



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ZAYIF AYIRMA AKSİYOMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuncay ACAR

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

AKSARAY, 2020

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 182342201 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Tuncay ACAR tarafından hazırlanan “BAZI ZAYIF AYIRMA AKSİYOMLARI” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

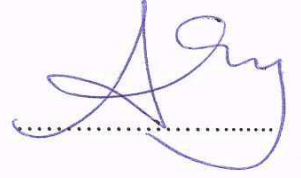
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Ali AYTEKİN

Pamukkale Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.



Tez Savunma Tarihi: 21/07/2020

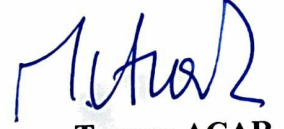
Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Mehmet Ali HINIS
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Bazı Zayıf Ayırma Aksiyomları konulu yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Tuncay ACAR

TEŞEKKÜR

Tez çalışmasının seçiminde, yürütülmesinde, sonuçlandırılmasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını feda ederek, her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen, beni yönlendiren değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ayhan ERCİYES'e, tezin hazırlanma aşamasında beni yönlendiren ve tecrübelerini benimle paylaşan Aksaray Üniversitesi, Matematik Bölümündeki değerli hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tüm hayatım boyunca bana verdikleri manevi destek, göstermiş oldukları sabır ve anlayıştan dolayı başta eşim Mercan ACAR, oğullarım Ali Emre ACAR ve Ahmet Yusuf ACAR'a teşekkür ederim.

Tuncay ACAR
AKSARAY, 2020

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	3
2.1. Topolojik Uzaylar.....	3
2.2. Süreklilik	5
2.3. Ayırma Aksiyomları ($T_0, T_{1/2}, T_1, T_2$).....	6
3. YARI TOPOLOJİK KAVRAMLAR VE YARI AYIRMA AKSİYOMLARI.....	14
3.1. Yarı-Açık Ve Yarı-Kapalı Kümeler	14
3.2. Yarı Süreklilik	18
3.3. Yarı-Ayırma Aksiyomları ($semi-T_0, semi-T_{1/2}, semi-T_1, semi-T_2$)	20
3.4. Yarı- D Ayırma Aksiyomları ($semi-D_0, semi-D_1, semi-D_2$).....	29
4. PRE TOPOLOJİK KAVRAMLAR VE PRE AYIRMA AKSİYOMLARI ...	35
4.1. Pre-Açık Ve Pre-Kapalı Kümeler.....	35
4.2. Pre Süreklilik.....	39
4.3. Pre-Ayırma Aksiyomları ($pre-T_0, pre-T_{1/2}, pre-T_1, pre-T_2$)	41
4.4. Pre- D Ayırma Aksiyomları ($pre-D_0, pre-D_1, pre-D_2$).....	47
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	54
KAYNAKLAR	56
ÖZGEÇMİŞ.....	58

YÜKSEK LİSANS TEZİ
BAZI ZAYIF AYIRMA AKSİYOMLARI

Tuncay ACAR

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Açık kümeler topolojik uzayların yapı taşıdır. Ayırma aksiyomları, bağlantılılık, kompaktlık, sürekli fonksiyon vb. gibi pek çok kavram açık ve kapalı kümeler kullanılarak tanımlanır. Diğer taraftan, açık küme kavramına yapılacak modifiyelerin sonuçları yıllardan beri çalışılan konu olmuştur. Topolojik uzaylarda yarı-açık (yarı-kapalı) küme kavramı N. Levine tarafından ortaya atıldı. Levine bir topolojik uzaydaki A kümesinin yarı-açık olmasını $U \subseteq A \subseteq \bar{U}$ olacak şekilde $U \subseteq X$ açık kümesinin var olması olarak tanımladı. Diğer taraftan, pre-açık (pre-kapalı) ve pre-süreklilik kavramları ise ilk kez A. S. Mashhour tarafından verilmiştir. Mashhour, bir topolojik uzaydaki A alt kümesinin pre-açık olmasını $A \subseteq (\bar{A})^\circ$ olmasıdır olarak tanımlamıştır. Levine ve Mashhour'un yarı-kapalı ve pre-kapalı kümeler üzerindeki çalışmalarından sonra, pek çok matematikçi yarı-kapalı ve pre-kapalı küme kavramlarını göz önünde bulundurarak dikkatlerini topolojideki çeşitli kavramların genelleştirilmelerine çevirdiler. Onlar yarı-kapalılık (pre-kapalılık) yardımıyla kapalı kümeler kavramını yarı-genelleştirilmiş (pre-genelleştirilmiş) kapalı kümelere genelleştirdiler.

Bu tez çalışmasında yarı (pre)-açık küme, sg (pg)-kapalı küme kavramları esas alınarak elde edilen bazı zayıf ayırma aksiyomlarının özellikleri, birbiriyle olan ilişkileri ve denklikleri gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-açık Küme, Pre-açık Küme, Sg -kapalı Küme, Pg -kapalı Küme

Ağustos, 2020; 58 sayfa

M.Sc. THESIS

SOME WEAK SEPARATION AXIOMS

Tuncay ACAR

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

Open sets are the building block of topological spaces. Separation axioms, connectedness, compactness, continuous function etc. many concepts such as open and closed sets are defined. Moreover, the results of the modifications to the open set concept have been the subject studied for years. N. Levine defined a semi-open (semi-closed) set in a topological space as a set A such that there exists an open $U \subseteq X$ such that $U \subseteq A \subseteq \bar{U}$. On the other hand, the concept of pre-open (pre-closed) and precontinuity in topological spaces was first introduced by A. S. Mashhour. Mashhour has defined that subset A in a topological space is $A \subseteq (\bar{A})^\circ$ to be pre-open. After Levine and Mashhour's works on semi-closed and pre-closed sets, many mathematicians have turned their attention into generalizations of various concepts in topology, considering the notions of semi-closed and pre-closed sets. They generalized the concept of closed sets to semi-generalized (pre-generalized) closed sets with the help of semi-closedness (pre-closedness).

In this thesis, the characteristics of some weak separation axioms based on the notions of semi-open (pre-open) closed, $sg(pg)$ -closed closed, their relations and equivalences are shown.

Keywords: Semi-open Set, Pre-open Set, Sg -closed Set, Pg -closed Set.

August, 2020; 58 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. $i=1,2,3$ için $SO-i$ sürekli, sürekli ve sabit fonksiyonlar arasındaki ilişki...	20
Şekil 3.2. $T_{i=0,1/2,1,2}$ ve $semi-T_{i=0,1/2,1,2}$ aksiyomları arasındaki ilişki	27
Şekil 3.3. $T_{i=0,1,2}$ $semi-T_{i=0,1,2}$ ile $semi-D_{i=1,2,3}$ arasındaki ilişki.....	34
Şekil 4.1. Açık/kapalı küme, yarı-açık/yarı-kapalı küme ve pre-açık/pre-kapalı küme arasındaki ilişki.	35
Şekil 4.2. Sürekli, $PO-3$ sürekli ve $PO-2$ sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişki.	40
Şekil 4.3. $i=1,2,3$ için $PO-i$ sürekli, sürekli ve sabit fonksiyonlar arasındaki ilişki ..	41
Şekil 4.4. $T_{i=0,1/2,1,2}$ ve $pre-T_{i=0,1/2,1,2}$ aksiyomları arasındaki ilişki	45
Şekil 4.5. $T_{i=0,1,2}$, $pre-T_{i=0,1,2}$ ve $pre-D_{i=0,1,2}$ aksiyomları arasındaki ilişki	52

SİMGELER VE KISALTMALAR

A^o	Bir A kümesinin içi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
A^s	A kümesinin yarı-içi
$\tilde{A}$	A kümesinin yarı-kapanışı
A^p	A kümesinin pre-içi
$\hat{A}$	A kümesinin pre-kapanışı
$Pre-D$	$Pre-D$ küme
$Pre-D_0$	$Pre-D_0$ uzayı
$Pre-D_1$	$Pre-D_1$ uzayı
$Pre-D_2$	$Pre-D_2$ uzayı
$Pre-T_0$	$Pre-T_0$ uzayı
$Pre-T_{1/2}$	$Pre-T_{1/2}$ uzayı
$Pre-T_1$	$Pre-T_1$ uzayı
$Pre-T_2$	$Pre-T_2$ uzayı
Pg-kapalı	Pre-genelleştirilmiş kapalı küme
$PCI(X, \tau)$	Pre-kapalı kümelerin sınıfı
$PO(X, \tau)$	Pre-açık kümelerin sınıfı
$SCI(X, \tau)$	Yarı-kapalı kümelerin sınıfı
$Semi-D$	$Semi-D$ küme
$Semi-D_0$	$Semi-D_0$ uzayı
$Semi-D_1$	$Semi-D_1$ uzayı
$Semi-D_2$	$Semi-D_2$ uzayı
$Semi-T_0$	$Semi-T_0$ uzayı
$Semi-T_{1/2}$	$Semi-T_{1/2}$ uzayı
$Semi-T_1$	$Semi-T_1$ uzayı
$Semi-T_2$	$Semi-T_2$ uzayı
Sg-kapalı	Yarı-genelleştirilmiş kapalı küme
$SO(X, \tau)$	Yarı-açık kümelerin sınıfı
T_0	T_0 uzayı
$T_{1/2}$	$T_{1/2}$ uzayı
T_1	T_1 uzayı
T_2	T_2 uzayı

1. GİRİŞ

Topolojik uzayları açık kümelerle göre sahip oldukları ortak özellikler yönünden incelemek birçok nedenle daha kolay ve daha uygundur. “Bir topolojik uzayda herhangi iki farklı noktayı onları kapsayan iki ayrık küme ile ayırabilir miyiz?” sorusunun cevabını ayırma aksiyomları adı verilen kavram ile yanıt bulabiliriz. Ayırma aksiyomları, Almanca’da bu anlama gelen “Trennungsaxiom” kelimesinin baş harfi alınarak oluşturulan ve kısaca $i=0, \frac{1}{2}, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 3, 3\frac{1}{2}, 4, 5, 6$ için T_i şeklinde gösterilen topolojinin önemli konularından birisidir.

Topolojik uzaylarda yarı-açık küme kavramı 1963 yılında N. Levine [1] tarafından ortaya atıldı. 1971 yılında S. Crossley ve S. Hildebrand [2] yarı-kapalı kümeler ve bir kümenin yarı-kapanışı ile alakalı olan ve Levine’in çalışmasını ilk kez referans olarak gösteren matematikçiler oldular. 1972 yılında topolojik uzaylarda yarı-süreklilik kavramını tanımladılar [3]. Ardından 1974 yılında yarı-topolojik ayırma aksiyomları üzerine çalışma yaptılar [4]. Yarı-açık küme kavramını baz alarak 1975 yılında S.N. Maheshwari ve R. Prasad [5-7] *semi- T_0* , *semi- T_1* ve *semi- T_2* , *semi-regular*, *semi-normal* olarak ifade ettikleri ve yarı ayırma aksiyomları olarak adlandırılan yeni zayıf ayırma aksiyomlarını tanımladılar. 1982 yılında C. Dorsett [8], yarı-regülerlik ve 1985 yılında yarı-normallik kavramlarını yarı-açık ve yarı-kapalı kümeleri kullanarak tanımladı [9]. 1987 yılında P. Bhattacharyya ve B.K. Lahiri [10] yarı-açıklık yardımıyla kapalı kümeleri yarı-genelleştirilmiş kapalı kümelerle genelleştirdiler ve *semi- T_0* ve *semi- T_1* uzaylarının arasında bulunan *semi- $T_{1/2}$* uzay adını verdikleri yeni bir ayırma aksiyomunu tanımladılar. 1997 yılında M. Caldas [11], *semi- D* kümeleri kullanarak özellikle *semi- T_0* , *semi- T_1* uzaylarının arasında bulunan *semi- D_1* adını verdiği yeni bir ayırma aksiyomunu tanımladı ve özelliklerini inceledi.

Pre-açık kümeler, 1982 yılında A. S. Mashhour ve arkadaşları [12] tarafından ortaya atıldı. Onlar pre-süreklilik kavramını tanımladılar. 1990 yılında A. Kar ve P. Bhattacharyya [13] pre-açık kümeleri kullanarak *pre- T_0* , *pre- T_1* ve *pre- T_2* şeklinde gösterilen ve pre-ayırma aksiyomları olarak adlandırılan yeni diğer zayıf ayırma aksiyomlarını tanımladılar. 1996 yılında, H. Maki, J. Umehara and T. Noiri [14] *pre- $T_{1/2}$* uzayları tanımlamak için pre-open kümeleri kullandılar. Pre-açıklık

yardımıyla kapalı kümeleri pre-genelleştirilmiş kapalı kümelere genelleştirdiler ve $pre-T_0$ ve $pre-T_1$ uzaylarının arasında bulunan $pre-T_{1/2}$ uzay adını verdikleri yeni bir ayırma aksiyomunu tanımladılar. 2001 yılında M. Caldas [15], $pre-D$ kümeleri kullanarak özellikle $pre-T_0$, $pre-T_1$ uzaylarının arasında bulunan $pre-D_1$ adını verdiği yeni bir ayırma aksiyomunu tanımladı ve özelliklerini inceledi.

Bu tez çalışmasında, öncelikle literatürde yarı(pre)-açık küme, yarı(pre)-kapalı küme, bir kümenin yarı(pre)-içi, bir kümenin yarı(pre)-kapanışı, bir fonksiyonun yarı(pre)-sürekliliği gibi modifiye edilen kavramlar incelenecektir. Sonrasında yarı(pre)-ayırma aksiyomları olarak tanımlanan $semi-T_0$, $semi-T_{1/2}$, $semi-T_1$, $semi-T_2$, $semi-D_1$, $pre-T_0$, $pre-T_{1/2}$, $pre-T_1$, $pre-T_2$, $pre-D_1$ şeklinde gösterilen uzayların özellikleri, kalıtsallıkları ve birbirleriyle olan bağlantıları yarı(pre) simetri kavramı da kullanılarak analiz edilecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1 Topolojik Uzaylar

Topoloji kavramı reel sayılar ve Öklid uzayları üzerindeki bazı kavramların incelenmesi ve geliştirilmesi sonucu ortaya çıkmıştır. Topolojik uzayların standart tanımını alması uzun zaman almıştır. Yirminci yüzyılın başında ünlü matematikçiler tarafından çeşitli tanımlar ortaya atılmış olup sonunda bugün ki halini almıştır.

Topolojinin temel amacı topolojik uzayları incelemek ve bu uzayların sürekli deformasyonlar yani homeomorfizmalar altında hangi özelliklerinin korunduğunu belirleyerek bu uzayları sınıflandırmaktır. Topoloji, bir homeomorfizma altında değişmeden kalan özellikleri inceleyen matematiğin bir dalıdır. Ayrıca iki uzay arasında homeomorfizma inşa etmek her zaman kolay değildir. Bu nedenle topolojide bu uzayları incelemek için alt dallar meydana getirilmiştir (Geometrik topoloji, cebirsel topoloji vb.). Topoloji kompaktlık, bağlantılılık, ayırma aksiyomları vb. topolojik özellikleri inceler. Bu özellikler burma, büzme ve germe sonucunda değişmeyen özelliklerdir.

Bu kısımda topolojik uzaylar ile ilgili, çalışmanın diğer bölümlerinde kullanılacak olan ve iyi bilinen kavramların tanımları, teoremler ve önermelere yer verilmiştir.

Tanım 2.1.1 (Topolojik uzay) $X \neq \emptyset$ küme ve $\tau \subseteq P(X)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ sınıfına X üzerinde bir topoloji ve (X, τ) ikilisine ise topolojik uzay adı verilir [16].

- (i) $\emptyset, X \in \tau$,
- (ii) τ ya ait iki kümenin kesişimi yine τ ya aittir, yani $G, H \in \tau$ ise $G \cap H \in \tau$ dur,
- (iii) τ ya ait keyfi sayıda elemanlarının birleşimi yine τ ya aittir, yani I herhangi bir indis kümesi olmak üzere, $i \in I$ için $G_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} G_i \in \tau$ dur.

Örnek 2.1.2 $X \neq \emptyset$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = P(X)$ olsun. X üzerinde bir topolojidir ve ayrık veya diskre topoloji adı verilir.

Örnek 2.1.3 $X \neq \emptyset$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{X, \emptyset\}$ olsun. X üzerinde bir topolojidir ve ayrık olmayan veya indiskre topoloji adı verilir.

Tanım 2.1.4 $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olmak üzere $G \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer her $x \in G$ için $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa G kümesine $\mathbb{R}$ de bir açık küme denir.

$\mathbb{R}$ reel sayılar sayılar kümesindeki açık aralıklar ve bunların keyfi birleşimlerinden oluşan $\tau = \{ G \subseteq \mathbb{R}: (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq G, \varepsilon > 0 \}$ sınıfı $\mathbb{R}$ üzerinde bir topolojidir. $\mathbb{R}$ den elde edilen bu topolojiye standart (alışılmış) topoloji denir.

Tanım 2.1.5 (Açık küme) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $G \in \tau$ ise G ye açık küme denir [16].

Örnek 2.1.6 $(X, P(X))$ ayrık uzayının açık kümeleri X in tüm alt kümeleridir.

Tanım 2.1.7 (Kapalı küme) (X, τ) topolojik uzayında $G \subseteq X$ alt kümesi verilsin. Eğer G^c açık ise G ye kapalı küme denir [16].

Tanım 2.1.8 (Bir kümenin içi) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A tarafından kapsanan en geniş açık kümeye ya da başka bir ifadeyle A tarafından kapsanan tüm açık kümelerin birleşimine A nın içi denir ve A° şeklinde gösterilir [16].

Önerme 2.1.9 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [16,17].

- (1) $A^\circ \subseteq A$,
- (2) A° açıktır,
- (3) A° açıktır ancak ve ancak $A^\circ = A$,
- (4) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$,
- (5) A° , A nın kapsadığı en geniş açık kümedir,
- (6) $A \subseteq B$ ise $A^\circ \subseteq B^\circ$.

Tanım 2.1.10 (Bir kümenin kapanışı) (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A kümesini kapsayan en dar kapalı kümeye ya da başka bir ifadeyle A yı kapsayan tüm kapalı kümelerin kesişimine A nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ şeklinde gösterilir [16].

