



**T.C.
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI**

**BECERİ TEMELLİ SORULARDA 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN
MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ceyda DÜZGÜN

**Danışman
Prof. Dr. Ali Sabri İPEK**

**RİZE
2022**

KABUL VE ONAY

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalında, Prof. Dr. Ali Sabri İPEK danışmanlığında, Ceyda DÜZGÜN tarafından hazırlanan *Beceri Temelli Sorularda 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi* adlı bu tez çalışması, 24/10/2022 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda oy birliği/oy çokluğuyla başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Unvanı, Adı Soyadı

İmza

Başkan

: Doç. Dr. Fatih BAŞ

Üye

: Prof. Dr. Ali Sabri İPEK

Üye

: Doç. Dr. Samet OKUMUŞ

ETİK BEYAN

İlköğretim Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programından mezun olmak üzere teslim ettiğim “Beceri Temelli Sorularda 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi” adlı tezim, bilim ve araştırma etiği prensiplerine riayet edilerek tarafımdan yazılmıştır.

Tez çalışmamda, başka kaynaklardan aktarılan bütün bilgi ve alıntılar, Enstitünüz Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak açıkça gösterilmiştir. Kaynağı gösterilenler dışında kalan bütün bilgiler uygun araştırma yöntemi kullanılarak tarafımdan edinilmiş ve esere bu şekilde yansıtılmıştır. Şahsıma ait olmayan hiçbir bilgi, kasıt veya kusurlar, şahsıma aitmiş gibi gösterilmemiştir. İnternet kaynakları dâhil, sahibine/kaynağına atıf yapılmaksızın hiçbir bilgi kullanılmamıştır. Aksinin ortaya çıkması halinde doğacak bütün hukuki, idari, akademik ve etik sorumluluk tarafıma ait olacaktır. Eserin tesliminden sonra herhangi bir zamanda, bilim etiğine aykırılık tespit edilmesi ve / veya eserimle ilgili intihal veya intihal şeklinde anlaşılacak bir durumun ortaya çıkması halinde; Üniversiteniz ve eğitim kadronuzun hiçbir şekilde sorumlu tutulmayacağını hür irademle kabul, beyan ve taahhüt ederim.

24/10/2022

Ceyda DÜZGÜN

ÖN SÖZ

Lisansüstü eğitimim süresince bana rehberlik eden ve bu araştırmanın ortaya çıkmasında beni destekleyen akademik danışmanım Prof. Dr. Ali Sabri İPEK'e,

Tez jürisi olarak araştırma raporumu okuyup yapıcı eleştirileriyle bana ve araştırmama katkı sağlayan Doç. Dr. Samet OKUMUŞ'a ve Doç. Dr. Fatih BAŞ'a,

Araştırma sürecimde kıymetli vakitlerini ayırıp bana destek olan ve araştırmama katkı sağlayan hocalarım Doç. Dr. Tuğrul KAR'a, Arş. Gör. Dr. Neslihan UZUN'a ve Dr. Öğrt. Üyesi Ercan DEDE'ye,

Yüksek lisans derslerim süresince mesleki olarak bana büyük katkıları olan kıymetli hocalarım Dr. Öğrt. Üyesi Ercan ÖZDEMİR, Dr. Öğrt. Üyesi Demet BARAN BULUT, Dr. Öğrt. Üyesi Nimet PIRASA'ya,

Oldukça yoğun geçirdiğim bu süreçte her zaman yanımda olan, birlikte çalışmaktan büyük keyif aldığım Rize Merkez Atatürk Ortaokulu'nun idarecilerine ve çok kıymetli öğretmen arkadaşlarıma,

Bu süreçte yaşadığım zorluklarda beni motive eden ve destekleyen arkadaşlarım Ayşe KALYON GÜNTÜRK, Özner ÖZLÜ TEMİZEL, Hazal Merve VARLI, Zeynep KALENDER ve Hilal TUNÇ'a,

Eğitim hayatım boyunca üzerimde emeği olan tüm öğretmenlerime,

Hayatımın her anında yanımda olan, her koşulda beni destekleyen, sevgili annem Fatma BOYSAN, babam Alipaşa BOYSAN ve kardeşlerim Yasemen Oya YILDIZ, Şeyda YILMAZER ve Murat BOYSAN'a,

Bu yoğun süreçte sabırla ve sevgiyle beni destekleyen, varlıklarıyla şükür sebeplerim olan hayat arkadaşım Onur Ömer DÜZGÜN ve canım oğlum Ali Doruk DÜZGÜN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ceyda DÜZGÜN

2022/RİZE

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	I
ETİK BEYAN.....	II
ÖN SÖZ	III
İÇİNDEKİLER	IV
ÖZET	VII
ABSTRACT.....	VIII
KISALTMALAR.....	IX
TABLolar LİSTESİ.....	X
ŞEKİLLER LİSTESİ	XI
GİRİŞ	1
1. GENEL BİLGİLER	2
1.1. Araştırma Problemi ve Araştırma Soruları	3
1.2.Araştırmanın Amacı	4
1.3.Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi	4
1.4.Araştırmanın Varsayımları.....	6
1.5.Araştırmanın Sınırlılıkları	6
1.6.Alanyazın İncelemesi	7
1.6.1.Beceri Temelli Sorular	7
1.6.2.Matematiksel Düşünme	11
1.6.2.1.Matematiksel Kavramların Gelişimi Perspektifiyle Matematiksel Düşünme	13
1.6.2.2.Süreçler Perspektifiyle Matematiksel Düşünme	14
1.6.2.2.1.Burton’a (1984) Göre Matematiksel Düşünme Süreçleri... ..	16
1.6.3.İlgili Araştırmalar	25
1.6.3.1.Yurtdışında Yapılan Çalışmalar.....	25
1.6.3.2.Yurtiçinde Yapılan Çalışmalar	29
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	37
2.1.Araştırmanın Yöntemi.....	37

2.2.Katılımcılar	39
2.3.Veri Toplama Araçları	42
2.3.1.Beceri Temelli Matematik Soruları	43
2.3.2.Görüşme	44
2.3.3.Gözlem..	46
2.3.4.Doküman İncelemesi	47
2.4.Pilot Çalışma ve Veri Toplama Süreci.....	47
2.5.Araştırmacının Rolü	49
2.6.Verilerin Analizi.....	50
2.7.Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği.....	52
3. BULGULAR	55
3.1.Olasılık Sorusuna İlişkin Bulgular	55
3.1.1.Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular	55
3.1.2.Varsayımda Bulunma Sürecine İlişkin Bulgular	63
3.1.3.Genelleme Sürecine İlişkin Bulgular	66
3.2.Veri İşleme Sorusuna Yönelik Bulgular	72
3.2.1.Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular	72
3.2.2.Varsayımda Bulunma Sürecine Yönelik Bulgular	81
3.2.3.Genelleme Sürecine Yönelik Bulgular	89
3.3.Sayılar ve İşlemler Sorusuna İlişkin Bulgular	94
3.3.1.Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular	94
3.3.2.Varsayımda Bulunma Sürecine İlişkin Bulgular	109
3.3.3.Genelleme Sürecine İlişkin Bulgular	115
3.4.Cebir Sorusuna İlişkin Bulgular	124
3.4.1.Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular	124
3.4.2.Varsayımda Bulunma Sürecine İlişkin Bulgular	131
3.4.3.Genelleme Sürecine Yönelik Bulgular	141
4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR	146
4.1.Olasılık Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma	146
4.2.Veri İşleme Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma	148
4.3.Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma	150
4.4.Cebir Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma	153

4.5.Öneriler	156
KAYNAKÇA.....	159
EKLER.....	167
ETİK KURUL KARARI	172



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Anabilim Dalı : Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı

Tez Türü : Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Prof. Dr. Ali Sabri İPEK

Hazırlayan : Ceyda DÜZGÜN

Yıl : 2022

Sayfa Sayısı : 172

ÖZET

BECERİ TEMELLİ SORULARDA 8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN MATEMATİKSEL DÜŞÜNME SÜREÇLERİNİN İNCELENMESİ

Bu araştırmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin beceri temelli soruların çözüm sürecindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda nitel durum çalışması kullanılmıştır. Soruların çözümünde öğrencilerin belirli bir matematiksel temele sahip olması gerektiğinden amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme metodu ile belirlenen sekiz öğrenci, araştırma grubunu oluşturmaktadır. Veri toplama aracı olarak LGS sınavlarından öğrenme alanlarına göre seçilip revize edilen dört matematik sorusu, öğrencilerin çözümlerinden oluşan dokümanlar, yarı-yapılandırılmış görüşme ve gözlem kullanılmıştır. Veri toplama aracının geçerlik ve güvenilirliği hem uzman incelemesiyle hem de yapılan pilot çalışma ile tespit edilmiştir. Bireysel görüşmeler, sadece çözümler takip edilecek şekilde kamerayla kaydedilmiştir.

Araştırmanın bulgularına göre, beceri temelli sorularda öğrenciler özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde genellikle zorluk yaşamamışlardır. Varsayımda bulunma sürecinde fark ettikleri ilişkileri sözel olarak ifade edebilen öğrencilerin genelleme sürecinde ulaştıkları varsayımları cebirsel olarak ifade etmekte zorluk yaşadıkları tespit edilmiştir. Geometri ve ölçme öğrenme alanının hariç tutulduğu bu araştırmada, öğrencilerin en fazla zorluk yaşadığı öğrenme alanı üslü ifadeler sorusu ile irdelenen sayılar ve işlemler öğrenme alanı olmuştur. Bu bağlamda öğrencilerin özellikle sayı sisteminin kavramsal boyutundaki eksiklikleri ortaya çıkmaktadır. Araştırma sonuçlarına dayalı olarak, matematik öğrenme ortamlarında matematiksel düşünme becerilerini geliştirmeye dönük uygulamalara daha fazla yer verilmesi önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Matematiksel düşünme süreçleri, beceri temelli sorular, sekizinci sınıf öğrencileri

Recep Tayyip Erdogan University Institute of Graduate Studies

Department : Department of Mathematics and Science Education
Thesis Type : Master Thesis
Supervisor : Prof. Dr. Ali Sabri İPEK
Author : Ceyda DÜZGÜN
Year : 2022
Pages : 172

ABSTRACT

**INVESTIGATION OF EIGHTH GRADE STUDENTS' MATHEMATICAL
THINKING PROCESSES IN SKILL-BASED QUESTIONS**

In this study, it was aimed to examine the mathematical thinking processes of middle school eighth grade students in the process of solving skill-based questions. For this purpose, a qualitative case study was designed. The research group consists of eight students chosen with a criterion sampling method which is one of the purposeful sampling methods, since the students were expected to have a certain mathematical basis in solving the questions. As data collection tools, four mathematics questions selected and revised according to the learning areas from LGS exams, documents consisting of students' solutions, semi-structured interviews and observations were used. The validity and reliability of the data collection tools were determined by both expert review and a pilot study. Individual interviews were video-recorded in the way that only solutions could be followed.

According to the findings of the study, students generally did not have difficulties in the process of specializing in skill-based questions. It has been determined that students who could verbally express the relationships they noticed in the process of conjecturing had difficulty expressing the conjectures they reached in the generalization process algebraically. In this study in which the geometry and measurement learning areas were excluded, the learning area in which the students had the difficulty most was the learning areas of numbers and operations examined with the question of exponential expressions. In this context, students' deficiencies emerge especially in the conceptual dimension of the number system. Based on the results of the research, it is suggested that teaching methods developing mathematical thinking skills should be given more space in mathematics learning environments.

Keywords: Processes of mathematical thinking, skill-based questions, eighth grade students

KISALTMALAR

akt.	: Aktaran
Bkz.	: Bakınız
EBA	: Eğitim Bilişim Ağı
EBA TV	: EBA Televizyonu
FATİH	: Fırsatları Arttırma ve Teknolojiyi İyileştirme Hareketi
LGS	: Liselere Geçiş Sistemi
MEB	: Millî Eğitim Bakanlığı
NCTM	: National Council of Teachers of Mathematics
OECD	: Organisation for Economic Co-operation and Development
OKS	: Ortaöğretim Kurumları Sınavı
ort.	: Ortalama
PISA	: Programme for International Student Assessment
SBS	: Seviye Belirleme Sınavı
s.	: Sayfa
T. C.	: Türkiye Cumhuriyeti
TEOG	: Temel Eğitimden Ortaöğretime Geçiş
TDK	: Türk Dil Kurumu
TIMSS	: Trends in International Mathematics and Science Study
vd.	: ve diğerleri

TABLÖLAR LİSTESİ

Tablo 1. Katılımcıların demografik bilgileri ve akademik başarı ortalamaları.....	40
Tablo 2. Katılımcılarla yapılan görüşmelerin süreleri.	45
Tablo 3. Veri analizinde kullanılan kategoriler, bu kategorileri tanımlayan davranışlar ve kodlamaya ilişkin veri seti örnekleri.	51
Tablo 4. Olasılık sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları	66
Tablo 5. Daire grafiği sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları	89
Tablo 6. Üslü ifadeler sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları	115
Tablo 7. Kursların karşılaştırılması sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları.	140

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 1. Matematiksel düşünme perspektifleri ve başlıca temsilcileri.....	12
Şekil 2. Matematiksel düşünmenin işlemleri.....	17
Şekil 3. Matematiksel düşünmenin dinamikleri	20
Şekil 4. Matematiksel düşünme süreçleri, aşamaları, rubrikleri ve belirteçleri	21
Şekil 5. Matematiksel düşünme süreçlerinin gözlenebildiği bir öğrenci çözümü örneği.	25
Şekil 6. Veri işleme öğrenme alanında sorulup pilot çalışma sonrasında veri toplama aracından çıkarılan soru.	44
Şekil 7. Araştırma süreci.	49
Şekil 8. Barış'ın olasılık sorusu için ulaştığı genel ifade.	52
Şekil 9. Sevdâ'nın olasılık sorusunun çözümündeki yazılı ifadeleri.	60
Şekil 10. Melek olasılık sorusunu çözerken kaydedilen videodan bir kesit.	61
Şekil 11. Melek'in olasılık sorusu için oluşturduğu özel durumlar	61
Şekil 12. Barış'ın olasılık sorusunda ulaştığı genelleme.	67
Şekil 13. Melek'in olasılık sorusunda ulaştığı genel ifade	67
Şekil 14. Uğur'un olasılık sorusu için ulaştığı genelleme.....	68
Şekil 15. Tuğçe'nin olasılık sorusunda ulaştığı genel ifade.....	69
Şekil 16. Sevdâ'nın olasılık sorusu için ulaştığı genelleme ve bir özel durum örneği.	70
Şekil 17. Hande'nin olasılık sorusu için genellemeye ulaşma çabası.	72
Şekil 18. Murat'ın veri işleme sorusunda şiir, roman ve hikâye sayılarına yönelik oluşturduğu özel durumlar.	75
Şekil 19. Sevdâ'nın içler ve dışlar çarpımı yaptıktan sonra çarpım durumundaki 120 ve 12'nin sadeleşeceğini ifade ettiği andan bir kesit.	79
Şekil 20. Melek'in veri işleme sorusunu çözüm sürecinin başlangıcında yazdığı genel ifadeler.	80
Şekil 21. Hande'nin veri işleme sorusunda bulduğu özel durumlar ve ulaştığı genel ifade.	90
Şekil 22. Murat'ın genellemeye ulaşma sürecindeki yazılı ifadeleri.	91

Şekil 23. Uğur'un üslü ifade sorusunda E ve F değerleri için özel durumlar oluşturma sürecindeki yazılı ifadeleri.....	97
Şekil 24. Melek'in üslü soru sayısını çözdüğü sırada yazıp sildiği bölümü gösteren bir video kesiti.....	98
Şekil 25. Hande'nin üslü ifade sorusunda E için özel durumlar üzerinde çalışma sürecindeki yazılı ifadeleri.....	106
Şekil 26. Nehir'in üslü ifade sorusunun çözümünde E için özel durumlar bulma sürecindeki yazılı ifadeleri.....	108
Şekil 27. Melek'in üslü ifade sorusunda tamkare sayılar için ulaştığı genel ifade. .	116
Şekil 28. Tuğçe'nin üslü ifade sorusunda tamkare sayılarla ilgili olarak ulaştığı genel ifade.	118
Şekil 29. Sevda'nın tamkare sayılarla ilgili genelleme sürecindeki yazılı ifadesi..	123
Şekil 30. Hande'nin cebir öğrenme alanı sorusunda özel durumlar üzerinde çalışma sürecini gösteren yazılı ifadeleri	127
Şekil 31. Uğur'un her iki kurs için farklı aylardaki toplam tutarlarıyla ilgili yazılı ifadeleri.	128
Şekil 32. Sevda'nın her iki kurs için genel ifadeye ulaşma sürecindeki yazılı ifadeleri.	142
Şekil 33. Soldan sağa sırasıyla Barış ve Melek'in kursların karşılaştırılmasına ilişkin yazılı ifadeleri.	144

GİRİŞ

Matematik, belirli bir düzeni ve mantıksal bir sıralaması olan kavramlar ve işlemler üzerine kurulan, bu düzenin keşfi, analizi ve anlamlandırılması için zaman ve gayret gerektiren örüntü ve düzen bilimidir (Van De Walle, Karp & Bay-Williams, 2019). Aynı zamanda matematik, herhangi bir durum karşısında analitik düşünme, muhakeme etme, eleştirel düşünme ve problem çözme gibi becerilerle sıkı bir ilişkisi bulunan, azimle devam edilip ve geliştirilebilen bir düşünme sürecidir. Gerek gündelik yaşamda gerekse bilimsel ve teknolojik alanında matematiksel bilgiye ihtiyaç duyulmakta, profesyonel meslek yaşamlarında matematiksel düşünme ve problem çözme becerisi daha fazla öne çıkmakta ve pek çok meslek dalında matematiğe ihtiyaç duyulmaktadır (NCTM, 2000). MEB tarafından 2018 yılında güncellenen ilköğretim matematik öğretim programında tanımlanan birtakım yetkinlikler içerisinde, günlük yaşamda karşılaşılan problemler karşısında matematiksel düşünme tarzı geliştirme ve uygulama olarak ifade edilen matematiksel yetkinlik tanımı da matematiksel düşünmeye vurgu yapmaktadır. Dolayısıyla ülkemizde de öğrencilerin matematiksel düşünmeyi kazanmış olmaları önemli görülmektedir.

Uluslararası düzeyde uygulanan ve katılımcı ülke sayısının gittikçe arttığı PISA ve TIMSS değerlendirmeleriyle ülkelerin eğitim düzeyleri belirlenmekte ve bu sonuçların etkisiyle ülkelerin eğitim sistemlerinde değişikliklere gidilmektedir (Gürten, Demirkaya ve Doğan, 2019). Türkiye'nin PISA ve TIMSS matematik performansı değerlendirmeye katılan ülkelerin ortalamalarının altında bulunmaktadır (Kılcan, 2021). Bu durumun da etkisiyle ülkemiz eğitim sisteminde kademeler arası geçiş sınavlarında ve bu sınavlardaki soru tiplerinde değişikliklere gidilmektedir. Dolayısıyla 2018 LGS sınavı itibarıyla halk arasında “yeni nesil”, literatürde ise “beceri temelli” olarak bilinen sorular eğitim sistemimize giriş yapmıştır. Beceri temelli sorular kazanımlar odağında öğrencilerin okuduklarını anlama, problem çözme, sonuç çıkarıp analiz etme, eleştirel düşünme ve bilimsel düşünme gibi farklı üst düzey becerilerini ölçen sorular olarak tanımlanmaktadır (MEB, 2018B). Bu araştırmada güncel bir olgu olan beceri temelli soruların çözümünde sekizinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

1. GENEL BİLGİLER

Düşünme ve düşüncesini ifade edebilme insanı diğer canlılardan ayıran en temel beceridir. René Descartes'in "... Düşünüyorum, öyleyse varım" cümlesi ile ifade ettiği üzere düşünme, insanların varlığının göstergesi olarak kabul edilmektedir. Türk Dil Kurumu [TDK] Eğitim Terimleri sözlüğünde düşünme "*zihnin bir konuyla ilgili bilgileri karşılaştırarak ve aralarındaki bağlantıları inceleyerek bir yargı ya da karara varma etkinliği*" olarak tanımlanmaktadır (TDK, 2021). Yine TDK'ya ait felsefe terimleri sözlüğü ise yukarıdaki tanıma ek olarak düşünme eyleminin dil ile olan sıkı akrabalığına vurgu yapmakta ve düşünülen şeyler eğer dile aktarılamıyorsa düşünmenin biçim almadığını belirtmektedir (TDK, 2021). Burton'a (1984) göre düşünme; insanların çevrelerini anlamak ve kontrol altında tutabilmek için kullandıkları bir araçtır. Dewey'e göre ise kuşkudan ve kesin olmayıştan doğan düşünme; sorgulama, yeni bir düzen kurmaya çabalama, bu düzene uyum sağlayarak yeni bir zihinsel alışkanlığı oluşturma işidir (Dewey, 2019). Yıldırım'a (2020) göre düşünme en belirgin haliyle konudan ya da düzeyden bağımsız olarak bir problem çözme etkinliğidir ve düşünme sürecinde sorunu açıklayıcı bir çözümün bulunması ve bulunan çözümün doğruluğunun kontrol edilmesi şeklinde iki aşama bulunmaktadır.

Düşünmeye yönelik bu farklı tanımların ortak özellikleri olarak olayları ya da olguları anlama isteği, araştırma ve sorgulama eylemleri öne çıkmaktadır. Erdener (2009), Piaget ve Vygotsky'nin dil ve düşüncenin gelişimi hakkındaki ortak düşüncelerinden birini, konuşmanın niteliğindeki değişimlerle düşüncenin niteliğindeki değişimlerin birbirine paralel olduğu ifadesiyle belirtmektedir. Polya (2017) bir kelimenin gücünün sesinde ya da konuşmanın yarattığı havada olmadığını, kelimelerin hatırlattığı düşünceler ve düşüncelerin dayalı olduğu gerçeklerde olduğunu ifade etmektedir. Bu nedenle kullanılan kelimelerin ardındaki anlamların aranması eğitim sürecinde önemli bir yönelim olarak karşımıza çıkmaktadır. Buradan hareketle düşünme; herhangi bir bağlamda karşımıza çıkabilen, zihinsel bir aktivite gerektirerek çözüm bulma arayışlarını tetikleyen ve dile de aktarılması gereken zihinsel bir süreç olarak ifade edilebilir.

Kelimeler, işaretler, semboller vb. şeyler olmadan zihnimizi neredeyse hiç kullanamayacağımızı ifade eden Polya (2017) kelimelerin gücünün bize hatırlattığı

düşüncelerde ve bu düşüncelerin dayandığı gerçeklerde olduğunu belirtmektedir. İnsanlar günlük yaşamlarında karşılaştıkları problemlere çözümler bulmaya çalışır, bu çözümlerin doğruluğunu kontrol eder, gerekirse çürütür, değiştirir ve böylece problem durumunu anlamlandırır. Harel ve Sowder (2005) bu tür eylemleri düşünme biçimleri olarak tanımlamaktadır (akt. Bal ve Dinç Artut, 2020). Günlük hayatta da oldukça sıklıkla duymaya başladığımız analitik, eleştirel, yaratıcı, yansıtıcı, matematiksel, tümevarımsal, yakınsak, ıraksak, inovatif, geometrik, global vb. çok farklı düşünme biçimleri mevcuttur. Problem çözme ve dolayısıyla matematik yapma da bu düşünme biçimlerinden biri olan matematiksel düşünme eyleminin rahatlıkla gözlenebildiği bir alan olarak karşımıza çıkmaktadır. Matematiksel düşünme daha çok matematikle bağdaştırılsa da pek çok farklı bağlamda karşımıza çıkabilen bir düşünme biçimidir.

1.1. Araştırma Problemi ve Araştırma Soruları

Beceri temelli sorular ile öğrencilerin okuduğunu anlama yorumlama, sonuç çıkarma, analiz yapma, eleştirel düşünme gibi üst düzey becerilerinin ölçülmesi amaçlanmaktadır (MEB, 2018a). Bu soruların çözümünde matematik derslerinde edinilen bilgiler yeterli olamamakta, üst düzey becerilerin işe koşulması gerekmekte ve dolayısıyla öğrenciler bu süreçte zorluklar yaşamaktadırlar. Alanyazında öğretmenlerin bu sorulara ilişkin algılarını/görüşlerini inceleyen (Erden, 2020; Güler, Arslan ve Çelik, 2019; Kertil, Gülbağcı-Dede ve Ulusoy, 2021; Ünsal ve Kaba, 2022), öğretmenlerin LGS soruları ile daha önceki sınavları karşılaştırmalarını irdeleyen (Biber, Tuna, Uysal ve Kabuklu, 2018), uzmanların beceri temelli sorulara ilişkin görüşlerini inceleyen (Gürten, Demirkaya ve Doğan, 2019), 2018 Liseye Geçiş Sistemi [LGS] matematik sorularını yenilenmiş Bloom taksonomisine göre inceleyen (Ekinci ve Bal, 2019) ve öğrenciler için yeni nesil matematik sorularına yönelik tutum ölçeği geliştirmeye yönelik (Kılcan, 2021) çalışmalar mevcuttur. Ancak beceri temelli matematik sorularının çözümünde öğrencilerin yaşadıkları süreçlere yönelik herhangi bir araştırmaya rastlanmamıştır. Özellikle beceri temelli soruların yapısını oluşturan matematiksel düşünme süreçlerinin ortaya konmasının önemli görülmektedir. Dolayısıyla bu araştırmada ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin beceri temelli sorulardaki matematiksel düşünme süreçleri ortaya konulmaya çalışılacaktır. Ortaokul düzeyinde yapılan çalışmalarda öğrencilerin ulaştıkları genellemeleri ispat

etme/doğrulama noktasında sorun yaşadıkları genel olarak ulaşılan bir bulgu olduğu için (Aydın-Güç, Orbay ve Aygün, 2021; Aygün, 2019; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Tosun, 2019; Yiğit, 2019) bu araştırmaya matematiksel düşünme süreçlerinin doğrulama/ıspat boyutu dahil edilmemiştir. Bu doğrultuda aşağıdaki problem ve alt problemler incelenmiştir:

Araştırma problemi:

Sekizinci sınıf öğrencilerinin beceri temelli sorularda özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri nasıldır?

Alt araştırma soruları:

- i. Öğrencilerin olasılık öğrenme alanıyla ilgili beceri temelli sorularda özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri nasıldır?
- ii. Öğrencilerin veri işleme öğrenme alanıyla ilgili beceri temelli sorularda özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri nasıldır?
- iii. Öğrencilerin sayılar ve işlemler öğrenme alanıyla ilgili beceri temelli sorularda özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri nasıldır?
- iv. Öğrencilerin cebir öğrenme alanıyla ilgili beceri temelli sorularda özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri nasıldır?

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmada sekizinci sınıf öğrencilerinin beceri temelli soruların çözümünde yaşadıkları matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

1.3. Araştırmanın Gerekçesi ve Önemi

Burton'a (1984) matematiksel düşünme keskin hatlarla birbirinden ayıramayan özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma, genelleme ve ikna etme süreçlerinden oluşmaktadır. Özel durumlar üzerinde çalışma, bir problem durumuna uygun olacak şekilde birden fazla durumun tespit edilmesini içermektedir. Ortaya çıkan bu durumlar arasındaki örüntülerin ya da ilişkilerin incelenmesiyle birlikte problem çözücünde belirsiz ve/veya dağınık düşünceler oluşmaktadır. Bu düşünme süreci varsayımda bulunma süreci olarak ifade edilebilir. Oluşan bu

varsayımlar değiştirilip geliştirildiğinde genellemelere ulaşılmaktadır. Matematiksel düşünme süreçlerinin sonuncusu ise matematikte ispat olarak ifade edilen ulaşılan genellemelerin kanıtlanması sürecidir. Aslında bu süreç sadece matematiksel problem durumlarında değil, insanların günlük yaşamlarında da kullanılmaktadır.

Matematik eğitiminde öğrencilere matematiksel düşünme becerisi kazandırmak öncelikli amaçlar arasındadır. Bu nedenle ortaokul matematik dersi öğretim programında da sıklıkla vurgulanan matematiksel düşünme süreçlerinde ortaokul öğrencilerinin davranışlarının incelenmesi önemlidir. Dolayısıyla öğrencilerin 2018 yılında LGS sınav sistemi ile tanıştıkları, birden fazla kazanımı barındıran, yorumlama, sonuç çıkarma, analiz etme, bilimsel süreç becerilerini kullanma (MEB, 2018b) ve üst düzey düşünme becerilerinin işe koşulmasını gerektiren beceri temelli sorularda matematiksel düşünme süreçlerinin araştırılması da önemli görülmektedir. Alanyazında beceri temelli sorulara ilişkin öğretmenlerin algılarını ya da düşüncelerini inceleyen (Erden, 2020; Güler, Arslan ve Çelik, 2019; Kertil, Gülbağcı-Dede ve Ulusoy, 2021; Ünsal ve Kaba, 2022), öğretmenlerin beceri temelli sorular kullanılarak uygulanan LGS ile daha önceki sınavları karşılaştırmalarını inceleyen (Biber, Tuna, Uysal ve Kabuklu, 2018), alan uzmanlarının beceri temelli sorulara yönelik görüşlerini inceleyen (Gürten, Demirkaya ve Doğan, 2019), LGS matematik sorularını yenilenmiş Bloom taksonomisine göre inceleyen (Ekinci ve Bal, 2019) ve öğrenciler için yeni nesil sorulara yönelik tutum ölçeği geliştirmeye yönelik (Kılcan, 2021) çalışmalar mevcuttur. Matematiksel düşünme süreçlerine yönelik incelenen araştırmalar öğretmen ve / veya öğretmen adaylarıyla (Bal ve Dinç-Artut, 2019; Coşkun, 2012; Çeziktürk-Kipel, 2016; Dede ve Argün, 2004; Ersoy ve Başer, 2012; Ersoy ve Güner, 2014; Tuncay, 2015; Uzun, Topan, Demir ve Çelik, 2019; Yiğit, 2019), lise öğrencileriyle (Arslan ve Yıldız, 2010; Durmuş Akgeyik, 2019; Tosun, 2019; Umay, 1993; Yağdıran, 2018; Yeşildere ve Türnüklü, 2007,) ve ortaokul öğrencileriyle (Akarsu-Yakar ve Yılmaz, 2019; Aydın-Güç, Aygün ve Orbay, 2021; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2017) gerçekleştirilmiştir. Bu çalışmaların çoğunluğu öğretmen adaylarıyla olmakla beraber oldukça az bir kısmı ortaokul öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Ortaokul öğrencileriyle yapılan araştırmalarda Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2017) ve Yıldırım (2015) geometri problemlerini odak olarak almış,

Akarsu Yakar ve Yılmaz (2019) ise matematiğin üç dünyası teorisine göre öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Aydın-Güç, Aygün ve Orbay (2021) üstün yetenekli tanısı olan ve olmayan öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini karşılaştırırken, Kükey (2018) de öğrencilerin matematiksel düşünme biçimleri ile öğrencilerin düşünme biçimleri hakkında öğretmenlerin düşüncelerini incelemiştir. Yapılan incelemeler neticesinde beceri temelli sorular kullanılarak ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini inceleyen herhangi bir araştırmaya rastlanılamamıştır. Bu araştırmanın alanyazındaki bu boşluğun giderilmesine katkıda bulunacağı öngörülmektedir.

1.4. Araştırmanın Varsayımları

Araştırma grubunda bulunan öğrencilerin, veri toplama aracında bulunan soruların çözümünde gerekli olacak olan matematiksel ön bilgilere sahip oldukları, araştırmacının yönelttiği sorulara herhangi bir kaygı taşımadan, içtenlikle cevap verdikleri varsayılmaktadır. Kullanılan beceri temelli sorular için alınan uzman görüşlerinin yeterli olduğu ve bu sorular ile öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin ortaya çıkarılabileceği varsayılmaktadır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma ortaokul sekizinci sınıf düzeyinde lise giriş sınavına girecek olan ve sınavla öğrenci alan liseleri kazanma hedefi olan öğrencilerin beceri temelli matematik sorularındaki matematiksel düşünme süreçlerini kapsamaktadır. Araştırmacı, üç yıldır matematik derslerini yürüttüğü sınıflardaki öğrenciler arasından öğrencilerin başarı durumlarını ve kendilerini ifade etme becerilerini göz önünde bulundurarak çalışma grubunu belirlemiştir.

Araştırmada kullanılan sorular Millî Eğitim Bakanlığı [MEB] tarafından uygulanmış LGS sınavlarında yer alan, genellemeler oluşturmaya müsait olan ve öğrencilerin yorumlayarak da yapabileceği problem tipindeki dört soruyla sınırlıdır. Koronavirüs salgını sonrasında en çok etkilenen geometri ve ölçme öğrenme alanına yönelik sorular, ön öğrenme yetersizliği öngörüldüğünden kapsam dışında bırakılmıştır.

Araştırmanın katılımcılarının koronavirüs pandemisinin başlangıç sürecinde

yaşadığı yaklaşık altı aylık eğitim-öğretim kesintisi ve yedinci sınıf sürecini tamamen uzaktan eğitimle geçirmiş olmaları da bu araştırmanın sınırlılıklarındandır. Arı (2004) üç aylık yaz tatili süreci sonrasında sosyoekonomik düzeyleri ne olursa olsun öğrencilerin matematik bilgilerinde kayıplar yaşadıklarını belirtmektedir. Cooper (2003) öğrenme kayıpları üzerinde yapılmış olan Cooper, Nye, Charlton, Lindsay ve Greathouse'un (1996) meta analiz çalışmasına dayanarak üç aylık yaz tatili süreci sonrasında okuma becerilerine nazaran matematikteki öğrenme kayıplarının öğrencilerin etnik köken, sosyoekonomik düzey ya da evlerindeki kaynaklar fark etmeksizin neredeyse eşit olduğunu belirtmektedir. Öğrenme kayıpları üzerine yazmış olduğu derleme makalesinde Baz (2021) farklı araştırmaları referans göstererek koronavirüs pandemisi sonrasında eğitim öğretim sürecindeki uzun süreli kesintinin, yüz yüze eğitimden uzak kalınan sürecin ve bizzat uzaktan eğitim uygulamalarının öğrenme kayıplarında artış oluşturacağını ifade etmektedir. Ayrıca öğrenme kayıplarındaki en önemli etkenlerin öğrencilerin sosyoekonomik düzeyleri ile ebeveynlerinin eğitim düzeyleri olduğu makale içerisinde sıklıkla vurgulanmaktadır. Bu araştırmanın katılımcılarının çoğunluğu için bu etkenler geçerli olduğundan katılımcıların öğrenme kaybı yaşamış olma olasılığının yüksekliği de bir diğer sınırlılıktır.

Sekizinci sınıf düzeyinde üslü ifadeler konusuna başlanmışken sınıfta iki koronavirüs vakası çıkması neticesinde katılımcıların iki haftalık ve daha sonra yine iki haftalık bir süreci uzaktan eğitimle geçirmiş olmaları da bu araştırmanın bir sınırlılığıdır.

