978) 269-274.
- [3] F. Başar, *Matrix transformations between certain sequence spaces of X_p and ℓ_p* , Soochow J. Math., **26**(2)(2000), 191-204.
- [4] F. Başar, *A note on the triangle limitation methods*, Fırat Univ. Fen-Müh. Bil. Dergisi, **5**(1) (1993), 113-117.
- [5] C. Aydın, F. Başar, *On the new sequence spaces which include the spaces c_0 and c* , Hokkaido Math. J., **33** (2004), 383-398.
- [6] C. Aydın, *İzomorfik dizi uzayları ve sonsuz matrisler*, İnönü Üniv. Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi, Malatya, 2002.
- [7] H. Kızmaz, *On certain sequence spaces*, Canad. Math. Bull., **24**(2) (1981), 169-176.
- [8] B. Altay, F. Başar, *On the space of sequences of p - bounded variation and related matrix mappings*, Ukrainian Math. J., **55**(1) (2003), 136-147.
- [9] C. Aydın, F. Başar, *Some new difference sequence spaces*, Appl. Math. Comput., **157** (2004), 677-693.
- [10] I.J. Maddox, *Paranormed sequence spaces generated by infinite matrices*, Proc. Camb. Phil. Soc. **64**(1968), 335-340.
- [11] I.J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences*, Quart. J. Math. Oxford **18**(2)(1967), 345-355.
- [12] B. Choudhary, S.K. Mishra, *On Köthe-Toeplitz duals of certain sequence spaces and their matrix transformations*, Indian J. Pure Appl. Math. **24**(5)(1993), 291-301.
- [13] F. Başar, B. Altay, *Matrix mappings on the space $bs(p)$ and its α -, β - and γ -duals*, Aligarh Bull. Math. **21**(1)(2002), 79-91.
- [14] B. Altay, F. Başar, *Some paranormed sequence spaces of non-absolute type derived by weighted mean*, J. Math. Anal. Appl. **319**(2)(2006), 494-508 .
- [15] B. Altay, F. Başar, *Generalization of the sequence space $\ell(p)$ derived by weighted mean*, J. Math. Anal. Appl. **330**(1)(2007), 174-185 .

- [16] H. Polat, V. Karakaya, N. Şimşek, *Difference sequence spaces derived by using a generalized weighted mean*, Appl. Math. Lett., **24**(5)(2011), 608-614.
- [17] S. Suantai, *On some convexity properties of generalized Cesàro sequence spaces*, Georgian Math. J., **10**(1)(2003), 193-200.
- [18] N. Şimşek, V. Karakaya, *On some geometrical properties of generalized modular spaces of Cesàro type defined by weighted means*, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2009, Article ID: 932734, 13 pages.
- [19] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons. Inc., Canada, (1978).
- [20] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, (1970).
- [21] E. Malkowsky, V. Rakoćević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, Zbornik Radova, Matematički Institut SANU, Belgrade, **9:17** (2000) 143-234.
- [22] A. Wilansky, *Summability through Functional Analysis*, North-Holland Mathematics Studies, vol.85, Amsterdam, New York, Oxford, (1984).
- [23] D. J. H. Garling, *The β - and γ - duality of sequence spaces*, Proc. Camb. Phil. Soc., **63** (1967) 963-981.
- [24] B. Choudhary, S. Nanda, *Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, Inc. New Delhi, (1989).
- [25] G. M. Petersen, *Regular Matrix Transformations*, McGraw-Hill Publishing Company Limited, London, (1966).
- [26] B. Altay, F. Başar, *On the paranormed Riesz sequence spaces of non-absolute type*, Southeast Asian Bull. Math., **26:5** (2002), 701-715.
- [27] K.-G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of Maddox*, J. Math. Anal. Appl., **180**(1993), 223-238.
- [28] C. G. Lascarides, I.J. Maddox, *Matrix transformations between some classes of sequences*, Proc. Camb. Phil. Soc., **68**(1970), 99-104.
- [29] N. Petrot, *The locally uniform nonsquare in generalized Cesàro sequence spaces*, Journal of Inequalities and Applications, Volume 2008, Article ID: 162037, 10 pages.
- [30] N. Petrot, S. Suantai, *On uniform Kadec-Klee properties and rotundity in generalized Cesàro sequence spaces*, IJMMS, Volume 2004:2, 91-97.
- [31] I. Schur, *Über lineare transformationen in der theorie der unendlichen reihen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **151** (1921), 79-111.

- [32] E. Malkowsky, E. Savaş, *Matrix transformations between sequence spaces of generalized weighted means*, Appl. Math. Comput. **147**(2004), 333-345.
- [33] F. Başar, B. Altay, M. Mursaleen, *Some generalizations of the space bv_p of p -bounded variation sequences*, Nonlinear Anal. **68**(2008), 273-287.
- [34] I. Djolović, *On the spaces of bounded Euler difference sequences and some classes of compact operators*, Appl. Math. Comput., **182**(2006), 1803-1811.
- [35] S. Demiriz, C. Çakan, *Some topological and geometrical properties of a new difference sequence space*, Abstract and Applied Analysis, Volume 2011, Article ID:213878, 14 pages.
- [36] M. Başarır, *On the generalized Riesz B -difference sequence spaces*, Filomat, **24**(4)(2010), 35-52.
- [37] M. Başarır, M. Öztürk, *On the Riesz difference sequence space*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **57**(2008), 377-389.
- [38] W. Orlicz, *A note on modular spaces I*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math., **9**(1961), 157-162.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Tokat’da doğan Serkan DEMİRİZ ilk ve orta öğrenimini Tokat’da tamamladı. 1999 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. Bölümden 2003 yılında mezun oldu. 2004 yılında Gazi osmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2007 yılında Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2007 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında doktora başladı. 2004 yılından beri Gazi osmanpaşa Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak çalışmaya devam etmektedir.