Önerme 2.1.11 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [16,17].

- (1) $A \subseteq \overline{A}$,
- (2) $\overline{A}$ kapalıdır,
- (3) A kapalıdır ancak ve ancak $A = \overline{A}$ dır,
- (4) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$ dır,
- (5) $\overline{A}$, A yı kapsayan en dar kapalı kümedir,
- (6) $A \subseteq B$ ise $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

2.2 Süreklilik

Tanım 2.2.1 (Noktada süreklilik) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ için $y_0 = f(x_0)$ olsun. Eğer y_0 ın her V açık komşuluğu için $f(U) \subset V$ olacak şekilde $x_0 \in U$ açık komşuluğu varsa f ye x_0 da süreklidir denir [16,17].

Tanım 2.2.2 (Süreklilik) (X, τ) ve (Y, σ) iki topoloji uzay, $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise bu fonksiyona X üzerinde süreklidir veya her yerde süreklidir ya da sadece süreklidir denir [16,17].

Teorem 2.2.3 (X, τ) , (Y, σ) topoloji uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon, K ve K' sırası ile τ ve σ nun kapalı ailelerini gösterebilir. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [16,17]:

- (1) f süreklidir,
- (2) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in \tau$,
- (3) Her $B \in K'$ için $f^{-1}(B) \in K$,
- (4) $A \subset X$ için $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$,
- (5) Her $C \subset Y$ için $f^{-1}(C^o) \subset (f^{-1}(C))^o$.

Tanım 2.2.4 (Homeomorfizm) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyon olsun.

Eğer f bire-bir, örten, sürekli ve tersi $f^{-1}: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ de sürekli ise f fonksiyonuna bir homeomorfizm denir [16,17].

2.3 Ayırma Aksiyomları

Literatürde Tychonoff ayırma aksiyomları olarak bilinen ayırma aksiyomları, farklı noktaları ve ayırık kümeleri topolojik anlamda ayırmak anlamında kullanılması ile alakalı kavramlardır. Topolojik uzayın elemanlarının farklı olması iki topolojik uzayın farklı olması anlamına gelmez. Ayırma aksiyomlarının hepsi bir şekilde farklı noktaları veya ayırık kümeleri güçlü bir anlamda ayırt edilemediğini gösterir.

Tanım 2.3.1 (T_0 uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer farklı $x, y \in X$ nokta çifti için en az birinin diğerini içermeyen açık bir komşuluğu varsa, yani $y \notin G$ olacak şekilde x in bir açık G komşuluğu veya $x \notin H$ olacak şekilde y nin bir H açık komşuluğu varsa (X, τ) ya T_0 uzayı denir [16].

Tanım 2.3.2 (g -kapalı küme) (X, τ) topolojik uzayının bir $A \subseteq X$ alt kümesi için eğer $A \subseteq G$ ve G açık olmak üzere $\bar{A} \subseteq G$ ise A ya bir g -kapalı küme denir [18].

Teorem 2.3.3 Bir A kümesi g -kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} \setminus A$ kümesi boştan farklı hiçbir kapalı küme içermez.

İspat: Kabul edelim ki $F, \bar{A} \setminus A$ nın kapalı bir alt kümesi olsun. $A \subseteq F^c$ ve A, g -kapalı olduğundan $\bar{A} \subseteq F^c$ ve dolayısıyla $F \subseteq (\bar{A})^c$ olur. Böylece $F \subseteq \bar{A} \cap (\bar{A})^c$ olur ki $F = \emptyset$ olmak zorundadır.

Tersine kabul edelim ki $A \subseteq G$ ve G açık olsun. Eğer $\bar{A} \not\subseteq G$ ise $(\bar{A} \cap G^c), \bar{A} \setminus A$ kümesinin boştan farklı kapalı bir alt kümesidir.

Sonuç 2.3.4 (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ g -kapalı kümesi kapalıdır ancak ve ancak $\bar{A} \setminus A$ kümesi kapalıdır.

İspat: Eğer A kapalı ise $\bar{A} \setminus A = \emptyset$ olur. Tersine olarak $\bar{A} \setminus A$ nın kapalı olduğunu kabul edelim. A kümesi g -kapalı olduğundan $\bar{A} \setminus A$ kümesi kendisinin kapalı bir alt kümesi olur. Teorem 2.3.3 den $\bar{A} \setminus A = \emptyset$ ve böylece $\bar{A} = A$ olur ki A kümesi kapalıdır.

Teorem 2.3.5 A ve B kümeleri g -kapalı ise $A \cup B$ kümesi de g -kapalıdır.

İspat: Eğer $A \cup B \subseteq G$ ve G açık ise $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B} \subseteq G$ olur ki bu da $A \cup B$ nin G kapalı olduğunu gösterir.

Fakat g -kapalı iki kümenin kesişimi g -kapalı olmayabilir. Örneğin $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ topolojisi için $A = \{a, b\}$ ve $B = \{a, c\}$ olsun. Bu durumda A ve B kümeleri g -kapalıdır fakat $A \cap B = \{a\}$ kümesi g -kapalı değildir.

Teorem 2.3.6 (X, τ) topolojik uzayında $B \subseteq A \subseteq X$ olmak üzere B , A ya göre g -kapalı küme ve A da X in g -kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda B kümesi de X e göre g -kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki $B \subseteq G$ olacak şekilde $G \in \tau$ olsun. $B \subseteq A \cap G$ ve böylece $\overline{B_A} \subseteq A \cap G$ olur. Buradan $A \cap \bar{B} \subseteq A \cap G$ ve $A \subseteq G \cup (\bar{B})^c$ olur.

Dolayısıyla A kümesi X de g -kapalı olduğundan $\bar{A} \subseteq G \cup (\bar{B})^c$ yazabiliriz. Böylece $\bar{B} \subseteq \bar{A} \subseteq G \cup (\bar{B})^c$ olur ve burada $\bar{B} \subseteq G$ olur. Bu ise B kümesinin de X göre g -kapalı olduğunu gösterir.

Sonuç 2.3.7 (X, τ) topolojik uzayında A kümesi g -kapalı ve F kapalı bir küme olsun. Bu durumda $A \cap F$ kümesi g -kapalıdır.

İspat: A kapalı olduğundan $A \cap F$ kümesi g -kapalıdır. Teorem 2.3.6 dan $A \cap F$, g -kapalı bir kümedir.

Teorem 2.3.8 (X, τ) topolojik uzayında A kümesi g -kapalı küme ve $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ ise B de g -kapalıdır.

İspat: $\bar{B} \setminus B \subseteq \bar{A} \setminus A$ ve $\bar{A} \setminus A$ nın boştan farklı hiçbir kapalı alt kümesi olmadığından $\bar{B} \setminus B$ nin da boştan farklı hiçbir kapalı alt kümesi yoktur. Teorem 2.3.3 den B kümesi g -kapalıdır.

Tanım 2.3.9 ($T_{1/2}$ uzayı) (X, τ) topolojik uzayının her g -kapalı alt kümesi kapalı ise (X, τ) uzayına $T_{1/2}$ denir [19].

Örnek 2.3.10 $X = \{a, b\}$ için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ olsun. Bu durumda,

A	$\bar{A}$	$A \subseteq G$ olacak şekilde $G \in \tau$	Kapalı	g -kapalı
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, \{a\}, X$	✓	✓
$\{a\}$	X	$\{a\}, X$	✗	✗
$\{b\}$	$\{b\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi her g -kapalı küme kapalı olduğundan dolayı X uzayı $T_{1/2}$ dir.

Kapalı her küme g -kapalıdır. Ayrıca bu uzaydaki g -kapalı kümeler $\emptyset, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}$ X dir fakat bunlar içinden $\{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}$ kapalı değildir. Dolayısıyla X uzayı $T_{1/2}$ değildir.

Tanım 2.3.11 (T_1 uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer farklı $x, y \in X$ nokta çifti için her birinin diğerini içermeyen açık bir komşuluğu varsa, yani $x \in G, y \notin G$ ve $y \in H, x \notin H$ olacak şekilde G ve H açık kümeleri varsa (X, τ) ya T_1 uzayı denir [16].

Tanım 2.3.12 (T_2 uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Eğer farklı $x, y \in X$ noktaları ayırık açık komşuluklara sahipse, yani farklı $x, y \in X$ noktaları $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde $x \in G, y \in H$ açık kümeleri varsa (X, τ) ya T_2 uzay veya Hausdorff uzay denir [16].

Şimdi yukarıda tanımları verilen ayırma aksiyomları ile alakalı teorem ve örnekleri verelim:

Teorem 2.3.13 (X, τ) bir topolojik uzayı T_0 dir ancak ve ancak farklı her $x, y \in X$ nokta çifti için $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$ dir [17].

Teorem 2.3.14 (X, τ) topolojik uzayı T_1 dir ancak ve ancak her tek nokta kümesi kapalıdır [16].

Örnek 2.3.15 Birden fazla elemana sahip X kümesi üzerindeki indiskre topoloji için (X, τ) uzayı T_0 değildir. Çünkü her tek nokta kümesi kapalı değildir.

Teorem 2.3.16 (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ dır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ açık veya kapalıdır.

İspat: (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ve $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı olmasın. $\{x\}^c$ kümesinin tek açık komşuluğu X olduğundan $\{x\}^c$ kümesi g -kapalıdır. Her g -kapalı küme kapalı olduğundan $\{x\}^c$ kapalı ve dolayısıyla $\{x\}$ açıktır.

Tersine olarak her $x \in X$ için $A \subseteq X$ g -kapalı ve $x \in \bar{A}$ olsun. Eğer $\{x\}$ açık ise $\{x\} \cap A \neq \emptyset$ olur. Diğer durumda $\{x\}$ kapalıdır ve $\emptyset \neq \overline{\{x\}} \cap A = \{x\} \cap A$ olur. Her iki durumda da $x \in A$ olup böylece $\bar{A} \subseteq A$ olur. Bu ise A nın kapalı olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.17 (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ dir ancak ve ancak X uzayının her alt kümesi, bu alt kümeyi içeren tüm açık kümelerin ve tüm kapalı kümelerin kesişimidir.

İspat: (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ve $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

$$B = \bigcap \{\{x\}^c : x \notin B\}$$

Teorem 2.3.16 dan açık ve kapalı kümelerin bir kesişimidir.

Her $x \in X$ için $\{x\}^c$ kümesi bu kümeyi içeren tüm açık ve tüm kapalı kümelerin kesişimidir. Bu durumda $\{x\}^c$ ya açık ya da kapalıdır. Böylece (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ dir.

Teorem 2.3.18 (X, τ) topolojik uzay olsun. O halde,

- (1) (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ise T_0 dır,
- (2) (X, τ) uzayı T_1 ise $T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı T_1 ise T_0 dır,
- (4) (X, τ) uzayı T_2 ise T_1 dir,

dolayısıyla

$$T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_{1/2} \Rightarrow T_0$$

yazılabilir.

İspat: (1) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı T_0 olmasın. Bu takdirde Teorem 2.3.13 den dolayı $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ dir.

$A = \overline{\{x\}} \cap \{x\}^c$ olsun. A nın g -kapalı olduğunu fakat kapalı olmadığını göstereceğiz.

$x \in U \in \tau$ ise $A \cap U \supseteq \{y\} \neq \emptyset$ ve böylece $x \in \overline{A}$ olur. $x \notin A$ olduğundan kapalı değildir.

Şimdi kabul edelim ki $A \subseteq V \in \tau$ olsun. $\overline{\{x\}} \subseteq V$ olduğunu göstermemiz g -kapalı olduğunu göstermek için yeterlidir. Fakat $\overline{\{x\}} \cap \{x\}^c = A \subseteq V$ den $x \in V$ olduğunu göstermeliyiz.

$x \in V^c$ ise $y \in \overline{\{x\}} \subset V^c$ olur. Buradan $y \in A \subseteq V$ yazabiliriz. Böylece $y \in V \cap V^c$ olur ki bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $x \notin V^c$ dir yani $x \in V$ dir.

Yukarıdaki teoremin tersi genelde doğru değildir. Örneğin $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ uzayını düşünelim. Bu uzay T_0 dır fakat $\{a, c\}$ g -kapalı olmasına rağmen kapalı olmadığından X uzayı $T_{1/2}$ değildir.

(2) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı T_1 ve $A \subset X$ kapalı olmasın ve $x \in \bar{A} \setminus A$ olsun. (X, τ) uzayı T_1 olduğundan Teorem 2.3.14 den $\{x\}$ kapalıdır ve $\{x\} \subset \bar{A} \setminus A$ dir. Buradan $\bar{A} \setminus A$ kümesi boş kümeden farklı bir küme içerdiğinden A kümesi g -kapalı değildir. Dolayısıyla (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ olur. Fakat bu teoremin tersi doğru değildir. Örneğin $X = \{a, b\}$ kümesi için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisini düşünelim. (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ olmasına rağmen T_1 değildir.

(3) ve **(4)** ispatları tanımdan aşikârdır ve tersleri genelde doğru değildir. Örneğin $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ olsun. (X, τ) uzayı T_0 olmasına rağmen T_1 değildir. Benzer şekilde reel sayılar üzerindeki tümleyeni sonlu $\tau = \{G \subseteq R \mid G^c \text{ sonlu}\} \cup \{\emptyset\}$ topolojisi için (X, τ) uzayı T_1 olmasına rağmen T_2 değildir. Çünkü eğer T_2 olsaydı $x \neq y$ için $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde x ve y nin sırasıyla U ve V açık komşulukları olurdu. Burada $U^c \cup V^c = R$ olup sağ taraf sonsuz olmasına rağmen sol taraf sonlu olurdu. Bu ise bir çelişkidir.

Tanım 2.3.19 (Simetrik Uzay) (X, τ) topolojik uzay $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. $x \in \overline{\{y\}}$ olduğundan $y \in \overline{\{x\}}$ ise (X, τ) ya simetrik uzay denir.

Teorem 2.3.20 (X, τ) uzayı simetriktir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi g -kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) uzayı simetrik olmasın yani $x \in \overline{\{y\}}$ ve $y \notin \overline{\{x\}}$ olsun. Bu durumda $\{y\} \subseteq (\overline{\{x\}})^c$ ve böylece $\overline{\{y\}} \subseteq (\overline{\{x\}})^c$ olur. Dolayısıyla $x \in (\overline{\{x\}})^c$ elde ederiz ki bu ise bir çelişkidir. O halde $y \in \overline{\{x\}}$ dir.

Tersine olarak $\{x\} \subseteq G$, $G \in \tau$ ve $\overline{\{x\}} \not\subseteq G$ olsun. Bu takdirde $\overline{\{x\}} \cap G^c \neq \emptyset$ olur. $y \in \overline{\{x\}} \cap G^c$ ve böylece $x \notin G$ olur. Bu ise $\{x\} \subseteq G$ olması ile çelişir.

Sonuç 2.3.21 (X, τ) uzayı T_1 olsun. Her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı ve böylece g -kapalı olduğundan Teorem 2.3.20 den dolayı (X, τ) simetriktir. Fakat uzayın simetrik olması T_1 olmasını gerektirmez. Örneğin $X = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{\emptyset, X\}$ indiskre topoloji simetrik olmasına rağmen T_1 değildir.

$$T_1 \Rightarrow \text{Simetrik}$$

Sonuç 2.3.22 (X, τ) uzayı simetrik ve T_0 dır ancak ve ancak T_1 dir.

İspat: (X, τ) uzayı simetrik olduğundan Sonuç 2.3.22 den dolayı T_1 dir. Tersine olarak, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ ve uzay T_0 olsun. Bazı $G \in \tau$ için $x \in G \subseteq \{y\}^c$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in \overline{\{y\}}$ ve böylece $y \notin \overline{\{y\}}$ olur. Buradan $y \in H \subseteq \{x\}^c$ olacak şekilde $H \in \tau$ vardır ki bu ise (X, τ) uzayının T_1 olduğunu gösterir.

Teorem 2.3.23 (X, τ) uzayı simetrik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- (1) (X, τ) uzayı T_0 dır,
- (2) (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı T_1 dir.

İspat: Sonuç 2.3.21 ve 2.3.22 dan ispat aşikârdır.

Teorem 2.3.24 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı T_0 ise (A, τ_A) T_0 dir,
- (2) (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ise (A, τ_A) $T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı T_1 ise (A, τ_A) T_1 dir,
- (4) (X, τ) uzayı T_2 ise (A, τ_A) T_2 dir.

İspat: (1) (X, τ) T_0 uzayı (A, τ_A) da bu uzayın alt uzayı $x \neq y$, $x, y \in A$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. (X, τ) uzayı T_0 olduğundan $x \in U$, $y \notin U$ veya $y \in U$, $x \notin U$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ vardır. Bu durumda $x \in U \cap A$, $y \notin U \cap A$ veya $y \in U \cap A$, $x \notin U \cap A$ olur. Üstelik $U \cap A \in \tau_A$ dir. O halde (A, τ_A) uzayı bir T_0 uzayıdır.

(2) (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ve $A \subseteq X$ olsun. Teorem 2.3.16 dan $x \in A$ için $\{x\}$ kümesi açık veya kapalı olsun. Bu durumda $\{x\}$ kümesi A da açık veya kapalı olur ki bu ise (A, τ_A) nın $T_{1/2}$ uzayı olduğunu gösterir.

(3) (X, τ) T_1 uzayı ve (A, τ_A) da bu uzayın alt uzayı ve $x \in A$ olsun. Bu durumda $x \in X$ olup (X, τ) uzayı T_1 olduğundan ve her tek nokta kümesi kapalı olduğundan $\{x\}$ kümesi (X, τ) uzayında kapalıdır.

(4) (X, τ) bir T_2 uzayı ve (A, τ_A) da bu uzayın alt uzayı olsun. $x \neq y$ ve $x, y \in A$ olsun. Bu durumda $x, y \in X$ dir. (X, τ) T_2 uzayı olduğundan $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \tau$ kümeleri vardır. Böylece $x \in U \cap A$, $y \in V \cap A$ ve $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$ dur. Alt uzay tanımı gereğince $A \cap U \in \tau_A$ ve $A \cap V \in \tau_A$ olduğundan (A, τ_A) alt uzayı T_2 dir.