1.6. Alanyazın İncelemesi

1.6.1. Beceri Temelli Sorular

Uluslararası düzeyde uygulanan ve ülkeler bazında katılımın giderek arttığı Programme for International Student Assessment [PISA] ve Trends in International Mathematics and Science Study [TIMSS] gibi değerlendirmeler aracılığıyla ülkelerin eğitimdeki düzeyleri karşılaştırılmakta ve bu sınavların sonuçları da ülkelerin eğitim sistemlerine ve eğitim politikalarına yön vermektedir (Gürten, Demirkaya ve Doğan, 2019). Matematik derslerinde edinilen başarının öneminin oldukça büyük olduğu

PISA ve TIMSS’de Türkiye’nin matematik performansı katılan ülkelerin ortalamalarının altında bulunmaktadır (Kılcan, 2021). Bu sonuçların da etkisiyle ülkemizde 1999 yılından günümüze, ortalama dört yılda bir olmak üzere, farklı liseye geçiş sınavı uygulamalarına (LGS, OKS, SBS, TEOG, LGS) gidilmiştir (Güler, Arslan ve Çelik, 2019). Uluslararası düzeyde uygulanan bu sınavların Türkiye’deki bir diğer etkisi ise seçme ve yerleştirme sınavlarında kullanılan soru yapısındaki değişikliklerdir. 2018 yılı itibarıyla uygulamaya konulan LGS yönergesinde, öğretim programlarında yer alan “kazanımlar esas alınarak öğrencinin okuduğunu anlama, yorumlama, sonuç çıkarma, problem çözme, analiz yapma, eleştirel düşünme, bilimsel süreç becerileri vb. becerilerini ölçecek nitelikte” sorular kullanılmaktadır (MEB, 2018b).

Miller, Linn ve Gronlund (2009) yazılı materyaller, grafik, tablo, resim, harita, şema vb. bir bağlam ve bu bağlama dayalı olarak yorum yapma, analiz etme, problem çözme veya matematiksel muhakeme yapma gibi üst düzey beceriler kullanmayı gerektiren objektif açık uçlu test maddelerini barındıran soruları yorumlama alıştırmaları (*interpretive exercises*) olarak tanımlamaktadır (akt. Kertil, Gülbağcı Dede ve Gülen Ulusoy, 2021). Matematiksel bilgi ve becerilerin gerçek yaşama aktarılması ve yorumlanması olarak tanımlanan matematik okuryazarlığını ölçme amacıyla uygulanan PISA’da (Kabael ve Ata Baran, 2019), öğrencilerin hem okul hem de okul dışındaki yaşamlarına odaklanılmaktadır (Stacey & Turner, 2015). PISA sorularını inceleyen Kabael (2019), bu soruların matematik okuryazarlığı alanında matematiksel süreçler olarak problem durumunu matematiksel olarak formüle etme, matematiği kullanma ve matematiksel çıktıları yorumlama ve değerlendirme bileşenlerini içerdiğini; her bir bileşenin altında ise iletişim, matematikleştirme, temsil, muhakeme ve argüman, strateji üretme, matematiksel dil ve işlemleri kullanma yeterliklerine odaklandığını ifade etmektedir (bkz. s. 32-33). Erden’e (2020) göre PISA ve TIMSS sınavlarının da etkisiyle bu yoruma dayalı alıştırmalar, 2018 LGS sınavı itibarıyla Türk eğitim sistemine beceri temelli sorular olarak giriş yapmıştır. Kertil, Gülbağcı Dede ve Ulusoy (2021) PISA’da kullanılan soruların beceri temelli sorular için iyi birer örnek olduğunu ifade etmektedir. Ayrıca 2018’de yenilenen ortaokul matematik öğretim programının özel amaçları içerisinde de öğrencilerin matematik okuryazarlığı becerisi, matematiksel kavramları günlük hayatta

kullanabilmesi, problem çözme sürecinde düşünce ve akıl yürütmelerini ifade edebilmesi, araştırma yapma, bilgi üretme ve kullanma becerisi, tahmin etme becerisi gibi nitelikler ön plana çıkmaktadır (MEB, 2018a).

PISA ve TIMSS'in eğitim politikaları ve öğretim programları üzerindeki etkisi üzerine çalışan Gürlen, Demirkaya ve Doğan (2019), bu sınavlara yönelik çalışan uzmanlarla yaptıkları araştırma sonucunda, uzmanların sınavların içerik ve kapsamının öğretim programlarına uygun olduğunu ve sonuçların eğitim sistemleri hakkında bilgi verse de bu bilginin tek başına yeterli olmadığını düşündüklerine ulaşılmıştır. Ayrıca uzmanların ve akademisyenlerin bu sınavların çeviri ve uyum süreçleri, sonuçlarının değerlendirilmesi, sonuçlar ile eğitim politikaları arasında ilişki kurma ve gelecek eğitim politikalarını etkileme durumlarına ilişkin görüş ayrılıkları olduğu belirlenmiştir.

Beceri temelli sorular Türk Eğitim sisteminde güncel bir konudur. Beceri temelli sorular kapsamında matematik öğretmenleriyle görüşerek yaptıkları çalışmada Kertil ve ark. (2021), öğretmenlerin bu sorulara ilişkin olumlu düşüncelerde olduklarını, ders kitaplarını beceri temelli sorular bakımından yetersiz bulduklarını ve öğretmenlerin bu soruları sürekli olmasa da dersler içerisinde kullandıklarını tespit etmişlerdir. Kertil ve ark. (2021) ayrıca LGS gibi sınavlarda kullanılan soru tiplerinin, öğretim programlarında yapılan değişikliklere nazaran öğretmenlerin ders için uygulamalarını daha fazla etkilediğini ortaya çıkarmışlardır. Biber, Tuna, Uysal ve Kabuklu (2018) destekleme ve yetiştirme kurslarına katılan öğretmenlerle yürüttükleri ve LGS ile TEOG'u karşılaştırmayı da amaçladıkları çalışmada, öğretmenlerin büyük kısmının LGS soruları için yorumlama, çıkarım yapma, analitik düşünme gibi üst düzey becerileri gerektirdiğini belirttiğini; TEOG'da ise soruların çoğunlukla bilme, kavrama, uygulama düzeyine yönelik olduğunu belirttikleri sonucuna ulaşmışlardır. Ekinci ve Bal (2019) ilk defa 2018 yılında uygulanan LGS matematik sorularını Yenilenmiş Bloom Taksonomisine göre analiz ettikleri çalışmada soruların sadece uygulama ve analiz etme basamaklarına yönelik olduğu sonucuna ulaşmışlardır. 2018 LGS matematik soruları için diğer bir sonuç ise birden fazla kazanımı barındıran, güncel hayatla ilişkili, yoruma dayalı, çeldiricileri bulunan ve işlem becerisi gerektiren, dolayısıyla üst düzey düşünme becerileri ölçmeye yönelik sorular olduğudur.

Erden (2020) Türkçe, Matematik ve Fen Bilimleri öğretmenlerinin LGS hakkındaki görüşlerini incelediği araştırmasında öğretmenlerin LGS sorularının Türkçe ve Matematik dersleri için öğretim programlarında yer alan kazanımlarla uyumlu olmadığını ve ders kitaplarının beceri temelli sorularla ilgili yeterli rehberlik yapmadığını düşünme eğiliminde oldukları sonucuna ulaşmıştır. Benzer bir çalışmada Güler, Arslan ve Çelik (2019) öğretmenlerin öğrencilerinin başarılarını yetersiz bulduğunu; sınav sorularını nitelikli bulmalarının yanında soruların zorluğunun azaltılması ve sayısal bölüm için sürenin artırılması gerektiğini düşündükleri sonucuna ulaşmışlardır. Ünsal ve Kaba (2022) beceri temelli soruların öğretmenler üzerindeki algısına yönelik yaptıkları çalışmada beceri temelli soruların okuma becerisi ile üst düzey zihinsel becerilerin kullanılmasını gerektiren, öğrenciler açısından zorlayıcı, günlük hayatla ilişkili ve ayırt edici sorular olduğu sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca bu soruların öğrencilerin problem çözme ve üst düzey düşünme becerilerini geliştirmeye, yorum becerilerini artırmaya, grafik okuma becerisini artırmaya katkı sağladığı sonucuna ulaşmışlardır. Beceri temelli sorulara yönelik bu çalışmada ortaya çıkan diğer önemli bulgu ise akademik başarısı düşük olan öğrencilerin ve sınav sürecinde zaman yönetimi iyi olmayan öğrencilerin başarısızlık duygusu yaşamaları olmuştur.

Beceri temelli sorular ile ilgili olarak yapılan çalışmalarda öğretmenlerin beceri temelli sorulara yönelik algısı (Ünsal ve Kaba, 2022); matematik öğretmenlerinin beceri temelli sorular hakkındaki düşünceleri (Kertil ve ark., 2021); 2018 LGS'ye yönelik matematik öğretmenlerinin düşünceleri (Güler , Arslan ve Çelik, 2019); LGS ve TEOG'un öğretmenler gözüyle karşılaştırılması (Biber, Tuna, Uysal ve Kabuklu, 2018); PISA ve TIMSS sınavlarının eğitim politikalarına ve eğitim programları üzerine etkisine ilişkin uzman görüşleri (Gürten, Demirkaya ve Doğan, 2019); Türkçe, matematik ve fen bilimleri öğretmenlerinin LGS hakkındaki görüşleri (Erden, 2020); LGS'nin yenilenmiş Bloom taksonomisine göre incelenmesi (Ekinci ve Bal, 2019) ve yeni nesil matematik sorularına ilişkin öğrenci tutum ölçeği geliştirme (Kılcan, 2021) çalışmalarının yapıldığı görülmektedir. İncelenen çalışmalardan da görüldüğü üzere öğrencilerin beceri temelli matematik sorularını çözerken yaşadıkları sürece odaklanan çalışmaya rastlanmamıştır.

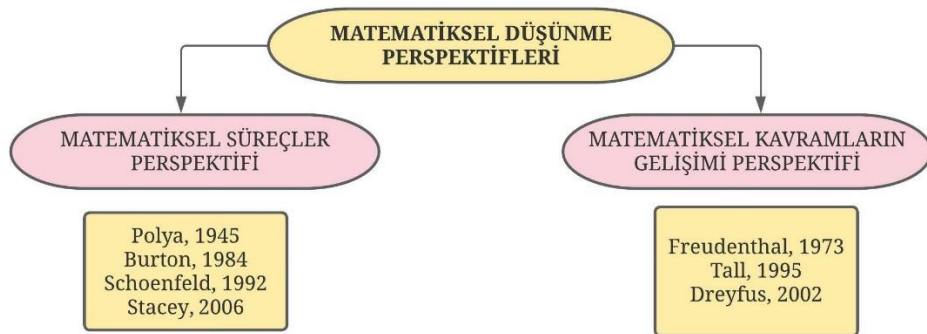
1.6.2. Matematiksel Düşünme

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000) matematiksel düşünmeyi bağlantılar aramak olarak ifade etmekte ve farklı konular arasında bağlantılar kurmanın matematiksel anlayışı oluşturmanın temeli olduğunu belirtmektedir. Matematiksel fikirler arasındaki bağlantıları tanıma ve kullanma, matematiksel fikirlerin birbiri üzerine nasıl inşa edildiğini anlama ve matematik dışı bağlamlarda matematiği tanıyarak uygulama ortaokul düzeyi her öğrencinin kazanması gereken becerilerin bir kısmı olarak standartlar içerisinde yerini almaktadır. NCTM'ye (2000) göre matematiksel düşünme becerisinin gelişimi için düşüncelerin rahatlıkla ifade edilebileceği, sorgulama merkezli, yansıtıcı ve işbirlikli sınıf ortamları ve sınıfta öğretmen ve öğrenciler arasında oluşan normlar oldukça önemlidir. Bu tür sınıf ortamlarının konular arası bağlantılar kurulmasını teşvik edeceği alanyazında sıklıkla vurgulanmaktadır. Buradan hareketle; matematiksel düşünceyi geliştirebilmek için matematiğe birbiriyle bağlantılı disiplinlerin birleşimi olarak odaklanmak matematik öğretim programlarının odak noktası olmalıdır. Yansıtıcı düşünmeyi teşvik eden sınıf ortamının yanında öğretim sürecinde kullanılan zengin içerikli matematiksel etkinlikler ve öğrencileri düşünmeye sevk edecek zorlayıcı problemler de matematiksel düşüncenin gelişimi açısından önemli olan diğer faktörlerdir.

MEB tarafından son olarak 2018 yılında güncellenen ortaokul matematik öğretim programında, ulusal ve uluslararası düzeyde kazanılması gereken birtakım yetkinlikler tanımlanmaktadır. Bunlardan biri olan matematiksel yetkinlik; “*günlük hayatta karşılaşılan bir dizi problemi çözmek için matematiksel düşünme tarzını geliştirme ve uygulama*” şeklinde ifade edilmektedir (MEB, 2018a, s. 5). MEB (2018a) yoğun aritmetik etkinlikleriyle başlayan matematiksel yetkinlik süreci için, mantıksal ve uzamsal düşünme ile birlikte çoklu temsilleri kullanma becerisi ve isteğini içerdiği de belirtmektedir. Ortaokul matematik öğretim programında yer verilen, matematiksel düşünme özelinde ele alınabilecek bir diğer yetkinlik ise öğrenmeyi öğrenmedir. Bu yetkinlik, bireyin etkili zaman ve bilgi yönetimi beraberinde öğrenme ihtiyaçlarının ve öğrenme süreçlerinin farkında olmasını ve başarılı bir öğrenme eylemi için zorluklarla başa çıkma yeteneğini kapsamaktadır (MEB, 2018a). Buradaki zorluklarla başa çıkabilme vurgusu problem çözme süreçleri ve dolayısıyla matematiksel düşünme süreçlerini ateşleyebilmek adına oldukça önemlidir.

Yıldırım'a (2020) göre düşünme konu ya da düzeyden bağımsız bir problem çözme etkinliği olarak tanımlanmaktadır. Bu problem çözme etkinliği bünyesinde *sorunu giderici bir çözümün bulunması* ve *bulunan çözümün doğruluğunun yoklanması* şeklinde iki aşama bulundurmaktadır. Yıldırım (2020) bu noktada, günlük yaşam, bilim ve matematikten örneklerle bu iki aşamayı açıklayıp matematiksel düşünmenin günlük düşünme ve bilimsel düşünmeden farklılıklarını irdelemektedir. Doğruluk; günlük düşünmede kişisel gözlemlere, bilimsel düşünmede deney ya da araştırma verilerine; matematik ve mantıkta ise ispata bağımlıdır. Matematiği ispata dayalı olması nedeniyle salt dedüktif bir bilim saymanın yanlış olduğunu ifade eden Yıldırım, matematikte indüktif ve hatta retrodüktif (hipotez veya teori oluşturmaya yönelik düşünme) düşüncelerin de önemli olduğunu vurgulamaktadır. Matematik hem varsayımlardan hareketle teoriye yönelik düşünme (retrodüktif), hem genellemeye gitme (indüktif), hem de genellemeyi ispatlamaya (dedüktif) yönelik düşünme süreçlerini içermektedir.

Matematiksel düşünmenin farklı araştırmacılar ve dolayısıyla farklı bakış açılarıyla şekillenmiş birçok tanımı bulunmaktadır. Bu tanımlar incelendiğinde *süreçler* ve *matematiksel kavramların gelişimi* şeklinde iki farklı perspektifin öne çıktığı görülmektedir. Matematiksel düşünmeyi süreçler perspektifiyle ele alan görüş, matematiksel düşünmenin nasıl gerçekleştiğine odaklanarak matematiksel düşünmeyi daha geniş bir bağlamla ilişkilendirmektedir. Matematiksel düşünmeyi matematiksel kavramların gelişimi perspektifiyle ele alan görüş ise matematiksel kavramların birbirinin üzerine eklemlenerek insanın zihninde nasıl şekillendiğine odaklanmaktadır. Şekil 1'de matematiksel düşünmeye yönelik alanyazında önce çıkan iki farklı perspektife ve başlıca temsilcilerine yer verilmiştir.



Şekil 1. Matematiksel düşünme perspektifleri ve başlıca temsilcileri

1.6.2.1. Matematiksel Kavramların Gelişimi Perspektifiyle Matematiksel Düşünme

Matematiksel düşünmeyi matematik bağlamında ele alarak matematiksel kavramların zihinde yapılanmasını inceleyen bu görüşün temsilcilerinden biri Hollandalı matematikçi Hans Freudenthal'dır. "Mathematics as an educational task" adlı eserinde Freudenthal (1973), matematiksel düşünmeyi matematikleştirme (mathematizing) olarak ifade etmekte ve gerçek deneyimlerle başlayıp matematikle – üzerine yeni kavramların inşa edileceği bir nesneyle- sonuçlanan bir süreç olarak tanımlamaktadır. Gerçekçi matematik eğitimi kuramının kurucusu da olan Freudenthal, tarihte matematiğin gerçek yaşam problemleri ile başlayıp matematikleştirildiğini ve daha sonra formal sisteme geçildiğini vurgulamaktadır. Freudenthal'ın gerçek dünyadan matematik dünyasına geçiş olarak ifade ettiği bu geçiş başlı başına bir matematiksel modelleme sürecidir. Altun (2006), önce formal bilginin verilip peşi sıra uygulamaya geçme şeklinde sürdürülen geleneksel öğretim sürecinin tüm bu nedenlerden ötürü didaktik olmadığını ifade etmektedir.

Tall (1995), matematiksel düşünmenin somut dünya (the conceptual-embodied world), sembolik dünya (the proceptual-symbolic world) ve formal dünya (the axiomatic-formal world) olarak tanımladığı dünyalar arasında ilişki kurularak gerçekleştiğini ifade etmektedir (akt. Dinç Artut, 2020). Matematiğin üç dünyası olarak nitelendirilen bu kuramsal çerçevede Tall somut dünya ile nesnelerin dış görünümünün temsili; sembolik dünya ile eylemiyle birlikte kavram ifadesinin temsili ve aksiyomatik formal dünya ile de ispatlama süreciyle birlikte kavramın temsili ifade etmektedir. Yılmaz ve Akarsu Yakar (2019) bu üç dünyanın birbirini takip eden bir süreç olduğunu belirtmektedir. Tall'un matematiksel düşünme tanımı tamamen soyutlama odaklıdır. Tall'un bir diğer çalışma alanı olan ileri matematiksel düşünme ise en somut matematiksel kavramlardan hareketle en ileri düzey olan lise, hatta lisans ve ileri düzey matematiksel kavramlara doğru yapılan bir yolculuk olarak betimlenebilir.

Dreyfus (2002) da matematiksel düşünmeyi Tall'a benzer şekilde ele almaktadır. Matematiksel kavramların inşasında keşfetme, tanımlama, kanıtlama gibi süreçlerin işlediğini belirten Dreyfus, soyutlama ve temsil etme süreçlerinin matematiksel düşünmedeki önemini de vurgulamaktadır (akt. Çelik, 2016).

1.6.2.2. Süreçler Perspektifiyle Matematiksel Düşünme

Matematik öğretiminin odağını problem çözme olarak kavramsallaştıran George Pólya “Nasıl Çözmeli” olarak Türkçe’ye çevrilen eserinde matematiksel düşünme süreçlerini problem çözme bağlamında ele almıştır. Adı geçen bu eseri kitabın önsözünde de geçen ifadeleriyle Schoenfeld (1987) “bu kitap, problem çözme dünyasını Pólya’dan önceki ve Pólya’dan sonraki dönem olarak ikiye ayırmıştır” ifadeleriyle betimlemektedir. Pólya’ya (2017) problem çözmeyi, yüzmek gibi pratik bir beceriye benzetmekte ve bu tür becerilerin taklit ederek ve uygulamalar yapılarak kazanıldığını ifade etmektedir. Dolayısıyla problem çözme bir süreç gerektirmektedir ve bu süreç isteklilikle başlayıp, taklit ve pratikle yaparak yaşayarak öğrenilir. Pólya (2017) problem çözmeyi öğrenme bağlamında ele aldığı matematiksel düşünme süreçlerini problemi anlama, bir plan oluşturma, planı uygulama ve geriye dönüp bakma olarak isimlendirdiği dört aşamada açıklamaktadır. Problemi anlama aşamasında verilenler ve istenenlerin belirlenmesi, gerekli ve gereksiz verilerin ayıklanması ve problem durumunun çözücünün kendi ifadeleriyle sözel olarak ifade edilmesi işlemleri gerçekleştirilir. Bir plan oluşturma aşamasında; çözücü karşındaki probleme benzer bir problemle karşılaşp karşılaşmadığını düşünerek bilinenler ve bilinmeyenler arasında bağ kurmaya çalışır. Gerekli durumlarda problem durumunu basitleştirerek adım adım ilerlemesi gereklidir. Bu aşamada varsayımlar oluşturulur. Planı uygulama aşaması; oluşturulan varsayımların test edildiği aşamadır. Varsayımların yanlış olduğu durumlarda bir önceki aşamaya dönülerek yeni bir plan oluşturulması gerekmektedir. Varsayımların doğrulandığı durumlar genellemelere fırsat verdiği için matematiksel düşünme açısından oldukça önemlidir. Geriye dönüp bakma ise çözümün kontrol edildiği ve sonucun kullanılabileceği farklı durumların düşünüldüğü aşamadır. Bu aşama sınıf ortamlarında genellikle atlansa da geriye dönüp bakma, bilgilerin pekiştirilmesi ve problem çözme yeteneklerinin geliştirilmesi açısından oldukça önemlidir. Ayrıca elde edilen sonuç başka problemlerin başlangıç noktası olarak işe koşulduğunda farklı bağlantıların kurulmasına da olanak sağlamaktadır.

Burton (1984) düşünmeyi, insanların çevrelerini anlamaları ve çevre üzerinde kontrol sağlayabilmeleri için araç olarak tanımlamaktadır. Mason, Burton ve Stacey (2010) ise matematiksel düşünmeyi üstesinden gelinebilecek fikirlerin karmaşıklığını

artırmayı sağlayarak anlayışı genişleten dinamik bir süreç olarak tanımlamaktadır. Burton (1984) çok geniş bir uygulama alanı olsa da matematiksel düşünmeyi, dayandığı işlemlerin matematiksel olması nedeniyle “matematiksel” olarak nitelendirmektedir. Okulların çoğunlukla matematiksel içeriğe ve tekniklere önem verip matematiksel düşünme süreçlerine gerekli vurgu yapmamasını eleştiren Burton, öğretmenlerin bu süreçler hakkında farkındalık sağlamaları gerektiğini belirtmektedir. Matematiksel düşünme, doğal olarak matematiksel nitelikteki problemlerde daha kolay gözlemlenebilmektedir. Burton’a göre ilişkilerin incelenmesi ve dört işlem matematik yapmanın merkezinde yer almaktadır. Bu bağlamda Burton (1984) matematiksel düşünmeyi özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımlarda bulunma, genelleme ve ikna etme olmak üzere birbiriyle bağlantılı dört süreç olarak ele almaktadır. Bu süreçleri kısaca açıklayacak olursak; bir problem durumunda insanlar o problemi çözebilmek adına öncelikle bazı özel durumlar üzerinde çalışarak örüntüleri ya da ilişkileri keşfetmeye odaklanırlar. Örüntülerin keşfinden sonra ise bu durumu açıklayan varsayımlar türetilerek varsayımın doğruluğu ya da yanlışlığı araştırılır. Varsayım yanlışlandığı takdirde önceki aşamaya geri dönülerek farklı varsayımlar oluşturulur; varsayım doğrulandığı takdirde ise süreç genelleme ile devam eder. Ancak genellemeye ya da çözüme varıldığında sürecin bitirilmesi birçok bakımdan eksiktir. Bu aşama sonrasında varılan genellemenin doğruluğuna ilişkin kişinin kendisini ya da başkalarını ikna etmesi, farklı bağlantıların yakalanmasını, kişinin farklı görüşlerle karşılaşarak fikir alışverişlerinde bulunmasını ve böylece yansıtıcı düşünmesini sağlayarak matematiksel düşünme sürecinin son ve anlayışı genişletme basamağını oluşturmaktadır.

Matematiksel düşünmeyi süreçler perspektifinde ele alan bir diğer isim olan Schoenfeld’e (1992) göre matematik öğretiminin temel amacı yetkin problem çözümler yetiştirmektir. Öğrencilerin problem çözme sürecindeki tepkilerine vurgu yapan Schoenfeld, pes etmeyip ısrarla çözümü bulmaya çalışma tavrının önemine çalışmalarında sıklıkla değinmektedir. Schoenfeld (1992) matematiğin araçlarını ise soyutlama, sembolik temsil ve sembolik manipülasyon olarak ifade etmektedir. Ona göre bu araçların kullanımı konusunda eğitilmiş olmak matematiksel düşünmek için gereklidir ancak yeterli değildir. Schoenfeld’e (1992) göre matematiksel olarak düşünmeyi öğrenmek; matematiksel bir bakış açısı geliştirmek (matematikleştirme ve

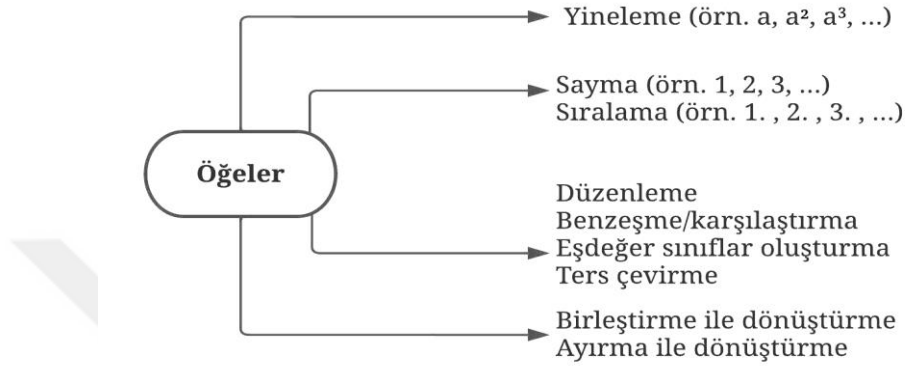
soyutlama süreçlerine değer vermek ve bunları uygulama isteğine sahip olmak) ve bu zanaatın araçlarında uzmanlaşarak bu araçları matematiksel yapıyı anlamlandırmak için kullanmak anlamına gelir. Schoenfeld'e (1992) göre öğretim süreci, prosedürleri ezberlemeye değil çözüm aramaya; formülleri ezberlemeye değil, kalıpları/örüntüleri keşfetmeye ve sadece alıştırma yapmaya değil, varsayımlar oluşturmaya odaklanmalıdır. Öğrenciler bu tarz öğretim süreçleri geçirdiklerinde matematiği katı kurallar bütünü olmaktan ibaret görmeyecek ve matematiğin dinamik, gelişen ve keşifler barındıran yapısını fark edeceklerdir.

Stacey (2006) matematiksel düşünmeyi okulun önemli bir hedefi olarak görmekte ve matematik öğrenmenin bir yolu olduğu için matematik öğretimi açısından da önemli olduğunu ifade etmektedir. Stacey (2006) çalışmasında, Ekonomik Kalkınma ve İşbirliği Örgütü [OECD] tarafından düzenlenen Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı [PISA] ile popüler hale gelen matematiksel okuryazarlık kavramının da matematiksel düşünmenin birçok bileşenini içerdiğini ifade etmektedir. Matematik okuryazarlığı; öğrencilerin gerçekçi bağlamlarda akıl yürütme, matematiksel modelleme, matematiksel fikirler arasında bağlantılar kurma gibi becerilerini ifade etmektedir. Stacey (2006), Mason ve Burton ile kaleme aldıkları Thinking Mathematically adlı kitapta da olduğu gibi matematiksel düşünmeyi uzmanlaşma-genelleme ve varsayımında bulunma-ikna etme süreç çiftleriyle açıklamaktadır. Ayrıca bu süreçlerin açıklamasının ancak örneklerle ele alınabileceğini belirtmekte ve bu süreçlerin gözlenebileceği bir sınıf ortamı diyalogunu çalışmasında sunmaktadır. Öğrencilerin matematiksel düşünmeyi öğrenebilmesi için öğretmenlerin de iyi bir düzeyde matematiksel düşünme becerisine sahip olması gerektiğini de ifadelerine eklemektedir.

1.6.2.2.1. Burton'a (1984) Göre Matematiksel Düşünme Süreçleri

Burton (1984) okuldaki matematik eğitiminin çoğunlukla içeriğe ve tekniğe odaklandığını ancak matematiğin türetildiği sürece yapılan vurgunun az olduğunu belirtmektedir. Bu duruma ilişkin matematiksel düşünmenin işlemleri, süreçleri ve dinamikleri olarak tanımladığı bir kuramsal çerçeve önermektedir. Öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini bilerek matematiksel düşüncelerini geliştirmek için öğretmenlere bu çerçeveyi kullanmalarını önermektedir. Burton'a göre ilişkilerin

incelenmesi matematik yapmanın odak noktasıdır. Buradan hareketle karşılaştığı zaman bireyi düşünmeye sevk eden herhangi bir olay, durum veya fikir, matematiksel düşünmenin işlem yapabileceği bir öge olabilmektedir (Çelik, 2016). Matematiksel düşünmenin içerdiği bu işlemleri Burton (1984, s. 37’den uyarlanmıştır.) çalışmasında Şekil 2’deki gibi sınıflandırarak görselleştirmiştir.



Şekil 2. Matematiksel düşünmenin işlemleri

Şekil 2’de bir problem durumuyla karşılaşıldığında yapılacak işlemler; yineleme, sayma, sıralama, düzenleme, karşılaştırma, eşdeğer sınıflar oluşturma, ters çevirme ve birleştirme ya da ayırma kullanılarak dönüştürme olarak belirtilmektedir. Anaokulu çağındaki çocukların dahi matematiksel düşünme işlemlerini kullandıklarına ilişkin kanıtlar olduğunu belirten Burton, bu işlemler sırasında gerçekleşen davranışları tanımlayarak matematiksel düşünme süreçlerini kodlamıştır. Bu süreçleri *özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma, genelleme ve ikna etme* şeklinde dört adımla ifade etmiştir.

Özel durumlar üzerinde çalışma/Özelleştirme (specializing): Bu süreç kişinin bir problem durumuyla karşı karşıya kaldığında, durumu anlayabilmek adına özel durumları inceleyerek problem durumunu basitleştirmeye çalıştığı ya da örüntüleri keşfetmeye çalıştığı süreç olarak ifade edilebilir. Polya’ya (2017) göre özelleştirme, belirli bir nesneler kümesinin değerlendirmesinden, daha küçük bir kümenin veya kümedeki bir nesnenin değerlendirmesine geçmektir. Bu süreç tümevarımsal bir düşünme gerektirmektedir. Bu aşamada problem durumu daha küçük durumlara indirgenerek veriler arasındaki ilişkilerin sistematik incelenmesine dayalı işlemler yapılmaktadır.

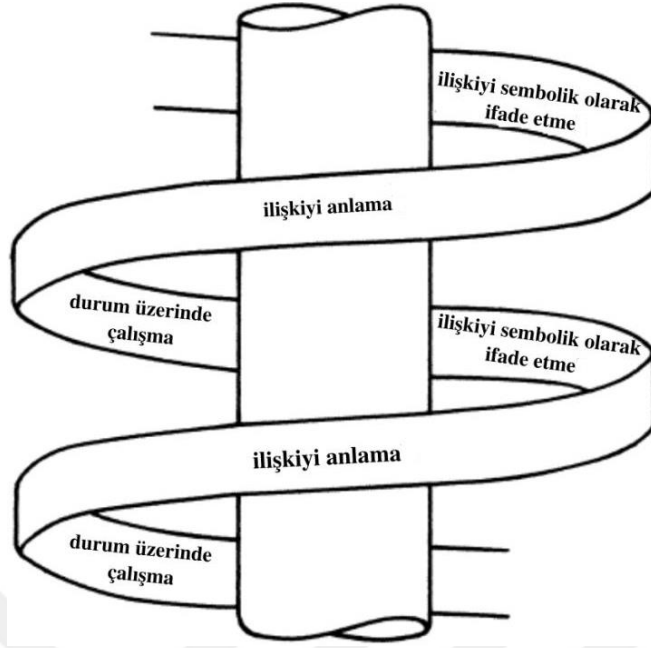
Varsayımda bulunma (conjecturing): Varsayım, ortaya çıkan bir genellenenin tanınmasıdır (Mason vd., 2010). Bir problem durumuyla karşılaşıldığında matematiksel düşünme süreçlerinin ilk adımı olan özel durumlar üzerinde çalışma davranışı ortaya çıkar. Özel durumlar üzerinde yapılan sistematik incelemeler sonrasında problem çözücü bazı örüntüler ya da ilişkileri keşfetmektedir. Bu keşifler sonrasında bazı varsayımlar ortaya çıkar. Yıldırım'ın (2020) matematiksel düşünme ifadesinde belirttiği retrodüktif düşünme süreci (hipotez veya teori oluşturmaya yönelik düşünme) tam olarak bu noktada aktif olmaktadır. Oluşturulan varsayımlar bazen doğru, bazen yanlış olabilir. Bu durumun belirlenmesi için varsayımlar oluşturulduktan sonraki adım varsayımların doğrulanmasıdır. Oluşturulan varsayımları kelebeklere benzeten Mason vd. (2010) bu şekilde bir kelebek kanat çırpıtığında yakında daha fazlasının da belirebileceğini ve birine odaklanıldığında diğerlerinin izinin kaybedilebileceğini ifade etmeye çalışmaktadır. Bu nedenle bu kaybın (unutmanın) önüne geçebilmek adına varsayımlar zihinde olduğu anda kısa kelimelerle not düşmenin önemli olduğunu vurgulamaktadırlar. Bu şekildeki bir kayıt, belirlenen bir varsayımın yanlış olduğu durumlarda diğer varsayımları inceleyebilmeyi mümkün kılmaktadır.

Genelleme (generalizing): Mason vd. (2010) genellemeyi matematiğin can damarı olarak ifade etmektedir. Genelleme tam olarak ifade edilemediğinde bile bu süreç, problem durumundaki model, örüntü ya da ilişki hissedildiğinde başlamaktadır. Pólya (2017) ise genellemeyi “bir nesnenin değerlendirilmesinden, bu nesneyi içeren bir kümenin değerlendirilmesine yapılan geçiş” olarak tanımlamaktadır (s. 99). Pólya'nın özelleştirme tanımı ile karşılaştırıldığında bu tanımın özelleştirme ile zıt yönde olduğu görülmektedir. Bu iki zıt tanım Yıldırım'ın (2020) da belirttiği gibi matematiksel düşünme süreci içerisindeki indüktif ve dedüktif düşünme süreçlerinin varlığını göstermektedir. Bu durumu Burton (1984) da çalışmasında ifade etmektedir (bkz. s. 38). Özel durumlar üzerinde çalışılırken keşfedilen ilişkilere yönelik oluşturulan varsayımların doğrulanması, problem çözücüyü genellemelere götürmektedir. Ancak varsayımlar doğrulanamazsa problem çözücünün bir önceki aşamaya dönerek farklı varsayımlar üretmesi, ya da kaydettiği diğer varsayımlara geri dönmesi gerekmektedir.

Burger ve Starbird (2005) matematiksel düşünmeyi konu alan bazı çalışmalarında özel durumlar üzerinde çalışma basamağının ardından varsayımda bulunma basamağını atlamakta, genelleme ve ispat etme basamakları ile sürecin devam ettiğini ifade etmektedirler. (akt. Çelik, 2016). Arslan ve Yıldız (2010) ile Keskin, Akbaba Dağ ve Altun (2013) da araştırmalarında varsayımda bulunma ve genelleme için birbirine oldukça benzer ifadeler kullanmaktadırlar. Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2017) ise varsayımda bulunmayı özelleştirmenin içinde bir bölüm olarak nitelendirmekte; genellemeyi sözel genelleme, cebirsel genelleme ve geometrik yer genellemesi olarak ele almaktadırlar.

İkna etme (convincing): Problemlerde varsayımların kontrol edilmesi sonucu varılan genellemelerin de test edilmesi gerekmektedir. Buradaki test etme yalnızca bir doğrulama olarak ele alınmamalıdır (Burton, 1984). Burton bu durumu açıklamak için Schoenfeld'in (1983) çalışmasında dile getirdiği bir gözlemci (*monitor*) kavramından bahsetmektedir. Gözlemci, herhangi bir bilgiyi kayıtsız kabul etmeyen, varılan sonuçlardan şüphe duyan, araştıran, sorgulayan ve en iyi ispata varmak adına tüm durumları göz önünde bulunduran bir iç düşmanı temsil etmektedir. Buradaki gözlemci tanımı aslında Dewey'in düşünme tanımıyla fazlasıyla benzerdir. İkna etme süreci matematikte kanıtlama süreci olarak işlemektedir. Bir kanıtın kabul edilmesi ise kanıtın bir dış düşmanı (ya da herkesi) ikna etmesi ile gerçekleşir.