$i=0,1,2$ için (X, τ) uzayların T_i uzayı olma özelliği topolojik özellik olduğu bilinmektedir. Şimdi uzayın $T_{1/2}$ olmasının topolojik özellik olduğunu gösterelim.

Teorem 2.3.25 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $U \subseteq X$ g -kapalı küme ve $f: X \rightarrow Y$ sürekli ve kapalı ise $f(U) \subseteq Y$ de g -kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki $V \in \sigma$ olmak üzere $f(A) \subseteq V$ olsun. Bu durumda $U \subseteq f^{-1}(V)$ ve $f(\bar{U}) \subseteq V$ ve $f(\bar{U})$ kapalı küme olur. Bu ise $\overline{f(U)} \subseteq \overline{f(\bar{A})} = f(\bar{A}) \subseteq V$ yapabilmemize olanak sağlar. Dolayısıyla $f(U)$ kümesi g -kapalıdır.

Kapalı ve sürekli dönüşümler altında g -açık kümelerle gitmez. Örneğin $X = \{a\}$ ve $Y = \{\emptyset, Y, \{b\}\}$ olmak üzere $f(a)=c$ şeklinde tanımlansın. $\{a\}$ kümesi X de g -açık olmasına rağmen $\{c\}$ kümesi Y de g -açık değildir.

Teorem 2.3.26 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar, $f: X \rightarrow Y$ sürekli kapalı bir fonksiyon olsun. $B \subseteq Y$ de g -kapalı ise $f^{-1}(B) \subseteq X$ de g -kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki $B \subseteq Y$ g -kapalı ve $U \in \tau$ olmak üzere $f^{-1}(B) \subseteq U$ olsun. $\overline{f^{-1}(B)} \subseteq U$ veya $\overline{f^{-1}(B)} \cap U^c = \emptyset$ olduğunu göstereceğiz.

$f(\overline{f^{-1}(B)} \cap U^c) \subseteq \overline{B} \setminus B$ ve B kümesi g -kapalı olduğundan ve $\overline{B} \setminus B$ boş kümeden farklı hiçbir kapalı küme ihtiva etmeyeceğinden $\overline{B} \setminus B \neq \emptyset$ ve dolayısıyla $f(\overline{f^{-1}(B)} \cap U^c) = \emptyset$ olur.

Böylece $\overline{f^{-1}(B)} \cap U^c = \emptyset$ olur. Dolayısıyla burada $f^{-1}(B) \subseteq Y$ nın X de g -kapalı olduğunu görürüz.

Teorem 2.3.27 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar (X, τ) uzayı $T_{1/2}$, $f: X \rightarrow Y$ sürekli örten, kapalı ise (Y, σ) uzayı da $T_{1/2}$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $B \subseteq Y$ kümesi g -kapalı olsun. Dolayısıyla Teorem 2.3.26 dan $f^{-1}(B)$ kümesi g -kapalıdır ve böylece örtenlikten $B = ff^{-1}(B)$ olur ki B de Y de kapalıdır. Böylece (Y, σ) uzayı $T_{1/2}$ olur.

Sonuç 2.3.28 Teorem 2.3.27 dan dolayı uzayın $T_{1/2}$ olması topolojik bir özelliktir.

3. YARI TOPOLOJİK KAVRAMLAR VE YARI AYIRMA AKSİYOMLARI

3.1 Yarı-Açık ve Yarı-Kapalı Kümeler

1963 yılında N. Levine [1] sınır noktalarını içerebilecek kısımlara sahip kümeleri de açık kümelere dâhil ederek açık küme kavramını yarı-açık kümeye genelleştirmiştir. Ardından yarı-açık küme kavramını kullanarak yarı-sürekliliğin tanımını verdi. 1971 yılında Crossley ve Hildebrand [2] yarı-kapalı küme ile yarı-kapanış şeklindeki kavramlara ilk referans olan isim oldular. Ayrıca Onlar yarı-ayırma aksiyomlarını 1972 yılında ortaya attılar [4]. Levine'in çalışmalarından sonra Bhattacharyya ve Lahiri [10] yarı-açıklık yardımıyla kapalı küme kavramını yarı-genelleştirilmiş kapalı küme kavramına genelleştirdiler. Ve ardından bu kavramı kullanılarak *semi- $T_{1/2}$* (yarı-kapalı kümeler ile *sg*-kapalı kümelerin çakıştığı) uzayı tanımlandılar.

Çalışmanın bu kısmında yarı-açıklık tanımı kullanılarak elde edilmiş olan kavramların, fonksiyonların ve ayırma aksiyomlarının temel özellikleri ve birbirleriyle olan ilişkileri incelenecektir.

Tanım 3.1.1 (Yarı-açık küme) (X, τ) bir topolojik uzay, $U \in \tau$ olsun. $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde en az bir $U \subseteq X$ açık kümesi varsa A ya yarı-açık küme denir. (X, τ) uzayındaki tüm yarı-açık kümelerin sınıfı $SO(X, \tau)$ ile gösterilir [1].

Tanım 3.1.2 (Bir kümenin yarı-içi) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. A nın kapsadığı X in yarı-açık tüm alt kümelerinin birleşimine A nın yarı-içi denir. A^s şeklinde gösterilir [1].

Benzer şekilde yarı-kapalı küme ise kapalı küme ile kapalı kümenin içi arasında bir ilişki kurularak şu şekilde tanımlanır.

Tanım 3.1.3 (Yarı-kapalı küme) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. $F^o \subseteq A \subseteq F$ olacak şekilde en az bir $F \subseteq X$ kapalı kümesi varsa A ya yarı-kapalı küme denir. (X, τ) uzayındaki tüm yarı-kapalı kümelerin sınıfı $SCI(X, \tau)$ ile gösterilir [1].

Tanım 3.1.4 (Bir kümenin yarı-kapanışı) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. A yı içeren X in yarı-kapalı tüm alt kümelerinin keşimine A nın yarı-kapanışı denir. $\tilde{A}$ şeklinde gösterilir [1].

Örnek 3.1.5 $X = \{a, b, c, d\}$ üzerindeki topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\}$ olsun.

Bu durumda (X, τ) daki yarı-açık ve yarı-kapalı kümeleri bulalım:

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Kapalı kümelerin içi	Yarı-açık kümeler
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$	X	$\emptyset$
$\{a\}$	$\{b, c, d\}$	$\overline{\{a\}} = X$	$\emptyset$	$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\},$ $\{a, b, c\}, \{a, c, d\},$ $\{a, b, d\}, X$
$\{a, b\}$	$\{c, d\}$	$\overline{\{a, b\}} = X$	$\emptyset$	$\{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}$
$\{a, b, c\}$	$\{d\}$	$\overline{\{a, b, c\}} = X$	$\emptyset$	$\{a, b, c\}, X$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$	$\emptyset$	X

Yukarıda görüldüğü gibi (X, τ) topolojik uzayındaki yarı-açık kümelerin sınıfını $SO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}\}$ şeklindedir. Burada yarı-açık kümelerin sınıfı τ topolojisinden daha incedir. Örnekte görüldüğü gibi her yarı-açık küme açık olmayabilir. Örneğin $\{a, c\}$ yarı-açık küme olmasına rağmen açık değildir. Yarı-açık kümelerin sınıfı genelde bir topoloji oluşturmaz. Benzer düşünce ile yarı-kapalı kümelerin sınıfını,

$SCI(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{d\}, \{b\}, \{c\}\}$. Her yarı-kapalı küme kapalı olmayabilir. Örneğin $\{b, c\}$ yarı-kapalı küme olmasına rağmen kapalı değildir. Yarı-kapalı kümelerin sınıfı da genelde bir topoloji oluşturmaz. Aynı örnek üzerinde $A = \{a, b, d\}$ kümesi için $\tilde{A} = X$ ve $A^s = \{a, b, d\}$ dir.

Örnek 3.1.6 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay olsun. Bu takdirde (a, b) , $(a, b]$, $[a, b)$ ve $[a, b]$ aralıkları yarı-açık kümelerdir,

(2) $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ diskre topolojik uzay olsun. $SO(\mathbb{R}, \tau) = P(\mathbb{R})$ dir,

(3) $(\mathbb{R}, \{\mathbb{R}, \emptyset\})$ indiskre topolojik uzay olsun. $SO(\mathbb{R}, \tau) = \{\mathbb{R}, \emptyset\}$ dir,

(4) $\mathbb{R}$ üzerinde ki $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} \mid G^c \text{ sonlu} \} \cup \{\emptyset\}$ tümleyeni sonlu topoloji için $SO(\mathbb{R}, \tau) = \{H \subseteq \mathbb{R} \mid G \subseteq H \subseteq X, G \in \tau\}$ dur.

Yukarıda yarı-açık kümenin tanımı verilirken, açık küme ile açık kümenin kapanışı arasında bir ilişki kurularak yapıldı.

Teorem 3.1.7 (X, τ) topolojik uzayında yarı-açık bir kümenin tümleyeni yarı-kapalıdır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ yarı-açık bir küme olsun. Bu takdirde $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ vardır. Burada tümleme özelliğinden $(\overline{U})^c \subseteq A^c \subseteq U^c$ olur. U açık olduğundan U^c kapalıdır. $(\overline{U})^c = (U^c)^o$ olduğundan $(U^c)^o \subseteq A^c \subseteq U^c$ olur ki bu ise A^c nin yarı-kapalı olduğunu gösterir.

Teorem 3.1.8 (X, τ) topolojik uzayında yarı-kapalı bir kümenin tümleyeni yarı-açıktır.

İspat: Yukarıdaki teoremin ispatındaki benzer düşünce ile gösterilebilir.

Şimdi yarı-açık ve yarı-kapalı kümeler arasındaki kesişim ve birleşim işlemlerinin kapallılığı ile ilgili aşağıdaki teoremi verelim:

Teorem 3.1.9 (X, τ) topolojik uzayında $B \subseteq X$ yarı-kapalı ve $F \subseteq X$ kapalı ise $B \cup F$ yarı-kapalıdır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay, F kapalı küme ve $B \subseteq X$ yarı-kapalı küme olsun. F^c açık, B^c kümesi yarı-açık olduğundan Sonuç 3.1.12 den $F^c \cap B^c$ kümesi de X de yarı-açıktır. Dolayısıyla $F^c \cap B^c = (F \cup B)^c$ kümesi yarı-açık $F \cup B$ kümesi yarı-kapalıdır.

Teorem 3.1.10 (X, τ) topolojik uzay, $\{A_i \subseteq X \mid i \in I\}$ yarı-açık kümelerin sınıfı olsun. Bu durumda $\bigcup_{i \in I} A_i$ kümesi yarı-açıktır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay ve $\{A_i \subseteq X \mid i \in I\}$ yarı-açık kümelerin sınıfı olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $U_i \subseteq A_i \subseteq \overline{U_i}$ olacak şekilde U_i açığı vardır. Her $i \in I$ için U_i ler açık olduğu için $\bigcup_{i \in I} U_i$ açıktır. Dahası $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$ dir. $\bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \overline{\bigcup_{i \in I} U_i}$

olduğunu göstereceğiz. $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$ olsun. Bazı $i_0 \in I$ için $x \in A_{i_0}$ olur. $U_{i_0} \subseteq A_{i_0} \subseteq \overline{U_0}$ olduğu için $x \in U_{i_0}$ dir. $U_{i_0} \subseteq \overline{U_{i_0}}$ olduğundan $x \in \overline{U_{i_0}}$ olur. Bunun anlamı $x \in U_{i_0}$ veya $x \in U_{i_0}'$ dir. Her iki durumda da $x \in \overline{(\bigcup_{i \in I} U_i)}$ olur. Böylece $\bigcup_{i \in I} U_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ olur ki $\bigcup_{i \in I} A_i$ yarı-açıktır.

Teorem 3.1.11 (X, τ) topolojik uzayın da $A \subseteq X$ yarı-açık ve $G \subseteq X$ açık ise $A \cap G$ kümesi yarı-açıktır.

İspat: G açık ve A yarı-açık olsun. Yarı-açık küme tanımından $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde U açığı vardır. Her tarafı G ile kesiştirirsek $U \cap G \subseteq A \cap G \subseteq \overline{U} \cap G$ olur. Burada $U, G \in \tau$ olduğundan $U \cap G$ açıktır. Şimdi $A \cap G \subseteq \overline{U \cap G}$ olduğunu göstereceğiz. $x \in A \cap G$ olsun. $x \in A$ ve $x \in G$ dir. $U \subseteq A$ olduğundan $x \in U$ veya $x \notin U$ olmalıdır. Her iki durumu inceleyelim.

$x \in U$ olsun. $x \in G$ olduğundan $x \in U \cap G$ dir. Burada $x \in \overline{U \cap G}$ yazabiliriz. $x \notin U$ olsun $x \in A \subseteq \overline{U}$ olur ki $x \in U'$ dir. V, x noktasını içeren herhangi bir açık küme olmak üzere $x \in V \cap G$ ve $x \in U'$ olduğundan $V \cap G$ de x den farklı bir $y \in U$ vardır. Bu durumda $y \in U$ ve $y \in G$ dir. Böylece $y \in U \cap G$ dir. Bu durumda x i içeren herhangi bir V açığı için doğru olduğundan $x \in (U \cap G)'$ dir. Dolayısıyla $x \in \overline{(U \cap G)}$ dir. Dolayısıyla $U \cap G \subseteq A \cap U \subseteq \overline{U \cap G}$ dir. Yani $A \cap U$ yarı-açıktır.

Sonuç 3.1.12 (1) (X, τ) topolojik uzay ve $\{B_i | i \in I\}$ yarı-kapalı kümelerin sınıfı olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} B_i$ yarı-kapalıdır.

(2) Açık olmayan tek nokta kümelerinin içi $\emptyset$ olduğundan, tek nokta kümeleri açık olmadıkça yarı-açık olamaz.

(3) (X, τ) topolojik uzayında $\emptyset \neq A \subseteq X$ için $A^0 = \emptyset$ olsun A yarı-açık olamaz.

(4) Yarı-açık olmayan kümelerin birleşimi yarı-açık olabilir. Örneğin $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayında $A = (0, 3) \cup \{4\}$, $B = (2, 5) \cup \{1\}$ kümeleri yarı-açık olmamasına rağmen birleşimi olan $A \cup B = (0, 5)$ kümesi yarı-açıktır.

(5) (X, τ) uzayında $\emptyset \neq A \subseteq X$ yarı-kapalıdır ancak ve ancak $(\bar{A})^o \subseteq A$ dir.

(6) (X, τ) topolojik uzayında $\emptyset \neq A \subseteq X$ için yarı-açıktır ancak ve ancak $A \subseteq \overline{A^o}$ dir.

(7) (X, τ) topolojik uzayında $\emptyset \neq A \subseteq X$ için $A \cup (\bar{A})^o$ kümesi yarı-kapalıdır.

(8) (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ için $\tilde{A} = A \cup (\bar{A})^o$ dır.

3.2 Yarı-süreklilik

Bu kısımda yarı-açık ve yarı-kapalı kümelerin bazı özelliklerini yarı-süreklilik olarak tanımlanan dönüşümler altında inceleyeceğiz. Sürekli fonksiyonlar, açık kümelerin ters görüntülerinin açık olduğu dönüşümler olarak karakterize edildiğini biliyoruz. Açık kümeler yerine yarı-açık kümeler alınırsa üç farklı yarı-sürekli fonksiyon tanımını elde edilir.

Tanım 3.2.1 (Yarı-süreklilik) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu takdirde karşımıza üç farklı süreklilik tanımı çıkar. Bunlar;

(i) **(SO-1 sürekli fonksiyon)** Y de $f(x_0)$ nin her açık V komşuluğu için X de x_0 nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U yarı-açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna p noktasında SO-1 süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında SO-1 sürekli ise f ye SO-1 süreklidir denir [1,4,20,21].

(ii) **(SO-2 sürekli fonksiyon)** Y de $f(x_0)$ nin her yarı-açık V komşuluğu için X de x_0 nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U yarı- açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında SO-2 süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında SO-2 sürekli ise f ye SO-2 süreklidir denir [1,4,20,21].

(iii) **(SO-3 sürekli fonksiyon)** Y de $f(x_0)$ nin her yarı-açık V komşuluğu için X de x_0 nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında SO-3 süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında SO-3 sürekli ise f ye SO-3 süreklidir denir [1,4,20,21].

Yukarıdaki yarı-süreklilik tanımları dikkate alındığında f nin SO-3 sürekliliği f nin hem sürekli hem de SO-2 sürekliliğini gerektirdiğini görebiliriz. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x)=x$ olsun. f fonksiyonu sürekli. Ancak $p=1$ noktasında $1 \in (0,1]$ yarı-açık komşuluğu için $f^{-1}((0,1]) = (0,1] \notin \mathcal{U}$ dur. Dolayısıyla f fonksiyonu SO-3 sürekli değildir.

Teorem 3.2.2 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f sürekli ise $SO-1$ süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon, $x_0 \in X$ ve $f(x_0) \in V$ olacak şekilde $V \in \sigma$ olsun. f sürekli olduğundan $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır. U kümesi açık olduğundan yarı-açıktır. Dolayısıyla f fonksiyonu $SO-1$ süreklidir.

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. $\mathbb{R}$ deki alışılmış topoloji ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 2, & x > 0 \end{cases}$ olsun. $x=0$ noktasında f fonksiyonu $SO-1$ sürekli olmasına rağmen sürekli değildir. Benzer şekilde f nin $x=0$ noktasında $SO-2$ sürekli de değildir. Bu ise $SO-2$ sürekliliğin sürekliliği gerektirmediğini gösterir.

Örnek 3.2.3 $X = \{a, b, c\}$ ve $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri üzerindeki topolojiler sırasıyla $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ ve $\sigma = \{Y, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ ve $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(a)=1, f(b)=3, f(c)=4$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonunun sürekliliği açıktır fakat $SO-2$ sürekli değildir. X deki yarı-açık kümeler $SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ dir. $f(b) \in \{2, 3, 4\}$ ve $\{2, 3, 4\}$ yarı-açıktır. Bununla beraber X de b noktasını içeren yarı-açık kümeler X ve $\{a, b\}$ dir. Fakat $f(X) = \{1, 3, 4\} \not\subseteq \{2, 3, 4\}$ ve $f(\{a, b\}) = \{1, 3\} \not\subseteq \{2, 3, 4\}$ dir. Böylece f fonksiyonu $SO-2$ sürekli ise $SO-1$ süreklidir.