Burton (1984) matematiksel düşünmenin dinamikleri için, ilk olarak Bruner, Goodnow ve Austin (1956) tarafından sunulan çerçevenin sarmal bir uzantısının Mason tarafından önerildiğini ifade etmektedir. Burton (1984, s. 143'ten uyarlanmıştır.) tarafından bir sarmal ile görselleştirilen matematiksel düşünmenin dinamikleri Şekil 3'te verilmiştir.

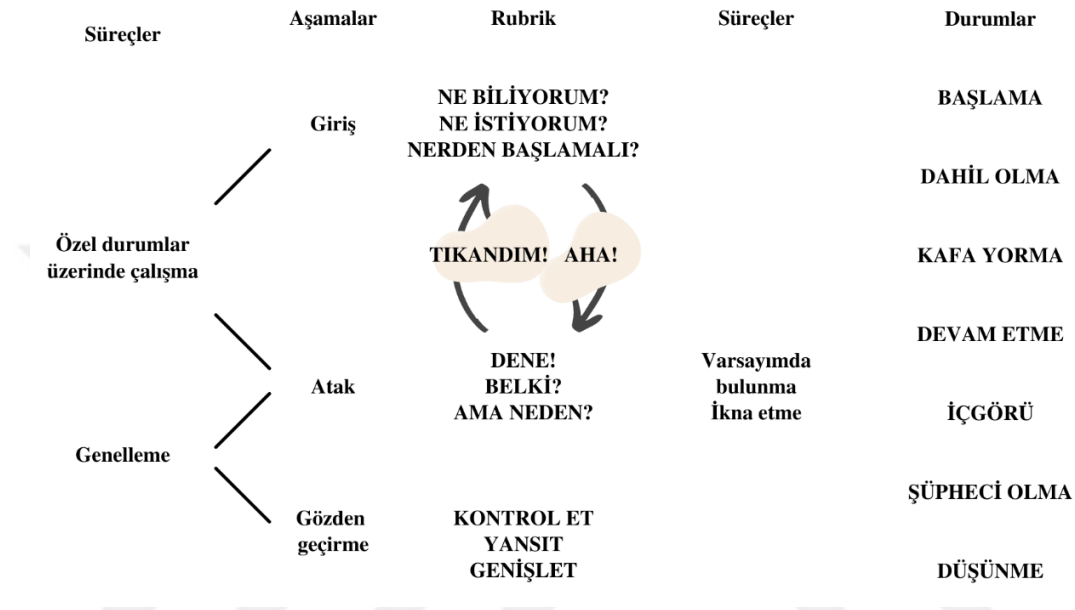


Şekil 3. Matematiksel düşünmenin dinamikleri

Matematiksel düşünmenin dinamiklerinin gösterildiği bu sarmal temsilde, her yeni döngü, önceki döngüler geçilirken kazanılan anlayışlar ve farkındalıklar üzerine inşa edilmiştir.

Mason vd. (2010) göre matematiksel düşünme, üstesinden gelinebilecek fikirlerin karmaşıklığının artırılması sağlanarak anlayışı genişleten dinamik bir süreç şeklinde tanımlanmaktadır. Matematiksel düşünme için özel durumlar üzerinde çalışma, varsayımda bulunma, genelleme ve ikna etme davranışları kullanılmaktadır. Süreç; *giriş*, *atak* (*attack*) ve *gözden geçirme* şeklindeki aşamalar halinde devam etmekte ve derin düşünme, çözüme ulaşmak için ısrarla devam etme, şüpheli olma gibi duyuşsal davranışlar gerektirmektedir. Giriş ve gözden geçirme aşamaları önemlidir; çünkü giriş aşamasında atak aşamasının temelleri atılmaktadır. Burton'a (1984) göre gözden geçirme aşaması önemsiz gibi görülse de yansıtma ve genişletme fırsatları sağlayan en öğretici aşamadır. Tüm bu aşamalar yansıtıcı bir düşünme ve pratik gerektirmektedir. Matematiksel düşünmeyi desteklemek için sınıf ortamında sorgulama ve yansıtma atmosferinin bulunması gerekmektedir. Matematiksel düşüncenin harekete geçirilmesi için ise bir sürpriz durum, gerilim, şaşkınlık, kavramda bir boşluk durumu, bir meydan okuma vb. durumla karşılaşılması gerekmektedir. Böyle bir ortam oluşturulduğunda matematiksel düşünme kendiliğinden ortaya çıkacak ve kişiyi nihayetinde daha derin bir anlamaya, daha

tutarlı bir sonuca, daha eleştirel bir değerlendirmeye yönlendirecektir. Mason ve ark. (2010) tüm bu matematiksel düşünme süreçlerini yaşanan aşamalar, önerilen rubrikler ve bunların belirteçlerini de içerecek biçimde açıklamışlardır. Bu süreçlerin tamamı Mason ve arkadaşları tarafından (2010, s. 119'dan uyarlanmıştır) Şekil 4'te verilen şema ile görselleştirilmiştir.



Şekil 4. Matematiksel düşünme süreçleri, aşamaları, rubrikleri ve belirteçleri

Matematiksel düşünme süreçlerinde Şekil 4’te de görülen giriş, atak ve gözden geçirme aşamaları bulunmaktadır. Bu üç aşama problemin üstesinden gelmek için temel oluşturmaktadır. Ancak tüm bunları yaparken de belirtilen rubriklerle düşünme sürecinin yönlendirilmesi gerekmektedir.

Giriş aşaması problemle karşılaşıldığı anda başlayan çoğunlukla yeterli zamanın ayrılmadığı bir aşama olarak dikkat çekmektedir. Ancak problemde verilenlerin ve istenenlerin ayırt edilerek anlaşılması, özel durumlar üzerinde elde edilen sonuçların kaydedilmesi ve atak için hazırlıkların yapılması giriş aşamasında gerçekleşmektedir. Bu nedenle giriş aşamasında önerilen rubrikler “Ne biliyorum?”, “Ne istiyorum?” ve “Nereden başlamalıyım?” sorularıdır. Bu aşamada problem çözücünün problemi kendi cümleleriyle ifade etmesi ya da problemi başka birine açıklaması da bir diğer öneridir (Mason vd., 2010). Mason vd. (2010) giriş aşamasının özel durumlar üzerinde çalışma ile bağlantısını bir dikiş makinesi örneği ile açıklamaktadır. Dikiş makinesinin kullanım kılavuzunun okunması faydalı olabilir

ancak bunun asıl faydası makinede oturulup iplik geçirme ve dikiş dikmeye çalışma sürecinde görülmektedir. Bu durum matematikte de geçerlidir. Problemi anlamak sadece okumak demek değildir. Problem durumu üzerinde verilenler araştırılmalı ve anlaşılmalı, bağlantılar kurulmaya çalışılmalı, diyagramlar çizilmeli, gerekirse tablolaştırılmalı ya da Pólya'nın da sürekli ifade ettiği gibi problem basitleştirilmeli veya yeniden düzenlenmelidir. Giriş aşamasını faydalı kılan, bu şekilde aktif olarak geçirilen anlamlandırma sürecidir.

Mason vd. (2010) göre atak aşaması matematiksel etkinliğin en belirgin olduğu aşama gibi görünse de durum aslında daha farklıdır. Giriş ve gözden geçirme kısımlarına problem çözücünün yeterli ilgiyi vermemesi, problemlerin tatmin edici şekilde çözümünün önünde bir engel teşkil etmektedir. Atak aşamasının etkili olmasının en önemli dayanağı giriş aşamasının verimliliğidir. Atak aşaması özel durumlar üzerinde çalışma ve genelleme süreçlerini birlikte barındırmaktadır. Bu aşamada kullanılması önerilen rubrikler “*Dene!*”, “*Belki?*” ve “*Ama neden?*” sorularından oluşmaktadır. Giriş aşamasındaki rubrikler ile atak aşamasındaki rubrikler arasında “*Tıkandım!*” ve “*Aha!*” rubrikleri vardır ki bunlar bu iki aşama arasındaki geçişi sağlayarak bağlantılar üzerinden varsayımların türetilmesini teşvik edici görevi görmektedir.

Gözden geçirme aşaması, problem durumunun çözümü sürecinde tüm yapılanların kontrol edilmesini, önemli durumları yansıtmayı ve elde edilen sonuçları daha geniş bir bağlama genişletmeyi içermektedir. Problem durumunun çözümünde karşılaşılan bir yetersizlik ya da bir hata durumunda giriş ve atak aşamalarına geri dönülmesi gözden geçirme süreciyle başlamaktadır. Hatta böyle bir durumda problem daha ilginç bir duruma evrilerek yeni bir problem durumuyla da karşı karşıya kalınabilir. Bu tür durumlar problem çözücüyü yansıtma ve genişletme imkânları doğurup matematiksel düşünmenin genişletilmesini de sağlamaktadır.

Matematiksel düşünme süreçlerini Burton (1984) ve Mason vd. (2010) kaynaklarında ortak olarak kullanılan ve matematiksel düşünmeyi tetikleyebileceği belirtilen bir problem durumuna yönelik, bir çözücünün verdiği cevaplar üzerinden matematiksel düşünme süreçleri aşağıda incelenmiştir:

“Bir depodan ürün satın aldığımda %20 indirim alacağım, ancak bir de %15 satış vergisi ödemem gerekmektedir. Önce indirim yapıp sonra vergi hesaplamak mı

yoksa önce vergi verip sonra indirim uygulamak mı daha karlı olur?” (Mason vd., 1982, sayfa 1’den akt. Burton 1984; Mason vd. 2010; s.1).

Önce indirim yapıp sonra vergiyi daha küçük bir fiyata eklemekten faydalanmayı bekliyorum.

Bunu özel durumlar üzerinde çalışma (ya da uzmanlaşma) durumu izler:

100\$ fiyatlı bir ürün için deneme yapayım.

1. Yol (Önce indirim yapıp ardından verginin ödenmesi)

Önce indirim yapayım. Bu 100\$’ın %20’sini çıkarmak anlamına gelir, bu da 80\$ olur. Şimdi %15 vergi eklemek gerekir, 80\$’ın %15’i yani 12\$, sonuç olarak 92\$ ödemem gerekir.

2. Yol (Önce verginin ödenip ardından indirim yapılması)

100\$a %15’i eklenince 115\$ olur. Şimdi %20 indirim yapmak gerekir. 115\$’ın %20’si 23\$ eder. 115\$’dan 23\$ çıkarılınca ödemem gereken miktar 92\$ olarak bulunur.

Beklediğim bu değil! Hesaplama sırası fark etmiyor gibi görünüyor!

Burada oluşan sürpriz durum atağı körüklemekte ve başka bir özel durum üzerinde çalışmaya neden olan yeni bir soruya kaynaklık etmektedir:

Acaba farklı fiyatlı bir ürün için de durum böyle mi? Mesela 65\$’lık bir üründe deneyeyim.

1. Yol

Önce vergiyi ekleyeyim. 65\$’ın %15’i 9,75\$ eder. 65\$a eklersem 74,75\$ olur. Şimdi indirimi uygulayayım. 74,75\$’ın %20’i 14,95\$ eder, yani sonuç olarak 59,80\$ ödemem gerekir.

2. Yol

Önce indirim yaparsam ($65\$ - 65\$ \times 0,20 = 52\$$) 52\$ olur. Şimdi vergiyi eklersem ($52\$ + 52\$ \times 0,15 = 59,80\$$) yine 59,80\$ ediyor!

Burada da doğrulanmış olan varsayım, ikna etme ihtiyacı oluşturmaktadır.

Şimdi bunu herhangi bir fiyat için nasıl gösterebilirim? (Genelleyebilirim).

Ürünün maliyeti A\$ olsun. Önce vergiyi ekleyeyim. $A\$ + \%15A = \%115A$ anlamına gelir. Şimdi de indirimi uygularsam $\%115A$ ’nın %20’sinin çıkarılması $\%115A$ ’nın %80’i demektir. Yani $\%115A \times \%80$ işlemiyle bulunur.

Önce indirim yaparsak da $A\$ - \%20A = \%80A$ anlamına gelir. Bunun üzerine vergiyi eklersek indirimli fiyatın $\%115$ 'ini bulmak gerekir. $\%80A.\%115$ işlemi yapılır. İlk yapılanla bunun arasında sadece işlemdeki sayıların yer değişimi var, çarpma işleminde de yer değiştirme özelliği var!

Son olarak, yapılan inceleme yeni bir soruyu kışkırtır ve başka bir girişe yol açar:

Hımm! Bir dakika! Yalnızca $\%20$ indirim ve $\%15$ vergi için hesaplama sırasının hiçbir fark oluşturmadığını gösterdim. Başka durumlarda, mesela $\%17$ indirim ve $\%8$ vergi veya gerçekten başka bir şey olsaydı yine de fark etmez miydi?

Yukarıdaki örnek matematiksel düşünmenin sarmal yapıdaki dört ayrı sürecini de göstermektedir. Kişi, özel durumları incelemek, neler olup bittiğini anlayabilmek ve bir genelleme oluşturabilmek için öncelikle belirli unsurları manipüle ederek harekete geçmiştir. Buradaki giriş hareketi kesin olmasa da burada karşılaşılan beklenmedik durum sonrasında bir bilişsel çatışma durumu ortaya çıkmıştır. Daha sonra ise varsayımlar oluşturulup özel durumlar üzerinde denemeler yapılmış ve doğru olduğu düşünülen varsayımın her durumda geçerli olup olmayacağını gösterebilmek adına cebirin gücünden faydalanılmıştır. Bu örnekte Burton'a göre dikkat edilmesi gereken bir diğer şey de kullanılan matematiksel düşünce sarmalının matematiksel içerikten bağımsız oluşudur. Problem durumu da göze alındığında gereken matematik sadece sayıların manipülasyonu ve cebirin kullanımı şeklindedir. Cebir bu problem durumunda ikna etme süreci için güçlü bir araç olarak öne çıkmaktadır ancak matematiksel olmayan örnekler için de farklı araçlar benzer bir güce sahip olmaktadır. Bu duruma örnek olarak Burton (1984) ağır bir mobilyanın yerinden hareket ettirilebilmesi için kullanılan ölçüm yapma, diyagram çizme, modelleme ve benzeri birçok ikna aracının işe koşulabileceğini ifade etmektedir.

Matematiksel düşünme süreçlerinin gözlendiği bir çözüm süreci örneği olarak Van De Walle, Karp ve Bay-Williams'ın (2019) öğrencilerden ilk yirmi birim kesri kullanarak bir tablo oluşturmalarını, ikinci sütunda bu birim kesirlerin paydalarının çarpanlarını yazmalarını, bir diğer sütunda da hesap makinesi kullanarak bu birim kesirlerin ondalık gösterimlerini bulmalarını istediği etkinlik verilebilir. Şekil 5'te bu etkinliğin bir öğrenci tarafından çözümü olarak kitapta sunulan görsel (Van De Walle,

Karp ve Bay-Williams, 2019; s. 487) matematiksel düşünme süreçlerinin kullanımına dair bir örnek sunmaktadır.

$\frac{1}{2}$	2	0.5	
$\frac{1}{3}$	3	$0.\overline{33}$	
$\frac{1}{4}$	2.2	0.25	
$\frac{1}{5}$	5	0.2	
$\frac{1}{6}$	2.3	$0.\overline{16}$	
$\frac{1}{7}$	7	$0.1428\ldots$	
$\frac{1}{8}$	2.2.2	0.125	
$\frac{1}{9}$	3.3	$0.\overline{111}$	
$\frac{1}{10}$	2.5	0.1	
$\frac{1}{11}$	11	$0.\overline{09}$	
$\frac{1}{12}$	2.2.3	$0.\overline{83}$	
$\frac{1}{13}$	13	$0.076\ldots$	
$\frac{1}{14}$	7.2	$0.0714\ldots$	
$\frac{1}{15}$	5.3	$0.\overline{06}$	
$\frac{1}{16}$	2.2.2	0.0625	

3 kural

Eğer sayının asal çarpanlarından biri 3 ya da daha büyük bir asal sayı ise ondalıklı sayı tekrar eder.

*5 özeldir

5 haricinde tüm sonlu sayılar kesirler çift sayı olacaktır.

Eğer ikinci sütundaki sayılar sadece 2 ise kaç tane olursa olsun sonradır.

Şekil 5. Matematiksel düşünme süreçlerinin gözlenebildiği bir öğrenci çözümü örneği.

Şekil 5’te verilen örnekte öğrenci tabloyu oluşturduğu süreçte sistematik olarak birim kesirlerin değerlerini bulmuş, paydanın çarpanlarına göre ilişkileri incelemiş, kâğıdının kenarında notlar almış ve varsayımlar oluşturmuştur. Süreçte ilerledikçe farklı durumları keşfederek varsayımlarında değişikliklere gitmiş ve sözel genellemelere ulaşmıştır.

1.6.3. İlgili Araştırmalar

1.6.3.1. Yurtdışında Yapılan Çalışmalar

Bu bölümde “matematiksel düşünme” ve “matematiksel düşünme süreçleri” sorgusuyla ulaşılan uluslararası alanyazından çalışmalara kronolojik sırayla yer verilmiştir.

Fraivilling, Murphy ve Fuson (1999) çocuklarının matematiksel düşünmelerini geliştirmek ve kavramsal anlama düzeylerini artırmak amaçlı bir kuramsal çerçeve önermektedirler. Öğrencilerin çözüm metotlarının ortaya çıkarılması, kavramsal anlama düzeylerinin desteklenmesi ve matematiksel düşünme düzeylerinin geliştirilmesine yönelik üç boyuttan oluşan çerçeveyi kullanarak, Everyday Mathematics müfredatında deneyimi olan ve yetenekli olarak nitelendirilen 18 öğretmenle bir çalışma yürütmüşlerdir. Çalışmanın sonucunda bu çerçeveyi kullanan öğretmenlerin çoğunlukla ilk iki boyutta sorun yaşamadıkları ancak öğrencilerin matematiksel düşünmelerini destekleme boyutundaki başarılarının en düşük düzeyde olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Cai (2003) Singapurlu 4., 5. ve 6. sınıf öğrencilerinin problem çözme ve kurma süreçlerindeki matematiksel düşünmelerini, nicel desen kullanarak araştırmıştır. Öğrencilerin düşünme ve akıl yürütme süreçlerini çözüm stratejilerini kullanma, matematiksel gerekçelendirme, çözümlerin temsilleri, matematiksel akıl yürütmeyi doğrulama ve matematiksel problem kurma durumlarını inceleyerek analiz etmiştir. Araştırmada farklı içerik alanları ve farklı bağlamlar barındıran dört adet etkinlik kullanılmıştır. Araştırmada öğrencilerin çoğunluğunun problemi çözmek için uygun stratejiyi ve çözüm süreçlerini açıklamak için uygun temsilleri seçebildikleri sonucuna ulaşmıştır. Ayrıca sınıf düzeyi ilerledikçe öğrencilerin doğru yanıtları bulduklarına ilişkin kanıt gösterme yüzdesinin arttığı bulunmuştur. Dördüncü ve beşinci sınıf düzeyleri arasındaki farklılıkların istatistiksel olarak anlamlı olduğu ortaya çıkarılmıştır. ABD ve Çinli öğrencilerle Singapurlu öğrencilerin bulguları karşılaştırıldığında, Singapurlu öğrencilerin Çinli öğrencilere daha çok benzediği bulgusuna ulaşılmıştır.

Altıncı sınıf öğrencilerinin cebirdeki genelleme stratejilerini araştıran Rivera ve Becker (2006), değişken hakkında bilgisi olmayan öğrencilerin bildiklerinden yararlanarak kısmi genelleme yapabildiği, değişkenlerle ilgili biraz bilgi sahibi olan öğrencilerin değişkenleri anlama yeteneklerine göre kısmi ya da tam cebirsel genellemeye ulaşabildiklerine ulaşılmışlardır. Öğrencilerin genellemelerini sözel olarak ifade edebilmelerine rağmen cebirsel olarak ifade etmede zorlandıkları da araştırmanın bir diğer sonucudur.

Lane ve Harkness (2012), popüler üç oyunu kullanarak ortaokul matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme ile ne derece ilgilendiklerini belirlemeye çalışmışlardır. Araştırmada Burton'un (1984) matematiksel düşünme süreçleri çerçevesi kullanılmıştır. Tasarlanan oyunlar içerisindeki diyaloglardan yararlanılarak veriler toplanmış ve veriler matematiksel düşünme süreçlerinin göstergeleri baz alınarak oluşturulan puanlama anahtarlarına göre analiz edilmiştir. Elde edilen sonuçlar öğrencilerin yönlendirilmedikçe matematiksel düşünme süreçlerine girmedikleri yönündedir. Çalışmada uzmanlaşmaya (özel durumlar üzerinde çalışma) harcanan zaman ne kadar fazlaysa yanıtların kalitesinin de o derece yüksek olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca uzmanlaşmaya ayrılan zamanın öğrencilerin örüntüleri fark etme olasılığını arttığı ve dolayısıyla öğrencilerin varsayım ve genellemelerini geliştirdiği bulunmuştur.

Liu ve Chin (2016) Tayvan'da 11. sınıf düzeyindeki beş öğrencinin ikili sayı örüntüsü bulma problemlerinde tahmin etme ve gerekçelendirme becerilerini nasıl geliştirdiklerini araştırmışlardır. Bu becerilerin gelişimi öğrenciler arasındaki diyaloglar, etkileşimler ve tartışmalar üzerinden ilerlediği için araştırmanın çerçevesi sosyal perspektife dayanmaktadır. Araştırma sonuçları, öğrencilerin varsayım atmosferi oluşturduklarında doğal yeteneklerini ortaya çıkarılabileceğini göstermektedir. Öğrencilerin bu süreçte hem uzmanlaşma ve genelleme stratejilerini kullandığı, hem de varsayım sürecinde arkadaşlarını ikna etmek adına etkili gerekçelendirmeler oluşturabildikleri görülmüştür. Elde edilen tüm bulgular, öğrencilerin varsayımda bulunma ve doğrulama süreçlerinin geliştirilmesi için ilişkisel anlayış geliştirmelerinin önemli olduğu sonucunu ortaya çıkarmıştır.

Goos ve Kaya (2019) Educational Studies in Mathematics dergisinde 1994-1998 ve 2014-2018 zaman aralıklarında yayınlanmış öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerini konu edinen çalışmaların karşılaştırmalı analizini yapmışlardır. Araştırmanın sonuçlarına göre 2014-2018 aralığında matematiksel düşünmeyi teşvik eden araştırmaların matematiksel düşünmeyi anlamaya çalışan araştırmalardan daha fazla olduğu ortaya çıkarılmıştır. 1994-1998 aralığında araştırmalar problem çözme ve kurma odaklıyken, 2014-2018 aralığında akıl yürütme ve ispat odaklı olduğu da araştırmanın bir diğer sonucudur. Ayrıca son 25 yılda matematiksel muhakeme ve matematiksel ispat çalışmalarında orta ve yükseköğretim düzeylerine ilgide bir artış

olduğu ortaya çıkmıştır. 1994-1998 yılları arasındaki 21 makalenin 16'sının ilkökul veya ortaokul öğrencileri ile; 2014-2018 yılları arasında ise 51 deneysel makaleden 33'ünün okul çocukları ile yürütüldüğü araştırmanın bir diğer sonucudur.

Putri, Lukito ve Wijayanti (2020) öğrencilerin matematiksel problemleri çözerken matematiksel düşünmeye dayalı olarak uzmanlaşmada yaşadıkları güçlüklerle odaklanmışlardır. Çalışmalarını altıncı sınıf düzeyinde bulunan ve matematik becerileri ve problem çözme testlerini uyguladıkları on öğrenciden, yüksek ve düşük yetenekli olarak seçtikleri iki öğrenciyle görüşmeler yaparak gerçekleştirmişlerdir. Matematik yeteneği yüksek olan öğrencinin konuyu ve bilinenleri tarif ederek çözüm yolunu belirleyebildiği; matematik yeteneği düşük olan öğrencinin ise problemin çözümünde yardımcı dokunabilecek kavramlar hakkında bilgi sahibi olduğu halde çözümün nasıl ilerleyeceğini kestiremediği sonucuna ulaşılmıştır. Problemin çözümü için verilen süre uzatıldığında ve uzmanlaşma sürecinde sistematik olduğunda ise düşük yetenekli öğrencinin de sonuca ulaşabildiği görülmüştür.

Tüm bu araştırmalardan görüldüğü üzere araştırmacılar matematiksel düşünme şemsiyesi altında farklı durumları incelemişlerdir. Bu araştırmalar öğretmenlerin matematiksel düşünmeyi yeterince destekleyemediklerini (Fraivilling, Murphy ve Fuson (1999); öğrencilerin özel durumlar üzerinde çalışmaya ayırdıkları zamanla doğru orantılı olarak matematiksel düşünmede başarılı olduklarını ve öğrencilerin matematiksel düşünme süreci için yönlendirilmeye ihtiyaç duyduklarını (Lane ve Harkness (2012); öğrencilerin başarı düzeyleri arttıkça matematiksel düşünme süreçlerinde daha başarılı olduklarını (Cai, 2003); soru çözümü için verilen süre artırıldığında ve özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde sistematiklik sağlandığında başarının arttığı (Putri, Lukito ve Wijayanti, 2020) ve öğrencilerin varsayım oluşturma ve doğrulama süreçleri için ilişkisel anlayış geliştirmelerini gerekliliği (Liu ve Chin, 2016) ortaya çıkarılmıştır. Matematiksel düşünme içerikli araştırmaların geçmişi ve bugününü karşılaştıran Goos ve Kaya (2019) ise araştırmacıların zamanla matematiksel düşünmeyi teşvik eden araştırmalara yöneldiklerini ifade etmektedir.

1.6.3.2. Yurtiçinde Yapılan Çalışmalar

Bu bölümde yurtiçinde matematiksel düşünme ve matematiksel düşünme süreçlerine yönelik yapılan araştırmalar yer almaktadır. Araştırmalar alanyazındaki zamana bağlı eğilimi görebilmek adına kronolojik olarak verilmiştir.

Umay (1993) çalışmasında, problem çözme sürecindeki zihinsel süreci yoklamak için "Matematiksel Düşünme Sürecini İzleme" adı verilen ve aynı soruları içeren iki veri toplama aracı kullanmıştır. Veriler, aynı problemlerden oluşan biri süreci (A formu) diğeri sonucu (B formu) yoklayan iki test kullanılarak 81 lise öğrencisinden toplanmıştır. Nicel paradigma ile yapılan araştırmada, matematikte düşünme sürecini izlemenin problemi çözmekten daha zor bulunduğu sonucuna varılmıştır.

Dede ve Argün (2004) bir devlet üniversitesi ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü son sınıfındaki öğretmen adaylarına, 15 sorudan oluşan ön test ve son test uygulamalı deneysel bir çalışma yapmıştır. İki test arasında “Matematikte Temel Kavramlar” adlı bir lisans dersi kapsamında araştırma ve tartışma odaklı bir eğitim süreci geçirilmiştir. Bu süreç öncesi ve sonrasında uygulanan aynı testin sonuçları arasındaki fark istatistiksel açıdan incelenmiştir. Araştırma sonucunda (öntest), öğretmen adaylarının, bağıntı, küme, rasyonel sayılar, denklik sınıfı gibi kavramların tanımlarında zorlandıkları, matematiksel kavramlar arasındaki ilişkileri görme düzeylerinin düşük olduğu sonucuna ulaşılmıştır. "Matematikte Temel Kavramlar" adlı ders öğretimi öncesi ve sonrasında uygulanan ön test ve son test sonuçları arasında yapılan t-testi ile öğrencilerin anlama düzeyleri arasındaki farkın istatistiksel açıdan anlamlı olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yeşildere ve Türnüklü (2007), 20 farklı lisede okuyan ve liseye yeni başlamış olan 262 öğrenciyle matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçleri üzerine bir tarama araştırması yapmıştır. Çalışmada on adet açık uçlu sorudan oluşan bir veri toplama aracı kullanılmış ve veriler Cai'nin (2003) matematiksel düşünme süreçleri çerçevesi kullanılarak incelenmiştir. Çalışmayla öğrencilerde tahmin etme, ilişkilendirme, iletişim kurma, karar verme gibi matematiksel becerilerin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna varılmıştır.

Arslan ve Yıldız (2010) on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki yaşantılarını araştırmışlardır. Araştırmada, matematiksel düşünmeyle

ilgili olarak bilgi elde edebilmek için öğrencileri bu aşamalara yönlendirecek şekilde hazırlanmış sorular kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında genel olarak sorun yaşamadığı ancak sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkileri cebirsel olarak ifade etmede zorluklar yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca matematiksel düşünmenin aşamalarında ileriye doğru gidildikçe öğrencilerin başarılarının düştüğü ortaya konulmuştur. Bu çalışmada genelleme ve varsayımda bulunma aşamaları için oldukça benzer ifadeler kullanılmıştır ve iki aşamada da ilişkilerin cebirsel olarak ifade edilmesi beklenmektedir.

Ersoy ve Başer (2012) öğrencilerin bilişsel boyutta öğrenmelerini ölçmek amacıyla üst düzey düşünme eğilimi, akıl yürütme, matematiksel düşünme becerisi ve problem çözme alt boyutlarından oluşan bir “Matematiksel düşünme ölçeği” geliştirmişlerdir. Geliştirilen ölçeğin geçerli ve güvenilir olduğu sonucuna ulaşmışlardır.

Keskin, Akbaba Dağ ve Altun (2013) araştırmalarında sekizinci ve on birinci sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçleri içerisindeki yaşıntı farklılıklarını incelemişlerdir. Araştırma sonucunda sekizinci sınıf düzeyinde daha fazla olmak üzere her iki grubun matematiksel düşünme basamaklarında ilerledikçe öğrencilerin kendilerini sözel ya da matematiksel olarak ifade ederken zorlandıkları ortaya çıkarılmıştır. 8. sınıf öğrencilerinin bir durumu matematiksel olarak ifade etmede 11.sınıf öğrencilerine göre daha çok zorlandıklarını belirlenmiştir. Bu çalışmada genelleme ve varsayımda bulunma kodlarında büyük benzerlikler olduğu görülmektedir. Araştırmacılar da bu iki matematiksel düşünme sürecinin birbirine çok yakın ve birbirini tamamlar nitelikte olduğunu ifade etmektedirler.

Ersoy ve Güner (2014) bir devlet üniversitesinde sınıf öğretmenliği üçüncü sınıfta okuyan öğretmen adaylarının problem çözme becerileri ve matematiksel düşünme düzeylerini araştırmışlardır. 46 öğretmen adayıyla gerçekleştirilen çalışmada nicel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılmıştır. Veri toplama aracı olarak Posamentier ve Krulik (1998) tarafından geliştirilen iki problem ile Ersoy (2012) tarafından geliştirilen “Matematiksel Düşünme Ölçeği” kullanılmıştır. Öğretmen adaylarına eğitim öğretim dönemi içerisindeki 13 haftalık bir süreçte, problem çözme becerilerini geliştirmek amacıyla Pólya’nın problem çözme basamakları ve stratejileri anlatılmıştır. Veriler Pólya’nın problem çözme basamakları

kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırma sonucunda öğretim sürecinin, öğretmen adaylarındaki problem çözme ve uygun strateji seçme becerilerini olumlu yönde etkilediği bulgusuna ulaşılmıştır. Matematiksel düşünme ölçeğinin sonuçlarıyla da problem çözme becerilerinin matematiksel düşünme üzerinde etkili olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Çeziktürk Kipel (2016) bir devlet üniversitesindeki 18 ilköğretim matematik öğretmeni adayının “Matematik ve sanat” dersi kapsamında origami içerikli bir soruya verdikleri cevapları matematiksel düşünme açısından içerik analizi ile çözümlemiştir. Araştırmada öğretmen adaylarının, sorunun çözümüne yönelik açıklamalarında kullandıkları matematiksel kavramların sıklıklarını listelenerek matematiksel kavram bilgisinin matematiksel düşünmeyi nasıl şekillendirdiği incelenmiştir. Araştırmada yeterli bir cevaba ulaşamayan öğretmen adaylarının kullandığı matematiksel kavram sıklığının daha az olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Yıldırım ve Yavuzsoy Köse (2017) ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin kendilerine tanıdık gelen problem durumlarını anladıklarına ancak farklı problem durumlarında zorlandıklarına ulaşmışlardır. Yüksek başarı grubundaki öğrencilerin sorularda tıkanma yaşadıkları durumlarda bile atak sayılarında diğer öğrencilerden daha önde olup farklı stratejiler denedikleri de araştırmanın bir diğer sonucudur. Araştırmada beklenen genellemeye ulaşabilen öğrencilerin bunu sözel olarak ifade etmekte sorun yaşamayıp genellemeleri cebirsel olarak ifade ederken oldukça zorlandıkları sonucuna ulaşılmıştır.

Bal ve Dinç Artut (2019) çalışmalarında matematiksel düşünme ölçeği geliştirerek ölçeğin geçerlik ve güvenirlik durumunu tespit etmeyi amaçlamışlardır. Adana il merkezi ve ilçelerinde gerçekleştirilen araştırmada ölçek geliştirme sürecinde 469, geliştirilen ölçeği deneme sürecinde ise 190 matematik öğretmenine ulaşılmıştır. Çalışma sonucunda matematik öğretmenlerine yönelik, matematiksel düşünme becerilerini ölçen, geçerli ve güvenilir sonuçlar veren bir ölçek elde edilmiştir. Ayrıca bu ölçek kullanılarak elde edilen sonuçlar, uygulanan matematik öğretmenlerinin düşünme becerilerinin hem kıdemleri hem de mezun oldukları okul türüne göre değiştiğini de göstermiştir.

Akarsu Yakar ve Yılmaz (2019) “Matematiğin üç dünyası (Tall)” teorisine göre öğrencilerin matematiksel düşünmedeki procept (süreç+kavram) düzeylerini araştırdıkları çalışmalarını, sekizinci sınıfta okuyan 20 öğrenci ile yürütmüşlerdir. Çalışma sonucunda öğrencilerin hem süreç düzeyine hem de kavram düzeyine ulaşabildikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin bir kısmının sadece işlemsel sürece odaklandığı ve dolayısıyla işlem ve süreç düzeylerinden diğer düzeylere geçiş yapamadığı görülmüştür. Çalışmanın bir diğer sonucu ise öğrencilerin aritmetikten cebire geçişte zorluk yaşadıkları şeklindedir.

İlköğretim matematik öğretmenliği programının ikinci sınıfındaki yedi öğretmen adayıyla matematiksel düşünme süreçleri üzerine yaptıkları araştırmada Uzun, Topan, Demir ve Çelik (2019), Mason, Burton ve Stacey’nin (2010) Thinking Mathematically kaynağından alınan bir problemi kullanmış ve aynı yazarların önerdiği matematiksel düşünme süreçlerini temel alarak veri analizi yapmışlardır. Katılımcıların örnek durumlardan hareketle genellemelere ulaşabildikleri, buradan hareketle bir veya birden fazla varsayımda bulunabildikleri ancak hiçbir öğretmen adayının varsayımların doğrulanması sürecini gerçekleştiremediği sonucuna ulaşmışlardır.

Aydın Güç, Aygün ve Orbay (2021) ortaokul yedinci sınıf düzeyinde, üstün yetenekli tanısı olan üç öğrenci ile üstün yetenekli tanısı olmayan üç öğrencinin matematiksel düşünme süreçlerini karşılaştırmıştır. Araştırmada kavramsal çerçeve olarak Burton’un (1984) matematiksel düşünme süreçleri kullanılmıştır. Araştırmada, matematiksel düşünmenin bileşenlerinin örüntü ve ilişkiler bulma üzerinde olduğu düşüncesiyle bu amaca yönelik sekiz adet etkinlik kullanılmıştır. Matematiksel düşünme süreçleri ve bu süreçler içerisinde gözlenmesi beklenen davranışlar hem genel hem de etkinliklere özel olarak kodlanarak gözlem sürecinin kolaylaştırılması sağlanmıştır. Araştırma sonucunda üstün yetenekli tanısı konulmuş öğrencilerin özelleştirme, genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında diğer öğrencilerden farklılaştığı görülmüştür. İspat ve ikna etme aşamasında ise karşılaştırılan iki grup arasında herhangi bir farklılaşmaya ulaşılamamıştır.

Bununla birlikte, Yüksek Öğretim Kurumu [YÖK] Ulusal Tez Merkezi üzerinde yapılan tarama sonucunda “matematiksel düşünme süreçleri” içerikli 12 tez çalışmasına ulaşılmıştır. Ulaşılan tezlerin amaç ve sonuçları aşağıda özetlenmiştir.

Coşkun (2012) sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modeline göre tasarlanmış çalışma kağıtları aracılığıyla öğretmen adaylarının üst düzey matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Öğretmen adaylarının üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinde en başarılı oldukları sürecin genelleme olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğretmen adaylarının soyutlama ve sentezleme süreçlerinde ise sorunlar yaşadıkları tespit edilmiştir.

Tuncay (2015) iki öğretmen adayı, iki öğretmen ve doktora yapmakta olan bir akademisyenin matematiksel düşünme süreçlerini incelediği araştırmasında katılımcılar arasında belirgin bir farklılaşma olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Araştırmadaki bir diğer sonuç akademisyenin ispat tekniğini daha sık kullandığı, öğretmen adaylarının ise özelleştirme sürecinde daha fazla çözüm ürettiği olmuştur.

Yıldırım (2015) sekizinci sınıf öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerini araştırmıştır. Farklı problem durumlarında öğrencilerin genelleme yapabilmelerinin değiştiğini, özelleştirmeyi başarıyla gerçekleştiren öğrencilerin genellemeye ulaşırken zorluk yaşadığı ancak genellemeye ulaştığı sonucuna ulaşmıştır. Araştırmada sözel olarak ifade edilen genellemelerin cebirsel olarak ifadesinde zorluklar yaşadıkları görülmüştür. Başarı düzeyi yüksek olan öğrencilerin ilişki arama sürecinde birden çok strateji kullanarak genellemeye ulaştıkları saptanmıştır.

Yağdıran (2018), on birinci sınıf öğrencilerinin teknoloji destekli öğrenme ortamlarındaki matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda öğrencilerin özelleştirme aşamasında teknoloji kullanımında zorlanmadığı, fakat ileri evrelerde sorunlar yaşadıkları ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca matematiksel düşünme evrelerine göre teknoloji kullanımı amacının değiştiği gözlenmiştir. Öğrencilerin iddia etme ve ispat aşamalarında teknolojiyi aktif bir şekilde kullanmadığı da araştırmanın bir diğer sonucudur.

Kükey (2018) araştırmasında ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerini incelemiştir. Araştırma sonucunda varsayımda bulunma sürecinde ortaokul öğrencilerinin, sadece birkaç örnekle problemi tamamladıkları görülmüştür. Özelleştirme basamağında ise öğrencilerin belirli değerler verip sonuca ulaşmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Varsayımda bulunma ve özelleştirme boyutlarında öğretmenlerin ve öğretmen

adaylarının, öğrencilerin stratejilerini yeterli düzeyde tahmin edemedikleri belirlenmiştir. Doğrulama ve ikna etme boyutunda ise öğrencilerin büyük çoğunluğunun daha önce öğrendikleri formülleri uygulamaya çalıştıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının öğrencilerin çözüm biçimlerini öğretmenlere göre daha iyi olarak ifade ettikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Akarsu Yakar (2019) matematiğin üç dünyası teorisini kullanarak ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerini ve matematiksel dil becerilerini incelemiştir. Araştırma sonucunda ortaokul öğrencilerinin cebirsel ve geometrik düşünme düzeylerinin genel olarak birinci seviyede olduğu görülmüştür. Üst sınıf düzeyi kazanımları içeren sorularda 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin aksiyomatik formal dünya boyutunda düşünme süreci geliştirebildikleri tespit edilmiştir. Kavramları oluşturma sürecinde 6. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin daha özgün olduğu görülmüştür. Ayrıca ortaokul öğrencilerinin matematiksel dil becerilerinin çoğunlukla kavramsal somut dünya boyutuyla sınırlandığı ve cebirsel düşünme düzeyi yükseldikçe sembolik ifade oluşturma becerilerinin de arttığı görülmüştür.

Aygün (2019) üstün yetenekli tanısı konulmuş ve konulmamış öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerindeki farklılaşma durumlarını incelemiştir. İki farklı öğrenci grubunda matematiksel düşünme süreçlerinin özelleştirme ve genelleme basamaklarında net bir farklılaşma görülmemiştir. Varsayımda bulunma ve ispat basamaklarında ise dinamik matematik yazılımlarındaki ayırt ediciliğin daha belirgin olduğu görülmüştür. Çalışma sonucunda matematiksel düşünme süreçlerinde üstün yetenekli tanısı olan ve olmayan öğrencileri ayırt eden süreçler -özel durumlar üzerinde çalışma, genelleme ve varsayımda bulunma- gözlenirken ispat sürecinde her iki grubun benzer düşünme süreçlerine sahip olduğu görülmüştür.

Durmuş Akgeyik (2019) PISA 2015 uygulamasına katılan Türk öğrencilerin matematik okuryazarlığı alt testindeki matematiksel düşünme süreçlerini gerçek yaşam durumlarını formülleştirme, matematiği kullanma ve yorumlama alt boyutlarında incelemiştir. Araştırma sonucunda matematik okuryazarlığı alt testindeki öğrenci başarıları gerçek yaşam durumlarını formülleştirme ve yorumlama boyutunda cinsiyete göre erkek öğrencilerin lehine; okul türüne göre araştırılan boyutlarda genel

liseler lehine ve yine araştırılan boyutlarda istatistiki bölgeye göre genel olarak batı bölgeleri lehine anlamlı fark olduğuna ulaşılmıştır.

Yiğit (2019) matematik öğretmeni adaylarının matematiksel düşünme süreçlerini araştırmıştır. Araştırma sonucunda öğretmen adaylarının özelleştirme boyutunda zorlanmadıkları ancak özellikle ispat boyutunda oldukça zorlandıkları gözlemlenmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarının problem durumuna bağlı olarak genelleme yapabilme durumlarının değiştiği, oluşturdukları varsayımları sözel veya cebirsel olarak ifade ettikleri görülmüştür.

Burton'un matematiksel düşünme süreçleri çerçevesini kullanarak dokuzuncu sınıfta okuyan 25 öğrenciyle yürüttüğü çalışmada Tosun (2019), öğrencilerin açığortay konusu bağlamındaki matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Çalışmada matematiksel düşünme süreçlerinin gözlenebileceği dört adet rutin olmayan problem kullanılmıştır. Çalışma sonuçlarına göre öğrencilerin özelleştirme basamağındaki soruları kolaylıkla yaptığı ancak pergel ve cetvel kullanımı gerektiren durumda zorlandıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin varsayımda bulunma ve genelleme aşamasındaki sorularda zorlanmadıkları, genellemeleri sözel olarak ifade etmeye çalıştıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin varsayımda bulunma aşamasında başarılı olduğu görülmüştür. Ancak doğrulama ve ikna etme basamağında ulaşılan varsayımları kanıtlayamadıkları tespit edilmiştir.

Or (2020) ortaokul öğrencilerinin rutin ve rutin olmayan problemleri çözme durumlarını çeşitli değişkenler bakımından inceleyerek matematiksel düşünme süreçlerini incelemiştir. Araştırmada öğrencilerin problem çözme becerilerini algılama düzeyleri toplam puanı ile sınıf düzeyi, cinsiyet ve matematik ders başarısı arasında istatistiksel açıdan anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. Ancak alt faktörlere göre matematik ders başarısına ve sınıf düzeyine göre farklılaşma olduğu bulunmuştur. Rutin problemlerde daha başarılı oldukları tespit edilen öğrencilerin, rutin ve rutin olmayan problemleri çözme durumlarında cinsiyete göre istatistiksel açıdan anlamlı bir farklılık bulunmazken sınıf düzeyine ve matematik ders başarısına göre istatistiksel açıdan anlamlı bir farklılık bulunmuştur. Öğrencilerin problem çözme becerilerini algılama düzeyleri ile rutin ve rutin olmayan problemleri çözme durumları arasında ise ilişki bulunmamıştır.

Bahadır (2020) sekizinci sınıf düzeyinde matematiksel düşünme etkinliklerinin öğrenme ortamını nasıl etkilediğini incelemiştir. Araştırma sonucunda Araştırmada matematiksel düşünme etkinlikleriyle zenginleştirilmiş öğrenme ortamlarının sınıf içi etkileşimi artırdığı gözlenmiştir. Öğrencilerin matematiksel düşünme becerilerinin özelleştirmeden ispat aşamasına gidildikçe azaldığı ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğrencilerin matematiksel düşünmeye yönelik görüşleri ölçeği ortalama puanlarında matematiksel düşünme etkinlikleri ile zenginleştirilen öğretim süreci sonrasında artış olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Matematiksel düşünme süreçlerini konu alan bu araştırmalar incelendiğinde, geçmişten günümüze doğru araştırma deseninin nicel paradigmadan nitel paradigmaya kaydığı görülmektedir. İkisi ölçek geliştirme olan bu çalışmaların çoğunlukla öğretmen adaylarıyla, öğretmenlerle ve lise öğrencileriyle yapıldığı görülmektedir. Ortaokul öğrencileri ile yapılan araştırma sayısının daha az olduğu dikkat çekmektedir. Ayrıca tüm yurtiçi alan yazınında matematiksel düşünme başlığı altında farklı kuramsal çerçevelerin temel alındığı da söylenebilir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde araştırmanın yöntemi, katılımcıları, pilot uygulama süreci, veri toplama süreci ve veri analizine değinilecektir.

2.1. Araştırmanın Yöntemi

Creswell (2013) nitel araştırmalarda araştırma problemiyle ilgili verilerin katılımcıların bulundukları fiziksel ortamlardan elde edilmeye çalışıldığını belirtmektedir. Eğitim sistemlerinin tamamen uluslararası ya da ülke çapında yapılan sınavlarla elde edilen sayılara göre yön bulduğunu belirten Sahlberg (2021), bu sayıların eğitim sistemleri hakkındaki gerçek bilgileri yansıtmayabileceğini dile getirmektedir. Eğitimi daha iyiye taşıyabilmek için büyük verilerin yanında küçük verilerin de kullanılması gereğini vurgulayarak; “eğer küçük veriyle yönetmezseniz, büyük veri ve sahte korelasyonlarla yönetilirsiniz” ifadesiyle eğitim sistem içerisindeki öğretmenlerin, örneklemini küçük fakat sisteme dair en doğru bilgileri içeren nitel araştırmalarının önemine dikkati çekmektedir (Sahlberg 2021, s. 73). Bu araştırma kapsamında da öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığından, araştırma nitel bir araştırma olarak tasarlanmıştır.

Nitel araştırma tekniklerinden biri olan durum çalışmasına yönelik literatürde farklı bakış açıları ve farklı tasarımlar mevcuttur. Yin (2002) “durum”u bir olgu ve olguya ait bağlam arasındaki sınırların belirgin olmadığı ve araştırmacının olgu ve ilgili bağlam üzerindeki kontrolünün yetersiz olacağı durumlarda, “gerçek yaşam bağlamında çağdaş bir olgu” olarak ifade eder. Bu bağlamda, durum çalışması, araştırılan olguyla ilgili durumu “nasıl” ve “neden” soruları ile sorgulayan görgül bir araştırmadır (akt. Yazan, 2015). Stake (1995) ise durumu "sınırları ve işleyen kısımları olan belirli bir şey" ve sosyal bilimler ve insan hizmetleri bağlamında amaçlı “entegre bir sistem” olarak tanımlamaktadır. Dolayısıyla durum çalışması, belirlenen bir durumun özelliğini ve karmaşıklığını anlamaya çalışmadır (akt. Yazan, 2015). Stake (1995) durum çalışmasının özelliklerini bütünsel, görgül, yorumlayıcı ve empatik kavramlarıyla açıklamaktadır. “Durum”u sınırları net olan bir şey, tek bir varlık veya bir birim olarak tanımlayan Merriam (2018) ise durum çalışmasını "bir program, bir

kurum, bir kiři, bir sűre veya bir sosyal birim gibi sınırlı bir olgunun yoğun, bűtűnsel bir tanımı ve analizi" olarak ifade eder (akt. Yazan, 2015). Merriam durum çalışmasının özelliklerini *belirlilik*, *betimleme* ve *sezgisellik* kavramlarıyla açıklamaktadır. Buradaki belirlilik sınırı iyi bir şekilde çizilmiş olan duruma odaklanılmasıdır. Betimleme; araştırılan olgunun zengin ve derinlemesine açıklanmasıdır. Sezgisellik ise okuyucunun durum çalışması neticesinde araştırılan olguyu iyi bir şekilde anlaması, çalışma öncesinde bilinmeyen değişkenleri ve ilişkileri ortaya çıkarabilmesidir.

Yin (2002) durum çalışmalarında araştırma sűrecinde bűyűk değişiklikler yapılmasına sıcak bakmamakta, bir değişiklik yapılacaksa da durum çalışmasının yeniden tasarlanması gerektiğini savunmaktadır. Stake (1995) ise Yin'in bu grűřűne katılmamakta ve durum çalışması araştırmaları sűrecinde oldukça esnek olunabileceğini, gerekli grűldűėű takdirde değişiklikler yapılabileceğini ifade etmektedir. Stake'in (1998) buradaki dayanak noktası ise "alışmanın gidişatının önceden kestirilemeyeceği" varsayımdır (akt. Yazan, 2015). Bu nedenle Stake, durum çalışması tasarımında izlenecek bir yönerge oermemektedir. Merriam ise durum çalışması tasarımında ne Yin kadar sıkı ne de Stake kadar esnektir. Merriam durum çalışmasındaki araştırma sorularının şekillenmesi sűrecinde literatűr taramalarının katkısını ön plana çıkarmaktadır. Literatűr taramasına dikkat çeken bylesı bir tasarım Yin ya da Stake'in durum çalışması tasvirlerinde bulunmamaktadır. Merriam'ın (1998) durum çalışmasına yönelik önerdiği aşamalar şunlardır: *literatűr taraması yapma*, *teorik bir ereve oluşturma*, *bir araştırma problemini belirleme*, *araştırma sorularını hazırlama-keskinleştirme ve örnekleme seçme (amaçlı rnekleme)*. Ancak Merriam (2018) bir çalışma tasarlanmanın burada aktarıldığı gibi doğrusal bir şekilde ilerlemeyebileceğini de ifade etmiştir. Ona göre tűm bu sűre birbiriyle etkileşimlidir; araştırma sorusu sonrası gerekirse tekrar literatűre ya da olguya geri dnűlebilir.

Bu araştırmada öğrencilerin matematiksel dűřűnme sűrelerinin derinlemesine incelenmesi amaçlandığından nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması deseni kullanılması uygun grűlműřtűr ve Merriam'ın (2018) durum çalışması tasarımı temel alınmıştır. Merriam'a (2018) göre durum çalışmasının en temel özelliği durumun sınırlandırılmasıdır. Ayrıca Merriam (2018) araştırılan olgunun zűnűn sınırlı olmaması yani araştırılan olguya ait gözlemlerin sonunun olmaması durumunda

durumun yeterince sınırlı olmadığını ifade etmektedir. Merriam (2018) durum çalışmalarının tercih edilmesinin esas nedeni olarak bir olguya ilişkin başka türlü elde edilemeyecek bilgilere -durumun kavranması, keşfedilmesi, kapsamlı ve bütünsel bir şekilde betimlenmesi, analizi ve yorumlanması- erişim kolaylığı sağlaması cevabını vermektedir.

Bu araştırmada “durum” sekizinci sınıf düzeyindeki öğrencilerin sıklıkla karşılaştıkları beceri temelli sorulardaki matematiksel düşünme süreçleridir. Araştırılacak olan bu durumun doğası zengin bir betimleme ile öğrencilerin soru çözüm süreçlerini incelemeyi gerektirmektedir. Araştırılan durum belirli ölçüt örnekleme kullanılarak seçilen bir gruba ve araştırma için belirlenen öğrenme alanlarına göre seçilip revize edilen LGS matematik sorularıyla sınırlandırılmıştır. Araştırılacak olgunun doğasına uygun olması ve matematiksel düşünme süreçleri üzerine herhangi bir eğitim süreci geçirmemiş öğrencilerin genel durumlarının incelenmesi için en uygun yöntemin nitel durum çalışması olduğu düşünülmüştür.

2.2. Katılımcılar

Birçok nitel araştırma yönteminde olduğu gibi durum çalışmasında da katılımcı sayısı nispeten düşüktür. Bu araştırmanın katılımcıları da araştırmacının görev yaptığı devlet okulunun sekizinci sınıfında öğrenim gören sekiz öğrenciden oluşmaktadır. Araştırmanın yapıldığı okul şehir merkezinde olup öğrencilerin geneli orta-düşük gelir grubundandır. Katılımcıların seçiminde amaçlı örnekleme yöntemlerinden ölçüt örnekleme metodu kullanılmıştır. Yıldırım ve Şimşek’e (2018) göre ölçüt örnekleme, araştırmacı tarafından veya daha önceden oluşturulmuş bir ölçüt grubu gözetilerek veri toplanacak grubunun belirlenmesidir. Bu araştırmada öğrencilerin seçiminde belirlenen ölçütler ise araştırmacının derslerini yürüttüğü sınıflarda bulunan, matematik derslerinde orta ve üst denilebilecek başarı düzeyinde olan, kendilerini iyi ifade edebilen, koronavirüs salgını sürecinde uzaktan eğitim olarak yürütülen derslere düzenli olan katılım gösteren ve çalışmaya katılmaya gönüllü olan öğrenciler olarak belirlenmiştir. Bu kriterler göz önünde bulundurularak araştırmacının altıncı sınıftan itibaren derslerini yürüttüğü sekizinci sınıftan seçilen sekiz öğrenci ile araştırma yürütülmüştür. Seçilen öğrencilerin kod isimleri, demografik bilgileri ve e-okul

sistemi üzerinden temin edilen 4-5-6-7. sınıf düzeylerindeki genel not ortalamaları Tablo 1’de verilmiştir.

Tablo 1. Katılımcıların demografik bilgileri ve akademik başarı ortalamaları

Öğrenci adı	Cinsiyeti	Yaşı	4. sınıf genel ort.	5. sınıf genel ort.	6. sınıf genel ort.	7. sınıf genel ort.
Barış	Erkek	14	95,80	97,73	96,85	100
Tuğçe	Kız	13	94,51	97,04	96,01	100
Melek	Kız	14	90,68	97,16	90,61	99,52
Murat	Erkek	14	89,05	90,16	87,42	94,52
Hande	Kız	14	97,04	93,34	90,36	99,38
Uğur	Erkek	14	96,01	96,86	95,48	99,10
Sevda	Kız	13	86,92	91,75	90,40	100
Nehir	Kız	14	93,59	96,23	90,45	97,00

Tablo 1’de araştırmaya katılan öğrencilerin beşinin kız, üçünün erkek öğrenci olduğu görülmektedir. Yaşları arasında en fazla bir yıllık fark olan öğrencilerin 4-5-6 ve 7. sınıf genel akademik not ortalamalarının 85,00’in üzerinde olduğu, beşinci sınıfta genel olarak not ortalamalarının arttığı, altıncı sınıfta küçük de olsa düşüş olduğu, yedinci sınıfta ise maksimum düzeye ulaştığı görülmektedir. Yedinci sınıf düzeyinde genel akademik not ortalamalarındaki artışın nedeni, uzaktan eğitim sürecinde MEB’in yüz yüze ya da çevrimiçi herhangi bir sınav uygulanmayıp sadece öğrencilerin uzaktan eğitim sürecindeki ders katılımları temel alınarak not verilmesi yönündeki kararı olarak düşünülmektedir. Tabloya göre araştırma grubu seçimi için ölçüt örnekleme kriteri olan orta ve üst başarı düzeyi kriterini sağlandığı görülmektedir. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler araştırmacının derslerini yürüttüğü bir sınıfta bulunmaktadır. Araştırma grubunun tamamı uzaktan eğitim sürecinde matematik derslerine katılmaya özen göstermiş, kendilerini iyi ifade edebilen ve çalışma için gönüllü olduklarını beyan eden öğrencilerdir.

Araştırmanın katılımcılarının ortaokul süreçleri tüm dünyayı etkisi altına alan koronavirüs salgını dönemine denk gelmiştir. Bu süreç Türkiye’de ilk vakanın görüldüğü 12 Mart 2020 tarihinde başlamıştır. MEB ve T.C. Sağlık Bakanlığı tarafından oluşturulan Bilim Kurulu istişaresi sonucunda 13 Mart 2020 tarihinden itibaren yüz yüze eğitime önce üç haftalık, sonra sürenin uzatılması neticesinde dönem sonuna kadar ara verilmiştir. Sürece hazırlıksız yakalanan eğitim kurumları, 2012 yılında kurulmuş olan Eğitim Bilişim Ağı [EBA] dijital platformu ve ülke çapında

yaygın kullanılan iletişim uygulamaları aracılığıyla öğrencilere ulaşmaya çalışmıştır. Ancak öğrencilere ulaşabilme durumu bölgeden bölgeye, okuldan okula hatta öğretmenlerden öğretmene değişiklik göstermiştir. Yüz yüze eğitime verilen bu ara sonrasında uzaktan eğitimde fırsat eşitliğini sağlayabilmek için MEB tarafından ulusal yayın yapan EBA Televizyon kanalı [EBA TV] kurulmuş ve EBA TV'nin yayın programı her sınıf seviyesi için her gün aynı saatlerde dersler koyularak hazırlanmıştır. Ayrıca öğrencilerin hastalık, özel durum vb. sebeplerle dersleri takip edemeyebileceği düşünülerek derslerin tekrar yayınları da farklı saatlerde yayın programına eklenmiştir. Salgın sürecinin başlamış olduğu 2019-2020 eğitim öğretim yılının ikinci döneminde karneler, ilk dönemde alınan notlar kullanılarak verilmiş ve yaz tatili sürecine geçilmiştir.

Araştırmanın katılımcıları altıncı sınıfın ikinci döneminde salgın dönemine denk gelmiş ve salgın sürecinde EBA üzerinde her bir öğretmenin dönem boyunca en fazla 10 ders saati olarak tanımlayabileceği dersleri öğrenciler kişisel imkanlarına göre alabilmiştir. Öğretmenler ise süresi 30 dakikaya indirilmiş olan bu 10 ders saatinde en önemli gördüğü konuları anlatmayı tercih etmiş ve altıncı sınıf kazanımları arasında seçim yapmak zorunda kalmıştır. Yaz tatili sonrasında geliştirilen ve güçlendirilen EBA dijital platformu ile önce üç haftalık uzaktan telafi eğitimi yapılmış ve ardından kademeli geçişle önce sekizinci sınıflar ile lise son sınıflar ardından ilkokullar sosyal mesafe ve maske kurallarına dikkat etmek koşuluyla yüz yüze eğitime başlamıştır. Ancak hastalığın yayılımının artması neticesinde Kasım ayında yapılan ara tatil sonrasında yüz yüze eğitime başlaması planlanan ara sınıflar yüz yüze eğitime başlayamamış ve yine tüm sınıf seviyelerinde uzaktan eğitime geçilmiştir. Dolayısıyla katılımcılarının yedinci sınıf süreçleri ise tamamen uzaktan eğitim ile geçmiştir. Bu süreçte de dersler 30 dakika olmuş ve kazanım sayılarında herhangi bir değişiklik yapılmamıştır. Ayrıca öğrencilerin bağlantı sorunları da yaşamaları nedeniyle her ders için birkaç dakikalık zaman kayıpları meydana gelmiştir.

Ailelerin ekonomik durumlarının değişkenliği, öğrencilerin uzaktan eğitime katılacakları kişisel tablet, telefon veya bilgisayara sahip olup olmaması, öğrencilerin internet imkanları ile evlerinde derslere katılabilecekleri uygun ortamlarının olup olmaması gibi etkenler eğitimdeki fırsat eşitliğini zedelemiştir. Ayrıca kardeş sayısı fazla olan öğrenciler de evde imkanları olsa bile kardeşleriyle ders saatlerinin

çakışması neticesinde bu süreçten etkilenmiş ve farklı dersler arasında seçim yaparak uzaktan eğitimlere katılmışlardır. Hem MEB hem de okullarda öğretmenlerin yürüttüğü kampanyalar neticesinde ihtiyacı olan öğrencilere zamana yayılarak tablet desteği verilmiş olsa da bu süreç yüz yüze eğitim kadar verimli bir şekilde geçirilememiştir.

Bu araştırmanın katılımcıları altıncı sınıfın ikinci döneminde verilen aranın ardından yüz yüze eğitime sekizinci sınıfta maske ve mesafe kuralları altında başlamışlardır. 2021-2022 eğitim öğretim yılının ilk döneminde yüz yüze eğitime başlanılmasının ardından MEB sınıfta en az iki vakanın görüldüğü durumlarda 14 günlük sınıf karantinası uygulaması yapmıştır. Katılımcıların bulunduğu sınıfın öğrencileri bu süreçte iki kez karantina geçirmiştir ve sekizinci sınıfın ilk döneminde toplam dört haftayı uzaktan eğitimle tamamlamışlardır. Üslû ifadeler konusuna ait kazanımlar bu uzaktan eğitim süreçlerine denk gelmiştir. Bir önceki uzaktan eğitim sürecinde yaşanan aksaklıkların benzerleri bu süreçte de yaşanmıştır. Bu karantina süreçleri sırasında katılımcıların arasından koronavirüs hastalığını geçiren ve bu durum sonrasında etkilenen öğrenciler de bulunmaktadır. Katılımcıların biri Türkiye Cumhuriyeti [T.C.] uyruklu değildir ancak Türk asıllı olup, Türkçe'yi iyi bir şekilde kullanmakta ve uzun yıllardır Türkiye'de ikamet etmektedir.

2.3. Veri Toplama Araçları

LGS matematik soruları arasından seçilip araştırmacı tarafından revize edilen beceri temelli sorular, katılımcılarla soru çözüm sürecindeki görüşmeler, araştırmacının bu sürece dair gözlemleri ve katılımcıların yazılı ifadelerinden oluşan dokümanların incelemesi bu araştırmanın veri toplama araçlarını oluşturmaktadır. Yıldırım ve Şimşek (2018) nitel araştırmalarda birden fazla veri toplama aracının kullanılmasının araştırmanın geçerlik ve güvenilirliğinin artırılması için önemli olduğunu ifade etmektedir. Araştırmacı, gözlemleri sonrasında gerekli gördüğü durumlarda görüşme sorularında değişikliğe gitmiştir. Yani öğrencilerin yazılı ifadelerinde düzeltmeye gittiği kısımları sorgulamış, çözüm sürecinde öğrencilerin çözüm sürecini incelediği vb. durumları öğrencilere sorarak matematiksel düşünme süreçlerini anlamaya çalışmış ve böylece daha zengin veri elde etmeye çalışmıştır. Bu süreçlerde yarı-yapılandırılmış görüşme formuna dayanarak öğrencilerin düşünme

sürecini açığa çıkarmak için farklı sonda soruları kullanmıştır. Farklı veri toplama yöntemlerinin birbirlerine göre üstün yönleri de bu şekilde devreye girmiştir. Araştırmada kullanılan veri toplama araçlarına ilişkin bilgiler aşağıda sırasıyla yer almaktadır.

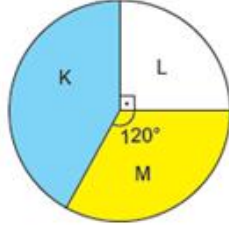
2.3.1. Beceri Temelli Matematik Soruları

Araştırma problemi üzerinde yapılan literatür taraması sonrası MEB tarafından 2018-2021 yılları arasında uygulanan LGS matematik soruları arasında geometri ve ölçme öğrenme alanı haricindeki tüm sorular taranmıştır. Geometri ve ölçme öğrenme alanındaki derslerin ortaokul matematik öğretim programının tamamında eğitim öğretim yılının ikinci yarısında yer alması, koronavirüs salgını sürecinin başlangıcı ve uzaktan eğitim sürecindeki en deneyimsiz ve en dezavantajlı dönemin bu öğrenme alanına ait kazanımlarda olmasına neden olmuştur. Bu nedenle oluşabilecek öğrenme eksiklikleri dolayısıyla bu öğrenme alanındaki sorular araştırmaya dahil edilmemiştir. Elde edilen sorular tekrar incelenip araştırmacı tarafından revize edilen dört adet LGS matematik sorusunda karar kılınmıştır. Bu konu üzerinde yapılan araştırmalarda (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba Dağ ve Altun, 2013; Aydın-Güç, Aygün ve Orbay, 2021) matematiksel düşünme süreçlerinin daha sağlıklı bir şekilde gözlenebilmesi amacıyla sorulara yönergelerin eklendiği görülmüştür. Bu nedenle belirlenen sorularda matematiksel düşünme basamaklarının gözlenebilmesine yardımcı olabilmek için soru bağlamları aynen bırakılıp soru köklerinde değişikliklere gidilmiş ve öğrencilerin özel durumlar üzerinde çalışmalarını, varsayımlar oluşturmalarını ve genellemelere ulaşmalarını gerektirecek şekilde yönergeler ilave edilmiştir. Pilot çalışma neticesinde öğrencilerin çözümünde oldukça zorluk yaşadıkları bir soru araştırmadan çıkarılarak yerine aynı öğrenme alanına ait farklı bir soru ilave edilmiştir. Pilot çalışma neticesinde değiştirilen soru Şekil 6'da verilmiştir.

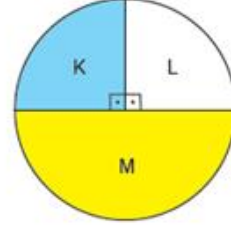
2021 LGS - Veri Analizi

2. Bir elektronik eşya mağazasında 2019 ve 2020 yıllarında satılan K, L ve M marka televizyon sayılarının dağılımı, aşağıdaki daire grafiklerinde gösterilmiştir.

Grafik 1: 2019 Yılında Satılan Televizyonların Dağılımı



Grafik 2: 2020 Yılında Satılan Televizyonların Dağılımı



Bu mağazada 2020 yılında satılan L marka televizyon sayısı 2019 yılına göre 25 azalırken M marka televizyon sayısı 40 artmıştır.

Markalara göre 2019 yılında satılan televizyon sayılarını bulunuz.

Şekil 6. Veri işleme öğrenme alanında sorulup pilot çalışma sonrasında veri toplama aracından çıkarılan soru.

Şekil 6'daki soru öğrencilerin uzun süre düşünmelerini gerektirmiş ve uzun süren sessizlikler meydana getirmiştir. Soru öğrencilerin iki grafik arasında ilişkilendirme yapıp ulaştıkları genellemeleri kullanmalarını gerektirmektedir. Öğrencilerin duraksadığı, iki grafik arasındaki ilişkilendirmeyi yapmakta ve çözüm sürecinde zorluk yaşadıkları bu soruda matematiksel düşünme süreçlerinin gözlenmesi mümkün olmamıştır. Bu nedenle soru veri toplama aracından çıkarılmış ve yerine aynı öğrenme alanına yönelik farklı bir soru ilave edilmiştir. Matematiksel düşünme üzerinde yapılan araştırmalarda kullanılan sorular da göz önünde bulundurularak bu araştırma için seçilen LGS soruları açık uçlu forma dönüştürülmüş ve matematiksel düşünme süreçlerini açığa çıkaracak şekilde yönergeler eklenerek revize edilmiştir. Oluşturulan bu sorular alan uzmanı iki araştırmacının görüşleri alınarak düzenlenmiş, daha sonra araştırmacının akademik danışmanı tarafından incelenerek son haline getirilmiştir. Araştırmada kullanılan beceri temelli matematik soruları ile görüşme sorularına EK-1'de yer verilmiştir.

2.3.2. Görüşme

Nitel araştırmaların en önemli veri toplama araçlarından biri de görüşmelerdir. Bu araştırmada da katılımcılara sunulan beceri temelli matematik sorularının çözüm

sürecinde gerçekleşen görüşme araştırmanın birincil veri kaynağını oluşturmaktadır. Görüşmeler katılımcıların uygun olduğu zaman dilimleri dikkate alınarak okulda sessiz bir ortamda gerçekleştirilmiş ve tüm süreç sadece öğrencilerin çözümleri görülebilir şekilde kamera ile kayda alınmıştır. Merriam'ın (2018) Patton'dan (2002, s. 341) aktardığına göre görüşme, doğrudan gözlemin yapılamadığı durumlarda, insanların yaşadıkları çevreyi nasıl anlamlandırdıklarını tespit etmek yani katılımcının bakış açısını keşfedebilmek amacıyla yapılmalıdır. Bu çalışmada öğrencilerin düşünme süreçlerinin nasıl olduğunu keşfedebilmek adına öğrencilere sorular sorularak durum ortaya çıkarılmak istenmektedir. Araştırılan konuya dair daha zengin veri elde edebilmek adına yarı yapılandırılmış görüşme tekniğinin kullanılması uygun görülmüştür. Merriam (2018) yarı yapılandırılmış görüşmelerde sorulacak soruların kılavuz halinde olduğunu, soruların esnek olması gerektiğini, genellikle spesifik bilgilere yönelik olduğunu, önceden belirlenmiş ayrıntılardan oluşmadığını ifade etmektedir. Bu çalışmada matematiksel düşünme süreçlerinin tespiti için belirli bir soru kılavuzu kullanılmış ancak süreç içerisinde gerektiğinde öğrencinin bakış açısını ortaya koyabilmek için sorularda farklılaşmaya gidilmiştir. Araştırmanın katılımcılarıyla yapılan toplam görüşme süreleri Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Katılımcılarla yapılan görüşmelerin süreleri.

Katılımcılar	Olasılık Sorusu	Veri İşleme Sorusu	Sayılar ve İşlemler Sorusu	Cebir Sorusu	Toplam
Barış	10 dk 29 sn	8 dk 15 sn	27 dk 30 sn	16 dk 29 sn	62 dk 43 sn
Melek	10 dk 35 sn	3 dk 11 sn	19 dk 50 sn	16 dk 1 sn	49 dk 37 sn
Tuğçe	8 dk 47 sn	8 dk 15 sn	15 dk 38 sn	8 dk 17 sn	40 dk 57 sn
Hande	20 dk 20 sn	21 dk 19 sn	31 dk 56 sn	14 dk 27 sn	88 dk 2 sn
Murat	13 dk 4 sn	21 dk 43 sn	40 dk 49 sn	13 dk 6 sn	88 dk 42 sn
Uğur	21 dk 20 sn	17 dk 58 sn	15 dk 58 sn	29 dk 10 sn	84 dk 26 sn
Sevda	12 dk 20 sn	28 dk 15 sn	35 dk 22 sn	20 dk 15 sn	96 dk 12 sn
Nehir	21 dk 23 sn	18 dk 49 sn	53 dk 57 sn	23 dk 13 sn	117dk 22 sn
Toplam	118 dk 18 sn	127 dk 45 sn	241 dk 0 sn	140 dk 58 sn	10sa 28dk 1sn

Tablo 2'de her bir öğrenciyle yapılan toplam görüşme sürelerinin 40 dk 57 sn ile 117 dk 22 arasında olduğu görülmektedir. Öğrenme alanlarına göre ise en uzun görüşme süresi "Sayılar ve İşlemler" (241 dk 0 sn) öğrenme alanına ait soruda, en kısa görüşme süresi ise "Olasılık" (118 dk 18 sn) öğrenme alanına ait soruda gerçekleşmiştir. Bu çalışmada görüşme soruları alan uzmanının da görüşü alınarak öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri dikkate alınarak hazırlanmıştır.