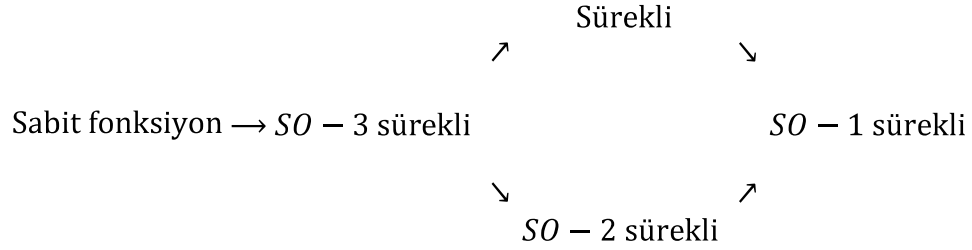
Teorem 3.2.4 (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu $SO-2$ sürekli ise $SO-1$ süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $SO-2$ sürekli, $x_0 \in X$ ve $V \in \sigma$ olmak üzere $f(x_0) \in V$ olsun. f fonksiyonu $SO-2$ sürekli ve V açık olduğundan yarı-açıktır. Dolayısıyla $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde $x_0 \in U$ yarı-açık kümesi vardır. Bu ise f nin $SO-1$ sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.5 [4] (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

- (1) Her $V \in \sigma$ için $f^{-1}(V) \in SO(X, \tau)$ ise f fonksiyonu $SO-1$ süreklidir,
- (2) Her $V \in SO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(V) \in SO(X, \tau)$ ise f fonksiyonu $SO-2$ süreklidir,
- (3) Her $V \in SO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ ise f fonksiyonu $SO-3$ süreklidir.

Yukarıda teoremin sonucu olarak aşağıdaki şekilde sabit, sürekli, $SO-1$, $SO-2$, $SO-3$ sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi şu şekilde belirtebiliriz:



Şekil 3.1 $i=1,2,3$ için $SO-i$ sürekli, sürekli ve sabit fonksiyonlar arasındaki ilişki.

Yukarıda belirtilen gerektirmelerin tersleri genelde doğru değildir. $SO-1$ sürekli ise sürekli veya $SO-2$ sürekli olması gerekmez. Sürekli bir fonksiyonun veya $SO-2$ sürekli bir fonksiyonun da $SO-3$ de sürekli olması gerekmez.

3.3 Yarı-Ayırma Aksiyomları ($semi-T_0$, $semi-T_{1/2}$, $semi-T_1$, $semi-T_2$)

Bu kısımda yarı-açıklık kavramı ile elde edilen ve bilinen ayırma aksiyomlarının bir modifiyesi tarzında fakat daha zayıf özellikleri olan yarı-ayırma aksiyomları verilmiş ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 3.3.1 ($Semi-T_0$ uzayı) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. x ve y noktalarından birini içerip diğerini içermeyen bir $A \subseteq X$ yarı-açık kümesi varsa bu (X, τ) ya $semi-T_0$ uzayı denir [5].

1991 yılında Sunduram vd. yarı- $T_{1/2}$ uzayları aşağıdaki tanımda belirtildiği gibi sg -kapalı kümeleri kullanarak karakterize ettiler. 1994 yılında M. Caldas [22] ise yarı- $T_{1/2}$ uzayın karakterizasyonunu, kalıtsallığını, topolojik özelliği verdi. Çalışmanın bu kısmında yarı- $T_{1/2}$ uzayları $semi-T_{1/2}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 3.3.2 (Sg -kapalı küme) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. $\tilde{A} \subseteq U$ olacak şekilde $A \subseteq U$ ve U yarı-açık kümesi varsa, A kümesine yarı-genelleştirilmiş kapalı küme (semi-generalized closed set) denir ve sg -kapalı şeklinde gösterilir [10].

Örnek 3.3.3 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi için

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı	Kapalı kümelerin içi
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$	$X^o = X$
$\{a\}$	$\{b, c\}$	$\overline{\{a\}} = X$	$\{b, c\}^o = \emptyset$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$	$\emptyset^o = \emptyset$

Tüm yarı-açık kümelerin sınıfı $SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ ve tüm yarı-kapalıların sınıfı ise $SCI(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}\}$ şeklindedir.

Şimdi ise X kümesinin alt kümelerinin tamamının yarı-kapanışlarını bulalım.

$$\widetilde{\emptyset} = \emptyset, \widetilde{\{a\}} = X, \widetilde{\{b\}} = \{b\}, \widetilde{\{c\}} = \{c\}, \widetilde{\{b, c\}} = \{b, c\}, \widetilde{X} = X, \widetilde{\{a, c\}} = X, \widetilde{\{c\}} = \{c\}, \widetilde{\{a, b\}} = X$$

A	$\widetilde{A}$	$A \subseteq U, U \in SO(X, \tau)$ olacak şekilde $\widetilde{A} \subseteq U$ kümeleri	Sg-kapalı küme	Yarı-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X$	✓	✓
$\{a\}$	X	$\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X$	✗	✗
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a, b\}, X$	✓	✓
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a, c\}, X$	✓	✓
$\{a, b\}$	X	$\{a, b\}, X$	✗	✗
$\{a, c\}$	X	$\{a, c\}, X$	✗	✗
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	X	✓	✓
X	X	X	✓	✓

Tanım 3.3.4 (Semi- $T_{1/2}$ uzayı) (X, τ) topolojik uzayında her sg-kapalı küme yarı-kapalı ise (X, τ) ya *semi- $T_{1/2}$ uzayı* denir [22].

Örnek 3.3.5 Örnek 3.3.3 de $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi için her sg-kapalı küme aynı zamanda yarı-kapalı olduğu için uzay *semi- $T_{1/2}$* dir.

Örnek 3.3.6 $X = \{a, b, c\}$, kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$ topolojisi için

Açık	Kapalı	Açık kümelerin kapanışı	Kapalı kümelerin içi
$\emptyset$	X	$\emptyset$	X
X	$\emptyset$	X	$\emptyset$
$\{a, b\}$	$\{c\}$	X	$\emptyset$

$SO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a, b\}\}$ ve $SCI(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{c\}\}$ şeklinde olur.

A	$\tilde{A}$	$A \subseteq U, U \in SO(X, \tau)$ olacak şekilde $\tilde{A} \subseteq U$ kümeleri	Sg-kapalı küme	Yarı-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$X, \emptyset, \{a, b\}$	✓	✓
X	X	X	✓	✓
$\{a\}$	X	$X, \{a, b\}$	✗	✗
$\{b\}$	X	$X, \{a, b\}$	✗	✗
$\{c\}$	X	X	✓	✓
$\{a, b\}$	X	$X, \{a, b\}$	✗	✗
$\{a, c\}$	X	X	✓	✗
$\{b, c\}$	X	X	✓	✗

Bu örnekte görüldüğü gibi $\{a, c\}$ sg-kapalı olmasına rağmen yarı-kapalı olmadığından dolayı (X, τ) uzayı $semi-T_{1/2}$ değildir.

Tanım 3.3.7 (Semi- T_1 uzayı) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in U, y \notin U$ ve $y \in V, x \notin V$ olacak şekilde $U, V \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa (X, τ) ya $semi-T_1$ uzayı denir [5].

Tanım 3.3.8 (Semi- T_2 uzayı) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U, V \subseteq X$ yarı-açık kümeleri varsa (X, τ) ya $semi-T_2$ uzayı denir [5].

Teorem 3.3.9 (X, τ) topolojik uzayı $semi-T_0$ dır ancak ve ancak farklı her $x, y \in X$ için $\widetilde{\{x\}} \neq \widetilde{\{y\}}$ dir.

İspat: (X, τ) uzayı $semi-T_0$ ve $x, y \in X, x \neq y$ olsun. Dolayısıyla $x \in U, y \notin U$ olacak şekilde en az bir $U \subseteq X$ yarı-açık küme vardır. Bu durumda $y \in U^c$ dir ve U yarı-açık olduğunda U^c yarı-kapalıdır ve buradan $x \notin \widetilde{\{y\}}$ dir. $x \in \widetilde{\{x\}}$ olduğunda $\widetilde{\{x\}} \neq \widetilde{\{y\}}$ dir.

Tersine olarak kabul edelim ki $\widetilde{\{x\}} = \widetilde{\{y\}}$ olacak şekilde x ve y noktaları için $x \in \widetilde{\{x\}} = \widetilde{\{y\}}$ olduğundan x i içeren her U yarı-açık küme için $U \cap \widetilde{\{x\}} \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla U aynı zamanda y yi de içerir. Bu ise uzayın $semi-T_0$ olmadığını gösterir. Böylece farklı $x, y \in X$ nokta çifti için $\widetilde{\{x\}} \neq \widetilde{\{y\}}$ ise (X, τ) , uzayı $semi-T_0$ uzayı olur.

Sonuç 3.3.10 Her tek nokta kümesi yarı-kapalı veya buna denk olarak sonlu alt kümesi yarı-kapalı olan topolojik uzay $semi-T_0$ dir.

Tanım 3.3.11 (X, τ) topolojik uzay $E \subset X$ olsun.

$$sD(X, \tau) = \{ A \subset X \mid A, (X, \tau) \text{ da } sg - \text{kapalı küme} \},$$

$$sCl^*(E) = \{ A \mid E \subset A \text{ ve } A \in sD(X, \tau) \},$$

$$SO(X, \tau)^* = \{ B \mid sCl^*\{B^c\} = B^c \} \text{ şeklinde tanımlansın [5,23].}$$

Bu durumda $semi-T_{1/2}$ uzayını aşağıdaki şekilde karakterize edilebilir.

Teorem 3.3.12 (X, τ) $semi-T_{1/2}$ dir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ yarı-açık veya yarı-kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki bazı $x \in X$ için $\{x\}$ yarı-kapalı olmasın. X kümesi $\{x\}^c$ içeren yarı-açık küme olduğundan $\{x\}^c$ sg -kapalıdır ve böylece (X, τ) nun $semi-T_{1/2}$ olmasından $\{x\}^c$ kümesi yarı-kapalıdır. Dolayısıyla $\{x\}$ yarı-açıktır. Benzer şekilde (X, τ) da bazı $x \in X$ için $\{x\}$ yarı-açık olmasaydı yarı-kapalı olurdu.

Tersine olarak her $x \in X$ için $\{x\}$ yarı-açık veya yarı-kapalı olduğunu kabul edelim. Uzayın $T_{1/2}$ olduğunu göstermek için $SO(X, \tau) = SO(X, \tau)^*$ olduğunu göstermeliyiz. Her zaman için $SO(X, \tau) \subseteq SO(X, \tau)^*$ olduğu biliniyor. $SO(X, \tau)^* \subseteq SO(X, \tau)$ olduğunu gösterelim. $E \in SO(X, \tau)^*$ ve $E \notin SO(X, \tau)$ olsun. Dolayısıyla $sCl^*(E^c) = E^c$ ve $sCl(E^c) \neq E^c$ olur. Dolayısıyla $x \in sCl(E^c)$ ve $x \notin E^c (= sCl^*(E^c))$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır. $x \notin sCl^*(E^c)$ olduğundan $x \notin A$ ve $A \supset E^c$ olacak

şekilde bir sg -kapalı A kümesi vardır. Kabulden $\{x\}$ yarı-açık ve yarı-kapalı olduğundan, her iki durumu da ayrı ayrı inceleyelim.

1. Durum: $\{x\}$ yarı-açık olsun. $\{x\}^c$ yarı-kapalı olur. $E^c \subset \{x\}^c$ dir ki $sCl(E^c) \subset \{x\}^c$ yani $x \notin sCl(E^c)$ dir. Bu ise $x \in sCl(E^c)$ olması ile çelişir. Dolayısıyla $E \in SO(X, \tau)$ dur.

2. Durum: $\{x\}^c$ yarı-açık küme olsun. Burada $A \supset E^c$ ve A sg -kapalıdır. Burada $\{x\}^c \supset sCl(A) \supset sCl(E^c)$ olur. Dolayısıyla $x \notin sCl(E^c)$ dir. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $E \in SO(X, \tau)$ olmalıdır.

Böylece her iki durumda da $E \in SO(X, \tau)$ olur ki bu ise $SO(X, \tau) = SO(X, \tau)^*$ olduğunu ispatlar.

1994 yılında M. Caldas [22] yukarıdaki verilen teoremin farklı bir ispatını vermiştir.

Örnek 3.3.13 $X = \{a, b, c, d\}$ üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi için Teorem 3.3.12 gereği her tek nokta kümesi ya yarı-açık ya da yarı-kapalı olduğu için (X, τ) uzayı $semi-T_{1/2}$ dir.

Teorem 3.3.14 (X, τ) uzayı $semi-T_{1/2}$ dir ancak ve ancak X in her tek nokta kümesi yarı-açık ya da hiçbir yerde yoğun değildir.

İspat: Kabul edelim ki $x \in X$ için $\{x\}$ yarı-kapalı olmasın. Bu takdirde $\{x\}^c$ kümesi sg -kapalı olsun. (X, τ) nun $semi-T_{1/2}$ olmasından dolayı $\{x\}^c$ yarı-kapalı veya buna denk olarak $\{x\}$ yarı-açıktır. Her yarı-açık tek nokta kümesi açık olduğundan $\{x\}$ kümesi açıktır. $\{x\}$ kümesi yarı-kapalı ise $(\overline{\{x\}})^\circ = \{x\}^\circ = \emptyset$ olur. Böylece $\{x\}$ ya açıktır ya da hiçbir yerde yoğun bir kümedir.

Tersine olarak her $x \in X$ için $\{x\}$ ya açık ya da hiçbir yerde yoğun olmayan bir küme olsun. Böylece $\{x\}$ yarı-açık veya yarı-kapalıdır bu ise Teorem 3.3.12 den dolayı (X, τ) uzayı $semi-T_{1/2}$ dir.

Teorem 3.3.15 (X, τ) uzayı $semi-T_1$ uzayıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ yarı-kapalıdır.

İspat: (X, τ) uzayı $semi-T_1$ ve $x \in X$ olsun. $\{x\}$ in yarı-kapalı olduğunu göstermek için $\{x\}^c$ nin yarı-açık olduğunu göstereceğiz.

Kabul edelim ki $x \neq y$ ve $x, y \in X$ için $y \in \{x\}^c$ olsun. X uzayı $semi-T_1$ olduğundan $x \notin U$, $y \in U$ ve $x \in V$, $y \notin V$ olacak şekilde x ve y nin yarı-açık komşulukları vardır. $y \in U \subseteq \{x\}^c$ dir. Böylece $\{x\}^c$ yarı-açık, yani $\{x\}$ yarı-kapalıdır.

Tersine olarak $\{x\}$ tek nokta kümesi yarı-kapalı ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun. Kabulden $\{x\}$, $\{y\}$ yarı-kapalı kümelerdir. $\{x\}^c$ yarı-açıktır. $x \notin \{x\}^c$ ve $y \in \{x\}^c$ dir. Benzer şekilde $\{y\}^c$ yarı-açıktır. $y \notin \{y\}^c$ ve $x \in \{y\}^c$ dir. Böylece (X, τ) , $semi-T_1$ uzayıdır.

Örnek 3.3.16 $X = \{a, b, c, d\}$ kümesi için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi için $SO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$ ve $SCI(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}\}$ olur.

Burada $\{a\}$ kümesi yarı-kapalı olmadığından Teorem 3.3.15 den dolayı (X, τ) $semi-T_1$ uzayı değildir.

Teorem (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı $semi-T_{1/2}$ ise $semi-T_0$ dir,
- (2) (X, τ) uzayı $semi-T_1$ ise $semi-T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı $semi-T_2$ ise $semi-T_1$ dir.

Dolayısıyla

$$semi-T_2 \Rightarrow semi-T_1 \Rightarrow semi-T_{1/2} \Rightarrow semi-T_0$$

dır.

1994 yılında M. Caldas, “Espacios $Semi-T_{1/2}$ ” isimli çalışmasında, $semi-T_0$, $semi-T_{1/2}$ $semi-T_1$ uzayların hepsinin denk olduğu yarı-simetrik uzay adı verilen yeni bir kavramı tanımladı ve verilen teoremin farklı bir ispatını verdi.

Tanım 3.3.18 (Yarı-simetrik uzay) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$, $x \neq y$ olsun $x \in \widetilde{\{y\}}$ olduğunda $y \in \widetilde{\{x\}}$ ise (X, τ) ye yarı-simetrik uzay denir [11].

Teorem 3.3.19 (X, τ) *semi*-simetrik topolojik uzay olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir:

- (1) (X, τ) *semi*- T_0 dir,
- (2) (X, τ) *semi*- $T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) *semi*- T_1 dir.

İspat: $(1) \Leftrightarrow (3)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $x \neq y$ olsun. (X, τ) *semi*- T_0 olduğundan bazı *semi*-açık U lar için $x \in U \subset \{y\}^c$ dir. Bu durumda $x \notin \widetilde{\{y\}}$ olur ve böylece $y \notin \widetilde{\{x\}}$. Dolayısıyla $y \in V \subset \{x\}^c$ olacak şekilde $V \in SO(X, \tau)$ vardır ve bu ise (X, τ) nun *semi*- T_1 olduğunu gösterir.

Yukarıdaki teoremin yardımıyla aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.3.20 (X, τ) *semi*- $T_{1/2}$ dir ancak ve ancak her $B \subseteq X$ için B yı içeren tüm yarı-açık ve yarı-kapalı kümelerin kesişimi B dir.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) *semi*- $T_{1/2}$ ve $B \subset X$ olsun. $B = \bigcap \{\{x\}^c \mid x \notin B\}$ kümesi yarı-açık ve yarı-kapalı kümelerin kesişimidir.

Tersine olarak her $x \in X$ için $\{x\}^c$ kümesi tüm yarı-açık ve yarı-kapalı kümelerin kesişimidir. Böylece $\{x\}^c$ ya yarı-açık ya da yarı-kapalıdır. Dolayısıyla (X, τ) uzayı *semi*- $T_{1/2}$ dir.