Öğrencilere sunulan beceri temelli soruların soru kökleri öğrencilerin özel durumlar oluşturmalarını oluşturmalarını, bu özel durumlardan hareketle bazı sezgilere ve dolayısıyla varsayımlara ulaşmalarını ve nihayetinde bu varsayımlarını cebirsel genellemelere dönüştürmelerini gerektirecek şekilde yapılandırılmıştır. Yapılan pilot çalışma ve alınan uzman görüşleri neticesinde görüşme soruları son şekline getirilmiştir. Özel durumlar üzerinde çalışma sürecine yönelik olarak sorudaki koşula uygun olacak şekilde “Bir veya birden fazla örnek durum bulabilir misin?”, “Kaç farklı durum bulabilirsin?” ve “Bulduğun sayıları neye göre belirliyorsun? gibi sorular yöneltilmiştir. Varsayımda bulunma sürecine yönelik olarak “Bulduğun özel durumlardan hareketle bir ilişki, kural ya da ortak özellik fark edebildin mi?”, “Bu ilişki tüm örnek durumlar için geçerli midir?”, “Bu ilişkiyi nasıl ifade edersin?” vb. sorular yöneltilmiştir. Genelleme sürecine yönelik olarak ise “Fark ettiğin bu ilişkiyi daha genel bir şekilde ifade edebilir misin?”, “Bu ilişkiyi harfli ifadeleri kullanarak ifade edebilir misin?”, “Bu ilişkiyi matematiksel olarak nasıl ifade edersin?” şeklinde sorular yöneltilmiştir. Bu soruların ilk taslağı pilot çalışma sonrası uzman görüşleri alınarak düzenlenmiş, daha sonra tekrar pilot çalışma ile denenmiş ve son haline getirilerek araştırma sürecine geçilmiştir. Beceri temelli matematik soruları, görüşme sorularıyla bütünleşik olarak Ek 1’de verilmiştir.

2.3.3. Gözlem

Yıldırım ve Şimşek (2019) nitel araştırmalarda yapılan gözlemleri araştırmaya konu olan olayın, olgunun veya durumun ayrıntılı bir şekilde betimlenip açıklanması ve tanımlanması olarak ifade etmektedir. Katılımcıların davranışlarının olguyla birlikte bir bütün olarak ifade edilip araştırma yapılan ortamın da beraberinde açıklanmasını içeren gözlem, Yıldırım ve Şimşek’e (2019) göre araştırmacının becerisini ve bu konudaki deneyimini de ön plana çıkarmaktadır. Bu araştırmada yapılandırılmamış alan çalışması türündeki gözlem kullanılmıştır. Bu tür gözlemler davranış doğal ortamında incelendiğinde yapılmaktadır ve Yıldırım ve Şimşek’e (2019) göre çoğunlukla araştırmacının katılımcı gözlemci olarak kendini tanımladığı araştırmacı rolüyle gerçekleşmektedir. Bu araştırmada kullanılan standart bir gözlem aracı bulunmamaktadır.

Merriam (2018) ise bulguları üçgenlemek için kullanılan gözlem metodunun görüşme ve doküman analizi ile birlikte kullanıldığını ifade etmektedir. Ayrıca Merriam (2018) katılımcı gözlemcilerin, gözledikleri olguyu yorumlarken ve görüşme verilerini değerlendirirken kişisel bilgi ve deneyimlerinden yararlanarak olayları doğrudan görecekları ifade etmektedir. Bu araştırmada öğrencilerin jest ve mimikleri, çözüm sürecindeki davranışları, düşünme aşamalarında yaptıkları işlemlerde nereleri inceledikleri, yazılı işlemlerde neleri sildikleri veya düzelttikleri ve çözüm için verilen kâğıdı nasıl kullandıkları gözlemlenmiştir.

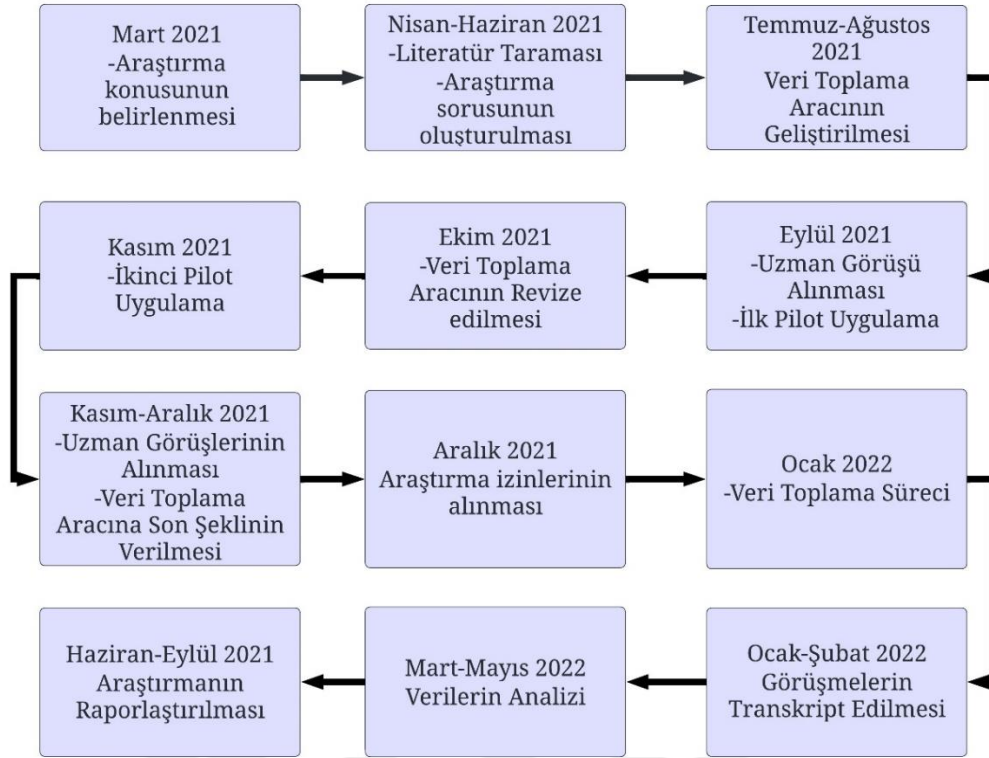
2.3.4. Doküman İncelemesi

Yıldırım ve Şimşek'e (2018) göre doküman analizi araştırılmak istenen olay ya da olgu ile ilgili bilgiler içeren yazılı materyallerin analizini kapsamaktadır (s. 189). Ayrıca yazılı kaynaklar haricinde film, video kayıtları ve fotoğraflar da doküman incelemesi kapsamında kullanılabilir. Merriam (2019) ise doküman terimi yerine "belgeler" şemsiye terimini seçmeyi uygun görmekte, LeCompte ve Preissle'dan (1993, s. 216) aktararak "belgeler" teriminin ise insan yapımı nesne, yazı, imzalar, mobilya vb. araçları içerdiğini belirtmektedir. Bu araştırmada incelenen dokümanlar öğrencilerin problemleri çözdüğü süreçteki yazılı ifadeleri ve yalnızca yazılı ifadeleri göreceğ şekilde ayarlanmış olan kamera kayıtlarından oluşmaktadır. Veri toplama sırasında öğrencilerin yazdıkları ifadeleri bazı durumlarda silmeye çalıştıkları görülmüştür. Bu süreçteki yazılı ifadeler araştırma için önemli görüldüğü durumlarda video kayıtları aracılığıyla kesit olarak alınmış ve araştırma içerisinde kullanılmıştır.

2.4. Pilot Çalışma ve Veri Toplama Süreci

Araştırma konusuna karar verildikten sonra araştırmacı tarafından ilgili alanyazın incelenmiş ve bu konuda yapılan araştırmalar gözden geçirilmiştir. Alanyazın incelemesinin ardından araştırma soruları oluşturulmuştur. Beceri temelli sorular içeren oldukça geniş bir havuzun varlığı nedeniyle MEB tarafından 2018 yılından itibaren uygulanan LGS matematik soruları içerisinde geometri ve ölçme öğrenme alanı hariç tutularak bir havuz oluşturulmuş ve bu havuz içerisinde matematiksel düşünme süreçlerinin incelenebileceği düşünülen dört adet problemde

karar kılınmıştır. Geometri ve ölçme öğrenme alanına ait kazanımlar ortaokul matematik öğretim programında tüm sınıf seviyelerinde ikinci dönemde yer almaktadır. Bu nedenle koronavirüs salgını sürecinde olumsuz yönde en çok etkilenen öğrenme alanı geometri ve ölçme olmuştur. Öğrencilerin ön öğrenme eksikliklerinin olabileceğine yönelik öngörü nedeniyle bu öğrenme alanı araştırmaya dahil edilmemiştir. Problemlerin oluşturulmasının ardından bir alan uzmanının görüşleri alınarak düzeltmeler yapılmıştır. Araştırmacı tarafından, aynı okulda matematik derslerini farklı bir öğretmenin yürüttüğü bir sınıfta araştırmanın katılımcılarına benzer özellikler gösteren bulunan iki öğrenciyle pilot uygulama yapılmıştır. Bu öğrencilerin seçimi için öğrencilerin matematik öğretmenlerinin görüşleri dikkate alınmıştır. Goldin'e (2000) göre pilot çalışma, sorulardaki olası dilsel hataların ve yanlış anlaşılabilir durumların ortaya çıkarılması ve ayrıca beklenmedik durumlarla karşılaşma durumunun tespiti için yapılmaktadır. Pilot çalışma ile soruların dilsel yapısının uygunluğu, anlaşılabilirliği ve araştırmanın amacına uygunluğunun tespiti amaçlanmıştır. Öğrencilerin derslerini aksatmayacak şekilde farklı zamanlarda okul içerisinde bireysel olarak yapılan görüşmelerde sorular öğrencilere sunulmuştur. Öğrencilerden izin alınarak öğrencilerin soruları çözüm süreçleri, sadece çözümleri görünecek şekilde kamerayla kaydedilmiştir. Araştırmacı bu süreçteki gözlemlerini not almıştır. Pilot çalışma neticesinde öğrencilerin çok zorlandığı belirlenen ve bu nedenle matematiksel düşünme süreçlerinin gözlenemediği bir soru asıl çalışmadan çıkarılmış ve yerine aynı öğrenme alanına ait farklı bir soru eklenmiştir. Ardından tekrar farklı iki alan uzmanının görüşüne başvurulmuştur. Uzman görüşleri ve pilot uygulama sonrasındaki dönütlere göre soruların tekrar düzenlenmesinin ardından veri toplama aracına son şekli verilmiştir. Veri toplama aracının son hali yine pilot uygulama için seçilen öğrencilerin sınıfında öğrenim gören farklı bir öğrenci üzerinde denenmiş ve matematiksel düşünme süreçlerinin gözlenebildiği sonucuna varılmıştır. Bu süreçte araştırmanın katılımcılarından ve velilerinden gerekli izinler alınmış ve veri toplama sürecine hazırlıklar yapılmıştır. Araştırma sürecini gösteren diyagram Şekil 7'de verilmiştir.



Şekil 7. Araştırma süreci.

Veri toplama aracına son şeklinin verilmesinin ardından 2022 yılı Ocak ayında iki hafta içerisinde çalışmanın asıl katılımcıları ile öğrencilerin derslerini aksatmayacak şekilde okul içerisinde görüşmeler yapılmıştır. Öğrencilerle yapılan görüşmeler toplamda ortalama olarak 70 dakika sürmüştür. Öğrencilerin problem çözüm süreçleri sadece çözüm yaptıkları kağıtlara odaklanmış şekilde bir kamera ile kaydedilmiştir. Daha sonra araştırmacı tarafından tüm kayıtlar izlenerek gözlem verileriyle birlikte transkript edilmiştir. Transkript etme işleminin tamamlanmasından sonra veriler öğrenme alanlarına göre ayrılmış, araştırmacı tarafından her bir bölüm okunmuş, benzerlikler fark edilmeye çalışılmış ve daha sonra kodlamalar yapıp verilerin analizine geçilmiştir. Araştırmaya dahil edilen öğrenme alanlarına göre verilerin analizinin tamamlanmasıyla birlikte araştırma raporu hazırlanmaya başlanmıştır.

2.5. Araştırmacının Rolü

Bu araştırma kapsamında araştırmacı, katılımcı rolündedir. Yıldırım ve Şimşek (2018) araştırmacının katılımcı rolünü; alanda zaman harcayan, araştırmanın katılımcılarıyla doğrudan iletişim kuran, görüşen ve deneyimlerini yaşayan, alanda

kazanmış olduğu bakış açısı ve deneyimlerini veri toplama ve analiz etme süreçlerinde kullanan kişi olarak tanımlamaktadır. Araştırmacı, araştırmanın katılımcılarını en az iki senedir tanımakta ve bizzat matematik derslerini yürütmektedir. Ayrıca araştırma süreci, uzaktan eğitim süreci ve daha öncesinde de katılımcılarla ve aileleriyle iletişim halinde bulunmuştur. Dolayısıyla katılımcılarla ilgili bazı ön yargılara ve varsayımlara sahip olabileceği açıktır. Ancak araştırmacı, araştırması sırasındaki görüşmelerde önyargılarını bertaraf etmiş ve nesnel bir rol üstlenmiştir. Katılımcıların ortaokul yıllarını geçirdiği bu salgın süreci, araştırmacının deneyim kazandığı süreçlerden oldukça farklı olduğu için araştırmacının önyargı ve varsayımlarının araştırma sürecine yansımayacağı da aşıkardır.

2.6. Verilerin Analizi

Merriam (2018) nitel araştırmalarda doğrusal bir sürecin takip edilmediğini vurgulamakta ve veri toplama ve analiz süreçlerinin eş zamanlı olması gerektiğini belirtmektedir (bkz. s. 157). Ayrıca veri analizini elde edilen verilerden bir anlam oluşturma süreci olarak tanımlayarak bu süreci araştırmacının gözlemleri ve diğer verileri pekiştirerek azaltıp yorumlaması olarak ifade etmektedir. Nitel veri analizinin öncelikle tümevarımsal ve karşılaştırmalı olduğunu da belirten Merriam (2018) veri analizini “*verinin anlamını dışarı aktarma*” yani araştırma için elde edilen verileri araştırmacının nasıl okuyup birleştirdiğini, indirgediğini ve yorumladığını açıklaması olarak ifade etmektedir. Bu araştırmada verilerin analizi sürecine pilot çalışma ile başlanmıştır. Pilot çalışmada öğrencilerin belirli örüntüleri tekrarladığı görülmüştür. Asıl çalışma için verilerin toplanmasının ardından her bir öğrenciyle yapılan görüşmeler öğrenme alanlarına göre ayrıştırılmış, öğrencilerin tekrarladığı örüntüler takip edilmiş ve sonrasında bu örüntüler matematiksel düşünme süreçleri için belirlenen kodlara göre karşılaştırılıp, kategorilendirilmiştir. Merriam (2018) kategorilendirme işleminin sezgisel bir süreç olduğunu ancak aynı zamanda sistematik olduğunu da belirtmektedir. Merriam’a (2018) göre tümevarımsal olarak ilerleyen kategorilendirme aşaması doyum noktasına erdiğinde sona ermekte ve sonrasında belirlenen kategorilere uygun verilerin araştırıldığı tümdengelimsel bir süreç başlamaktadır.

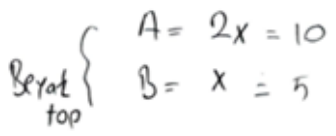
Bu araştırmada içerik analizi kullanılması uygun görülmüştür. Merriam (2018) nitel bütün veri analizlerinin içerik analizi olduğunu ifade etmektedir. Altheide'e (1987, s. 68) göre nitel içerik analizi, “*olayların, mekanların, stillerin, imajların, anlamların ve nüshaların anahtar kelime olarak yer aldığı*” iç görü oluşumunun peşindedir (akt. Merriam, 2018). Bu süreç verilerin kodlanması ve kategorilendirilmesini de kapsamaktadır.

Araştırmacı elde ettiği veriler incelendikten sonra veri setindeki örüntüleri inceleyip alanyazındaki araştırmalardan da yararlanarak verileri kategorilendirme yoluna gitmiş, daha sonra da bu kategorilerin tanımlarını netleştirip bu kategorilere uyan verileri tespit etmiştir. Tablo 3'te bu araştırma için kullanılan kategoriler, bu kategorileri tanımlayan davranışlar ve veri setinden örnekler yer verilmiştir.

Tablo 3. Veri analizinde kullanılan kategoriler, bu kategorileri tanımlayan davranışlar ve kodlamaya ilişkin veri seti örnekleri.

Matematiksel düşünme süreçleri	Kategorileri tanımlayan davranışlar	Veri setinden örnekler
Özel durumlar üzerinde çalışma	-Verilen durumu sağlayan farklı örnekler bulma -Bulduğu örnek durumları inceleme içerisinde olma	<i>Sevda: Her ay 40. (310'un yanına 40 yazıp ekliyor.) 350. (Yazarak devam ediyor.) 350+40=390; 390+40=430.) Üçüncü ay. Bir de dördüncü ayımız var. (430+40=470 yazıyor.) Yani 470 TL ödeyecek.</i>
	-Örnek durumlar içerisindeki ilişkiyi anlama, hissetme, sezme -Örnek durumlar içerisindeki ilişkiye yönelik tahminde bulunma	<i>Melek: (F yerine koyduğu sayıların altını çiziyor.) Bunlar oldu, yani [üssü] tek sayılar. A: Yani üsler tek sayı mı diyorsun? Melek: Çift olduğu zaman olmuyor. ----</i>
Varsayımda bulunma	-Hissettiği/sezdiği ilişkiye yönelik kontrollerde bulunma -Sezilen ilişkinin kontrolü sonrasında hata fark edip başa dönme -Fark ettiği ilişkiyi sözel veya cebirsel olarak ifade etme	<i>A: Peki yazdığın bu sayıları incelediğinde bir ilişki kural ya da ortak bir özellik fark edebildin mi? Melek: (Biraz düşünüyor.) E, 4'ün katı. (4'le çarpıldığını söylemeye çalışıyor.) A: Hangileri dördün katı? Melek: Hepsi 1, 4, 2 de dördün katı. Hayır değil... A: 2'de ulaşamadığını söylemiştin zaten. Melek: Evet, 1 – 4 – 16 – 64. Dördün katı. A: Bir sonraki için ne diyebilirsin? Melek: İu. 64'le 4'ü çarparsak. (İşlemini yapıyor.) 256 olur.</i>

Tablo 3 (Devam). Veri analizinde kullanılan kategoriler, bu kategorileri tanımlayan davranışlar ve kodlamaya ilişkin veri seti örnekleri.

Genelleme	-Ulaştığı varsayımı genel ifade olarak yazma	 Şekil 8. Barış'ın olasılık sorusu için ulaştığı genel ifade. --- Sevda: Şimdi mesela buna (A) iki kırmızı koydum, buna (B) bir kırmızı, buna (C) bir kırmızı koyduk desek. Beyazı da, eee.. Buna (A) 4x koyduysam, bunlara (B ve C) 2x koyucam.”
-----------	--	--

2.7. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Merriam’a (2018) göre nitel araştırmalarda geçerlik ve güvenirlik, araştırmacının katılımcılarla etkileşimi, verilerin ve algıların yorumlanması ve detaylı açıklamaların yapılması ile sağlanan üçgenleme yoluyla sağlanmaktadır. Araştırmacı Merriam’ın önerdiği bu üçgenlemeyi hem araştırma sürecinde ve hem verilerin analizi sürecinde sağlamaya özen göstermiştir.

Nitel araştırmada geçerlik araştırmacının araştırılan olguyu, olduğu gibi ve tarafsız olarak gözlemesi ve aktarması anlamına gelmektedir. Yani araştırılan olgunun araştırmacının önyargı ve düşüncelerinden bağımsız olarak sunulması ve okuyucunun araştırma sonuçlarını benzer ortamlara aktarabilmesi geçerlik ile ilgilidir. Nitel araştırmalarda doğrudan bir ölçme durumu söz konusu değildir ve bu nedenle Yıldırım ve Şimşek’e (2019) göre iç geçerlik kavramı *inandırıcılık* ve dış geçerlik kavramı da *aktarılabilirlik* olarak ele alınmaktadır. Nitel araştırmalarda geçerlik konusu güvenirliğe göre daha önceliklidir çünkü nitel araştırmalarda geçerliğin sağlanmış olması büyük ölçüde güvenirliği garanti altına almaktadır.

Nitel araştırmalarda inandırıcılık, yapılan araştırmanın okuyucuları bulguların gerçekliğine inandırması anlamına gelmektedir. Lilcoln ve Guba (1985), nitel araştırmalarda geçerliğin sağlanması için “uzun süreli etkileşim içermesi”, “zengin ve derin içerikli veri toplanması”, “veri kaynaklarının çeşitlendirilmesi”, “veri toplama araçları ile araştırmanın uzman incelemesinden geçmesi” ve “katılımcılardan elde edilen verilerin yine katılımcılara teyit ettirilerek doğrulanması” şeklinde metotlar

önermektedir (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2019). Nitel araştırmalarda aktarılabirlik araştırma sonuçlarının benzer durumlara transfer edilebilmesiyle ilgilidir. Bunu sağlamak için araştırmacı, araştırma raporunda verileri ayrıntılı betimlemeli ve kullandığı amaçlı örnekleme tasvir ederek okuyucunun benzer durumlara aktarım yapabilmesini sağlamalıdır. Verilerin ayrıntılı betimlemesi ile okuyucu araştırma ortamını gözünde canlandırabilir ve kendi ortamına daha kolay transfer edebilir. Bu araştırmada araştırmacının derslerini yürüttüğü ve araştırma öncesinden itibaren iletişimde olduğu öğrencileriyle araştırma sürecini yürüttüğü için uzun süreli gözlem ve görüşme mevcuttur. Bu durum daha nitelikli bilgi edinilmesini sağlayarak inandırıcılığı artırmaktadır. Farklı veri toplama yöntemlerinin kullanılması da bir yöntemden elde edilen verinin diğer yöntemle teyit edilmesini sağlamaktadır. Hem veri toplama araçları için hem de veri analizi için yapılmış olan uzman incelemesi araştırma sürecinin farklı bir gözle incelenmesini sağlamış ve inandırıcılığa katkıda bulunmuştur. Görüşme süreci içerisinde öğrencilerden elde edilen bilgiler yine öğrencilere teyit ettirilmiştir. Görüşme soruları gerektiğinde sonda sorularla ve gözlem verileriyle desteklenerek zengin ve derin içerikli veri toplanmaya çalışılmıştır.

Nitel araştırmalarda güvenilirlik; yapılan çalışmaların daha sonra tekrarlandığı takdirde yine benzer sonuçlara ulaşılmasıyla ya da farklı kişilerce yapılmasında aynı sonuçlara ulaşılmasıyla ilgilidir. Nitel yaklaşıma göre araştırmalar, araştırmacının olayları algılama biçiminden etkilenebilir ve nitel araştırmaların doğası gereği tekrar edilebilme durumu yoktur. Bu nedenle nitel araştırmalarda iç güvenilirlik *tutarlılık*, dış güvenilirlik ise *teyit edilebilirlik* olarak ifade edilir (Yıldırım ve Şimşek, 2019).

Tutarlılık, farklı araştırmacıların araştırma verilerini kullanarak aynı sonuçlara ulaşabilmesi durumu olarak ifade edilir. Nitel araştırmalarda farklı kişilerin aynı gözlemleri yapabilmesi mümkün olmasa da bu farklılıkların en aza indirilmesi beklenmektedir. Bunun için tutarlık incelemesinin yapılması tavsiye edilmektedir. Tutarlık incelemesi; araştırmaya dışarıdan bir uzman gözüyle bakılmasını ve araştırmanın başından sonuna dek gerçekleştirilen süreç içerisinde araştırmacının tutarlı davranıp davranmadığının incelenmesini sağlamaktadır. LeCompte ve Goetz (1982) nitel araştırmalarda tutarlılığın artırılması için “*verilerin doğrudan sunulmasını*”, “*birden fazla araştırmacının araştırma sürecine katılmasını*”, “*gözlem verilerinin görüşmelerle teyit edilmesini*”, “*veri analizinde sonuçların bir başka*

araştırmacı tarafından teyit edilmesini” ve “kavramsal çerçeveye bağlı veri analizi yapılmasını” önermektedir (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2019). Bu bağlamda araştırmada verilere bağlı bulgular doğrudan alıntılarla birlikte sunulmuştur. Araştırmacı gözlem verilerini görüşmelerle birlikte sunarak pekiştirme ve teyit etme işlemlerini gerçekleştirmiştir. Aynı zamanda alanyazında var olan kavramsal çerçeveyi temel olarak veri seti analiz edilmiş ve bulgular tez danışmanınca da teyit edilmiştir.

Dış güvenirlik nesnellik/yansızlık göstergesidir ve tekrar edilebilme durumunun genellikle mümkün olmadığı nitel araştırmalarda ise teyit edilebilirlik olarak ele alınmaktadır. Kirk ve Miller (1986) tarafından *“zamana bağlı güvenirlik olarak”* açıklanmaktadır (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2019). Yani araştırma belirli bir süre sonra tekrarlandığında yine benzer sonuçların alınması dış güvenirliğin bir göstergesidir. Ancak sosyal bilimlerde bu durum her zaman için mümkün görünmemektedir. Bu araştırmada da olağanüstü bir dönem olan koronavirüs salgınının etkileri en belirgin haliyle devam etmekte olduğu için zamana bağlı güvenirliğin sağlanabileceği düşünülmemektedir. Nitel araştırmalarda teyit edilebilirliğin sağlanması için LeCompte ve Goetz (1982) *“araştırmacının konumunu tanımlaması”, “katılımcıların tanımlanması”, “verilerin alındığı sosyal ortamın betimlenmesi”, “veri analizinde kullanılan kavramsal çerçevenin tanımlanması” ve “veri toplama ve analizi süreçlerinin ayrıntılı bir şekilde açıklanmasını”* önermektedir (akt. Yıldırım ve Şimşek, 2019) Bu araştırma kapsamında ise araştırmacının konumu ve araştırmanın katılımcıları net bir şekilde tanımlanmış, verilerin alındığı sosyal ortam betimlenmiştir. Ayrıca veri analizinde kullanılan kavramsal çerçeve tanımlanmış ve verilerin analizi süreci de ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

3. BULGULAR

Bu araştırma kapsamında elde edilen bulgular ortaokul matematik dersi öğretim programındaki geometri ve ölçme haricindeki öğrenme alanlarına göre, araştırmanın problemi ve alt problemleri doğrultusunda ele alınmıştır.

3.1. Olasılık Sorusuna İlişkin Bulgular

3.1.1. Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular

Matematiksel düşünme süreçlerinin ilk basamağı olan özel durumlar üzerinde çalışma, problemi anlama ve ilişki arama alt temalarından oluşmaktadır. Olasılık problemini tüm öğrenciler tarafından okumuş ve anladıklarını ifade etmişlerdir. Araştırmacı tarafından sorunun anlaşılmasına yönelik sorgulamada altı öğrenci verilen ve istenenleri doğru bir şekilde ifade ederken “*Beyazdan da dört tane mi var?*” sorusunu yönelten Sevda’nın bu sorudan gerekli çıkarımları yapamadığı gözlenmiştir. Nehir ise soruyu çoğunlukla tekrar okuyarak verilen ve istenenleri ifade etme yoluna gitmiştir.

Sorunun anlaşılması sonrasındaki ilk basamak, dört adet kırmızı topun torbalara dağıtılmasıdır. Bu aşamada Barış, Tuğçe, Hande ve Nehir herhangi bir sorun yaşamadan bir torbaya iki, diğer torbalara birer adet kırmızı top koyacaklarını belirtmişlerdir. Melek ise ilk başta biraz düşündükten sonra soruyu tekrar okumuş ve ardından kırmızı topların dağıtımını doğru bir şekilde yapabilmıştır. Aşağıda Melek’in kırmızı topların dağıtım sırasındaki ifadesine yer verilmiştir.

Melek: *Yani şey olması gerekir, mesela hepsini buna (A) iki tane verirsek buna (B) bir tane verirsek, üç, buraya (C) da bir tane kalır.*

Kırmızı topların dağıtım sürecinde Murat ve Sevda benzer düşünceler sergilemiştir. Dağıtılacak top sayısının 4 olması ve torba sayısının 3 olması bu öğrencilerin sorun yaşamasına neden olmuştur. Bu öğrencilerden Murat’ın bu süreçteki düşünceleri aşağıya yansıtılmıştır:

Murat: *Topun kırmızı olma olasılığının eşit olması için, A, B, C torbalarına konulması gereken beyaz top sayıları ne olur? Dört. Üç tane var ama. Bir tanesini buna attık, bir tanesini buna, bir tane boşa kalıyor.*

...

A: 4 kırmızı topu nasıl dağıtırsın torbalara?

Murat: Bir topu üçe bölemiyor muyum?

A: Bölemezsin yani

Murat: Buraya attık, buraya attık, buraya attık. İlla kırmızı mı eşit olacak?

A: Hayır, kırmızılar dört tane, dört tane topu dağıtacaksın.

Murat: Olma olasılıkları eşit olması için.

A: Sen önce dört kırmızı topu nasıl dağıtacağını söyleyebilir misin?

Murat: Hocam, dördün üç tanesini bunlara (torbaları gösteriyor) atarım işte.

A: Bir taneyi ne yapacaksın?

Murat: İşte, ora... Atcam bir tanesine.

Sevda da benzer ifadelerle kırmızı topların dağıtımında yaşadığı kafa karışıklığını dile getirmiş ve başka çare bulamadığı için bir topu herhangi bir torbaya atacağını belirterek çözüme devam etmiştir. Uğur ise kırmızı topların dağıtımında diğer öğrencilerden farklı olarak öncelikle dört kırmızı topu iki torbaya eşit şekilde dağıtmış, diğer torbaya kırmızı top koymayacağını belirtmiştir. Bu durumda olasılıkların eşit olamayacağını fark ettiğinde farklı bir deneme daha yapmış bu sefer de bir topu dağıtmamayı seçmiştir. Uğur'un bu süreçteki ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

Uğur: Üçüne de kırmızı eklememiz lazım.

A: Tamam, ama kırmızı sayısı sabit, dört tane. Ne yapmak gerekir sence?

Uğur: Fazla olanda beyazı fazla tutarsak mı eşit olur?

A: Deneyebilirsin.

Uğur: (Öğrenci 2k-2k-0k durumundaki 2'leri siliyor.)

A: Ne yaptın? 1 kırmızı mı yaptın?

Uğur: Bir, bir, bu da bir. (Üç torbaya da birer kırmızı top koyduğunu ifade ediyor.)

A: Ama o zaman 4 kırmızı topu dağıtmış olur musun?

Uğur: Olmam.

A: Ne yapacaksın?

Uğur: *Eee. (Düşünüyor.) Beyaz, beyaza rastgele bir değer versek?*

A: *Kırmızıları tam dağıtmadın ama 4 kırmızı dağıtılacaktı.*

Uğur: *Bir tanesine fazla dağıtırsam da ama değeri, olasılığı eşit?..*

Yukarıdaki diyalogda da görüldüğü üzere Uğur, her torbada kırmızı top bulunması gerektiğini ifade etmiş ve kırmızı top sayısı fazla olan torbaya daha fazla beyaz top konulabileceği öngörüsüyle hareket edeceğinin sinyalini vermiştir. Ancak bu şekilde de olasılıkların eşit olamayacağı yönündeki kaygılarını sözel ifadelerine yansıtmıştır. Bu diyalogun devamında öğrenci başka bir yolu olamayacağı düşüncesiyle bir torbaya iki, diğerlerine birer kırmızı top ilave etmiştir.

Kırmızı topların dağıtımı sonrasında öğrencilerden her bir torbadan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığının eşit olduğu farklı özel durumlar bulmaları talep edilmiştir. Buradaki koşula uygun şekilde özel durum arayışındayken öğrencilerden Barış, Tuğçe ve Murat doğrudan daha fazla kırmızı top konulan torbaya iki kat, diğer torbalara birer kat beyaz top koyulması gerektiğine dair söylemlerde bulunmuş ve buna göre hareket ederek özel durumlar tespit etmişlerdir. Öğrencilerin bu giriş varsayımlarına dair ifadelerine aşağıda verilmiştir:

Tuğçe: *Bunlara (B ve C) eşit bir şekilde sığdırabilicem beyazları, buna ise (A) iki katı vericem.*

A: *Beyazları mı öyle vereceksin?*

Tuğçe: *Evet, beyazları.*

.....

A: *Yani sen şimdi A ve C ye birer kırmızı, B'ye iki kırmızı [top] koydun, doğru mudur?*

Murat: *Haa, o zaman bunlara (B torbasını gösteriyor) iki katı beyaz koyucam.*

.....

A: *Neye göre belirliyorsun bu sayıları?*

Barış: *Yani aynı oran olduğu için. Mesela A torbasındaki oran neyse B torbasındaki oran da aynı şekilde olmalı.*

Barış, Tuğçe ve Murat'a belirledikleri özel durumlarda torbalardan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığı sorulduğunda öğrenciler, birbirine benzer

şekilde kırmızı top sayısını beyaz top sayısına oranlayarak cevaplandırmışlardır. Örnek olarak Tuğçe'nin olasılık hesabına ilişkin düşüncesi aşağıda yer almaktadır:

Tuğçe: Mesela bunlara (B ve C torbaları) ikişer tane dağıtırsak buraya (A torbası) dört tane dağıtacağız. Bu şekilde yarım olacak hepsinde.

A: Yarım mı olacak? Olasılık nasıl hesaplanıyor?

Tuğçe: (Kısacık bir düşünüyor.) Hayır yarım olmuyor. İı.. Burada tüm olası durumumuz altıda iki oluyor A'da. B'de ise üçte bir oluyor. C'de de üçte bir oluyor. Bunu da sadeleştirirsek yani ikiye bölersek bir bölü üç olur.

Bu durum üzerine olasılığın nasıl hesaplandığını sorulduğunda Barış, Tuğçe ve Murat istenen durum sayısının tüm durum sayısına oranı olduğunu ifade etmişler ve önceki hatalı olasılık hesaplarını düzeltmişlerdir. Farklı özel durumlar bulmalarını istendiğinde bu öğrenciler herhangi bir sıkıntı yaşamadan verilen sorudaki koşula uygun özel durumlar oluşturabilmişlerdir.

Sorudaki koşula uygun özel durumlar belirlemeye “torbalardaki toplam top sayılarının eşit olması gerektiğini” ifade ederek başladıklarından Hande ve Sevdâ'nın özel durumlar oluşturmaya yönelik ilk denemeleri başarısızlıkla sonuçlanmıştır. Benzer görüşme sürecinin yaşandığı bu iki öğrenciden Hande'nin ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

Hande: A'da iki tane [kırmızı] top var. B'de bir tane kırmızı var. C 'de de bir tane kırmızı var.

A: Sen hangi torbaya kaç tane beyaz top koymayı düşünüyorsun, torbalardan kırmızı top çekme olasılıklarının eşit olması için?

Hande: B ile C'ye bir tane koyacağım.

A: A'ya kaç tane beyaz koyacaksın?

Hande: A'ya koymuycam. Hepsinin eşit olması lazım.

...

A: Sen A'ya beyaz top koymadın, önce [toplam] sayıları eşitlemen gerektiğini mi düşündün?

Hande: Evet.

Hande genelde sessiz kalmayı ve kısa cevaplar vermeyi tercih eden bir öğrenci olduğu için araştırmacı öğrencinin düşüncelerini tahmin etme yoluna gitmiş ve

öğrencinin onayını almıştır. Bu diyalogdan da anlaşılacağı üzere öğrenci torbalardaki toplam top sayılarını eşitlemesi gerektiğini düşünerek hareket etmektedir. Benzer bir süreç Sevda ile de yaşanmıştır. Hande ve Sevda çözüme hatalı özel durum belirleyerek başlamış olsalar da olasılık hesaplamalarını doğru bir şekilde istenen durum sayısını tüm durum sayısına oranlayarak elde etmişlerdir. Hande özel durumlar oluşturmaya çalışırken bir torbada fazla sayıda kırmızı top olması nedeniyle sorun yaşamış ve o fazla topun alınması gerektiğini söylemiştir. Ancak araştırmacı, sorunun koşulları gereği kırmızı top sayısının belirli olduğunu ve beyaz top sayılarının değiştirilebileceğini hatırlattığında rastgele denemeler yapmaya çalışmıştır. Sorudaki koşula uygun ilk özel durumu (2k-2b; 1k-1b; 1k-1b) oluşturduğunda öğrenci bu durumun sorudaki koşula uygun olduğunu ilk olarak fark edememiştir. Hande'nin bir sonraki denemesinde gerçekleşen aşağıdaki diyalog öğrencinin olasılıkların eşitliğini neden fark edemediğini gösterir niteliktedir:

(Öğrencinin yazdığı durum A: 2k-4b; B: 1k-2b; C: 1k-2b)

Hande: *Kırmızı olma olasılığı iki bölü altı (A torbası)*

A: *Peki diğerleri ile eşit oldu mu şu anda?*

Hande: *İki bölü altı ile bir bölü üç eşit mi? (Düşünüyor, duraklıyor) Hayır, eşit, bir bölü üç ile bir bölü üç, iki bölü altı eder.*

...

A: *Bir bölü üç ile bir bölü üç, iki bölü altı yapar dedin.*

Hande: *Tamam, evet. Eşit oluyor.*

A: *Üçte bir ne demek?*

Hande: *Üç tane şeyin bir tanesi demek. Yani üç tane cisim var 1 tanesi kırmızı mesela. (Araştırmacı sessiz kalıyor, öğrenci bir süre sonra cümlelerine devam ediyor.) İşte, iki bölü, az önce bulduğumuz var ya onunla eşit oluyor.*

A: *Şu anda bu altıda iki, sen iki bölü altı ile bir bölü üç eşittir dedin. Gerekçesi için bir bölü üç ile bir bölü üçü toplayınca iki bölü altı yapıyor dedin.*

Hande: *E, sadeleştirince bir bölü üç oluyor.*

A: *Sadeleştirince mi demek istedin?*

Hande: *Evet.*

A: *Az önce toplayınca dedin?*

Hande: *Haa, pardon.*

Bu noktada Hande'nin sorudaki koşula uygun bir durum oluşturmaya rağmen bunu fark edememesinin nedeninin kesir kavramı kaynaklı olduğu görülmektedir. Sevda da Hande gibi toplam top sayılarını eşitlemesi gerektiği düşüncesiyle özel durum oluşturmaya başlamış ve başlangıçta sorudaki koşula uygun olmayan durumlar oluşturmuş ve bu durumların uygun olmadığını olasılıkları doğru bir şekilde hesaplayıp karşılaştırarak belirleyebilmiştir. Birkaç hatalı denemenin ardından Sevda iki kırmızı top konulan torbaya daha fazla beyaz top konulması gerektiğini ifade etmiş ve diğerinin iki katı kadar beyaz toplar koyarak uygun özel durumlar oluşturabilmiştir. Burada iki katı ifadesini kullanması belli bir sezgiyle hareket ettiğini göstermektedir. Şekil 9'da Sevda'nın olasılık sorusunun çözümündeki yazılı ifadelerini göstermektedir.

A	B	C
2k	1k	1k
1B	2B	2B
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

A	B	C
1k	2k	1k
6B	12B	6B
$\frac{1}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

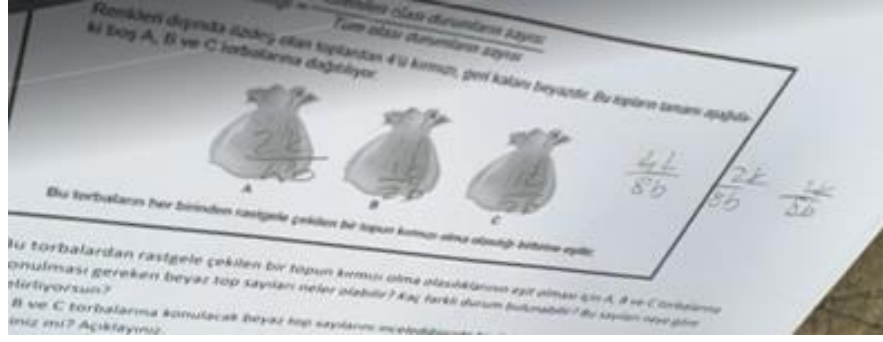
A	B	C
2k	1k	1k
6x	2x	2x
$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

A	B	C
1k	2k	1k
2B	4B	2B
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{3}$

A	B	C
1k	2k	1k
1B	2B	1B
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$

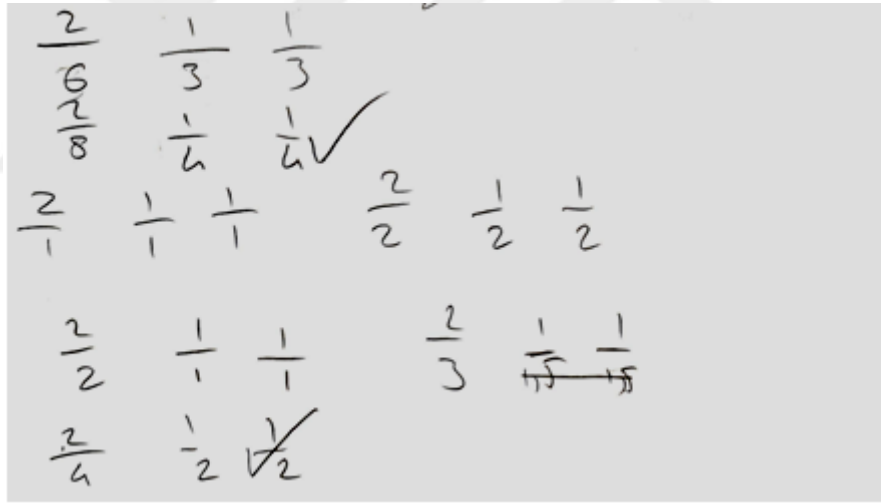
Şekil 9. Sevda'nın olasılık sorusunun çözümündeki yazılı ifadeleri.

Melek sorudaki koşula uygun özel durumlar bulmaya rastgele denemeler yaparak başlamıştır. Bilmesine rağmen olasılık hesaplarırken Barış, Tuğçe ve Murat gibi Melek de kırmızı top sayılarını beyaz top sayılarına oranlamış ve hata yapmıştır. Ayrıca ilk özel durumunu bulmadan önce sorudaki 4 adet kırmızı top koşulunu unutarak daha fazla sayıda kırmızı top kullanmıştır. Araştırmacının uyarısı sonrasında bu hatasını düzeltmiş ve sorudaki koşula uygun özel durumlar bulabilmiştir. Melek'in 4 kırmızı top kullanması gerektiğini unutup sonradan sildiği hatalı özel durum video kaydından alınan ekran görüntüsüyle Şekil 10'da verilmiştir.



Şekil 10. Melek olasılık sorusunu çözerken kaydedilen videodan bir kesit.

Kırmızı top sayılarında yaptığı hatayı düzelttikten sonra Melek sorudaki koşula uygun şekilde bir özel durum tespit etmiş, ardından bu özel durumdaki verilere dikkat etmeden tüm torbalara eşit sayıda beyaz top dağıttığı iki durum oluşturmuştur. Melek hatalı bu denemelerinin ardından duraklayıp kısa bir düşünme molası vermiş ve sorudaki koşula uygun şekilde özel durumlar oluşturabilmiştir. Şekil 11, Melek'in kâğıt üzerinde oluşturduğu özel durumları göstermektedir.



Şekil 11. Melek'in olasılık sorusu için oluşturduğu özel durumlar

Uğur A torbasına iki ve diğer torbalara birer kırmızı top koyduktan sonra torbalara rastgele sayılarda beyaz toplar koyarak denemeler yapmıştır. İlk özel durum oluşturma denemesinde A torbasına iki beyaz, B ve C torbalarına birer beyaz top koyacağını toplam top sayılarını da belirterek söylemiştir. Bu duruma ilişkin olasılık hesabını doğru bir şekilde yapmış ve tüm torbalardan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığının eşit olduğunu, olasılıkların %50 olduğunu söyleyerek ifade etmiştir. İlk durumunda doğru şekilde olasılık hesaplayan Uğur, oluşturmaya çalıştığı ikinci durumda kırmızı top sayısını beyaz top sayısına oranlayarak hatalı olasılık hesabı

yapmıştır. Araştırmacının olasılık değerini tekrar sormasının ardından hatasını fark edip düzeltmiştir. Torbalardan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılıklarını eşitlemek için öğrenciye ne yapabileceği sorulduğunda ise öğrenci “yapamayız” cevabını vermiştir. Ardından Uğur belli bir süre sessiz kalmış ve araştırmacı öğrenciyi yeni özel durum bulmaya teşvik etmiştir. Uğur, A torbasına 2 kırmızı ve 4 beyaz top koymuş ve sonra B torbasına rastgele sayılarda beyaz toplar koyarak torbalardan rastgele çekilen topların kırmızı olma olasılıklarını eşitlemeye çalışmıştır. B torbasına ilkin 5 beyaz top, ardından 2 beyaz top koymayı denemiş ve olasılıkları $2/6$ ile $1/3$ değerlerinde bulup eşit olduklarını söylemiştir. Bu aşamadan sonraki denemelerde öğrencinin sezgisel bir şekilde özel durumlar oluşturduğu gözlenmiştir.

Özel durumlar oluşturma sürecinde Nehir düşüncesini diğerlerinden farklı bir şekilde sergilemiştir. Nehir beyaz topların dağıtımına “torbalarda kırmızı ve beyaz top sayılarının eşit olması gerektiği” varsayımıyla başlamıştır. Bu nedenle ilk denediği özel durumda iki kırmızı top koyduğu torbaya iki beyaz, birer kırmızı top koyduğu torbalara da birer beyaz top koymuştur. Bu durumda torbalardan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılıklarının eşit olduğunu başlangıçta fark edememiştir. Bir süre düşündükten sonra sadeleştirdiği takdirde olasılıkların eşit olacağını belirtmiştir. İkinci bir özel durum bulmaya çalışırken her bir torbada farklı sayılar denemiş ancak sorudaki koşula uygun yeni bir durum oluşturamamıştır. Aşağıda verilen görüşme kesiti Nehir’in yeni bir özel durum oluşturamama nedenini ortaya koyar niteliktedir:

A: *Şu anda orda (C torbası 1 kırmızı, 2 beyaz) kırmızı çekilme olasılığı kaç?*

Nehir: *Bir bölü üç.*

A: *Şu an eşit oldu mu?*

Nehir: *Olmadı. Beyazın gelme olasılığı daha fazla oldu.*

.....

A: *İkide bir mi? Sen olasılığı hep ikide bir mi yapmaya çalışıyorsun?*

Nehir: *Yani yarı yarıya.*

A: *Hep böyle mi yapmaya çalışıyorsun?*

Nehir: *Evet*

A: *Buraya (A) daha fazla beyaz top verilemez mi?*

Nehir: *Veririm ama eşit olmaz.*

.....

A: *Sen bu olasılığı neye eşitlemeye çalışıyorsun?*

Nehir: *Topları. (Uzun bir sessizlik) Bir beyaz koysam kırmızı olma olasılığı daha fazla olacak.*

.....

A: *Bu sayıları koyarak mesela altıda iki olmadı dedin. Niye olmadı dedin?*

Nehir: *Çünkü beyazın gelme olasılığı daha fazla oldu. Yani bunları eşitlemem lazım.*

.....

A: *Senden kırmızı gelme olasılığını beyaz gelme olasılığına eşitlemeni mi istiyor soru?*

Nehir: *Onu istemiyo mu?*

A: *Neyi istiyor senden?*

Nehir: *Rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılıklarının eşit olmasını istiyο benden.*

A: *Kırmızı çekme olasılıklarının eşit olmasını istiyor, yani neye göre?*

Nehir: *Beyaza göre değil mi?*

Yukarıdaki diyaloglardan da anlaşıldığı üzere Nehir'in soruya girişteki hatalı varsayımı ve var olan kesir kavramı eksikliği öğrencinin matematiksel düşünme süreçlerini sekteye uğratmıştır. Bu sorudaki koşula uygun tek özel durum bulmuş, ancak bu duruma da hatalı bir varsayımla ve tesadüfle varmıştır. Nehir'in yeni özel durumlar tespit edememesi varsayımda bulunma ve genelleme süreçlerine ulaşamamasına neden olmuştur. Diğer öğrenciler ise sorudaki koşula uygun olacak şekilde birden fazla özel durum oluşturabilmişlerdir.

3.1.2. Varsayımda Bulunma Sürecine İlişkin Bulgular

Araştırmanın katılımcılarından Nehir hariç tüm öğrenciler bu sorudaki koşula uygun birden fazla özel durum tespit edebilmişlerdir. Öğrencilerin olasılık sorusunun çözümünde tespit ettikleri özel durumlar üzerinden varsayımları ve bu varsayımların gelişimi süreci bu kısımda açıklanmaktadır.

Hande ve Sevda çözüm sürecinin başlangıç aşamasında torbalarda bulunan toplam top sayılarının eşit olması gerektiğini varsaymışlardır. Sevda bu varsayımını ilk denemeden itibaren adım adım değiştirerek hareket etmiştir. Sevda iki kırmızı top

koyduğu torbaya “*daha fazla beyaz koymam lazım*” şeklinde bir düşünce ile farklı sayılarda beyaz top koyma denemeleri yapmış, ardından kat sezgisinin oluştuğunu gösterir ifadeler kullanmıştır. Sevda’nın varsayımına ilişkin son ifadesi aşağıda verilmiştir:

A: Tamam, peki bu sayıları incelediğinde bir ilişki, bir kural ya da ortak özellik fark edebildin mi? Hangi durumlarda oluyor ya da olmuyor?

Sevda: Ee.. Şimdi B’ye daha fazla koyunca mesela, bunun [A torbasındaki beyaz top sayısının] katı oluyor. İki katı oluyor. Burda da iki katı, burda da iki katı. (Daha önce yazmış olduğu özel durumları gösteriyor.)

Diyalogdan da görüldüğü üzere Sevda, iki kırmızı top koyduğu torbaya diğer torbaya konulan beyaz top sayısının iki katı kadar beyaz top koyulması gerektiğini ifade etmiş ve sorudaki koşula uygun bir varsayımda bulunmuştur.

Hande ise uzun bir süre torbalarda bulunan top sayılarının eşit olması gerektiğinde ısrar etmiştir. Daha sonra yaptığı ve uygun bulduğu denemeler üzerinden farklı torbalardan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığı değerlerini inceleyerek kat ilişkisini keşfetmiştir. Hande’nin varsayım oluşturma sürecine ilişkin diyalog aşağıda verilmiştir:

A: Peki bu uygun olan durumları incelediğinde herhangi bir ilişki, kural, ortak özellik fark edebildin mi?

Hande: Hep katları oluyo.

A: Nasıl bir kat oluyor?

Hande: Bu şimdi bir bölü dört ve iki bölü sekiz ya. Hep iki katı.

A: Bu durum her zaman geçerli mi?

Hande: Bunda bir bölü beşle iki bölü on. Bu da onun iki katı.

Diyalogda da görüldüğü üzere Hande $\frac{1}{5}$ ’in iki katının $\frac{2}{10}$ olduğunu ifade etmektedir. Öğrencinin kesir konusuna yönelik kavram yanılgılarının bir diğer göstergesi de bu ifadesi olmuştur. Öğrenci birbirinin iki katı olduğunu ifade ettiği bu kesirlerin birbirine eşit olasılık değerleri olduğunu da görüşme içerisinde söylemiş ve özel durumları buna göre oluşturmuştur.

Bariş, Melek, Tuğçe ve Murat'ın olasılık sorusundaki varsayımda bulunma süreçlerinin benzer şekilde geliştiği tespit edilmiştir. Aşağıda bazı öğrencilerin bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

Bariş: *A torbasındaki kırmızı top sayısı B torbasındaki kırmızı top sayısının iki katına eşittir.*

A: *Beyaz top sayıları için bir şey var mı?*

Bariş: *Aynısı yine iki katına eşittir.*

.....

Melek: *Beyaz top sayılarını çift seçmem gerekiyor. İkiye bölünmesi gerekir.*

A: *Peki incelediğin tüm durumlarda bu söylediğin geçerli midir?*

Melek: *Evet.*

A: *İncelediğin durumlarda beyaz top sayıları çift mi?*

Melek: *Evet.*

A: *(Öğrenci 6-3-3 ve 2-1-1 durumlarını fark edemiyor, araştırmacı gösteriyor.) 6-3-3 durumunda tüm beyaz top sayıları çift mi?*

Melek: *(Öğrenci duraklıyor) Iı. O zaman. A'daki beyaz top sayısı iki kat olması gerekir. Yani A'daki beyaz top sayısının ikiye [kalansız] bölünmesi gerekir.*

.....

Tuğçe: *Yani, beyaz sayısının çift bir sayı olması gerekiyor.*

...

Tuğçe: *A iki katı olur, B ve C'nin.*

Yukarıdaki diyaloglar kat ilişkisini fark eden öğrencilerin bu ilişkiyi ifade etme örnekleridir. Bu öğrencilerin öncelikle tespit ettikleri özel durumlar üzerinden “*oran aynı oluyor*”, “*ama her türlü yarısıdır*”, “*bu bir kat bu iki kat*” gibi ifadeler kullanarak varsayımlar oluşturdıkları ve varsayımlarını geliştirdikleri tespit edilmiştir.

Uğur her torbada kırmızı top bulunması gerektiğini belirttikten sonra iki kırmızı topun bulunduğu torbaya daha fazla beyaz top koyulabileceğini ifade etmiştir. Özel durumlar oluştururken yaşadığı zorluklar sonrasında sorudaki koşul için “yapamayız” ifadesini kullanmış ve araştırmacının teşvikiyle örnek durumlar üretebilmiştir. Çekingen yapısı nedeniyle pek konuşmayan bir öğrenci olan Uğur araştırmacının teşviki sonrasında art arda akıcı bir şekilde özel durumlar

oluşturabilmiştir. Sezgiyle hareket ettiği anlaşılan Uğur ile araştırmacı arasında geçen diyaloga aşağıda yer verilmiştir:

A: *A'ya kaç beyaz koyarsın?*

Uğur: *(Kısa bir süre düşünüyor, A'ya 12b, B'ye 6b yazıyor.)*

A: *On iki beyaz koydun. Sanki bir şey var aklında gibi geldi bana?*

Uğur: *İuu. A ve B arası. Yani beyaz toplar arasında A ve B torbaları arasında iki kat var beyaz toplar için.*

Diyalogda Uğur'un incelediği özel durumlar üzerinden bir varsayıma ulaşabildiği görülmektedir.

Öğrencilerin ulaştıkları özel durumları incelemelerinin ardından ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların ifade edilme sıklıkları Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. Olasılık sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları

Varsayımlar	f
İki kırmızı top bulunan torbada diğerinin iki katı kadar beyaz olmalı	7
Torbalaradaki toplam top sayısı eşit olmalı	2
İki kırmızı top bulunan torbadaki beyaz top sayısı çift olmalı	2
İki kırmızı top bulunan torbaya daha fazla beyaz top konulmalı	1
Torbalaradaki kırmızı ve beyaz top oranı aynı olmalı	1

Birden fazla özel durum oluşturabilen tüm öğrencilerin varsayımları ve bu varsayımların gelişim süreçlerine yönelik bilgiler yukarıda verilmiştir. Öğrencilere ulaştıkları bu varsayımın tüm durumlar için geçerli olup olmadığı sorulduğunda tüm öğrenciler sorudaki koşula uygun özel durumlar belirterek açıklamalarda bulunmuş ve başka bir doğrulamaya gerek duymamışlardır. Ayrıca öğrenciler varsayımlarını sadece sözel olarak ifade etmiş, herhangi bir yazma girişiminde de bulunmamışlardır. Bu durum öğrencilerin yer yer geliştirdikleri varsayımları unutmalarına veya farklı varsayımlar üretmelerine yol açmıştır.

3.1.3. Genelleme Sürecine İlişkin Bulgular

Olasılık sorusunun çözümünde genelleme süreçlerine ilişkin bulgular bu bölümde yer verilmektedir.

Barış genelleme sürecinin başlangıcında biraz zorlansa da varsayımına uygun genel bir ifadeye ulaşabilmiştir. Ulaştığı varsayımı daha genel olarak ifade etmesi talep edildiğinde Barış “*x gibi mi?*” şeklinde soru yöneltmiştir. Araştırmacının “yani harfli

ifadeleri kullanarak ifade edebilir misin?” şeklindeki sorusunu ise “*Kırmızı top sayısını $2x$ olarak ifade edebilirim. Beyaz top sayısını ise x olarak ifade edebilirim*” şeklinde cevaplamıştır. Kırmızı top sayılarının sabit olduğu bu soru koşullarına göre Barış’ın burada doğru bir genellemeye varamadığı görülmektedir. Araştırmacının “*Beyaz top sayıları için ne söyleyebilirsin?*” şeklindeki yeni sorusunu “*Kırmızı top gibi A torbasındaki beyaz top sayısı B torbasındaki beyaz top sayısının iki katına eşittir.*” şeklinde cevaplamıştır. Diyalogun devamına aşağıda yer verilmiştir:

Barış: *A torbası için $2x$, B torbası için x diyebilirim.*

A: *Bu ne için peki, beyaz top sayısı için mi kırmızı top sayısı için mi?*

Barış: *Beyaz top sayısı için.*

Şekil 12’de Barış’ın ulaştığı ilk hatalı genellemesi ile son genellemesi yer almaktadır.

$$\begin{array}{l} \text{k. top sayısı } 2x \\ \text{b. top sayısı } x \end{array} \quad \text{Beyaz top} \left\{ \begin{array}{l} A = 2x = 10 \\ B = x = 5 \end{array} \right.$$

Şekil 12. Barış’ın olasılık sorusunda ulaştığı genelleme.

Barış’ın sözel ve yazılı ifadeleri, öğrencinin başlangıçta değişkeni hatalı kullanmasının ardından düzeltip doğru bir genellemeye ulaşabildiğini göstermektedir.

Melek ve Uğur da ulaştıkları varsayımı genel ifadeye dönüştürmede zorluklar yaşamışlardır. Bu öğrencilere “ulaştığın bu varsayımı daha genel bir şekilde ifade edebilir misin?” sorusu yöneltildiğinde ikisi de anlayamamış; ancak “*yani harfli ifadeleri kullanarak ifade edebilir misin?*” şeklinde soru değiştirildiğinde cevap verebilmişlerdir. Melek bu sorunun ardından kısa bir an düşünüp “*A bölü iki eşittir B ve C’ye*” cevabını vermiştir. Sözel ifadesini yazılı olarak belirtmesi talep edildiğinde öğrenci Şekil 13’teki ifadeyi yazmıştır.

$$\frac{a}{2} = b, c$$

Şekil 13. Melek’in olasılık sorusunda ulaştığı genel ifade

Uğur da Melek’e benzer bir süreç yaşamış fakat biraz çekingen yapısı dolayısıyla düşüncelerini ifade etmesi için araştırmacı tarafından teşvik edilmiştir. Uğur’un genellemeye ulaşma sürecine ait diyalog ve gözlemlere aşağıda verilmiştir:

A: *Peki, bu söylediğin şeyi daha genel olarak ifade edebilir misin? Ya da harfli ifadeleri kullanarak bu durumu ifade edebilir misin?*

(Öğrenci sesli nefes alıp veriyor, konuşmuyor. Araştırmacı öğrenciyi konuşturmaya çalışıyor. Araştırmacı öğrencinin yazmış olduğu özel durumları söylüyor.)

..

Uğur: *Ben ifade edebileceğimi pek düşünemiyorum da ifade edilebilirdir.*

...

Uğur: *Yani, o yüzden diğerinin de yarısı olması gerekiyor.*

A: *B’deki beyaz toplar A’dakilerin yarısı olması gerekiyor diyorsun. Bunu harfli ifadeyle yazamam mı diyorsun?*

Uğur: *Ben yazamam.*

A: *Deneyebilir misin?*

(Öğrenci çok duraklamadan 2a yazıyor.)

A: *2a mı yazdın oraya?*

Uğur: *2a yazdım. Tekrardan a mı yazmalı?*

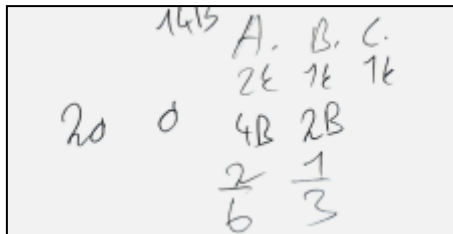
A: *Ne olabilir? Bu A torbası için herhalde?*

Uğur: *Evet.*

A: *A torbası için 2a yazdın. B torbası için?*

Uğur: *1a yazdım.*

Öğrencinin yazmış olduğu “2a” ve “a” ifadeleri Şekil 14’te görülmektedir.



Şekil 14. Uğur'un olasılık sorusu için ulaştığı genelleme.

Uğur’un sözel ifadeleri öğrencinin genellemeye ulaşma sürecinde zorluk yaşadığını ve araştırmacı tarafından teşvik edilmeden harekete geçmediğini

göstermektedir. Araştırmacının teşviki sonrasında Uğur'un varsayımını genel bir ifadeye dönüştürebildiği sözel ve yazılı ifadelerinden anlaşılmaktadır.

Tuğçe, iki kırmızı top koyduğu torbaya konulacak beyaz top sayısının diğer torbalara konulacak beyaz top sayısının iki katı olduğu varsayımına ulaşmış ve örnek durumlar üzerinden bu varsayımını doğrulamaya çalışmıştır. Tuğçe'den bu varsayımını harfli ifadelerle ifade etmesi talep edildiğinde “*Harfli ifadeleri kullanabilirim, mesela, B için x bölü y diyorsam, A için $2x$ bölü $2y$ oluyo.*” sözleriyle cevap vermiş ve bunları kâğıda aktarmıştır. Burada öğrencinin yazdığı ifade ulaşılan olasılık değerlerine yöneliktir ancak kırmızı top sayıları sabit olduğu için bu genel ifade istenen özellikte değildir. Bu nedenle öğrenciden tek değişken kullanarak beyaz top sayıları arasında belirttiği ilişkiyi yazması istenildiğinde öğrenci ilk başta zorluk yaşamıştır. Ancak kısa bir düşünme sonrasında “*Deneyeyim.*” diyerek harekete geçmiş ve 1 kırmızı top koyduğu torbaya x , 2 kırmızı top koyduğu torbaya $2x$ beyaz top koyulması gerektiğini hem sözel hem de yazılı olarak ifade etmiştir. Şekil 15'te Tuğçe'nin bu ifadenin ardından torbaların üzerine yazdığı genel ifadeler görülmektedir.



Şekil 15. Tuğçe'nin olasılık sorusunda ulaştığı genel ifade.

Sevda'nın olasılık sorusunda genellemeye ulaşma süreci Barış, Melek, Uğur ve Tuğçe'nin süreçleriyle benzer özellikler göstermektedir. Sevda'dan ulaştığı varsayımı genel ifadeye dönüştürmesi istendiğinde Sevda bir yandan söylediklerini yazarak “*Şimdi mesela buna (A) iki kırmızı koydum, buna (B) bir kırmızı, buna (C) bir kırmızı koyduk desek. Beyazı da, buna (A) $4x$ koyduysam, bunlara (B ve C) $2x$ koyucam.*” cevabını vermiştir. Sevda bu yazdığı ifadede x 'in herhangi bir değer alabileceğini belirtmiş; aynı zamanda x yerine 3 yazarak deneme de yapmıştır. Ancak Sevda ulaştığı bu genel ifadenin daha sade haline ulaşması gerektiğini fark etmemiş ve bu yönde çabalamamıştır. Sevda'nın genellemesi ve bu genellemeyi kullanarak yaptığı özel durum üzerinden olasılık hesabı ($x=3$) Şekil 16'da verilmiştir.

A	B	C
2k	1k	1k
4x	2x	2x
$\frac{2}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$

Şekil 16. Sevda'nın olasılık sorusu için ulaştığı genelleme ve bir özel durum örneği.

Murat ve Hande'nin genelleme süreçleri benzerlik göstermiştir. Murat'tan elde ettiği varsayımı harfli ifadeleri kullanarak ifade etmesi istenildiğinde Murat “Haa, x falan” cevabını vermiştir. Ardından gelişen diyalog aşağıda verilmiştir:

Murat: *O zaman beyazlara x koycam. (Öğrenci yazdıklarını siliyor.) Buraya bir tane, buraya iki tane, buraya bir tane (1k, 2k, 1k yazıyor sırasıyla.)*

A: *A'ya şimdi kaç tane beyaz top koyacaksın, cebirsel olarak ifade etmeni istiyorum.*

Murat: *Eee.. (Öğrenci biraz duraklıyor) İı. Ne, sadece bunun sonuna dört b getirmeyelim de x koyalım, olur mu? (4x yazalım demek istiyor.)*

Murat'ın ifadesinde de görüldüğü üzere dört beyaz topu ifade etmek için yazdığı “4b” ifadesindeki “b”yi silip bunun yerine “x” yazarak genel ifadeye ulaşacağını düşünmüştür. Bu yazdığının ardından “5x ve 10x”, “3x ve 6x” ile “2x ve 4x” şeklinde de ifadelerde bulunmuştur. Burada öğrenci yazdığı özel durumlarda kullandığı beyaz sayılarını ifade eden “b” kısaltmalarını silerek onun yerine “x”ler koyarak genel ifadeye ulaşmaya çabalamıştır. Diyalogun devamına aşağıda yer verilmiştir:

Murat: *O zaman bir harfini değiştireyim. (Son yazdığı genel ifadeyi siliyor.) Olsun bir, 1x, iki, iki daha fazla, üç, üç mü olacak. Ama iki daha fazla olmayacak mı, yok eşit olacaktı. Bu da 2x, bu da 1x.*

A: *Peki x'e vereceğin bütün sayılar için bu ifade doğru olur mu?*

Murat: *(Öğrenci duraklıyor.) Bir koyalım, on bir oluyor.*

A: *On bir mi oluyor?*

Murat: *İki oluyor.*

Yukarıdaki diyalogdan da görüldüğü üzere Murat “1x” cebirsel ifadesindeki x yerine 1 konulduğunda ilk olarak “11” cevabını vermiştir. Araştırmacının “On bir mi oluyor?” sorusu üzerine Murat cevabını hızlı bir şekilde “İki oluyor” şeklinde

değiştirmiştir. Buradan hareketle öğrencinin değişken kavramına yönelik kavram yanılgılarının olduğu söylenebilir. Murat harfli ifadeleri kullanarak bir genellemeye ulaşmış görünmektedir. Ancak Murat'ın genellemeye ulaşırken dile getirdiği ifadeler, öğrencinin ulaştığı genellenmenin ve kullandığı harfli ifadelerin anlamının farkında olmadığını göstermektedir.

Hande'nin varsayımını genelleme sürecindeki düşüncelerini ortaya çıkarmaya dönük diyalog aşağıda verilmiştir:

A: *[Torbadaki] Toplam top sayısı için ne diyebilirsin o zaman?*

Hande: *Bir tanesinin iki katı olacak.*

A: *Beyaz top sayısı için ne diyebilirsin?*

Hande: *O da aynısı [iki katı] olacak.*

A: *Peki bu durumu bana cebirsel ifadeleri kullanarak, harfli ifadeleri kullanarak yazabilir misin?*

Hande: *Şey a kare olarak mı, a'nın karesi, öyle mi yazayım?*

A: *Yani cebirsel ifadelerle, değişken kullanarak ifade edebilir misin?*

Hande: *(Öğrenci $a \cdot a = 2$ yazıp hemen 2'yi silerek a^2 yazıyor.) İki a yapıyor bu. (Öğrenci "a üzeri iki" ifadesini "iki a" şeklinde okuyor.)*

A: *a ile a'yı mı çarptın?*

Hande: *Evet.*

A: *a ile a'nın çarpımı $2a$ mı?*

Hande: *Evet.*

A: *a kare yazdın ama?*

Hande: *(Duraklıyor) a kare işte!*

A: *a^2 ile $2a$ aynı şey mi?*

(Öğrenci duraklıyor, kafası karışık)

A: *$2a$ ne demek?*

Hande: *İki tane a demek*

A: *A kare ne demek?*

Hande: *Karesi demek, a'nın karesi?*

A: *a'nın karesinde ne yapıyorsun?*

Hande: *İkisini çarpıyorum.*

A: *Peki $2a$ 'da ne yapıyorsun?*

Hande: Haa, $2a$ yapıyo tamam. ($a \cdot a = 2a$ olarak yazıyor.)

A: a ile a nın çarpımı $2a$ mıdır, a^2 midir?

Hande: a kare oluyor. ($a \cdot a = 2a$ ifadesinin üzerine çizik atıyor.)

Şekil 17’de Hande’nin ulaştığı genel ifadelere ait görsel verilmiştir.

	A	C
$a \cdot 2 = 2a$	$2k$	$1k \checkmark$
$a \cdot a = a^2$	$12b$	$6b$
$a \cdot a = 2a$	$1k$	7
	$2a$	a

Şekil 17. Hande'nin olasılık sorusu için genellemeye ulaşma çabası.

Yukarıdaki diyalogdan ve Hande’nin genellemeye ulaşma sürecindeki ifadelerinden de görüldüğü üzere öğrenci “bir sayının iki katı” ile “bir sayının karesi” ifadelerini karıştırmaktadır. Bu kavram yanılgısı, Hande’nin ulaştığı varsayımı genel ifadeye dönüştürememesinin temel nedeni olarak öne çıkmaktadır. Murat ve Hande yazılı ifadeleriyle genellemeye ulaşmış görüntüsü verseler de bu süreçteki açıklamaları, yazılı ifadelerinin anlamlarının tam olarak farkında olmadıklarını ortaya koymaktadır.

Öğrenciler çözüm sürecinde öncelikle özel durumlar üzerinde çalışmış, bu özel durumları inceleyerek varsayımlar oluşturmuş ve tüm durumlarda geçerli olduğunu düşündükleri varsayımları genel ifadelere dönüştürmeye çalışmışlardır. Sonuç olarak araştırmanın sekiz katılımcısından beşinin ulaştıkları varsayımları genelledebildikleri tespit edilmiştir.

3.2. Veri İşleme Sorusuna Yönelik Bulgular

3.2.1. Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular

Matematiksel düşünme süreçlerinin ilk basamağı olan özel durumlar üzerinde çalışma, problemi anlama ve ilişki arama alt temalarından oluşmaktadır. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler veri işleme problemini okumuş ve anladıklarını ifade etmişlerdir. Öğrenciler soruyu okuduktan sonra grafik üzerinde verilmiş olan şiir ve roman dilimlerinin merkez açı ölçülerini toplayıp 360^0 ’tan çıkararak hikâyenin kaç

derece olması gerektiğini bulmuşlardır. Tüm öğrencilerde benzer olan sürece örnek olarak Tuğçe'nin ifadesine aşağıda yer verilmiştir:

Tuğçe: Ayşe'nin okuduğu kitapların türlerinin dağılımı. Hikâyenin derecesini vermemiş bana burada. Bir bütünün toplamı 360 derece olması gerekiyor. 120 artı 90'dan 210 ediyor. 360 eksi 210 yaparsak bulabiliriz bunu. Burasının [hikâye] 150 derece olması gerekiyor.