Ayrırma aksiyomları ile yarı ayırma aksiyomları arasında aşağıdaki şekilde ifade edilebilecek geçişler vardır. Fakat bu teoremlerin tersleri genelde doğru değildir.

Teorem 3.3.21 (X, τ) topolojik uzay olsun.

- (1) (X, τ) uzayı T_0 ise *semi*- T_0 dir,
- (2) (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ise *semi*- $T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı T_1 ise *semi*- T_1 dir,
- (4) (X, τ) uzayı T_2 ise *semi*- T_2 dir.

İspat: Her açık küme yarı-açık olduğundan dolayı ispatları aşıkârdır. Fakat tersleri genelde doğru değildir. Şimdi terslerinin doğru olmadığına örnekler verelim:

$X = \{a, b, c\}, \tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olsun. (X, τ) *semi- T_0* dır. Çünkü X deki yarı-açık kümeler $SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olmak üzere X deki farklı nokta çiftlerinden birini içerip diğerini içermeyen yarı-açıklar vardır. Fakat (X, τ) uzayı T_0 değildir. Çünkü $b, c \in X$ noktalardan birini içerip diğerini içermeyen açık yoktur. Dolayısıyla *semi- T_0* $\neq T_0$ dir.

$X = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$

Bu durumda $SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}\}$ dir. (X, τ) *semi- $T_{1/2}$* dir. Fakat $T_{1/2}$ değildir. Dolayısıyla *semi- $T_{1/2}$* $\neq T_{1/2}$ dir.

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ olsun. (X, τ) uzayı *semi- T_1* dir. Fakat T_1 değildir. Dolayısıyla *semi- T_1* $\neq T_1$ dir.

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{\emptyset, X\}$ olsun. (X, τ) *semi- T_2* dır fakat T_2 değildir.

$$\begin{array}{ccc}
 T_2 & \rightarrow & \text{semi-}T_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_1 & \rightarrow & \text{semi-}T_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_{1/2} & \rightarrow & \text{semi-}T_{1/2} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_0 & \rightarrow & \text{semi-}T_0
 \end{array}$$

Şekil 3.2 $T_{i=0,1/2,1,2}$ ve *semi- $T_{i=0,1/2,1,2}$* ayırma aksiyomları arasındaki ilişki.

Teorem 3.3.23 (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ açık olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı *semi- T_0* ise (A, τ_A) *semi- T_0* dır,
- (2) (X, τ) uzayı *semi- $T_{1/2}$* ise (A, τ_A) *semi- $T_{1/2}$* dir,
- (3) (X, τ) uzayı *semi- T_1* ise (A, τ_A) *semi- T_1* dir,
- (4) (X, τ) uzayı *semi- T_2* ise (A, τ_A) *semi- T_2* dir.

İspat: (1) (X, τ) uzayı $semi-T_0$ ve $A \subseteq X$ açık olsun. (A, τ_A) alt uzayının da $semi-T_0$ olduğunu göstermek için $x \neq y, x, y \in A$ noktalarını alalım X uzayı $semi-T_0$ olduğundan $y \notin U_x$ olacak şekilde x in en az bir U_x yarı-açık komşuluğu veya $x \notin U_y$ olacak şekilde y nin en az bir U_y yarı-açık komşuluğu vardır.

Kabul edelim ki $y \notin U_x$ olacak şekilde x in en az bir U_x yarı-açık komşuluğu bulunsun. Teorem 3.1.12 den $H = A \cap U_x$ kümesi A da x in yarı-açık komşuluğu olup $y \notin H$ dir. Dolayısıyla (A, τ_A) alt uzayı $semi-T_0$ dır.

(2) $x \in A$ olsun. $\{x\}$ kümesi X de açık ise A da açıktır. $\{x\}$ kümesi X de hiçbir yerde yoğun değilse A da hiçbir yerde yoğun değildir. Böylece X in A alt kümesi alt topolojiye göre $semi-T_{1/2}$ dir. Dikkat edelim ki genellikle $semi-T_{1/2}$ uzayının kapalı alt kümesi $semi-T_{1/2}$ değildir.

Örneğin reel sayılar üzerindeki $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}, (a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ olsun. $(\mathbb{R}, \tau)$ $semi-T_{1/2}$ dir. $A = (-\infty, 1]$ kapalı alt kümesi $semi-T_{1/2}$ değildir. Çünkü $\{1\}$ tek nokta kümesi ne yarı-açık ne de yarı-kapalıdır.

(3) (X, τ) uzayı $semi-T_1$ ve $A \subseteq X$ açık olsun. (A, τ_A) alt uzayının da $semi-T_1$ olduğunu gösterelim. X uzayı $semi-T_1$ olduğundan $X \setminus \{x\}$ yarı-açıktır. Teorem 3.1.12 den $A \cap (X \setminus \{x\}) = A \setminus \{x\}$ olur ki buradan $A \setminus \{x\}$ nin A da yarı-açık olduğunu gösterir. Dolayısıyla Teorem 3.3.15 den (A, τ_A) $semi-T_1$ dir.

(4) $x, y \in A, x \neq y$ olsun. (X, τ) uzayı $semi-T_2$ olduğundan $x, y \in X, x \neq y, \exists U_x \ni x$ ve $\exists U_y \ni y$ vardır öyle ki $U_x \cap U_y = \emptyset$. $x \in A$ ve $x \in U_x$ olduğundan $x \in A \cap U_x = H$, H yarı-açıktır. $y \in A$ ve $y \in U_y$ olduğundan $y \in A \cap U_y = G$, G yarı-açıktır.

$$H \cap G = (A \cap U_x) \cap (A \cap U_y)$$

$$= A \cap (U_x \cap U_y)$$

$$= A \cap \emptyset$$

$$= \emptyset$$

olduğundan (A, τ_A) $semi-T_2$ dir.

Teorem 3.3.24 $i=0,1/2,1,2$ için (X, τ) uzayların $semi-T_i$ uzayı olma özelliği topolojik özelliktir.

İspat: $i=0$ için, (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzayları için, $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ homeomorfizm olsun. (X, τ) $semi-T_0$ uzayı ve $a, b \in Y$ olsun. f nin örten olmasından $f(x)=a$ ve $f(y)=b$ olacak şekilde farklı $x, y \in X$ vardır. f nin birebir olmasından $a \neq b$ dir. X , $semi-T_0$ uzayı olduğundan $x \in A$, $y \notin A$ olsun. Dolayısıyla $f(x) = a \in f(A)$ ve $f(y)=b \notin f(A)$ olur.

$f(A)$ kümesinin yarı-açık olduğunu gösterelim. A , X de yarı-açık olduğundan $U \subseteq A \subseteq \overline{U}$ olacak şekilde $U \subseteq X$ açık kümesi vardır. Dolayısıyla, $f(U) \subseteq f(A) \subseteq f(\overline{U})$ dir. f sürekli olduğundan $f(\overline{U}) \subseteq \overline{f(U)}$ dir. f^{-1} fonksiyonu sürekli ve U kümesi X de açık olduğundan $f(U)$ kümesi de Y de açık olur. Böylece, $f(U)$ açık olmak üzere $f(U) \subseteq f(A) \subseteq \overline{f(U)}$ dir. Dolayısıyla $f(A)$ kümesi a noktasını içeren y noktasını içermeyen Y de bir yarı-açık cümle olmuş olur. Sonuç olarak $semi-T_0$ uzayı topolojik bir özelliktir.

$i=1/2$ için (X, τ) , (Y, σ) iki topolojik uzay ve $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ homeomorfizm olsun. Kabul edelim ki $B \subseteq Y$ g -kapalı bir küme olsun. Bu durumda $f^{-1}(B) \subseteq X$ g -kapalı ve böylece kapalıdır. Buradan $B = f(f^{-1}(B))$ kümesi kapalıdır. Sonuç olarak (Y, σ) uzayı $T_{1/2}$ uzayıdır. $i=1$ ve $i=2$ için ispatlar benzer şekilde yapılır.

Şimdi ise yarı-açıklık ile tanımlanan $semi-D$ kümeler yardımıyla tanımlanan ve başka bir zayıf ayırma aksiyomu olan $i=0,1,2$ için $semi-D_i$ ler üzerinde durulacaktır.

3.4 Yarı-D Ayırma Aksiyomları ($semi-D_0$, $semi-D_1$, $semi-D_2$)

Tanım 3.4.1 (Semi-D küme) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. $U \neq X$ ve $A = U \setminus V$ olacak şekilde U ve V yarı-açık alt kümeleri varsa A ya yarı-ayrı küme (semi-Difference set) denir. Kısaca $semi-D$ şeklinde gösterilir [11].

X den farklı yarı-açık bir U kümesi için $U = U \setminus \emptyset$ olduğundan $semi-D$ dir.

Bilinen $semi-T_i$ ($i=0,1,2$) uzaylarının tanımında kullanılan yarı-açık yerine $semi-D$ kümesi alınırsa $semi-D_i$ ($i=0,1,2$) ayırma aksiyomlarını elde ederiz.

Tanım 3.4.2 (Semi- D_0 ve semi- D_1 uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı $x, y \in X$ noktaları için en az birinin diğerini içermeyen *semi- D* komşuluğu, yani $y \notin U$ olacak şekilde x in bir *U semi- D* komşuluğu veya (ve) $x \notin V$ olacak şekilde y nin bir *V semi- D* komşuluğu varsa (X, τ) uzayına *semi- D_0* (*semi- D_1*) uzayı denir [11].

Tanım 3.4.3 (Semi- D_2 uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı $x, y \in X$ noktaları için ayrık *semi- D* komşulukları $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V *semi- D* komşulukları varsa (X, τ) ya *semi- D_2* uzayı denir [11].

Örnek 3.4.4 $X = \{a, b\}$ üzerindeki topoloji, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ olsun. (X, τ) uzayı T_0 olduğundan *semi- T_0* dır.

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$
$\{a\}$	$\{b\}$	$\overline{\{a\}} = X$

Bu durumda yarı-açık kümelerin $SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ şeklindedir.

$a \neq b$ için a noktasını içerip b yi içermeyen $\{a\}$ açık kümesi (yarı-açık) olduğundan dolayı (X, τ) uzayı T_0 (*semi- T_0*) dır. *semi- D* kümeler $\emptyset, \{a\}$ dır.

Benzer şekilde aynı topolojik uzay *semi- D_0* dır. Çünkü $\{a\} = \{a\} \setminus \emptyset$ olduğundan $\{a\}$ kümesi *semi- D* kümedir ve bu küme $a \neq b$ için a yı içerir b noktasını içermez. Fakat bu uzay *semi- D_1* değildir. Çünkü b noktasını içerip a yı içermeyen bir *semi- D* kümesi yoktur. Hatta bu uzay *semi- D_2* de değildir.

Teorem 3.4.5 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı *semi- T_0* ise *semi- D_0* dır,
- (2) (X, τ) uzayı *semi- T_1* ise *semi- D_1* dir,
- (3) (X, τ) uzayı *semi- T_2* ise *semi- D_2* dir.

İspat: Her yarı-açık küme aynı zamanda *semi- D* olduğundan ispat aşikârdır.

Teorem 3.4.6 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

(1) (X, τ) *semi- D_1* ise *semi- D_0* dır.

(2) (X, τ) *semi- D_2* ise *semi- D_1* dır.

İspat: *Semi- D_1* ayırma aksiyomlarının tanımından aşikârdır.

Örnek 3.4.7 $X = \{a, b, c, d\}$ için $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, d\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisini inceleyelim.

Açık kümeler	Kapalı kümeler	Açık kümelerin kapanışı
$\emptyset$	X	$\overline{\emptyset} = \emptyset$
X	$\emptyset$	$\overline{X} = X$
$\{a\}$	$\{b, c, d\}$	$\overline{\{a\}} = X$
$\{a, d\}$	$\{b, c\}$	$\overline{\{a, d\}} = X$
$\{a, b, d\}$	$\{c\}$	$\overline{\{a, b, d\}} = X$
$\{a, c, d\}$	$\{b\}$	$\overline{\{a, c, d\}} = X$

Bu durumda yarı-açık kümelerin sınıfı şu şekildedir:

$$SO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}$$

$$\{a\} = \{a\} \setminus \emptyset$$

$$\{b\} = \{a, b, d\} \setminus \{a, d\}$$

$$\{c\} = \{a, c, d\} \setminus \{a, d\}$$

$$\{d\} = \{a, d\} \setminus \{a\}$$

Böylece $a \neq b$ için $a \in U = \{a\}$, $b \notin U$ ve $b \in \{b\} = V$, $a \notin V$ olacak şekilde U ve V *semi- D* kümeleri vardır.

Benzer şekilde $a \neq c$, $a \neq d$, $b \neq c$, $b \neq d$, $c \neq d$ içinde aynı şekilde yapılır. Dolayısıyla (X, τ) uzayı *semi- D_1* dir.

Bu uzay $semi-T_1$ değildir. Çünkü $a \neq b$ için b noktasını içerip a noktasını içermeyen yarı-açık bir küme yoktur.

Teorem 3.4.8 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) $semi-D_0$ dır ancak ve ancak (X, τ) $semi-T_0$ dır.
- (2) (X, τ) $semi-D_1$ dır ancak ve ancak (X, τ) $semi-D_2$ dır.

İspat: (1) (X, τ) $semi-D_0$ ve $x, y \in X, x \neq y$ noktaları için $x \in U, y \notin U$ olacak şekilde $semi-D$ kümesi bulunsun. Ayrıca $G = G \setminus H, G \neq H$ olmak üzere $G, H \in SO(X, \tau)$ olsun. Bu takdirde $x \in G$ ve $y \notin U$ için karşımıza iki durum çıkar.

- (i) $y \notin G$
- (ii) $y \in G$ ve $y \in H$

Birinci durumda $x \in G, y \notin G$ olur.

İkinci durumda $y \in H, x \notin H$ olur.

Her iki durumda da (X, τ) uzayının $semi-T_0$ olduğu görülür.

Tersine olarak kabul edelim ki (X, τ) $semi-T_0$ olsun. Teorem 3.4.5 den her $semi-T_0$ uzayı $semi-D_0$ olduğundan gereklilik kısmı açıktır.

(2) (X, τ) uzayı $semi-D_1$ olsun. Bu takdirde $x, y \in X, x \neq y$ noktaları için $x \in U, y \notin U$ ve $x \notin V, y \in V$ olacak şekilde U ve V $semi-D$ kümeleri mevcuttur.

$$U = G_1 \setminus H_1, V = G_2 \setminus H_2$$

$x \notin V = G_2 \setminus H_2$ olduğundan $x \notin G_2$ veya $x \in G_2$ ile $x \in H_2$ dir. Bu durumları ayrı ayrı inceleyecek olursak,

(i) $x \notin G_2$ olsun $y \notin U$ olduğunda iki durum halinde inceleyelim:

(a) $x \notin G_1$ için $x \in G_1 \setminus H_1$ den $x \in G_1 \setminus (H_1 \cup G_2)$ dır. $y \in G_2 \setminus H_2$ den $y \in G_2 \setminus (H_2 \cup G_1)$ yapabiliriz. Dolayısıyla $(G_1 \setminus (H_1 \cup G_2)) \cap (G_2 \setminus (H_2 \cup G_1)) = \emptyset$

(b) $y \in G_1$ ve $y \in H_1$ için, $y \in G_2 \setminus H_2$, $x \in H_2$ olduğunu biliyoruz. $(G_1 \setminus H_1) \cap H_1 = \emptyset$ yazabiliriz. Dolayısıyla (a) ve (b) durumlarının her ikisinde de x, y farklı nokta çiftlerinin ayrık *semi-D* komşulukları vardır. Böylece (X, τ) uzayı *semi-D₂* dir.

(ii) $x \in G_2$ ile $x \in H_2$ olsun. $y \in G_2 \setminus H_2$, $x \in H_2$ olduğundan ve $(G_2 \setminus H_2) \cap H_2 = \emptyset$ olduğundan (X, τ) uzayı bu durumda da *semi-D₂* olduğu gösterilmiş olur. Tersine olarak (X, τ) uzayı *semi-D₂* olsun. Teorem 3.4.6 (2) den dolayı *semi-D₁* dir.

Tanım 3.4.9 (Yarı-komşuluk) (X, τ) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in V \subset U$ olacak şekilde $V \in SO(X, \tau)$ varsa U ya x in yarı-komşuluğu denir. Özel olarak U yarı-açık ise U ya yarı-açık komşuluk denir [11].

X topolojik uzayında $x \in X$ in X den başka yarı-komşuluğu yoksa x noktasına tüm yarı-kapalı kümelerde ortak nokta olarak adlandırılır. Kısaca *s.c.c* (common to all semi-closed sets points) nokta olarak gösterilir. Burada bu ismin verilmiş olma sebebi x in X deki her bir semi-kapalı kümeye ait olmasından dolayıdır.

Teorem 3.4.10 (X, τ) *semi-T₀* uzayı *semi-D₁* değildir ancak ve ancak X de hiçbir nokta *s.c.c* değildir.

İspat: (X, τ) *semi-D₁* ise her $x \in X$ için $x \in U_1 \setminus U_2$ olacak şekilde $U_1 \neq X$ olmak üzere U_1 ve U_2 yarı-açık alt kümeleri vardır. Böylece $x \in U_1$ olur. $U_1 \neq X$ olduğundan x noktasının X den farklı yarı-açık komşuluğu vardır.

Tersine olarak (X, τ) *semi-T₀* uzayı olsun. Bu takdirde $x, y \in X$, $x \neq y$ olmak üzere $x \in U$, $y \notin U$ veya $y \in V$, $x \notin V$ olacak şekilde yarı-açık U ve V komşulukları vardır. Kabul edelim ki $x \in U$, $y \notin U$ olacak şekilde V komşuluğu mevcut olsun. Böylece $U \neq X$ için U kümesi *semi-D* dir. (X, τ) uzayında her noktanın X den farklı bir yarı-açık komşuluğu olmadığından y , bu özelliğe sahip bir nokta olur. Böylece $V \neq X$ olacak şekilde $y \in V$ yarı-açık komşuluğu vardır. $y \in V \setminus U$, $x \notin V \setminus U$ olur ve $V \setminus U$ bir *semi-D* kümedir. Dolayısıyla (X, τ) uzayı *semi-D₁* olur.

Teorem 3.4.5, Teorem 3.4.6, Teorem 3.4.8 ve Teorem 3.4.10 den aşağıdaki diyagramı çizebiliriz.

$$\begin{array}{ccccc}
 T_2 & \longrightarrow & semi-T_2 & \longrightarrow & semi-D_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \updownarrow \\
 T_1 & \longrightarrow & semi-T_1 & \longrightarrow & semi-D_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 T_0 & \longrightarrow & semi-T_0 & \longleftrightarrow & semi-D_0
 \end{array}$$

Şekil 3.3 $T_{i=0,1,2}$, $semi-T_{i=0,1,2}$ ve $semi-D_{i=0,1,2}$ arasındaki ilişki.



4. PRE TOPOLOJİK KAVRAMLAR VE PRE AYIRMA AKSİYOMLARI

Pre-açık küme kavramı 1982 yılında A.S. Mashhour tarafından ortaya atıldı [12]. 1990 yılında A. Kar ve P. Bhattacharyya [13] pre-açık kümeyi $pre-T_0$, $pre-T_1$, $pre-T_2$ olarak isimlendirdikleri yeni zayıf ayırma aksiyomlarını tanımlamak için kullandılar. Dahası onlar bilinen ayırma aksiyomları ile pre-ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiyi kurdular. 1996 yılında H. Maki, J. Umehara ve T. Noiri [14] pre-açık küme yardımıyla pre-genelleştirilmiş kümeyi tanımladılar. Böylece $pre-T_{1/2}$ ayırma aksiyomu ortaya çıktı.

Bu kısımda pre-açık küme yardımıyla $pre-T_0$, $pre-T_{1/2}$, $pre-T_1$, $pre-T_2$ gibi zayıf ayırma aksiyomları tanımlanmıştır. Bilinen ayırma aksiyomları ve pre-ayırma aksiyomları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Pre-simetrik kavramını kullanarak denklikler gösterilmiştir.

4.1 Pre-Açık ve Pre-Kapalı Kümeler

Tanım 4.1.1 (Pre-açık küme) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subset (\bar{A})^\circ$ ise A ya pre-açık küme denir ve (X, τ) uzayındaki tüm pre-açık kümelerin sınıfı $PO(X, \tau)$ şeklinde gösterilir [12].

Tanım 4.1.2 (Bir kümenin pre-içi) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A nın kapsadığı tüm pre-açık kümelerin birleşimine A nın pre-içi denir ve A^p şeklinde gösterilir [12].

Tanım 4.1.3 (Pre-kapalı küme) (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. A^c kümesi pre-açık veya buna denk olarak $\overline{(A^\circ)} \subset A$ ise A kümesine pre-kapalı küme denir [12].

açık küme (kapalı küme)

↗ ↘

yarı – açık küme
(yarı – kapalı küme)

pre – açık küme
(pre – kapalı küme)

Şekil 4.1 Açık/kapalı, yarı-açık/yarı-kapalı ve pre-açık/pre-kapalı küme arasındaki ilişki.

Tanım 4.1.4 (Bir kümenin pre-kapanışı) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. A yı kapsayan tüm pre-kapalı kümelerin kesişimine A nın pre-kapanışı denir ve $\hat{A}$ şeklinde gösterilir [12].

Örnek 4.1.5 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki topoloji $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$ olsun.

$P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ kuvvet kümesi,

$K = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{c\}\}$ kapalı kümelerin sınıfı,

olmak üzere (X, τ) daki pre-açık kümeleri şu şekilde karakterize edebiliriz,

A	$\bar{A}$	$(\bar{A})^\circ$	$A \subset (\bar{A})^\circ$	Pre-açık küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a\}$	X	X	✓	✓
$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\emptyset$	✗	✗
$\{c\}$	$\{c\}$	$\emptyset$	✗	✗
$\{a, b\}$	X	X	✓	✓
$\{a, c\}$	X	X	✓	✓
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\emptyset$	✗	✗
X	X	X	✓	✓

Yukarıda görüldüğü gibi (X, τ) uzayındaki pre-açık kümelerin sınıfını $PO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ şeklinde yazabiliriz.

Burada dikkat edelim ki pre-açık kümelerin sınıfı τ topolojisinden daha incedir. Örnekte de görüldüğü gibi her pre-açık küme açık olmayabilir. Örneğin $\{a, c\}$ pre-açık olmasına rağmen açık değildir.

Ayrıca uzay diskre ve indisre olmadığı sürece pre-açık kümelerin sınıfı olan $PO(X, \tau)$ bir topoloji oluşturmaz.

Benzer şekilde pre-kapalı kümelerin sınıfını da aşağıdaki tablodan yararlanarak Tanım 4.1.3 kullanarak bulabiliriz.

A	A°	$(\overline{A^\circ})$	$\overline{(A^\circ)} \subset A$	Pre-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a\}$	$\{a\}$	X	✗	✗
$\{b\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	X	✗	✓
$\{a, c\}$	$\{a\}$	X	✗	✗
$\{b, c\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
X	X	X	✓	✓

(X, τ) uzayında ki pre-kapalı kümelerin sınıfı $Pcl(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ şeklindedir. Her pre-kapalı küme kapalı olmayabilir. Örneğin $\{b\}$ kümesi pre-kapalı olmasına rağmen kapalı değildir.

Ayrıca pre-kapalı kümelerin sınıfı $Pcl(X, \tau)$ genelde bir topoloji oluşturmaz.

Şimdi $A = \{a, c\}$ ve $B = \{b, c\}$ kümesinin pre-içi ve pre-kapanışı olan kümeleri bulalım $\hat{A} = X$, $A^p = A$ ve $\hat{B} = B$, $B^p = \emptyset$ şeklindedir.

Örnek 4.1.6 (1) $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzay olsun. (a, b) pre-açık, $[a, b)$ ve $(a, b]$ ise pre-kapalı kümelerdir.

(2) $(\mathbb{R}, P(\mathbb{R}))$ diskre topolojik uzay olsun. $PO(X, \tau) = P(\mathbb{R})$ dir.

(3) $(\mathbb{R}, \{\mathbb{R}, \emptyset\})$ indiskre topolojik uzay olsun. $PO(\mathbb{R}, \tau) = P(\mathbb{R})$ dir.

(4) $\mathbb{R}$ üzerindeki tümleyeni sonlu topoloji için $PO(X, \tau) = \tau$ dur.

Teorem 4.1.7 (X, τ) topolojik uzay, $B \subseteq X$ olsun. Bu durumda,

(1) $(B^\circ)^c = (\overline{B^c})$

(2) $(\overline{B})^c = (B^c)^\circ$

Teorem 4.1.8 (X, τ) topolojik uzayında pre-açık bir kümenin tümleyeni pre-kapalıdır.

İspat: (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ pre açık olsun. $A \subset (\bar{A})^\circ$ olur. Her tarafa tümleme uygulanırsa $((\bar{A})^\circ)^c \subset A^c$ olur.

Teorem 4.1.7 den $(\overline{B^c}) = (B^\circ)^c$ olduğundan dolayı $B = \bar{A}$ seçersek bu durumda $((\bar{A})^\circ)^c = (B^\circ)^c = (\overline{B^c}) = \overline{((\bar{A})^c)}$ olur ki bu ise $\overline{((\bar{A})^c)} \subset A^c$ olur. $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ olduğundan $(\overline{(A^c)^\circ}) \subset A^c$ olur bu ise A^c nin pre-kapalı olduğunu gösterir.

Teorem 4.1.9 (X, τ) topolojik, $\{A_i | i \in I\}$ pre-açık kümelerin bir sınıfı olsun. $\bigcup_{i \in I} A_i$ kümesi pre-açıktır.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) topolojik uzay ve $\{A_i | i \in I\}$ pre-açık kümelerin bir sınıfı olsun. Bu durumda her $i \in I$ için $A_i \subset (\bar{A}_i)^\circ$ dir. Her tarafa birleşme işlemini uygularsak $\bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} (\bar{A}_i)^\circ$ olur. $\bigcup_{i \in I} (\bar{A}_i)^\circ \subset (\bigcup_{i \in I} \bar{A}_i)^\circ = ((\bigcup_{i \in I} A_i))^\circ$ olarak yazabiliriz. Dolayısıyla $\bigcup_{i \in I} A_i \subset ((\bigcup_{i \in I} A_i))^\circ$ olur ki bu ise $\bigcup_{i \in I} A_i$ nin pre-açık olduğunu gösterir.

Not 4.1.9 Pre-açık kümelerin keyfi birleşimleri pre-açık olmasına rağmen, sonlu kesişimleri hatta keyfi kesişimleri pre-açık olmayabilir. Örneğin $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}\}$ topolojisi için pre-açık kümelerin sınıfı

$$PO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\},$$

$$\{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}\}$$

olmak üzere $\{a, c, e\}, \{a, d, e\} \in PO(X, \tau)$ dir fakat $\{a, c, e\} \cap \{a, d, e\} = \{a, e\} \notin PO(X, \tau)$ dir.

Teorem 4.1.10 (X, τ) topolojik uzayında $A \subseteq X$ pre-açıktır gerek ve yeter şart $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$ olacak şekilde $B \in \tau$ vardır.

İspat: İspat açıktır.

Teorem 4.1.11 (X, τ) uzayında açık bir küme ile pre-açık bir kümenin kesişimi pre-açıktır.

İspat: Kabul edelim ki $A \in \tau$ ve $B \in PO(X, \tau)$ olsun. Bu takdirde $B \subseteq G \subseteq \bar{B}$ olacak şekilde $G \in \tau$ vardır. Her tarafa A ile kesişim işlemi uygularsak

$$A \cap B \subseteq A \cap G \subseteq A \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$$

olur. $A \cap G$ açık olduğundan Teorem 4.1.10 dan $A \cap B$ pre-açıktır.

Sonuç 4.1.12 (X, τ) topolojik uzay $A, B \subseteq X$ olsun. A pre-açık ise $A \cap \hat{B} = (\overline{A \cap B})$

4.2 Pre-Süreklilik

Bu kısımda pre-açık ve pre-kapalı kümeler kullanılarak pre-süreklilik kavramı incelenmiştir.

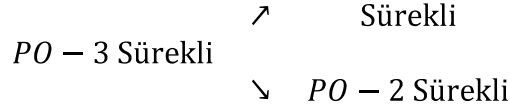
Tanım 4.2.1 (Pre-süreklilik) (X, τ) ve (Y, σ) topolojik uzaylar $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Bu takdirde karşımıza üç farklı süreklilik tanımı çıkar. Bunlar;

(i) **(PO-1 sürekli fonksiyon)** Y de $f(x_0)$ nin her açık V komşuluğu için X de x_0 nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U pre-açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında PO-1 süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında PO-1 sürekli ise f ye PO-1 süreklidir denir. Yani eğer her $U \in \sigma$ için $f^{-1}(U) \in PO(X, \tau)$ ise f fonksiyonu PO-1 süreklidir denir [12].

(ii) **(PO-2 sürekli fonksiyon)** Y de $f(x_0)$ nin her pre-açık V komşuluğu için X de x_0 nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U yarı-açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında PO-2 süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında PO-2 sürekli ise f ye PO-2 süreklidir denir. Yani eğer her $B \in PO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(B) \in PO(X, \tau)$ ise f fonksiyonu PO-2 süreklidir denir [12].

(iii) **(PO-3 sürekli fonksiyon)** Y de $f(x_0)$ nin her pre-açık V komşuluğu için X de x_0 nin $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında PO-3 süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında PO-3 sürekli

ise f ye $PO-3$ süreklidir denir. Yani eğer her $B \in PO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(B) \in \tau$ ise f fonksiyonu $PO-3$ süreklidir [12].



Şekil 4.2 Sürekli, $PO-3$ sürekli ve $PO-2$ sürekli fonksiyonlar arasındaki ilişki.

Yukarıdaki süreklilik tanımları dikkate alındığında f nin $PO-3$ sürekliliği f nin hem sürekli hem de $PO-2$ sürekliliğini gerektirdiğini görebiliriz. Şimdi verilen bu süreklilik tanımlarının birbirleriyle olan bağlantılarını gösteren teoremleri verelim.

Teorem 4.2.2 (X, τ) ve (Y, σ) birer topolojik uzaylar ve $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu sürekli ise $PO-1$ süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki $f: X \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon, $x_0 \in X$ ve $f(x_0) \in V$ olacak şekilde $V \in \sigma$ olsun. f sürekli olduğundan $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \tau$ vardır. U açık olduğundan U pre-açıktır. Dolayısıyla f fonksiyonu $PO-1$ süreklidir.

Fakat bu teoremin tersi genelde doğru değildir.

Örnek 4.2.3 $X = \{a, b, c\}$ üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi için $PO(X, \tau) = \{X, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ $Y = \{d, e, f\}$ üzerindeki $\sigma = \{\emptyset, Y, \{d\}, \{d, e\}\}$ topolojisi için $PO(Y, \sigma) = \{\emptyset, Y, \{d\}, \{d, e\}, \{d, f\}\}$ olur ki $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu $f(a) = d$, $f(b) = e$, $f(c) = f$ şeklinde tanımlanırsa f fonksiyonu $PO-1$ sürekli olmasına rağmen $\{d, e\} \in \sigma$ için $f^{-1}(\{d, e\}) = \{a, b\} \notin \tau$ olduğundan sürekli değildir.

Benzer şekilde $PO(Y, \sigma)$ da alınan her elemanın ters görüntüsü $PO(X, \tau)$ da olduğu için f fonksiyonu $PO-2$ süreklidir.

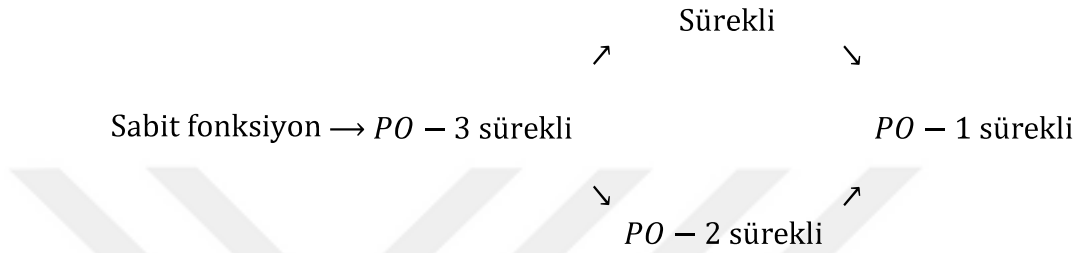
Teorem 4.2.4 $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ fonksiyonu $PO-2$ sürekli ise $PO-1$ süreklidir.

İspat: f fonksiyonunun $PO-2$ sürekli, $p \in X$ ve $f(p) \in V$ olacak şekilde, $V \in \sigma$ olduğunu kabul edelim. Her açık pre-açık olduğundan, $V \in PO(X, \tau)$ olur. f fonksiyonu $PO-2$ sürekli olduğundan dolayı $p \in U$ için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde $U \in PO(X, \tau)$ vardır ki bu ise f fonksiyonunun $PO-1$ sürekli olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.5 (X, τ) , (Y, σ) topolojik uzaylar $f: X \rightarrow Y$ sabit fonksiyon olsun. f fonksiyonu, $PO-3$ süreklidir.

İspat: f sabit fonksiyon olduğundan $f(x) = c$ dir. $V \in PO(Y, \sigma)$ için $f^{-1}(V) \in \tau$ olduğunu göstereceğiz. $c \in V$ ise $f^{-1}(V) = X \in \tau$ olur. $c \notin V$ ise $f^{-1}(V) = \emptyset \in \tau$ olur. Dolayısıyla f fonksiyonu $PO-3$ sürekli olur.

Bunları bir şema ile aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.



Şekil 4.3 $i=1,2,3$ için $PO-i$ sürekli, sürekli ve sabit fonksiyonlar arasındaki ilişki.

4.3 Pre-Ayırma Aksiyomları ($pre-T_0$, $pre-T_{1/2}$, $pre-T_1$, $pre-T_2$)

Bu kısımda 1990 yılında A. Kar ve P. Bhattacharyya pre-açık kümeleri kullanarak aşağıda belirtilen $pre-T_0$, $pre-T_1$ ve $pre-T_2$ şeklinde gösterilen yeni zayıf ayırma aksiyomları ve özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.3.1 ($pre-T_0$ uzayı) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. x ve y noktaların dan birini içerip diğerini içermeyen bir $U \subseteq X$ pre-açık kümesi varsa bu (X, τ) topolojik uzayına $pre-T_0$ uzayı denir [13].

Tanım 4.3.2 ($Pre-T_1$ uzayı) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in U$, $y \notin U$ ve $y \in V$, $x \notin V$ olacak şekilde $U, V \subseteq X$ pre-açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına bir $pre-T_1$ uzayı denir [13].

Tanım 4.3.3 ($Pre-T_2$ uzayı) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ için $x \neq y$ olsun. $x \in U$, $y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak biçimde $U, V \subseteq X$ pre-açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına bir $pre-T_2$ uzayı denir [13].

Teorem 4.3.4 (X, τ) topolojik uzay $pre-T_0$ dır gerek ve yeter her farklı $x, y \in X$ nokta çifti için $\widehat{\{x\}} \neq \widehat{\{y\}}$ dır.

İspat: (X, τ) $pre-T_0$ ve $x, y \in X, x \neq y$ olduğunu kabul edelim. $\widehat{\{x\}} \neq \widehat{\{y\}}$ olduğunu göstereceğiz. Kabulden noktalardan birinin diğerini içermeyen en az bir pre-açık komşuluğu vardır. $x \in U, y \notin U$ olacak şekilde $U \in PO(X, \tau)$ olsun. Böylece $y \in U^c$ ve U^c pre-kapalı kümedir. Dolayısıyla $\widehat{\{y\}} \subset U^c$ dir. Böylece $y \in \widehat{\{y\}}$ olur ki $y \notin U^c$ dir. Sonuç olarak $\widehat{\{x\}} \neq \widehat{\{y\}}$ dir.