Verilen daire grafiğindeki hikâyeye ait dilimin merkez açılı ölçüsünün bulunması sonrası öğrencilere şiir, roman ve hikâye sayılarının neler olabileceği ve bu sayıları neye göre belirlediklerini sorusu yöneltilmiştir. Uğur ve Barış şiir kitapları sayısının tüm kitap sayısının dörtte biri, roman kitapları sayısının ise tüm kitap sayısının üçte biri olduğunu ifade etmişlerdir. Aşağıda Uğur'un bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

Uğur: Toplam kitap sayısı dörde bölünürse, şiiri bulabilirim. Şiir için toplam kitap sayısını 12 yaparım. (Öğrenci yazarak ilerliyor) Eee. Şiir üç oluyo. Dörde böldüğüm için. Üç.

A: Roman ne olur?

Uğur: Roman, üçte biri. Yani 12'yi 3'e bölersem 4 oluyor, roman kitabı. Geri kalanı da hikâye oluyor. 4'le 3'ü toplarsam 7 oluyor, 12'den de 7'yi çıkarırsam 5 tane de hikâye kitabı oluyor.

A: Tamam, peki bu hikâye sayısı grafiğe uygun olur mu? Bunu nasıl kontrol edersin?

Uğur: (Düşünüyor) Bir saniye. Her 30 derecede bir 1 kitap oluyor.

A: Nerden çıkardın bunu?

Uğur: 90 derecede 3 tane kitap varsa 30 derecede 1 kitap oluyor.

...

Uğur: Toplamını 24 yaparsam

A: Neden 24? Az önce 12 demiştin, şimdi 24 diyorsun.

Uğur: 3 ve 4'e bölünebilmesi için 24. Zaten 12'nin iki katı olduğu için bunun da iki katı olması gerekiyor. Aynı şekilde bunun da iki katı olması gerekiyor, sekiz. (Öğrenci önceki durumdaki sayıları iki katına çıkarıyor.) Hikâye deee.. (Duraklıyor.) Sayı olarak. Bu ikisinin toplamı 14, 24'ten çıkarınca da 10. Bunun da iki katı oluyor. (Önceki durumdaki 5'i gösteriyor.)

Diyalogda görüldüğü üzere tüm kitapların sayısının hem üçe hem de dörde bölünmesi gerektiğini ifade eden Uğur, bütünden parçaya doğru hareket etmiştir. Uğur oluşturduğu ilk özel durum için toplam kitap sayısını hem üçe hem de dörde bölünebildiği gerekçesiyle 12 olarak seçmiş ve ardından şiir ve roman sayılarını bulmuştur. Hikâyenin sayısını ise şiir ve roman sayıların toplamını bütünden çıkararak bulmuştur. Daha sonraki özel durum arayışlarında ise hem toplam kitap sayısını 12'nin katlarından seçmiş hem de ilk bulduğu özel durumdaki toplam kitap sayısının katlarını kullanmıştır. Buradan hareketle Uğur'un birden fazla özel durum tespit edebildiği söylenebilir.

Barış ise roman sayısına rastgele bir değer vermiş ve orantı kurarak diğer kitapların sayılarını bulmuştur. Aşağıda Barış'ın bu süreçteki ifadeleri yer almaktadır:

Barış: *İuu.. İlk önce roman tüm kitapların üçte biri. Mesela buraya (Romanı kastediyor ve biraz düşünüyor) 40 sayısını verebiliriz. O zaman şiir kitabınaaa.. (Orantı kuruyor.) 120 derece 40 olmuş, o zaman buradan buraya üç kat var. (120 derece ve 40 sayılarını gösteriyor.) 120 derece 40 ise 90 derece 30 kitap olur. 150 dereceye de 50 kitap oluyor.*

A: *40'ı rastgele mi belirledin?*

Barış: *Evet, gerisini ise orana göre belirledim.*

A: *Başka sayılar bulabilir misin?*

Barış: *Bulabilirim, mesela roman 12 kitap olursa şiir için 9 kitap, hikâye için ise 15 kitap oluyor.*

...

A: *Anladım, peki en az ne yapabilirsin ya da en fazla ne yapabilirsin?*

Barış: *İıı. 120, 90 ve 150'nin ortak katlarından yola çıkabiliriz.*

A: *Ortak kattan yola çıkacaksın?*

Barış: *Ortak bölenden pardon. 120, 90 ve 150'nin ortak böleni 3 var, 3 sayısı. En az 1 de olabilir. Hayır. (Düşünüyor.) En az üç (şiir sayısı) olur.*

...

Barış: *Mesela, şiire 3 sayısını verirse 90 derece 3 kitabı temsil ettiğine göre, ıı 30'a bölünmüş, 120'yi 30'a bölersek roman için 4 kitap, hikâye için 50 kitap yok 5 kitap olur. Yine orandan yola çıktık.*

Barış'ın veri grubundan birine rastgele bir değer vererek orantı yoluyla özel durum bulduğu ifadelerinden anlaşılmaktadır. Barış ilk özel durum buluşunun ardından ortak bölenleri kastederek “*ortak katlardan da yola çıkabiliriz.*” diyerek farklı bir yol da denediği de görülmektedir. Barış'ın ifadeleri kolayca özel durumlar oluşturabildiğini göstermektedir.

Hande ve Murat sorunun çözümüne doğrudan “*şiirin en az, hikâyenin en fazla sayıda olması gerekir*” ifadeleriyle başlamışlardır. Bu sürece örnek olacak bir diyaloga aşağıda yer verilmiştir:

Hande: *En yüksek hikâye olması lazım, en düşük de şiir.*

A: *Tamam, peki ne verebilirsin mesela? Kaç olabilir?*

Hande: *Buna 10 desek (hikâye), buna 9 (roman) buna 7 (şiir)*

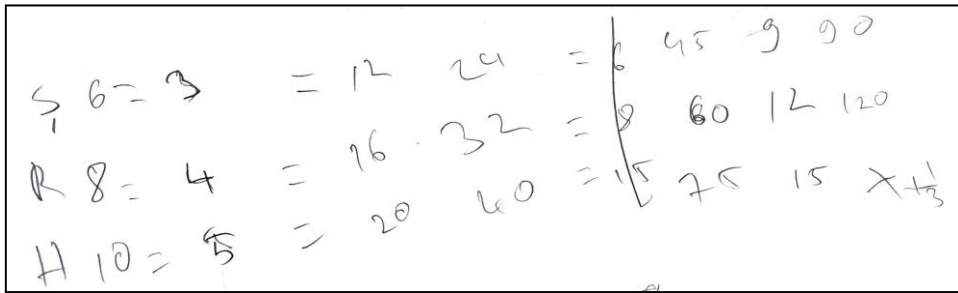
A: *Neye göre verdin bu sayıları?*

Hande: *En çok hikâye, en az şiir.*

A: *Uygun mu peki bu sayılar bu grafiğe?*

Hande: *Evet.*

Hande'nin yukarıdaki ifadelerinin benzeri Murat tarafından da söylenmiştir. İki öğrenci de de şiir, roman ve hikâyeye sırasıyla küçükten büyüğe doğru rastgele değerler vermişlerdir. Murat yazdığı hatalı özel durumu hemen fark edip hatasını gerekçesiyle açıklamıştır. Ardından romanın şiirden, şiirin üçte biri kadar fazla olduğunu belirterek özel durumlar bulmaya devam etmiştir. Şekil 18'de Murat'ın veri işleme sorusundaki özel durumlar bulma sürecindeki yazılı ifadelerine yer verilmiştir.



Şekil 18. Murat'ın veri işleme sorusunda şiir, roman ve hikâye sayılarına yönelik oluşturduğu özel durumlar.

Birden fazla özel durum tespit ettiği Şekil 18'de de görülen Murat özel durumları oluştururken kesir bağlamı ile en farklı stratejiyi kullanmıştır. İlk özel durumunu tespit ettikten sonra bu özel durumun katlarını kullanarak da yeni durumlar

oluşturabilmiştir. Hande ise hatalı özel durumunun (şiir, roman ve hikâye sırasıyla 7-9-10) grafiğe uygun olduğunu belirtmiş ancak grafiğe uygun olup olmadığına ilişkin yönlendirilen soru sonrası uygun olmadığını fark etmiştir. Hande'nin bu süreçteki ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

(İlk söylediği özel durumun uygun olmadığını fark etmesinin hemen sonrası)

A: Neden uygun olmadı?

Hande: *Çünkü derece var. Derece direkt sayıyı göstermiyor. (Bir anlık duraklıyor.) Bunları 30'un katından yaparsak..*

A: 30 nerden çıktı?

Hande: *Bölünüyo, tam. Bu 3, bu 5 yapıyo, bu da 4.*

Diyalogda Hande'nin grafikteki kitap türlerinin merkez açılı ölçülerinin en büyük ortak bölenini kullanacağını belirttiği görülmektedir. Hande 90, 120 ve 150'nin en büyük ortak böleni olan 30'u kullanarak grafiğe uygun ilk özel durumunu (3-4-5) oluşturmuştur. Bir sonraki özel durumunu ise 90, 120 ve 150'nin diğer ortak bölenlerini kullanarak oluşturmuştur. Hem Hande hem de Murat verilen daire grafiğine uygun olacak şekilde birden fazla özel durum oluşturabilmişlerdir.

Nehir ise doğrudan "90'ın katlarından gitcem" söylemiyle 90 ve 120'nin pozitif tamsayı bölenlerini bulmaya çalışmıştır. Daha sonra şiir ve romanın merkez açılı ölçüleri için satırlar halinde listelediği bölenlerden aynı satırda olanları eşleştirmeye çalışmış, oradan bir sonuca ulaşamayınca "en çok hikâye, en az şiir" ifadesini kullanarak yine ortak bölenlerden yola çıkmayı denemiştir. Aşağıda Nehir'in özel durumlar bulma sürecine yönelik ifadelerine yer verilmektedir:

Nehir: *Yani en çok hikâye okumuş, en az şiir okumuş. Eee, (düşünüyor) bunların hepsi kaçın katı desem. Kattan gitsem yine.*

A: Tamam.

Nehir: *Üç, ikinin katı olmuyo. 3'ün katı oluyo. (Heyecanlanarak) 30'un katı oluyo hep.*

A: Tamam, bunu nasıl kullanacaksın?

Nehir: *Bu bilgiyi, çarparak kullansam. Yani 3'le 90'ı bölsem. 30 oluyo, yani burası, şiire 30 desem. (Öğrenci yazıyor söylediğini) ee, 120. roman da eee 3, 6, 9, 12. Ee, 40 oluyo.*

A: 40 nerden çıktı? 3'e mi bölüyorsun?

Nehir: *Evet, çünkü ortak katı 3 bunların. En büyük ortak katı 3'se. Hikâye de 3, ee, 3, 6, 9, 12, 15. Burası da 50 oluyo. (30-40-50 durumu)*

...

A: *Başka uygun sayılar bulabilir misin?*

Nehir: *Başka sayı bulamam sanırım. Ya da bunları 10'la bölsem. Hepsini sadeleştirsem. 3, 4, 5 oluyo.*

Diyalogda Nehir'in ortak bölenleri kullanarak özel durumlar bulabildiği görülmektedir. Daha sonra ise bulduğu ilk özel durumdaki kitap sayılarını aynı sayılara bölme yoluyla yeni özel durumlar oluşturmuştur. Bu şekilde Nehir grafiğe uygun birden fazla özel durum oluşturabilmiştir.

Tuğçe, daire grafikteki farklı kitap türlerinin merkez açılı ölçülerinin en büyük ortak bölenini fark ederek özel durumlar bulmaya başlamıştır. Aşağıda Tuğçe'nin bu sürece ilişkin ifadelerine yer verilmiştir:

Tuğçe: *Sayılar. Hepsi bir kere 30'un katı burada gördüğüm kadarıyla. Mesela şiir 90 derece, roman 120 derece, hikâye 150 derece. İsimlerinin baş harflerini yazıcam buraya. Roman ve hikâye. Hepsine 3'ün katı olan bir sayı koyabilirim bence.*

A: *Tamam.*

Tuğçe: *Çünkü burada 30'un 3 katı var, burada 30'un 4 katı var, burada da 30'un 5 katı var. (Derecelerini gösteriyor.)*

...

Tuğçe: *Meselaaa, hepsinin 10'a bölümünden birer sayı da koyabilirim. (Merkez açılı ölçülerini kastediyor.) İsterseniz değişkenleri yazabilirim. 9 koyabilirim buraya (Şiire). Buraya 9 koyarsam, 12 olacak burası, burası da 15 olmak zorunda.*

A: *Başka ne olabilir?*

Tuğçe: *İı.. Kaç olabilir? (Düşünüyor.) 45 olabilir mesela, yarıya bölersek eğer. (Merkez açılı ölçülerini kastediyor.) Yarıya bölersek 60, yarıya bölersek 75.*

Diyalogdan da görüldüğü gibi Tuğçe, fark ettiği ortak bölen durumunu açıkça ifade etmiş ve ilk özel durumunu (9-12-15) oluşturmuştur. Farklı özel durumlar bulmaya çalışırken ise hem kitap türlerinin merkez açılı ölçülerinin farklı ortak

bölenlerinden hem de bulduğu özel durumların katlarından yararlanmıştır. Sonuç olarak Tuğçe farklı yöntemlerle birden fazla özel durum oluşturabilmiştir.

Sevda ise “*Şimdi hikâyenin daha fazla olması, romanın da şiirden fazla olması lazım, yani şiirin en az olması lazım*” diyerek soruyu çözmeye başlamış ve hemen ardından değişken kullanarak farklı kitap türü sayılarını ifade etmeye çalışmıştır. Aşağıda Sevda’nın bu sürecine ilişkin ifadelerine yer verilmektedir:

Sevda: *Şimdi 360’ta. Yok. Eee. Mesela toplamına bi sayı verelim. Mesela 360 derecede 18x olsun. (Öğrenci 360 derece yazıp boşluk bırakarak 18x yazıyor, orantı kuruyor.)*

A: *18x olsun diyorsun. Tamam, neden 18x, o nereden çıktı?*

Sevda: *İl. 360’ın bir katı olsun diye 18 koydum.*

A: *Katı, 18’in 360’ın katı mı?*

Sevda: *Böleni. Şimdi, bunların arasında 20 kat var. (18x ile 360 dereceyi kastediyor) İl. 120 yani romanı bulmamız için 120 derece. Burası 20’ye bölünmüş, bunu da 20’ye böldüğümüzde, ee 6x oluyor.*

A: *Neyi buldun yani sen?*

Sevda: *Romanın sayısını buldum ama x’le. Buna bakalım, 90 derece. Bu da 20’ye bölünmüş, bunun da 20’ye bölünmesi lazım ama 20’ye bölünmüyor. (Düşünüyor.) Burada kat var, bu dört katı. (Bu sefer 360 derece ve 90 derece arasındaki kat ilişkisinden yararlanmaya çalışıyor.) Bu daaa, ama bu da dörde bölünmüyor (18x) Eee. (Düşünüyor.)*

A: *Ne yapabiliriz? (Öğrenci bir süre sessiz kalıp düşünüyor.) Sayılar üzerinden dene istersen, mesela şiire kaç verebilirsin en az?*

Sevda: *Ee, şiire. 9’un katı olması lazım.*

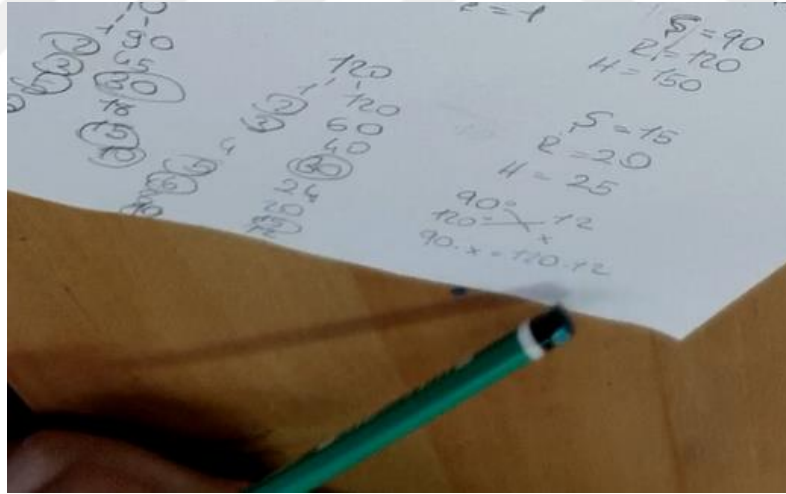
A: *Neden 9’un katı diyorsun?*

Sevda: *Ee, 90 derece ya. Silelim. Mesela şiire 27 diyelim. (Orantı kuruyor.) Şimdi 90’da 27 ise 120’de kaçtır? Şimdi burada 27’den 90’a kaç kat var. 27, 54. Bir böleyim. 27, 9, 18, 27. Kafam karıştı. (İşlemi yapmaya çalışıyor.)*

A: *Ne düşünüyorsun?*

Sevda: *İl. 90’ı 27’ye bölmem lazım. 90’ı ikiye bölelim önce. Yok. Buna 10, 9 desek? (Siliyor yazdığını.) Şimdi burada 10 katsa, roman da 12 olur. O zaman hikâye de 15 olur.*

Sevda'nın özel durumlarını orantı kurarak bulmaya çalıştığı ancak kurduğu orantıda kat ilişkisi arayıp tamsayı katlar olmadığında sorun yaşadığı görülmektedir. Bu nedenle çözümüne kitap türlerinin merkez açı ölçülerinin bölenlerini kullanarak devam etmiştir. Buradan hareketle ilk özel durumunu şiir sayısının “9’un katı olması gerekiyor.” varsayımıyla belirlemiş ve orantı kullanarak diğer kitap türlerinin sayılarını bulmaya çalışmıştır. Bu noktada yine tamsayı bir kat göremediği için zorluk yaşamış ve belirlediği şiir kitabı sayısını değiştirme yoluna gitmiştir. Sevda özel durumlar oluştururken farklı bir yol olarak, belirlediği bir kitap türüne bir sayı değeri vermiş ve o sayıya ulaşmak için o kitap türüne ait merkez açı ölçüsünü kaç bölmüşse diğerlerini de aynı sayıya bölerek diğer kitap türü sayılarını bulmaya çalışmıştır. Daha sonraki denemelerinde de kitap türlerinin merkez açı ölçülerinin ortak bölenlerinden yararlanarak birden fazla özel durum oluşturabilmiştir. Sevda kat bulamadığı bir durumda orantıda içler dışlar çarpımını da denemiş ve hatalı sadeleştirmeler yapmıştır. Şekil 19’da Sevda’nın kurduğu orantıda içler ve dışlar çarpımı yaparken çarpım durumunda olan 120 ve 12’nin sadeleşebileceğini ifade ettiği anı gösteren video kesiti verilmiştir:



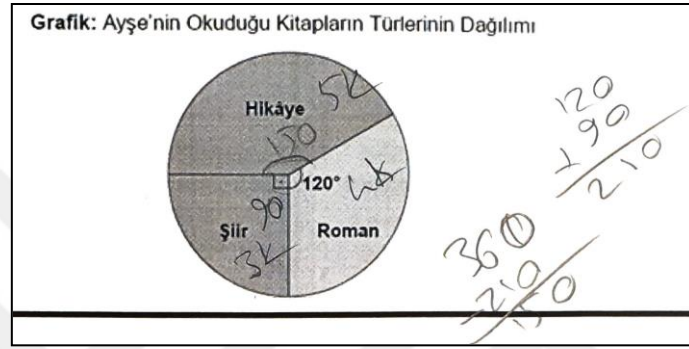
Şekil 19. Sevda'nın içler ve dışlar çarpımı yaptıktan sonra çarpım durumundaki 120 ve 12'nin sadeleşeceğini ifade ettiği andan bir kesit.

Yazılı ve sözlü ifadelerinden hareketle Sevda'nın denklem çözmeye yönelik kavramsal eksiklikleri olduğu ve bu nedenle orantı kurduğu zamanlarda tamsayı katları kullanmak istediği söylenebilir.

Veri işleme sorusunda özel durumlar oluşturmaya yönelik çözüm süreci en hızlı şekilde Melek tarafından gerçekleştirilmiştir. Doğrudan farklı kitap türlerine ait

merkez açılış ölçülerinin en büyük ortak bölenini bulmuş ve hangi kitap türünün kaç kat olacağını ifade etmiştir. Aşağıda Melek'in yaşadığı sürece ilişkin ifadelerine yer verilmiştir:

Melek: *Neye göre belirlerim, ortak kattan (Ortak bölen demek istiyor.) belirleyebilirim. Bu (şiir) 3 katı, bu (roman) 4 katı, bu (hikâye) 5 katıdır. (Öğrenci grafik üzerinde şiir roman ve hikâye bölümlerine sırasıyla 3k, 4k ve 5k yazıyor. Bkz. Şekil 20)*



Şekil 20. Melek'in veri işleme sorusunu çözüm sürecinin başlangıcında yazdığı genel ifadeler.

A: *Tamam, mesela ne olabilir mesela şiir sayısı?*

Melek: *Şiir sayısı 2'den hesaplarsak 6 olabilir.*

A: *Tamam, yazar mısın o durumları bana?*

Melek: *(Öğrenci yazarak devam ediyor, ilk olarak 6-8-10 durumunu yazıyor.) 3'ten hesaplarsak 9, 12 ve 15 şeklinde olur. Daha yüksek sayılarla da hesaplayabiliriz.*

Diyalogda ve Melek'in Şekil 20'deki yazılı ifadelerinden de görüldüğü üzere çözümünün başlangıcında 3k, 4k ve 5k ifadelerini yazdıktan sonra Melek, k yerine değerler vererek k'yı değişken olarak kullandığını belli etmiştir. Bu ifadeyi kullanarak verilen daire grafiğine uygun birden fazla özel durum oluşturabilmiştir. Melek'le gerçekleştirilen görüşme dökümlerinden de görüldüğü üzere öğrenci doğrudan bir genellemeye ulaşmıştır. Bu genellemeyi kullanarak birden fazla özel durum oluşturabilmiştir.

Kısacası, özel durumlar oluşturmaya çalışırken katılımcıların çoğunluğu ortak bölenleri kullanarak hareket etmekle birlikte doğrudan genelleme kullanımı, orantı kullanımı, kesir bağlamı kullanma ve farklı yolları birlikte kullanmayı tercih edenler

de olmuştur. Araştırmaya katılan öğrencilerin altısı ortak bölüme kastederken “ortak kat” ifadesini kullanmıştır. Buradan hareketle öğrencilerde ortak kat ve ortak bölme kavramlarına yönelik kavramsal temelde bir eksiklik olduğu görülmektedir. Öğrencilerin tümü sorudaki koşula uygun olacak şekilde birden fazla özel durum oluşturabilmiştir.

3.2.2. Varsayımda Bulunma Sürecine Yönelik Bulgular

Öğrencilerin tamamı verilen daire grafiğine uygun şekilde birden fazla özel durum tespit edebilmişlerdir. Öğrencilerin daire grafiği sorusunu çözerken tespit ettikleri özel durumlar üzerinden ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların gelişimi sürecine bu kısımda yer verilecektir.

Hande, Nehir ve Sevda verilen daire grafiği sorusunu çözmeye “*en az şiir olmalı, en fazla da hikâye olmalı*” varsayımlarıyla başlamışlardır. Hande bu ifadesinden sonra verilen daire grafiğine uygun olmayan bir özel durum oluşturmuştur. Araştırmacı tarafından daire grafiğini tekrar incelemesinin talep edilmesi üzerine daire grafikte verilen kitap türlerinin merkez açılı ölçülerini inceleyerek 30 ortak bölünmesini görmüş ve ilk özel durumunu oluşturmuştur. Daha sonra verilen kitap türlerinin merkez açılı ölçülerinin ortak bölünmelerini kullanarak farklı özel durumlar oluşturmuştur. Hande’nin bu sürece ilişkin sözel ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: *Mesela hikâye sayılarını inceler misin?*

Hande: *Hepsi 5’e bölünüyor.*

A: *Şiirler?*

Hande: *3’e bölünüyor.*

A: *Romanlar?*

Hande: *4’e bölünüyor.*

A: *Mesela, romanlar için 4’bölünmeyen bir sayı verebilir misin?*

Hande: *Veremeyiz, 4’e bölünmesi lazım.*

A: *Başka sayı bulabilir misin?*

Hande: *Başka sayı yok. (Duraklıyor.)*

Yukarıdaki diyaloglardan da görüldüğü üzere Hande ulaştığı özel durumları inceleyerek başlangıç varsayımını değiştirmiş ve şiirlerin 3’e, romanların 4’e ve hikâyelerin de 5’e bölünebildiğini ifade etmiştir. Özel durumlarını tamamen kitap

türlerinin merkez açı ölçülerinin ortak bölenlerini kullanarak bulan Hande'nin "*Başka sayı yok*" ifadesi öğrencinin yine ortak bölenler odaklı düşündüğünü göstermektedir.

Hande gibi, Sevda ve Nehir de verilen daire grafikteki kitap türlerinin merkez açı ölçülerinin ortak bölenleri üzerinden hareket etmiştir. Nehir ulaştığı özel durumları inceledikten sonra farklı özel durumlar arasındaki katları da ifade etmiş, ardından varsayımını "*şiirler 3'ün katı, romanlar 2'nin katı ve hikâyeler 5'in katı olmalı*" şeklinde güncellemiştir. Sevda ise daha farklı bir şekilde ulaştığı özel durumlar sonrasında şiirin 9'un katı olması gerektiğini ifade etmiş ve bu varsayımdan hareketle şiire değerler vererek orantı kurma yoluna gitmiştir. Aşağıda Sevda'nın ulaştığı varsayım ve ardından özel durum oluşturma sürecini örnekleyen diyaloga yer verilmiştir:

Sevda: *Ee, şiire..9'un katı olması lazım.*

A: *Neden 9'un katı diyorsun?*

Sevda: *Ee, 90 derece ya.*

...

Sevda: *Mesela şiire 27 diyelim.*

A: *Tamam, şiirin 27 olduğu durumda grafiğe göre romanın kaç olması gerekir sence?*

Sevda: *Şimdi 90'da 27 ise 120'de kaçtır? Şimdi burda 27'den 90'a kaç kat var. 27, 54. Bir böleyim. 27, 9-18-27. Kafam karıştı. (İşlemi yapmaya çalışıyor.)*

A: *Ne düşünüyorsun?*

Sevda: *İi, 90'ı 27'ye bölmem lazım. 90'ı ikiye bölelim önce. Yok, buna on. Dokuz desek? Şimdi burda 10 katsa, roman da 12 olur. O zaman hikâye de 15 olur.*

Buradan da görüldüğü üzere Sevda kurduğu orantılarda tamsayı katlar göremediğinde zorluk yaşamış ve sayıları değiştirerek yeni özel durumlar elde etmiştir. Ayrıca Sevda, orantıyı içler dışlar çarpımı ile devam ettirirken de sadeleştirmelerde hatalar yapmış ve sonuca ulaşamamıştır. Sevda'nın yeni varsayımını oluşturma sürecine aşağıda yer verilmiştir:

Sevda: *Evet. (Biraz duraklıyor.) Şimdi şöyle bir şey var. (12-16-20 durumu) 12'den 16'ya 4 tane şey var. Burda da (16'dan 20'ye) 4 artıyo. Burda (18-24-*

30 durumu) 6 artıyor, burda da 6 artıyor. Burda (9-12-15 durumu) üç artmış, burda da üç artmış.

A: Evet

Sevda: Burda (90-120-150 durumunu gösteriyor) 30 artmış, burda da 30 artıyor. Burda (15-20-25 durumu) 5 artmış, burda da 5 artıyor.

A: Hep farklı sayılarda artış var, öyle mi?

Sevda: Evet. Şimdi 90 dereceden 120 dereceye 30 var, burda da 30 var. Yani şimdi şiirle roman arasında 30 derece var, romanla hikâye arasında da 30 derece var.

A: Tamam, 30 dereceyi nasıl kullanabilirsin?

Sevda: Nasıl kullanabilirim. Bilmiyorum ki. (Düşünüyor.) Bilmiyorum.

A: Tamam, burada bir ilişki gördüğünü söyledin, dedin ki buradan hep aynı sayıda fark var.

Sevda: Evet. Hepsinin arasında aynı fark var.

A: Tamam. Peki, bu ilişkiyi farklı bir şekilde ifade edebilir misin?

Sevda: 30 derece varsa aralarındaki eee mesela bunlar arasındaki kat farkı 30'un böleni oluyor.

A: O zaman bir fark olamaz mı aralarında?

Sevda: Bir fark olursa yine 30'un böleni. 1 çarpı 30'dan.

A: Dener misin bunu farklı bir sayıda?

Sevda: 30'un böleni mesela, hepsini denedik ama. Mesela aralarında 10 fark yaparsak.

A: Tamam, 10 fark olarak nasıl yaparsın?

Sevda: Mesela şiire 5 desek, roman 15 olur, hikâye de 25 olur.

A: Peki o zaman şiir 5 iken roman 15 olduğunda bu grafik uygun oluyor mu?

Sevda: Iıı. (Düşünüyor.) Olur.

A: Neye dayanarak söylüyorsun?

Sevda: Buna dayanarak.

A: Yani aradaki farklara dayanarak mı?

Sevda: Evet.

Diyalogda Sevda'nın oluşturduğu özel durumların gözden geçirip şiirden romana, romandan da hikâye sayılarına artış miktarlarının aynı olduğunu fark ederek

yeni bir varsayım oluşturduğu görülmektedir. Bu diyalogun hemen ardından öğrenci bir önceki yöntemi (orantı kurma) deneyerek son elde ettiği bu özel durumun grafiğe uygun olup olmadığını kontrol ederek aradaki farklar hep aynı olsa da bu sayıların rastgele olmadığını keşfetmiştir.

Bariş ve Tuğçe de diğer öğrenciler gibi kitap türlerinin merkez açılış ölçülerinin ortak bölenlerinden hareket etmişlerdir. Grafiğe uygun olduğunu belirlediği özel durumların katlarını da kullanarak birden fazla özel durum tespit ettikten sonra Barış'ın varsayımını oluşturma sürecine aşağıda yer verilmiştir:

Bariş: (Özel durum bulmaya çalışıyor.) *90'ı 6'ya böldüm. 120'yi 15'e bölersek, ee 6. 15 çarpı 6, 90 ediyö. 105 oluyor, bir 15 daha eklersek 120. (Kafadan yapmaya çalışıyor ve kafası karışıyor.)*

A: *Bölmeni kâğıt üzerinde yapabilirsin.*

Bariş: *15 çarpı 5 eşittir 75, bir 15 daha 90, $7 \times 15 = 105$, 8. Roman 8 kitap oluyor. Hikâye de 10 olur. [Şiir] 6 olduğu durum için bunları söyleyebiliriz.*

A: *6'dan başka ne yapabilirsin? Bir sonraki seçimin nasıl olur?*

Bariş: *[Şiir için] 9 olur, 3'ün katlarıyla gidiyor.*

A: *Nasıl bir kat gördün?*

Bariş: *3'ün katları.*

A: *Hangisi için geçerli bu?*

Bariş: *Şiir 3'ün katı, roman 4'ün, hikâye de 5'in katı oluyor.*

Bariş'ın bu açıklamaları öğrencinin ulaştığı özel durumlardan hareketle bir varsayım ulaştığını göstermektedir.

Tuğçe ortak bölenlerden yola çıkarak “[Şiir], roman ve hikâye. Hepsine 3'ün katı olan bir sayı koyabilirim” diyerek çözüme başlamıştır. Ortak bölenleri ve bulduğu özel durumların katlarını kullanarak birden fazla özel durum oluşturduktan sonra varsayımını değiştirmesi gerektiğini fark etmiştir. Daha sonra da Tuğçe bulduğu tüm özel durumları inceledikten sonra farklı bir varsayım dile getirmiştir. Bu varsayım üzerinde düşünüp tekrar özel durumları incelemesinin ardından yeni bir varsayım oluşturmuştur. Aşağıda Tuğçe'nin varsayımında bulunma süreçlerine yer verilmiştir:

Tuğçe: *Ne olması gerekiyor, hepsinin 3'e bölünmesi gerekiyor bi kere. Yani bunlar hariç şu anda (Hikâye ve roman değerlerinde 3'ün katı olmayanları gösteriyor.)*

(Bu varsayımla birkaç özel durum oluşturduktan sonra)

A: *Peki bu hikâye şiir ve kitap türü için yazdığın sayıları incelediğinde bir ilişki, ortak özellik var mı?*

Tuğçe: *(Düşünüyor.) Burada her zaman iki iki artıyor (6-8-10 durumunu gösteriyor.) Üçte bir oranında artıyor. (6'yı ve 8'i gösteriyor) Buradan buraya üçte bir oranında artış var. Buradansa (8 ve 10'u gösteriyor) dörtte bir oranında artış var.*

A: *Peki, diğerlerinde de geçerli mi bu durum?*

Tuğçe: *Deneyelim. (3-4-5 durumunu inceliyor) Burada üçte bir oranında artış var, buradaysa dörtte bir oranında artış var. (45-60-75 durumu) Üçte bir oranında 15 artmış evet doğru, dörtte bir oranında yine 15 artmış, doğru oluyor evet.*

(Bu varsayım üzerinde düşünüp özel durumları inceledikten sonra)

Tuğçe: *Mesela burada bir 5 kat var. (9-12-15 durumu ile 45-60-75 durumu arasında) Burada da 5 kat var, burada da 5 kat var. Mesela burada 15'e bölünmüş (45-60-75 durumu ile 3-4-5 durumu). Burada da 15'e bölünmüş, burada da 15'e bölünmüş. İı.. Birbirinin katı oluyor bunlar da.*

A: *Ne diyebilirsin?*

Tuğçe: *Hepsiiii, 3, 4 ve 5'in katı.*

A: *Hangileri neyin katı?*

Tuğçe: *Şiir 3'ün katı olacak, roman 4'ün katı, hikâye 5'in katı olacak.*

Diyalogda Tuğçe'nin bulduğu özel durumları inceleyerek varsayımlarında nasıl değişikliğe gittiği görülmektedir. Öğrenci varsayımlarını kontrol ederken özel durumları tekrar incelemiş ve yeni ilişkiler keşfederek varsayımda bulunma sürecini gerçekleştirmiştir.

Giriş varsayımı olarak “*en az şiir, en fazla hikâye*” sözlerini dile getiren Murat şiir, roman ve hikâyeye sırasıyla 3, 6 ve 9 değerlerini vermiş ve hemen ardından bu durumun grafikteki merkez açılı ölçüleri arasındaki katlara uygun olmadığını dile getirmiştir. Sonrasında Tuğçe gibi roman değerini bulmak için şiir değerine şiirin “üçte birini ekleyeceğiz” söylemiyle daire grafiği sorusunu kesir bağlamıyla çözmeye çalışmıştır. Aşağıda Murat'ın varsayımda bulunma sürecinden bir kesite yer verilmiştir:

Murat: *Ee, 90, 180 oluyo..eee ..üçte birini ekliycez bi daha?*

A: *Üçte birini ekliyceksin, şiir üç dediysen mi?*

Murat: *Bi Dakka. 6, bunun diyelim 6 (şiir), 8 olacak bura..*

A: *Neye göre düşünüyorsun?*

Murat: *Üçte birini ekliyorum.*

A: *Neyin üçte birini ekliyorsun?*

Murat: *Sayının. Yani aklımdan bi sayı geliyor, onu ekliyorum.*

A: *Niye üçte bir ekledin?*

Murat: *E çünkü burda üçte birini koyunca artıyo.*

...