Tersine olarak $x, y \in X, x \neq y$ olduğunu ve $\widehat{\{x\}} \neq \widehat{\{y\}}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $z \in \widehat{\{x\}}$ ve $z \notin \widehat{\{y\}}$ olacak şekilde $z \in X$ vardır. $x \in \widehat{\{y\}}$ ise bu durumda $x \subset \widehat{\{y\}}$ olur ki bu ise $\widehat{\{x\}} \subset \widehat{\{y\}}$ olması demektir. Böylece $x \in \widehat{\{x\}}$ ve $z \notin \widehat{\{y\}}$ dir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $x \in \widehat{\{y\}}$ olur. Sonuç olarak $(\widehat{\{y\}})^c$ kümesi x i içeren fakat y yi içermeyen pre-açık küme olmuş olur. Bu ise (X, τ) nun $pre-T_0$ olduğunu gösterir.

Sonuç 4.3.5 Her tek nokta kümesi pre-kapalı veya buna denk olarak sonlu alt kümesi pre-kapalı olan topolojik uzay $pre-T_0$ dir.

Teorem 4.3.6 (X, τ) topolojik uzay $pre-T_1$ dir gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi pre-kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) uzayı $pre-T_1$ olsun. Herhangi $x \in X$ için $\{x\}$ in pre-kapalı olduğunu göstereceğiz. $y \in \{x\}^c$ olsun. Bu takdirde $x, y \in X, x \neq y$ (X, τ) nun $pre-T_1$ olmasından dolayı $y \in V, x \notin V$ olacak şekilde pre-açık V kümesi vardır. Burada $V \subset \{x\}^c$ yazabiliriz. Böylece $y \in \{x\}^c$ ve $y \in V$ den dolayı $y \in V \subset \{x\}^c$ olur. Bunun anlamı $\{x\}^c$ kümesinin y nin bir pre-komşuluğu olması demektir. Böylece $\{x\}^c$ kümesi X de pre-açıktır ve sonuç olarak $\{x\}$ kümesi pre-kapalıdır.

Tersine olarak her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi X de pre-kapalı olsun. $y, z \in X, y \neq z$ olsun. $\{y\}$ kümesi pre-kapalı olduğundan $\{y\}^c$ kümesi pre-açıktır ve burada $y \notin \{y\}^c, z \in \{y\}^c$ dir. Benzer şekilde $\{z\}$ kümesi pre-kapalı olduğundan $\{z\}^c$ kümesi pre-açıktır ve burada $z \notin \{z\}^c, y \in \{z\}^c$ dir. Bu (X, τ) uzayının $pre-T_1$ olduğunu gösterir.

Örnek 4.3.7 $X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisini inceleyelim. Bu durumda $PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olur ki $\{c\}$ ve $\{b\}$ kümeleri pre-kapalı olmadığından (X, τ) uzayı $pre-T_1$ değildir.

$PCI(X, \tau) = \{X, \{b, c\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset\}$ pre-kapalı kümelerin sınıfı olmak üzere $\widehat{\{a\}} = X, \widehat{\{b\}} = \{b\}, \widehat{\{c\}} = \{c\}$ olur ki X in her farklı nokta çifti için pre-kapanışlar farklıdır. Dolayısıyla Teorem 4.3.4 den dolayı (X, τ) uzayı $pre-T_0$ dir.

Tanım 4.3.8 (Pg-kapalı küme) (X, τ) topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. $\hat{A} \subseteq P$ olacak şekilde $A \subseteq P$, pre-açık kümesi varsa A kümesine pre-genelleştirilmiş küme (pre-generalized closed set) adı verilir ve pg -kapalı şeklinde gösterilir [14].

Tanım 4.3.9 ($Pre-T_{1/2}$ uzayı) (X, τ) topolojik uzayında her pg -kapalı küme, pre-kapalı ise (X, τ) uzayına $pre-T_{1/2}$ dir. [14].

Örnek 4.3.10 $X = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ olsun. Pre-kapalı ve pg -kapalı kümeleri bulalım. $PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ve $PCI(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ olmak üzere,

A	$\hat{A}$	$A \subseteq P, P \in PO(X, \tau)$ olacak şekilde $\hat{A} \subseteq P$ kümeleri	Pg -kapalı küme	Pre-kapalı küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset, \{a\}, \{b\}, X$	✓	✓
$\{a\}$	X	X	✓	✗
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{b\}, X$	✓	✓
X	X	X	✓	✓

Görüldüğü gibi (X, τ) uzayındaki $\{a\}$ kümesi pg -kapalı olmasına rağmen pre-kapalı olmadığından dolayı Tanım 4.3.9 den dolayı $pre-T_{1/2}$ değildir.

Teorem 4.3.11 (X, τ) uzayı $pre-T_{1/2}$ dir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi pre-açık veya pre-kapalıdır.

Yukarıdaki teoremin bir uygulaması olarak $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d, e\}\}$ topolojisi için pre-açık kümeleri yazalım:

$$PO(X, \tau) = \{ X, \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\},$$

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\},$$

$$\{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\} \}$$

pre-açık kümelerin sınıfı olur ki X kümesinden alınan her eleman için oluşturulan tek nokta kümeleri ya pre-açık ya da pre-kapalı olduğundan dolayı (X, τ) uzayı $pre-T_{1/2}$ dir.

Teorem 4.3.12 (X, τ) bir topolojik uzayı $pre-T_{1/2}$ dir ancak ve ancak X in her alt kümesi, bu alt kümeyi içeren tüm pre-açık ve pre-kapalı kümelerin kesişimidir.

İspat: (X, τ) bir topolojik uzay $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda $A = \bigcap_{x \notin A} \{x\}^c$ kümesi A yı içeren tüm pre-açık ve pre-kapalı kümelerin kesişimi olmuş olur.

Tersine olarak her $x \in X$ için $\{x\}^c$ kümesi kendisini içeren tüm pre-açık ve pre-kapalı kümelerin kesişimi olsun. Böylece $\{x\}^c$ ya pre-açık ya da pre-kapalıdır. Dolayısıyla Teorem 4.3.11 dan dolayı (X, τ) uzayı $pre-T_{1/2}$ olur.

Teorem 4.3.13: (X, τ) bir topolojik uzayında X in her alt kümesi pg -kapalıdır ancak ve ancak $PO(X, \tau) = PCI(X, \tau)$ dur.

İspat: $U \in PO(X, \tau)$ olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla U kümesi pg -kapalıdır. $\widehat{U} \subset U$ dur, böylece $\widehat{U} = U$ olur. Bu ise $U \in PCI(X, \tau)$ olması demektir. O halde $PO(X, \tau) \subset PCI(X, \tau)$ olur.

Şimdi ise $V \in PCI(X, \tau)$ olsun. Dolayısıyla $V^c \in PO(X, \tau)$ olur. Kabulden V^c pg -kapalı bir kümedir, dolayısıyla $V^c \in PCI(X, \tau)$ olur ki bu ise $V \in PO(X, \tau)$ olması demektir. Böylece $PO(X, \tau) = PCI(X, \tau)$ olur.

Tersine $PO(X, \tau) = PCI(X, \tau)$ ve $U \in PO(X, \tau)$ için $B \subset U$ olacak şekilde $B \subset X$ olsun. Bu durumda $U \in PCI(X, \tau)$ ve $\widehat{B} \subset U$ olur. Bu ise B nin pg -kapalı bir küme olduğunu gösterir

Teorem 4.3.14 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı $pre-T_{1/2}$ ise $pre-T_0$ dır,
- (2) (X, τ) uzayı $pre-T_1$ ise $pre-T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı $pre-T_2$ ise $pre-T_1$ dir.

İspat: İspat aşıkardır. Dolayısıyla,

$$pre-T_2 \Rightarrow pre-T_1 \Rightarrow pre-T_{1/2} \Rightarrow pre-T_0$$

Şimdi ise teoremden sözü geçen ifadelerinin genelde doğru olmadığına örnekler verelim.

$X = \{a, b, c\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olsun. Bu durumda $PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olur. (X, τ) $pre-T_0$ olmasına rağmen $pre-T_{1/2}$ değildir.

$X = \{a, b\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olsun. Bu durumda $PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olur. (X, τ) uzayın da her tek nokta kümesi ya pre-açık ya da pre-kapalı olduğundan dolayı $pre-T_{1/2}$ uzayıdır, fakat (X, τ) $pre-T_1$ değildir.

Teorem 4.3.15 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı T_0 ise $pre-T_0$ dır,
- (2) (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ ise $pre-T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı T_1 ise $pre-T_1$ dir,
- (4) (X, τ) uzayı T_2 ise $pre-T_2$ dir.

İspat: Her açık küme pre-açık olduğundan dolayı ispatlar aşıkârdır.

$$\begin{array}{ccc}
 T_2 & \longrightarrow & pre-T_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_1 & \longrightarrow & pre-T_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_{1/2} & \longrightarrow & pre-T_{1/2} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 T_0 & \longrightarrow & pre-T_0
 \end{array}$$

Şekil 4.4 $T_{i=0,1/2,1,2}$ ve $pre-T_{i=0,1/2,1,2}$ ayırma aksiyomları arasındaki ilişki.

Şimdi ise teoremden sözü geçen ifadelerinin genelde doğru olmadığına örnekler verelim.

Örneğin, $X = \{a, b, c\}$ için $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ olsun. Bu durumda

$PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ olur. (X, τ) uzayı $pre-T_0$ olmasına rağmen T_0 değildir.

Örneğin, $X = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi için $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, e, d\}\}$ topolojisini inceleyelim τ topolojisine göre pre-açık kümelerin sınıfı

$$PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \\ \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{a, c, e\}, \{a, d, e\}, \{b, c, d\}, \{b, c, e\}, \{b, d, e\}, \\ \{c, d, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, e\}, \{b, c, d, e\}\} \text{ dir.}$$

Dikkat edilecek olursa Teorem 4.3.11 dan her tek nokta kümesi ya pre-açık ya da pre-kapalı olduğunda uzay $pre-T_{1/2}$ dir fakat Teorem 2.3.16 dan dolayı $\{b\}$ kümesi ne açık ne de kapalı olduğundan dolayı (X, τ) uzayı $T_{1/2}$ değildir.

Örneğin, $X = \{a, b, c\}$ için $\tau = \{\emptyset, X, \{a, b\}\}$ topolojisini düşünelim,

$$PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\} \text{ ve}$$

$PCL(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c\}, \{b\}, \{a\}\}$ olur. Bu durumda her tek nokta kümesi kapalı olduğundan (X, τ) uzayı $pre-T_1$ ve $pre-T_2$ dir fakat T_1 ve T_2 değildir.

Teorem 4.3.16 (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ açık olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı $pre-T_0$ ise (A, τ_A) $pre-T_0$ dir,
- (2) (X, τ) uzayı $pre-T_{1/2}$ ise (A, τ_A) $pre-T_{1/2}$ dir,
- (3) (X, τ) uzayı $pre-T_1$ ise (A, τ_A) $pre-T_1$ dir,
- (4) (X, τ) uzayı $pre-T_2$ ise (A, τ_A) $pre-T_2$ dir.

İspat: (1) (X, τ) uzayı $pre-T_0$ ve $A \in \tau$ olsun. (A, τ_A) alt uzayının da $pre-T_0$ olduğunu göstermek için $x \neq y$ $x, y \in A$ noktaları verilsin. X uzayı $pre-T_0$ olduğundan $y \notin U_x$

olacak şekilde x in bir U_x pre-açık komşuluğu veya $x \notin U_y$ olacak şekilde y nin bir U_y pre-açık komşuluğu vardır. Teorem 4.1.11 den $H=A \cap U_x$ kümesi x in pre-açık komşuluğu olup $y \notin H$ dir.

(2) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı $pre-T_{1/2}$, $A \subseteq X$ ve $a \in A$ olsun. Teorem 4.3.11 den dolayı $\{a\}$ kümesi ya pre-açık veya pre-kapalıdır. Dolayısıyla $\{a\}$ kümesi A da pre-açık veya pre-kapalı olur ki, bu ise (A, τ_A) alt uzayının $pre-T_{1/2}$ olduğunu gösterir.

(3) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı $pre-T_1$, $A \subseteq X$ açık olsun. $x \neq y$, $x, y \in A$ noktaları verilsin (X, τ) , $pre-T_1$ olduğundan $U_x \ni x$, $y \notin U_x$ ve $U_y \ni y$, $x \notin U_y$ olacak şekilde $U_x, U_y \in PO(X, \tau)$ vardır. A açık ve U_x ve U_y pre-açık olduğundan Teorem 4.1.11 den dolayı $A \cap U_x, A \cap U_y \in PO(A, \tau_A)$ olur. Burada $x \in A \cap U_x, y \notin A \cap U_x$ ve $y \in A \cap U_y, x \notin A \cap U_y$ dir. Böylece (A, τ_A) alt uzayı $pre-T_1$ uzayıdır.

(4) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı $pre-T_2$, $A \subseteq X$ açık olsun. $x \neq y$, $x, y \in A$ noktaları verilsin. (X, τ) $pre-T_2$ olduğundan $U_x \cap U_y = \emptyset$ olacak şekilde $\exists U_x \ni x$ ve $\exists U_y \ni y$, $U_x, U_y \in PO(X, \tau)$ pre-açık kümeler vardır.

Teorem 4.1.11 den dolayı $A \cap U_x, A \cap U_y \in PO(A, \tau_A)$ dir. $x \in A \cap U_x, y \in A \cap U_y$ olmak üzere $(A \cap U_x) \cap (A \cap U_y) = A \cap (U_x \cap U_y) = A \cap \emptyset = \emptyset$ olur ki bu ise (A, τ_A) uzayının $pre-T_2$ olduğunu gösterir.

4.4 Pre-D Ayırma Aksiyomları ($pre-D_0, pre-D_1, pre-D_2$)

Tanım 4.4.1 (Pre-D küme) (X, τ) topolojik uzay, $A \subseteq X$ olsun. $U \neq X$ ve $A = U \setminus V$ olacak şekilde pre-açık U, V kümeleri varsa A ya pre-fark küme (pre-Difference set) denir ve kısaca $pre-D$ şeklinde gösterilir [15].

Not: $U \neq X$ pre-açık küme olmak üzere, $U = U \setminus \emptyset$ olduğundan U bir $pre-D$ kümedir. Dolayısıyla her pre-açık küme $pre-D$ dir.

Tanım 4.4.2 (Pre komşuluk) (X, τ) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. Eğer $x \in P \subset U$ olacak şekilde P pre-açık kümesi varsa U kümesine x in pre-komşuluğu denir. Özel olarak U pre-açık ise U pre-açık komşuluk denir [15].

(X, τ) topolojik uzayında $x \in X$ in X den başka pre-komşuluğu yoksa, x noktasına tüm pre-kapalı kümelerde ortak nokta *p.c.c* (common to all pre-closed sets point) adı verilir. Bu ismin verilmesinin sebebi x ın X deki her bir pre-kapalı kümelerde olmasından dolayıdır.

Bilinen $pre-T_i$ ($i=0,1,2$) kümelerinin tanımında kullanılan pre-açık yerine $pre-D$ kümesi alınırsa $pre-D_i$ ($i=0,1,2$) ayırma aksiyomlarını elde ederiz.

Tanım 4.4.3 ($Pre-D_0$ ve $pre-D_1$ uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı $x, y \in X$ noktaları için en az birinin diğerini içermeyen $pre-D$ komşuluğu, yani $y \notin U$ olacak şekilde x in bir U nin $pre-D$ komşuluğu veya (ve) $x \notin V$ olacak şekilde y nin bir V $pre-D$ komşuluğu varsa (X, τ) uzayına $pre-D_0$ ($pre-D_1$) uzayı adı verilir [15].

Tanım 4.4.4 ($Pre-D_2$ uzayı) (X, τ) topolojik uzay olsun. Farklı $x, y \in X$ noktaları için ayrık $pre-D$ komşulukları $x \in U, y \in V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V kümelerinin $pre-D$ komşulukları varsa (X, τ) uzayına $pre-D_2$ uzayı denir [15].

Teorem 4.4.5 (X, τ) topolojik uzayında,

- (1) (X, τ) $pre-T_0$ ise $pre-D_0$ dır,
- (2) (X, τ) $pre-T_1$ ise $pre-D_1$ dir,
- (3) (X, τ) $pre-T_2$ ise $pre-D_2$ dir.

İspat: Her yarı-açık küme aynı zamanda $pre-D$ olduğundan ispat aşikârdır.

Teorem 4.4.6 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) $pre-D_1$ ise $pre-D_0$ dır,
- (2) (X, τ) $pre-D_2$ ise $pre-D_1$ dir.

İspat: $i=0,1,2$ için $pre-D_i$ ayırma aksiyomları tanımından ispat açıktır.

Teorem 4.4.7 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı $pre-D_0$ dır ancak ve ancak $pre-T_0$ dır,
- (2) (X, τ) uzayı $pre-D_1$ dır ancak ve ancak $pre-D_2$ dir.

İspat: (1) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı $pre-D_0$ olsun. Farklı $x, y \in X$ noktaları için x içeren y yi içermeyen veya y yi içeren x i içermeyen en az bir A $pre-D$ komşuluğu mevcuttur. Kabul edelim ki $x \in A$, $y \notin A$ olacak şekilde $pre-D$ kümesi mevcut olsun. $Pre-D$ nin tanımında $P_1 \neq X$ ve $A = P_1 \setminus P_2$ olacak şekilde $P_1, P_2 \in PO(X, \tau)$ kümeleri mevcuttur $x \in A = P_1 \setminus P_2$ ve $y \notin A = P_1 \setminus P_2$ olduğu için iki farklı durum vardır:

- (i) $x \in P_1$, $y \notin P_1$,
- (ii) $x \notin P_2$, $y \in P_1$ ve $y \in P_2$.

Birinci durumda $x \in P_1$ fakat $y \notin P_1$, ikinci durumda $y \in P_2$ fakat $x \notin P_2$ olduğundan dolayı (X, τ) uzayının $pre-T_0$ olur.

Tersine olarak her $pre-T_0$ uzay $pre-D_0$ olduğundan dolayı ispat açıktır.

(2) Kabul edelim ki (X, τ) uzayı $pre-D_1$ uzayı olsun. Bu takdirde farklı $x, y \in X$, $x \neq y$ noktaları için $x \in A$, $y \notin A$ ve $x \notin B$, $y \in B$ olacak şekilde A ve B $pre-D$ kümeleri vardır. $Pre-D$ kümeleri tanımından,

$A = P_1 \setminus P_2$, $B = P_3 \setminus P_4$ olacak şekilde $P_1, P_2, P_3, P_4 \in PO(X, \tau)$ olduğunu kabul edelim.

$x \notin B = P_3 \setminus P_4$ olduğundan $x \notin P_3$ yada $x \in P_3$ ve $x \in P_4$ dir. Bu durumları ayrı ayrı incelenirse,

(i) $x \notin P_3$ olsun $y \notin A$ olduğundan iki farklı durum karşımıza çıkar.

(a) $y \notin P_1$ olsun. $x \in P_1 \setminus P_2$ den $x \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$ dir. $y \in P_3 \setminus P_4$ den $y \in P_3 \setminus (P_1 \cup P_4)$ dür. Burada $[P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)] \cap [P_3 \setminus (P_1 \cup P_4)] = \emptyset$ olduğu açıktır.

(b) $y \in P_1$ ve $y \in P_2$ olsun. Dolayısıyla $x \in A = P_1 \setminus P_2$, $y \in P_2$ dir. Buradan $(P_1 \setminus P_2) \cap P_2 = \emptyset$

(ii) $x \in P_3$ ile $x \in P_4$ olsun. Bu durumda $y \in P_3 \setminus P_4$, $x \in P_4$ olur ve $(P_3 \setminus P_4) \cap P_4 = \emptyset$ olur. Böylece (i) ve (ii) deki her bir durumdan alınan farklı nokta çiftlerinin pre -açık kümeleri bulunabildiğinden (X, τ) uzayı $pre-D_2$ olur.

Her $pre-D_2$ uzayı aynı zamanda $pre-D_1$ olduğundan dolayı ispat açıktır.

Örnek 4.4.8 $X = \{a, b\}$ kümesi üzerindeki, $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisini inceleyelim.

A	$\bar{A}$	$(\bar{A})^\circ$	$A \subset (\bar{A})^\circ$	Pre-açık küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a\}$	X	X	✓	✓
$\{b\}$	$\{b\}$	$\emptyset$	×	×
X	X	X	✓	✓

(X, τ) uzayındaki pre-açık kümelerin sınıfı $PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ olur. $P_1 \neq X$ için $P_2 = \emptyset, X, \{a\}, \{b\}$ için *pre-D* kümelerini belirlemeye çalışalım.

$\emptyset = \emptyset \setminus \{a\}$ olacak şekilde $\emptyset, \{a\} \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\emptyset$ bir *pre-D* kümedir,

$\{a\} = \{a\} \setminus \emptyset$ olacak şekilde $\{a\}, \emptyset \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\{a\}$ bir *pre-D* kümedir,

$\{b\} = X \setminus \{a\}$ dir fakat $U \neq X$ olacağından *pre-D* şartını sağlamaz. Bu yüzden $\{b\}$ kümesi *pre-D* kümesi değildir, dolayısıyla *pre-D* kümeler $\{a\}, \emptyset$ olur.

O halde $a \neq b$ için $a \in \{a\}$, $b \notin \{a\}$ olacak şekilde *pre-D* kümesi olduğu için (X, τ) *pre-D*₀ dır. Fakat *pre-D*₁ ve *pre-D*₂ değildir. Benzer şekilde (X, τ) uzayı *pre-T*₀ ve *T*₀ dır fakat *pre-T*₁ ve *pre-T*₂ değildir.

$X = \{a, b, c\}$ kümesi üzerindeki $\tau = \{X, \emptyset, \{a\}\}$ topolojisi için kapalı kümelerin sınıfı $K = \{X, \emptyset, \{b, c\}\}$ olmak üzere,

A	$\bar{A}$	$(\bar{A})^\circ$	$A \subset (\bar{A})^\circ$	Pre-açık küme
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	✓	✓
$\{a\}$	X	X	✓	✓
$\{b\}$	$\{b, c\}$	$\emptyset$	×	×
$\{c\}$	$\{b, c\}$	$\emptyset$	×	×
$\{a, b\}$	X	X	✓	✓
$\{a, c\}$	X	X	✓	✓
$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\emptyset$	×	×
X	X	X	✓	✓

Yukarıdaki tabloya göre $PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ pre-açık kümelerin sınıfını elde ederiz.

$\emptyset = \emptyset \setminus \{a\}$ olacak şekilde $\emptyset, \{a\} \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\emptyset$ bir *pre-D* kümedir,

$\{a\} = \{a\} \setminus \emptyset$ olacak şekilde $\{a\}, \emptyset \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\{a\}$ bir *pre-D* kümedir,

$\{b\} = \{a, b\} \setminus \{a\}$ olacak şekilde $\{b\}, \{a, b\} \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\{b\}$ bir *pre-D* kümedir,

$\{c\} = \{a, c\} \setminus \{a\}$ olacak şekilde $\{b\}, \{a, c\} \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\{c\}$ bir *pre-D* kümedir,

$\{a, c\} = \{a, c\} \setminus \emptyset$ olacak şekilde $\{a, c\}, \emptyset \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\{a, c\}$ bir *pre-D* kümedir,

$\{a, b\} = \{a, b\} \setminus \emptyset$ olacak şekilde $\{a, b\}, \emptyset \in PO(X, \tau)$ olduğu için $\{a, b\}$ bir *pre-D* küme olur. Böylece (X, τ) nın *pre-D* kümelerin sınıfını ise,

$PO(X, \tau) = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}\}$ dir,

$a \neq b$ için $a \in \{a\}, b \notin \{a\}$ ve $b \in \{b\}, a \notin \{b\}$ dir,

$a \neq c$ için $a \in \{a\}, c \notin \{a\}$ ve $c \in \{c\}, a \notin \{c\}$ dir,

$b \neq c$ için $b \in \{b\}, c \notin \{b\}$ ve $c \in \{c\}, b \notin \{c\}$ dir.

Dolayısıyla (X, τ) *pre-D*₁ dir fakat $a \neq b$ için a yı içermeyen pre-açık komşuluk bulamadığımızdan (X, τ) *pre-T*₁ değildir. Benzer düşünceyle (X, τ) uzayı *pre-D*₂ dir fakat *T*₂ değildir. Çünkü a ve b noktalarının ayrık pre-açık komşulukları yoktur.

Teorem 4.4.9 (X, τ) uzayı *pre-T*₀ ise *pre-D*₁ dir ancak ve ancak X de hiçbir *p.c.c* noktası yoktur.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) *pre-D*₁ ise bu durumda her bir $x \in X$ noktası bir $S = P_1 \setminus P_2$ şeklinde *pre-D* kümeye aittir. Böylece $x \in P_1$ dir. $P_1 \neq X$ olduğundan dolayı x noktası *p.c.c* noktası değildir.

Tersine olarak (X, τ) uzayı $pre-T_0$ olsun. Göstereceğiz ki (X, τ) $pre-D_1$ dir. $pre-T_0$ tanımından her $x, y \in X, x \neq y$ için noktalarda birinin değerini içermediği en az bir U pre-açık komşuluk vardır. Kabul edelim ki $x \in U$ ve $y \notin U$ olsun. Bu durumda $U \neq X$ kümesi bir $pre-D$ kümedir.

Eğer X hiçbir $p.c.c$ noktasına sahip değilse, y bir $p.c.c$ noktası değildir. Böylece $V \neq X$ olacak şekilde $y \in V$ nin pre-komşuluğu vardır. Böylece $y \in V \setminus U, x \notin V \setminus U$ ve $V \setminus U$ kümesi $pre-D$ dir. Sonuç olarak (X, τ) uzayı $pre-D_1$ dir.

Sonuç 4.4.10 (1) $pre-T_0 (X, \tau)$ uzayı $pre-D_1$ değildir ancak ve ancak X in en az bir $p.c.c$ noktası vardır.

(2) [13] deki Örnek 1,2,5 ve 6 ile Örnek 4.4.7 ve Örnek 4.4.8 den aşağıdaki diyagramı çizebiliriz.

$$\begin{array}{ccccc}
 T_2 & \rightarrow & pre-T_2 & \rightarrow & pre-D_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 T_1 & \rightarrow & pre-T_1 & \rightarrow & pre-D_1 \\
 \downarrow & & \downarrow & \swarrow & \downarrow \\
 T_0 & \rightarrow & pre-T_0 & \leftrightarrow & pre-D_0
 \end{array}$$

Şekil 4.5 $T_{i=0,1,2}, pre-T_{i=0,1,2}$ ve $pre-D_{i=0,1,2}$ ayırma aksiyomları arasındaki ilişki.

Tanım 4.4.11 (Pre-simetrik uzay) (X, τ) topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. $x \in \widehat{\{y\}}$ olduğunda $y \in \widehat{\{x\}}$ ise (X, τ) uzayına pre-simetriktir denir.

Teorem 4.4.12 (X, τ) topolojik uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (X, τ) uzayı pre-simetriktir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kümesi pg -kapalıdır,
- (2) (X, τ) uzayı $pre-T_1$ ise pre-simetriktir,
- (3) (X, τ) uzayı pre-simetriktir ve $pre-T_0$ dır ancak ve ancak $pre-T_1$ dir.

İspat: (1) Kabul edelim ki $x \in \widehat{\{y\}}$ ve $y \notin \widehat{\{x\}}$ olsun. Bu durumda $\{y\} \subset (\widehat{\{x\}})^c$ ve böylece $\widehat{\{y\}} \subset (\widehat{\{x\}})^c$ dır. Dolayısıyla $x \in (\widehat{\{x\}})^c$ olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\{x\}$ kümesi pg -kapalı kümedir.

Tersine olarak kabul edelim ki $\{x\} \subset P$ ve $P, (X, \tau)$ da pre-açık olsun fakat $\widehat{\{x\}}$ Bu durumda $\widehat{\{y\}} \supset P$ olsun. Böylece $\widehat{\{x\}} \cap P^c \neq \emptyset$ olur. $y \in \widehat{\{x\}} \cap P^c$ olarak alalım. $x \in \widehat{\{y\}} \subset P^c$ ve $x \notin P$ olur ki bu bir çelişkidir.

(2) $pre-T_1$ uzayda her tek nokta kümesi pre-kapalıdır. ([13] deki Teorem 4 den) ve dolayısıyla pg -kapalıdır (1) den dolayı (X, τ) uzayı pre-simetriktir.

(3) (2) den dolayı sadece gerekliliği ispatlamak yeterlidir. $x \neq y$ olsun. (X, τ) nun $pre-T_0$ olmasından bazı $P_1 \in PO(X, \tau)$ için $x \in P_1 \subset \{y\}^c$ olarak alabiliriz. Bu durumda $x \notin \widehat{\{y\}}$ ve böylece $y \notin \widehat{\{x\}}$ dir. Sonuç olarak $y \in P_2 \subset \{x\}^c$ olacak şekilde $P_2 \in PO(X, \tau)$ vardır ve bu ise (X, τ) uzayının $pre-T_1$ olduğunu gösterir.

Teorem 4.4.13 (X, τ) pre-simetrik uzay olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (1) (X, τ) $pre-T_0$ dir,
- (2) (X, τ) $pre-D_1$ dir,
- (3) (X, τ) $pre-T_1$ dir.

İspat: Teorem 4.4.12 dolayı açıktır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında yarı-açık ve pre-açık kavramlar kullanılarak elde edilen zayıf ayırma aksiyomları incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. Yarı-açık küme, yarı-kapalı küme kavramları irdelenmiştir.
2. $i = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ için $semi-T_i$ uzayları arasındaki ilişki belirlenmiştir.
3. Bir uzayın yarı-simetrik olması durumunda $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ için $semi-T_i$ aksiyomlarının birbirine denk olduğu gösterilmiştir.
4. $i = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ için $semi-T_i$ uzaylarının alt uzayının hangi şart altında $semi-T_i$ olduğu gösterilmiştir.
5. $Semi-D$ küme yardımıyla $i = 0, 1, 2$ için elde edilen $semi-D_i$ uzayları ile $semi-T_i$ uzayları arasındaki ilişki belirtilmiştir.
6. $i = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ için $pre-T_i$ uzayları arasındaki ilişki belirlenmiştir.
7. Uzayın pre-simetrik olması durumunda $i = 0, \frac{1}{2}, 1$ için $pre-T_i$ aksiyomlarının birbirine denk olduğu gösterilmiştir.
8. $i = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ için $pre-T_i$ uzaylarının alt uzayının hangi şart altında $pre-T_i$ olduğu gösterilmiştir.
9. $pre-D$ küme yardımıyla $i = 0, 1, 2$ için elde edilen $pre-D_i$ ile $pre-T_i$ uzayları arasındaki ilişki belirtilmiştir.

Bu çalışma neticesinde elde edilen bilgiler ışığında aşağıdaki öneriler verilebilir.

1. Yarı (pre)-kompaktlık, yarı (pre)-bağlantılılık gibi kavramlar ve özellikleri incelenebilir mi?
2. Yarı-açıklık, pre-açıklık kavramları kullanılarak $i = \frac{1}{4}$ için $semi-T_i$ ve $pre-T_i$ ayırma aksiyomları tanımlanabilir ve özellikleri incelenebilir mi?
3. $i = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ için $pre-semi-T_i$ uzaylar veya $semi-pre-T_i$ uzaylar ve özellikleri incelenebilir mi?
4. $Pre-semi$ veya $semi-pre$ -homeomorfizm şeklinde bir eş yapılilik teşkil eden kavram oluşturulabilir mi?

5. $i = \frac{1}{2}$ için oluşturulan $semi-T_i$ veya $pre-T_i$ uzayları için kullanılacak sg -kapalı ve pg -kapalı kümeler arasında sg - pg -kapalı küme veya pg - sg -kapalı küme kavramları oluşturulabilir mi? Oluşturulabilir ise $i = \frac{1}{2}$ için $semi-T_i$ veya $pre-T_i$ uzayları ve özellikleri nelerdir?
6. Çalışmanın üçüncü ve dördüncü bölümlerinde geçen $semi-D$ küme yardımıyla elde edilen $i = 0,1,2$ için $semi-T_i$ veya $pre-T_i$ uzayları için verilen teorem ve ispatlar $semi-D_i$ veya $pre-D_i$ uzayları için de verilebilir mi?
7. Yarı-açık ve pre-açık kavramları arasında bir ilişki kurulabilir mi? Kurulabilir ise hangi şartlar altında bu geçerlidir?
8. Yarı-açık ve pre-açık kavramları kullanılarak elde edilen $semi-T_{1/2}$ veya $pre-T_{1/2}$ uzaylarına benzer $pre-D_{1/2}$ uzayı tanımlanabilir mi?

KAYNAKLAR

1. Levine, N., 1963. Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, The American Mathematical Monthly, 70(1), 36-41.
2. Crossley, S. ve Hildebrand, S., 1971. Semi-closure, Texas Journal of Science 22, 99-112.
3. Crossley, S. ve Hildebrand, S., 1971. Semi-closed sets and semi-continuity in topological spaces, Texas Journal of Science 22(2-3), 123-126.
4. Crossley, S. ve Hildebrand, S., 1972. Semi-topological properties, Fundamenta Mathematicae 74(3), 233-254.
5. Maheshwari, S.N. ve Prasad, R., 1975. Some new separation axioms, Ann. Soc. Sci. Bruxelles Sér. I, 89, 395-402.
6. Maheshwari, S.N. ve Prasad, R., 1975. On s-regular spaces, Glasnik Mat. Ser. III, 10(30), 347-350.
7. Maheshwari, S.N. ve Prasad, R., 1975. On s-normal spaces, Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, T22(70), 27-30.
8. Dorsett, C., 1982. Semi-regular spaces, Soochow Journal of Mathematics, 8, 45-53.
9. Dorsett, C., 1985. Semi-normal spaces, Kyungpook Mathematical Journal, 25(2), 173-180.
10. Bhattacharyya, P. ve Lahiri, B. K., 1987. Semi generalized closed set in topology, Ind. Jr. Math. 29, 376-382.
11. Caldas, M., 1997. A separation axiom between semi- T_0 and semi- T_1 , Pro Mathematica, 9(21-22), 59-96.
12. Mashhour, A. S., Abd El-Monsey, M. E. ve El- Deeb, S. N., 1982. On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc., Egypt, 53, 47-53.
13. Kar, A. ve Bhattacharyya, P., 1990. Some weak separation axioms, Bull. Calcutta Math. Soc. 82, 415-422.
14. Maki, H., Umehara, J. ve Noiri, T., 1996. Every topological space is pre- $T_{1/2}$, Mem. Fac. Sci. Kochi. Univ. Math., 17, 33-42.
15. Caldas, M., 2001. A separation axiom between pre- T_0 and pre- T_1 , East-West J. Of Mathematics, 3 (2), 171-177.
16. Koçak, M., 2015. Genel topolojiye giriş ve problem çözümleri, Nisan Kitabevi Yayınları, Eskişehir.

17. Munkreas, J. R., 1975. A first course, Prentice Hall Inc., New Jersey.
18. Levine, N., 1970. Generalized closed sets in topology, Rendiconti del Circolo Matematico, di Palermo, 19, 89-96.
19. Dunham, W., 1977. $T_{1/2}$ -spaces, Kyungpook Mathematical Journal, 17(2), 161-169.
20. Erciyes, A., Aytekin, A. ve Şahan, T., 2016. Semi-homotopy and semi-fundamental groups, Konuralp Journal of Mathematics, 4(1), 155-163.
21. Şahan, N., 2019. Yarı ayırma aksiyomları üzerine, Yüksek Lisans Tezi, ASÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.
22. Caldas, M., 1994. Espacios semi- $T_{1/2}$, Pro-Mat., 8, 116-121.
23. Dunham, W., 1982. A new closure operator for non- T_1 topologies, Kyungpook Mathematical Journal, 22, 55-60.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Tuncay ACAR
Adres : Nakkaş Mah. 2814. Sok. İstanbul-2 Konutları, No:22
A-Blok 5/18, 68200, Merkez/AKSARAY
E-posta adresi : acartuncay@yahoo.com

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Hacettepe Üniversitesi, Matematik ve Fen Bilimleri
Eğitimi Bölümü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı,
İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı,
2009-2013
Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı,
Topoloji Bilim Dalı, 2017-