A: *Başka durum bulabilir misin?*

Murat: *Başka durum (düşünüyor) Eee.. 1-2-3 olmaz.*

A: *Neden olmaz?*

Murat: *Olur mu? Birin. Birin üçte birini nasıl bulayım? Üçte biri 30 oluyo. (Gülüyor, dereceleri kastediyor.)*

A: *O zaman üçe bölünen bir şey mi gerekiyor diyorsun?*

Murat: *Evet.*

A: *Ne için, şiir için mi? Roman için mi, hikâye için mi?*

Murat: *Roman için, hikâye için. Yoo, hepsi için.*

A: *Hepsinin üçe bölünmesi gerekiyor mu diyorsun?*

Murat: *Ama bu bölünmedi. (Romanı gösteriyor ve anlık duraklıyor.) Şiirin üçe bölünmesi lazım.*

A: *Tamam, o zaman şiir 1 olamaz mı?*

Murat: *2-3-. Bi tek 3 oluyo.*

Diyalogda Murat'ın şiir sayısına hep 3'ün katı değerler vererek sezgisel hareket ettiği ve şiir değerine şiirin üçte birini ekleyerek roman sayısını bulduğu görülmektedir. Murat oluşturduğu özel durumların birinde şiire 6 değerini verip roman sayısını 8 olarak bulduktan sonra romanın üçte birini tamsayı olarak hesaplayamadığı için zorlanmış ancak biraz düşündükten sonra şiirin üçte ikisini eklemesi gerektiğini fark edip hikâye değerine ulaşmıştır. Bu diyalogun ardından bulunduğu sayılar arasındaki ilişkileri ararken, diğer öğrencilerde de görüldüğü gibi, farklı özel durumlardaki katları da ifade eden Murat, özel durumlar üzerinde çalışma sonrasında roman ve hikâye

arasında da “dörtte bir ilave etme” ilişkisini de fark etmiştir. Ancak daha sonra bu varsayımlarını unutarak tamamen ortak bölenler odaklı düşünerek kullanabileceği bazı durumları fark edememiştir. Diğer öğrenciler gibi Murat da bulduğu özel durumların katlarından yararlanarak yeni özel durumlara ulaşmıştır. Aşağıda Murat’ın ortak bölenler odaklı düşünürken özel durumlar bulma çabasına yer verilmiştir:

A: *Mesela şiire ne verebilirsin? Örneğin şiir yerine 50 yazabilir miyiz?*

Murat: *50 yazsam hiçbir şeye uymaz ki?*

A: *Neden uymaz?*

Murat: *90’ın hiçbir katı 50 değil ki? (Öğrenci bölüneni demek istiyor)*

A: *Peki, 18 yapabilir misin?*

Murat: *18, 5’le çarparsam 40. Oluyor mu, oluyor.*

A: *33 olur mu şiir?*

Murat: *Olmaz.*

A: *Neden?*

Murat: *99 oluyor. 3 katı evet 99.*

A: *Yazdığın sayı 90’ın?*

Murat: *(Öğrenci cümleyi tamamlıyor.) Bölünebileceği bir sayı olmalı.*

A: *Ama sen [daha önce şiire] 24 de yazdın? 24, 90’a [tam] bölünür mü?*

Murat: *Bölünmez.*

A: *Yani sen şiire yazılacak sayının 90’ı tam bölmesi gerektiğini söylüyorsun.*

Murat: *Amaaa bu buna bölünüyo, bu da bunun katları oluyo. (3-4-5 durumunu gösteriyor.)*

Buradan da görüldüğü üzere Murat önceki varsayımını hatırlayamaması dolayısıyla yeni özel durum oluşturmada sorun yaşamıştır. Bu aşamadan sonra birkaç özel durum daha bulmuş ve son olarak şiirlerin 3’ün katı, romanların 4’ün katı ve hikâyelerin 5’in katı olduğunu dile getirmiştir. Sonuç olarak Murat oluşturduğu özel durumları inceleyerek ilişkileri keşfetmiş ve varsayımda bulunma basamağını gerçekleştirmiştir.

Uğur ise daire grafiğini bütün ve parça odaklı düşünerek özel durumlar elde etmeye çalışmıştır. Çözümünün başlangıcında şiir sayısı tüm kitapların dörtte biri, hikâye sayısı da tüm kitapların üçte biri olmalı ifadelerini kullanarak özel durumlar bulmaya çalışmıştır. Buradan hareketle ilk özel durum bulma denemesinde tüm

kitapların sayısına hem 3'e hem de 4'e bölünen 12 değerini vermiş, sonra şiir ve roman sayılarını bulup bütünden çıkararak hikâye sayısına ulaşmıştır. Uğur'un bu süreçteki ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

Uğur: *Ee, 9'la 3 arasında da 3 kat oluyor. 12'yle 4 arasında da, 15'le 5 arasında da 3 kat oluyor.*

A: *Anladım. Sen hep şiir ve romana göre sayı verdin. Toplam kitap sayısının hem 3'e hem de 4'e bölünmesi gerektiğini söyledin. O nedenle 12'yi seçtin ilk başta.*

Uğur: *Evet.*

A: *Hep oradan hareket ettin, 24 yapayım dedin. 36 yapayım dedin. Bir sonraki denemende neyi denersin?*

Uğur: *48*

A: *Peki, ne olması beklersin şiirin?*

Uğur: *Şiirin 3'ün dördüncü 4 katı.*

Yukarıdaki diyalogda görüldüğü üzere Uğur, sonraki denemelerinde ise toplam kitap sayısını iki katına, üç katına vs. çıkaracağını ifade ederek sezgisel davrandığını ortaya koymuştur. Uğur sözel olarak dile getirmese de toplam kitap sayısının 12'nin katı olması gerektiğinin farkına varmıştır. Ayrıca Uğur da diğer öğrencilerin yaptığı gibi bulduğu özel durumlar arasındaki katları fark etmiş ve varsayımda bulunma basamağını gerçekleştirmiştir.

Melek veri işleme sorusuna doğrudan bir genellemeyle başlamış ve özel durumlarını bu genellemeyi kullanarak oluşturmuştur. “*Neye göre belirlerim, ortak kattan [ortak bölen demek istiyor] belirleyebilirim. Bu (şiir) 3 katı, bu (roman) 4 katı, bu (hikâye) 5 katıdır.*” ifadesiyle sorunun çözümünde nasıl ilerleyeceğini belli etmiştir. Melek doğrudan genellemesini sözel olarak ifade ettiği uygun bir varsayımla çözüm sürecine başlamış ve geçerli olduğunu gördüğü için varsayımında herhangi bir değişikliğe gitmemiştir.

Öğrencilerin veri işleme öğrenme alanına yönelik olarak sorulan daire grafiği sorusunda ulaştıkları özel durumları incelemelerinin ardından ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların ifade edilme sıklıkları Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Daire grafiği sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları

Varsayımlar	f
En az şiir, en çok hikâye olmalı.	4
Şiir 3'e, roman 4'e, hikâye 5'e bölünebilmeli.	3
Şiirden romana üçte bir, romandan hikâyeye dörtte bir artış var.	2
Şiir kitabı sayısı 90'ın böleni olmalı.	2
Şiir, roman ve hikâye arasında aynı sayıda artış olmalı.	1
Şiir, roman ve hikâye 3'ün katı olmalı.	1
Şiir 3'e, roman 2'ye, hikâye 5'e bölünebilmeli.	1
Şiirden romana üçte bir, şiirden hikâyeye üçte iki artış olmalı.	1
Toplam kitap sayısı hem 3'e hem 4'e bölünmeli.	1
Doğrudan genelleme (Şiir 3k, roman 4k, hikâye 5k).	1

Kısacası, araştırmaya katılan öğrencilerin tümü veri işleme sorusuna yönelik bir veya birden fazla varsayımlar oluşturmuş ve bu varsayımlar üzerinden denemeler yaparak değişikliklere gitmişler ya da geliştirmişlerdir.

3.2.3. Genelleme Sürecine Yönelik Bulgular

Bu kısımda veri işleme sorusunu çözerken katılımcıların genellemeye ulaşma süreçlerine yer verilmektedir.

Çözümüne doğrudan genel ifadeyle başlayan Melek, araştırmacının sorgulaması sonrasında yazmış olduğu “3k, 4k ve 5k” ifadelerindeki “k” sembollerini değişken olarak kullandığını belirtmiştir. Ayrıca ifade ettiği tüm özel durumları bu genel ifadeyi kullanarak oluşturmuştur. (Bkz Şekil 20.)

Barış, Tuğçe ve Hande özel durumlar oluşturmuş, bu özel durumları inceledikten sonra farklı varsayımlar üretmiş ve son olarak şiirin 3'ün katı, romanın 4'ün katı ve hikâyenin de 5'in katı olduğu varsayımlarına ulaşmışlardır. Bu varsayımları oluşturdukları özel durumlar üzerinden doğrulamalarının ardından araştırmacı, öğrencilerden bu varsayımlarını daha genel olarak ifade etmelerini istemiştir. Aşağıda Barış, Tuğçe ve Hande'nin birbirine çok benzeyen genellemeye ulaşma süreçlerini örneklendirmek üzere Hande ile gerçekleşen diyaloga yer verilmiştir:

A: Peki bu sayıları incelediğinde bir kural gördüğünü söyledin.

Hande: Evet, bunlar 3'e bunlar 5'e bunlar 4'e bölünüyor.

A: Peki bu gördüğün ilişkiyi harfli ifadeleri kullanarak yazabilir misin?

Hande: 5a, 3a, 4a (Bkz. Şekil 21.)

A: Nasıl yani, buna ne diyeceksin o zaman? (30-18-24 için)

Hande: 5'in 6 katı, 3'ün 6 katı, o da 6 katı.

H	R	S
10	9	7

H	S	R
5	3	4
150	90	120
75	45	60
15	9	12
5	3	4
50	30	60
30	18	24
50	30	12

H	S
120/124	120/124

Şekil 21. Hande'nin veri işleme sorusunda bulduğu özel durumlar ve ulaştığı genel ifade.

Yukarıdaki diyaloglardan görüldüğü üzere öğrenciler olasılık sorusundakinin aksine “genel ifade” sözcüğü karşısında tereddüt yaşamamış ve araştırmacının sorularının altında yatan düşüncenin farkında olarak genel ifadelere ulaşabilmişlerdir. Şekil 21’de de Hande’nin veri işleme sorusuna yönelik yazdığı tüm özel durumlar ve ulaştığı genelleme görülmektedir. Barış Tuğçe ve Hande veri işleme sorusunda genel bir ifadeye ulaşabilmişlerdir.

Varsayımını diğer öğrencilerden farklı şekilde ifade eden Murat’ın genellemeye ulaşma süreci de farklı olmuştur. Murat, şiir değerine şiirin üçte birini ekleyerek roman değerine ulaşacağını, şiir değerine şiirin üçte ikisini ya da roman değerine romanın dörtte birini ekleyerek hikâye değerine ulaşacağını sözel olarak ifade etmiştir. Murat’ın varsayımdan hareketle genel ifadeye ulaşma sürecindeki ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Burada üçte bir eklemek, üçte iki eklemek ve dörtte bir eklemek şekilde bir kural görüyorsun. Bu durumu bana cebirsel olarak ifade edebilir misin?

Murat: Cebirsel? (Duraklıyor, düşünüyor.) Cebirsel nasıldı unuttum.

...

A: Tamam, bahsettiğin ilişkinin her örnek durum için doğru olduğunu sen de söyledin. (Şiirin) Üçte birini ekledin, (şiirin) üçte ikisini ekledin, burda (romanın) dörtte birini ekleyeceğini söyledin. Tamam. Bu ilişkiyi cebirsel olarak ifade edebilir misin? Bilinmeyen, değişken kullanarak?

Murat: *Bilinmeyen. Buna ney 120 miydi? O zaman bu da 90. Bu, x, x üç bölü bir yapalım. X artı üç bölü bir. Ama 90'ın üç bölü biri (üçte bir demek istiyor.), onu nasıl yazıcam?*

...

Murat: *Hikâye, ney roman, şiir. Ee, bu (hikâye) şimdi x olsa bu şiirin üçte x artı üçte bir, üçte ikisi.*

A: *X'in üçte ikisi mi?*

Murat: *Hayır, şiir şimdi ne olsun. Şiir 90 ya, bu hikâye miydi evet, hikâye. X artı*

A: *Neyin yerine koydun onu? Neyi anlatıyor senin için bu x?*

Murat: *X bana neyi anlatıyor. (Düşünüyor) biraz devam edeyim illaki aklıma gelir.*

A: *Tamam.*

Murat: *90, kafam da karıştı. (Gülüyor.) Haa şeyy, şiirin üçte biri. Ha x art.. Yoo. X. X hangisi acaba?*

A: *Sen burada hikâyeye ne yaptın? Şiirin?*

Murat: *Yarısını ekledim, ha üçte biri, üçte ikisini ekledim.*

A: *O zaman şiirin üçte ikisi.*

Murat: *Pardon. (Öğrenci H yazdığı yere "x + $\frac{2}{3}$ " yazıyor.)*

A: *Ama neye ekledin bu şiirin üçte ikisini?*

Murat: *X'e.*

...

A: *Romanın değerini nasıl buldun sen burda?*

Murat: *Üçte birini ekledim. Şiirin, yoo şiire üç artı bir, üçte biri (Öğrenci $\frac{2}{3}$ + $\frac{1}{3}$ yazıyor. Bkz. Şekil 22).*

The image shows handwritten mathematical work. On the left, there are three lines of calculations:

$$\begin{array}{l} H \quad x + \frac{2}{3} \quad 15 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 12 \\ R \quad x + \frac{1}{3} \\ \quad \quad \quad \quad \quad 9 \\ S \quad 90 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 1 \end{array}$$

On the right, there is a diagram. A circle contains the fraction $\frac{2}{3}$. An arrow points from the circle to the text: "şiirin $\frac{2}{3}$ si diyor şarpma kullanmıyor."

Şekil 22. Murat'ın genellemeye ulaşma sürecindeki yazılı ifadeleri.

A: *Neyin üçte biri?*

Murat: *Şiirin, şiir artı üçte biri.*

Murat'ın düşüncelerini sözel olarak net bir şekilde ifade edemediği ve düşüncelerini cebirsel ifadeye dönüştürmede yaşadığı zorluk yukarıdaki diyalogda görülmektedir. Şekil 22'de Murat'ın genellemeye varma sürecindeki yazılı ifadeleri araştırmacının notuyla birlikte yer almaktadır. Murat doğru bir varsayıma ulaşmakla birlikte bu varsayımını genel bir ifadeye dönüştürememiştir. Ayrıca Murat'ın üçte bir ifadesini “*üç bölü bir*” şeklinde ifade ettiği de dikkat çekmektedir.

Elde ettiği özel durumları incelediğinde Sevdâ, şiir, roman ve hikâye sayıları arasındaki farkların aynı olduğunu fark etmiştir. Bu varsayım üzerinden hareketle genel ifadeye ulaşmaya çalışan Sevdâ sadece farka odaklanarak hatalı bir genel ifade yazmıştır. Aşağıda Sevdâ'nın genel ifadeye ulaşma sürecindeki ifadelerine yer verilmiştir:

Sevdâ: *Bu $9x$ ise. Mesela, şimdi şöyle bakalım. Şiir mesela $9x$ ise, x 'e bir değer versek. 2 diyelim. X eşittir 2'den baktığımızda 18 yapıyor. O zaman. Yok, böyle de olmuyor. Burası 18 olur, ama romanı bulmadan hikâyeyi bulamam ki. 12 desek? $12x$ desek, romana.*

A: *Neden? 12 nerden çıktı?*

Sevdâ: *Aralarındaki fark. 11 diyelim.*

A: *11 nerden çıktı?*

Sevdâ: *Bilmem, öyle geldi. $11x$ desek, burası 22 yaptı, 4 fark var. O zaman hikâye de 26 olur. (Öğrenci özel durum olarak $9x-11x-26$ yazıyor.)*

...

A: *Uygun olmuyor dedin, neye göre söyledin onu? Buna (şiire) $9x$ dediğini söyledin, sonra?*

Sevdâ: *Buna $9x$ dedim (şiir) 120, 11'e bölünmüyor. Yani 120, şey 9'la.. Buraya 9 dediğimizde 10'a bölünmüş oluyor. 120 de 10'a bölününce 12 olması lazım.*

A: *$12x$ mi olması lazım?*

Sevdâ: *$12x$ desek buraya burası 24 olur, 6 farktan burası da 30 olur. $15x$ 'ten (öğrenci yazdığı ifadeyi $9x-12x-15x$ olarak değiştiriyor.)*

...

Sevda: Eee, meselaaa, şimdi 90'a kaç dersek. Bu bölü buu. 90. Bu 90'a x diyelim. 90 derece ile x arasında kaç kat varsa diğer sayılar da o x 'e bölünmesi lazım. X hepsinin böleni olması lazım.

A: Cebirsel olarak ifaden bu şekilde ($9x-12x-15x$) mi olur bunlara?

Sevda: Evet.

A: Bu durum her zaman geçerli olur mu? Sen sadece x eşittir 2 için baktın. Uygun dedin, başka sayılar için de uygun olur mu?

Sevda: 4 desek. 9 çarpı 4'ten 36 yapıyor, 12 çarpı 4'ten 48 yapıyor, 15 çarpı 4'ten 60 yapıyor. Aralarında 12 fark var.

A: Tamam, hep 12 fark var diyorsun. Peki, bu sayılar uygun mu bu grafiğe? Onu söyleyebilir misin? Mesela 36 şiire uygun mu?

Sevda: Hayır, uygun olmuyor.

Sevda'nın genellemeye ulaşma sürecindeki ifadelerinden cebirsel ifadeye dönüşümde oldukça zorluklar yaşadığı anlaşılmaktadır. Şiir, roman ve hikâye arasındaki farkların eşit olduğunu fark edip bu sayıların rastgele olmadığını bilmesine rağmen diyaloglardan da görüldüğü üzere genel ifadeye ulaşmaya çalışırken rastgele artan değerler vermiştir. Ayrıca son ulaştığı cebirsel ifadenin x 'in 2 olduğu durumdaki değerleri 90, 120 ve 150'nin böleni olduğu için uygun olduğunu söylemiş, ancak x 'in 4 olduğu durumdaki değerlerde bu kat ilişkisini göremediği için uygun olmadığını ifade etmiştir. Sonuç olarak Sevda veri işleme sorusunda uygun bir genellemeye ulaşamamıştır.

Uğur genellemeye ulaşma sürecinde davranışlarıyla zorluk yaşadığını hissettirmiş, beklenenden daha uzun süre sessiz kalmıştır. Nehir de Uğur'a benzer şekilde genel ifade oluşturma noktasında zorluk yaşamış ve sessiz kalmıştır. Bu süreçte Nehir ulaştığı varsayımları tekrarlamış ancak herhangi bir genel ifade oluşturma çabası göstermemiştir. Birbirine benzer ifadeleri olan bu öğrencilerin genellemeye ulaşma süreçlerini örneklendirmek üzere aşağıda Uğur'un ifadelerine yer verilmiştir:

A: Şiir sayısı roman sayısı ve hikâye sayısı ile ilgili gördüğün bu ilişkiyi harfli ifadelerle anlatabilir misin?

Uğur: Harfli ifadeyle..

A: Nasıl bir ilişki görmüştün?

Uğur: Kat ilişkisi görmüştüm.

A: Şiirler için ne dedin?

Uğur: Şiirler için 3 sayısı var. 4'e bölebilmem gerekiyordu. (Derin nefes alıyor ve uzunca sessiz kalıyor.)

A: Evet. Genel bir ifade yazabilir misin? Ya da şiirler için?

Uğur: (Sessizlik) şş..

A: Şiirler için neler buldun mesela? Ez az kaç buldun?

Uğur: 3, 6, sonra 9.

A: Sonra ne olur?

Uğur: 12 olur. 15 olur.

A: Romanlar için ne dersin?

Uğur: 4-8-12-16-

A: Hikâyeler için?

Uğur: 5-10-15-20

A: Böyle gidecek diyorsun. Genel bir ifade? Şiirler?

Uğur: Şiirler? (Düşünüyor.) Harfli nasıl ifade etcem ki?

Yukarıdaki diyalogdan Uğur'un bu süreçte zorluk yaşadığı ve ne yapacağını bilemediğini görülmektedir. Genellemeye varma sürecinde yukarıda verilen Uğur'un ifadeleri ile Nehir'in ifadeleri benzerdir. Bu iki öğrenci oluşturdukları varsayımları genel bir ifadeye dönüştürememişlerdir.

Kısacası, araştırmaya katılan tüm öğrenciler veri işleme sorusunda özel durumlar oluşturabilmiş ve bu özel durumlar içindeki ilişkileri araştırarak varsayımlarda bulunabilmişlerdir. Genellemeye varma sürecinde ise dört öğrenci zorluklar yaşamış ve genel bir ifadeye ulaşamamıştır. Diğer dört öğrenci ise varsayımlarını genel ifadelere dönüştürebilmişlerdir.

3.3. Sayılar ve İşlemler Sorusuna İlişkin Bulgular

3.3.1. Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular

Öğrenciler sayılar ve işlemler öğrenme alanına yönelik üslû ifade problemini okuduktan sonra anladıklarını ifade etmişlerdir. Öğrencilerden sorudan ne anladıklarını ifade etmeleri istendiğinde Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur soruyu anladıklarını belirtir nitelikte ifadelere bulunmuşlardır. Murat ve Sevda soruyu

yeterince anlamadan sorunun çözümüne giriştiklerinden belli bir süre sonra soruyu tekrar okumak zorunda kalmışlardır. Hande ve Nehir de soruyu dikkatli bir şekilde okumadan çözüm sürecine geçmişlerdir. Aşağıda bazı öğrencilerin soruyu anlama sürecine dair sözel ifadelerinden örneklerle yer verilmiştir:

A: *Ne anladığını açıklar mısın?*

Barış: *Yani E'ye [ve F'ye] öyle bir sayı seçmeliyim ki bunların (Sütunu gösteriyor.) çarpımı pozitif tamkare bir tamsayı olacak.*

A: *E ne olabilir o zaman?*

Barış: *2^2 , 4'e eşittir. O zaman E 1'e eşit olabilir. 1'in, 2'nin kuvvetlerindeki eşiti ise 2^0 'dır. Ya da (ulaşılacak sayı) tamkare sayılardan 16 olabilir. İı, 2^2 eşittir 4, 16 için 4'le çarpılması gerek. 4'ün 2'nin kuvvetlerindeki eşiti 2^2 'dir. Yani E, 2^2 olabilir.*

A: *Ne anladın sorudan?*

Murat: *Ne anladım, bunların eee, tamkaresi pozitif bir tamsayı.*

A: *Nasıl yani?*

Murat: *Bunların hepsi. Hepsinin (E'nin bulunduğu sütunu gösteriyor) çarpımı. Bunların hepsini çarptık mı? Çarptık mı?*

A: *Evet çarpımı diyor soruda.*

Murat: *(E ile ilgili bölümü okuyor.) E şeyy, pozitif bir tamkareye ulaşıyormuş. (Öğrenci F ile ilgili bölümü okuyor) Yine aynı.*

A: *Tamam, yine aynı şeyi istiyor diyorsun. Peki, E ve F yerine nasıl sayılar yazılması gerekiyor?*

Murat: *Ee, nasıl sayılar. Tamkare bir, E ve F yazılabilecek, bulabilir misin? (Sorudaki bazı bölümleri kesintili ve sesli bir şekilde okuyor.) Eee, şey bu oluyo kaç (2^{-1} 'i gösteriyor, yanına 1/2 yazıyor) böyle olmuyo mu?*

A: *Ne anladın?*

Hande: *İı. Bunların çarpımı tamkare olacak. Burda da aynısı [F sayısı için]*

A: *E ve F yerine nasıl sayılar koyulacak?*

Hande: *Pozitif.*

A: Sadece pozitif herhangi bir sayı mı?

Hande: Ee, üslü ifade koyacağız.

A: Nasıl bir üslü ifade koyacaksın?

Hande: Nasıl nasıl? Pozitif üslü ifade koyacağız.

A: Üslü ifade koyacaksın da 3 üzeri 5 koyabilir misin mesela?

Hande: Ha ona dur bakmadım. (Soruya tekrar bakıyor.)

A: Nasıl bir üslü ifade koyacaksın?

Hande: Toplamları tamkare olacak, bu 8 (2^3) yapıyo, bu (2^{-1}) da 2.

Barış ile gerçekleşen diyalogda öğrencinin soruyu dikkatli okuyup anladığı ve sorudan ne anladığını da açıklayabildiği görülmektedir. Barış'la gerçekleşen bu diyalogun benzerleri Melek, Tuğçe ve Uğur ile de yaşanmıştır. Bu öğrenciler soruyu okuduktan sonra kendi cümleleri ile ifade edebilmiş ve sonrasında çözüm sürecine başlamışlardır. Murat ve Hande'nin ifadeleri ve bu süreçte kaydedilen gözlemler ise diğer öğrencilerin soruyu anlamlandırma sürecine örnek teşkil etmektedir. Hande ve Murat ile gerçekleşen diyaloglar bu öğrencilerin soruyu dikkatli okumadıklarını, bu nedenle önemli noktaların farkına varamadıklarını ve doğrudan çözüm sürecine geçtiklerini göstermektedir. Buna benzer bir süreç Nehir ile de yaşanmıştır. Gözlemlerden ve sözel ifadelerden de görüldüğü üzere birden fazla koşul içeren ve bu nedenle daha dikkatli olunması gereken bu üslü ifade probleminde öğrencilerin yarısı soruyu dikkatli bir şekilde okumamış ve tam olarak anlamadan sorunun çözümüne başlamışlardır.

Bu süreçle birlikte Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur üslü ifadelerle çarpma işlemi özelliklerini kullanarak çözüme odaklanmışlardır. Öğrenciler öncelikle E değerleri için E'nin bulunduğu sütundaki ve F değerleri için F'nin bulunduğu sütundaki bilinen üslü ifadeleri çarpmış ve ulaştıkları sayıyı ne ile çarpmaları gerektiğini düşünerek farklı E ve F değerlerine ulaşmışlardır. Bu öğrenciler ulaştıkları tamkare ifadeleri 2'nin kuvveti olarak da ifade etmiş ve bu nedenle sorunun barındırdığı ilişkileri diğer öğrencilere göre daha rahat bir şekilde görebilmişlerdir. Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur, E için denedikleri 2'nin kuvvetini sütundaki bilinen değerlerin çarpımıyla zihinden çarpıp tamkare sayıya ulaşmaya çalıştıkları için doğrudan 2'nin çift kuvveti değerlerle sürece başlamışlardır ve E değerlerinin 2'nin çift kuvveti olacağını sezgisel olarak ifade etmişlerdir. F için özel durum arayışındayken Barış, E için bulduğu değerlerden hareketle önce çift kuvvetle başlamış ve sonrasında F değerlerinin 2'nin tek kuvvet

olması gerektiğini fark etmiştir. Melek ve Uğur, F değeri bulmaya çalışırken yine E'deki gibi zihinden hesap yapmışlar ve doğrudan tek kuvvetler kullanarak F değerlerinin tek kuvvet olduklarını belirlemişlerdir. Tuğçe ise öncelikle ulaşacağı tamkare ifadelerle odaklandığından F kuvvetlerini bulmuş ve F değerlerinin kuvvetlerinin tek sayı olması gerektiğini ifade etmiştir. Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur hem E hem de F için sorudaki koşullara uygun olacak şekilde birden fazla özel durum bulabilmişlerdir. Şekil 23'te Uğur'un soldan sağa sırasıyla E ve F için özel durumlar bulmaya çalıştığı süreçteki yazılı ifadeleri görülmektedir.

Şekil 23. Uğur'un üslü ifade sorusunda E ve F değerleri için özel durumlar oluşturma sürecindeki yazılı ifadeleri.

Şekil 23'te Uğur'un sorudaki koşula uygun olacak şekilde E ve F değerlerini elde etmede sistematik bir şekilde hareket ettiği görülmektedir. Öne çıkan diğer bir bulgu ise bu ve benzeri bir akıl yürütmeye üslü ifadelerin çarpım kurallarını kullanabilen öğrencilerin çözüm sürecinde daha az zorlandıklarıdır. E ve F için özel durumlar bulma sürecinde benzer özellik gösteren Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur'un yaşadıkları bu sürece örnek olarak Melek'in F için özel durum arayışındaki sözel ifadeleri aşağıda yer almaktadır:

A: Peki F için farklı sayılar bulabilir misin?

Melek: (Öğrenci yazarak devam ediyor. $2^{-2} \cdot 2^1 = 2^{-1} = 1/2$) İki üzeri eksi iki çarpı iki üzeri bir eşittir iki üzeri eksi bir, o da eşittir bir bölü iki. Bunla bir sayı çarpılıyor ve tamkare oluyormuş. Bununla eksi bir sayıyı çarpmamız gerekir çünkü eksi bir tamkare yok. Eksiyi eksiyi çarparsak artı olur. O zaman iki üzeri eksi birle iki üzeri eksi ikiyi çarparsak iki üzeri üç olur. (Şekil 24'te bu anın video kesitine yer verilmiştir.)

$$2^{-2} \cdot 2^1 = 2^{-1} = \frac{1}{2}$$
$$2^{-1} \cdot 2^{-2} = 2^{-3}$$

Şekil 24. Melek'in üslü soru sayısını çözdüğü sırada yazıp sildiği bölümü gösteren bir video kesiti.

A: İki üzeri üç mü olur?

Melek: (Biraz düşünüyor.) Haa, ama topluyoruz. O zaman bu sayının en az iki olması gerekir. (Üssü) eksi olmaması gerekir. (Görselde -2 olan kuvveti 2 olarak değiştiriyor.)

A: İki dediğin iki üzeri iki mi demek istedin?

Melek: Evet. ($2^{-1} \cdot 2^2 = 2^1$ işlemini yazarak yapıyor.) İki üzeri bire ulaşırız. İkidir yani.

A: Tamkare midir?

Melek: Hayır. (Devam ediyor.) İki üzeri eksi bir çarpı iki üzeri eksi beş (Dili sürçüyor, 5 olarak yazıyor.) olur.

A: Eksi beş mi?

Melek: Artı beş olur. İki üzeri dört (Düşünüyor, çarpıyor) on altı olur. Tamkare olur.

A: Başka uygun durumlar bulabilir misin?

Melek: (Öğrenci araştırmacının sorusu esnasında da devam ediyor.) İki üzeri eksi bir çarpı iki üzeri dört iki üzeri üç olur. Sekizdir. Dört yapmaz. (Son yazdığı çarpmadaki üs olan 4'ü silip 3 yazıyor.) O zaman buraya iki üzeri 3 dersek. İki üzeri iki olur, iki üzeri iki dördür. Tamkaredir.

A: Başka tamkare ne bulabilirsin? Ya da neye göre belirliyorsun bu sayıları?

Melek: Iı. Bu bir. Burada kullandığımız (E'de kullanılan sayıları kastediyor.) sayıların bir fazlası. Çünkü burada eksi bir var (üste) bi sayıyı götürüyor toplamında. İki üzeri eksi bir çarpı iki üzeri beş eşittir iki üzeri dört. O da on altı.

...

A: Başka ne denersin, ya da bir ilişki ortak özellik fark edebildin mi?

Melek: Ortak özellik... (Öğrenci F yerin koyduğu sayıların altını çiziyor.)

Bunlar oldu, yani [üssü] tek sayılar.

A: Yani üsler tek sayı mı diyorsun?

Melek: Çift olduğu zaman olmuyor.

Melek'in F için özel durumlar elde etme sürecinde üslü ifadelerle çarpma işleminde tamsayılara yönelik bazı tereddütler yaşadığı gözlemlenmiştir. Öğrencinin F için yaptığı sayı seçimlerinde E için kullandığı sayıları da düşünerek sezgisel olarak hareket ettiği fark edilmektedir.

Araştırmaya katılan öğrencilerin hiçbiri, araştırmacının E ya da F değerinin en az kaç yapılabileceğine yönelik sorusu olmadan 2'nin negatif kuvvetlerinin de kullanılabileceğini düşünememişlerdir. Aşağıda bu süreci yansıtan bir diyaloga yer verilmiştir:

(Öğrenci E için birkaç uygun örnek bulduktan sonra)

A: Peki en az 2^0 mı oluyor E?

Bariş: Evet, zaten 2^0 , 1'e eşit, daha küçük olmaz.

A: Peki soruda E'nin kuvvetleri nasıl olmalıydı?

Bariş: Tamsayı kuvvetleri veriyorduk. Eksilere inebiliriz.

A: Ne olabilir mesela eksilerden?

Bariş: 2^{-2} 'yi deneyebiliriz.

A: Neden 2^{-1} denemedin?

Bariş: İv. 2'nin katlarından ilerledim. (Ulaştığı E değerlerinde kuvvetlerin 2'nin katı olduğunu kastediyor.) O yüzden -1'i düşünmedim ama deneyebiliriz. (Öğrenci $2^2 \cdot 2^{-1} = 2^1$ işlemini yapıyor.) 2^1 çıkıyor, yani 2 olur. 2 ama tamkare bi sayı değil. O yüzden 2^{-1} olmaz.

A: Peki söylediğin gibi 2^{-2} olur mu?

Bariş: Deneyeyim. (Öğrenci kâğıt üzerinde $2^2 \cdot 2^{-2} = 2^0 = 1$ işlemini yapıyor.) 2^2 'yi 2^{-2} ile çarparsak, 2^0 , eşittir 1. 1 tamkare bir sayı, olur.

A: Peki, daha küçük bir sayı olabilir mi?

Bariş: 2^{-4} ile çarpabiliriz. (Öğrenci $2^2 \cdot 2^{-4} = 2^{-2} = 1/4$ işlemini yapıyor.) 2^2 'yi, 2^{-4} ile çarparsak 2^{-2} olacak. Cevabımız 1 bölü 4, tamkare bir sayıdır.

A: Peki, sadece tamkareye ulaşma hedefinde miydin?

Bariş: Pozitif tamkareye [tamsayıya] ulaşacaktık. Ama burası rasyonel bir sayı. Olamaz.

Bariş ile gerçekleşen yukarıdaki diyalogun benzerleri diğer öğrencilerle de yaşanmıştır. Öğrencilerin negatif kuvvetli sayılarda özellikle zorluklar yaşadıkları ya da pozitif kuvvetli sayılara odaklanıp negatif kuvvetli sayıları unuttukları için E ve F yerine negatif kuvvetli sayıları düşünmedikleri görülmektedir. Bazı öğrenciler ise negatif kuvvetli üslü sayılarla ilgili temel bilgi eksiklikleri olduğu için negatif kuvvetlerle uğraşmak istemediklerini ifade ederek pozitif kuvvetli ifadeleri denemişlerdir.

Hande, Murat, Sevda ve Nehir ise soruyu dikkatli okumadan ve dolayısıyla yeterince anlamadan çözüme başlamışlardır. Bu öğrenciler çözüm sürecine sütunlardaki bilinen üslü ifadelerin tamsayı ya da rasyonel sayı olarak değerlerini bularak başlamışlardır. Bu süreçte öğrencilerin kat ve kuvvet, üslü ifade, negatif kuvvet, tamsayı ve kesir kavramlarına yönelik kavramsal eksiklikleri de ortaya çıkmaktadır. Hem soruyu tam olarak anlamamaları hem de temel kavramlardaki eksiklikleri çözüm sürecinin diğer öğrencilere nazaran uzamasına da neden olmuştur. Kat ve kuvvet terimlerine yönelik Hande'nin ifadeleri aşağıda yer almaktadır:

Hande: 2'nin birbirinden farklı tamsayı kuvvetleri.

A: Yani?

Hande: E ve F yerine 2'nin katı olacak.

...

Hande: Buna 2 desek olmaz mı? (2^{-1} 'i gösteriyor.)

A: Olmaz, o 2'ye eşit değil ki.

Diyalogdan Hande'nin kat ve kuvvet terimlerini aynı anlamda kullandığı anlaşılmaktadır. Ayrıca Hande'nin negatif kuvvetlere yönelik kavramsal eksikliğinin farkında olduğu ve bu nedenle negatif kuvvet içeren durumları değiştirerek soruya devam etmek istediği gözlemlenmektedir.

Negatif üsse yönelik yapılan hatalardan bir diğeri de taban ve üssün çarpılması durumudur. Bu duruma Hande, Murat ve Nehir’de rastlanmıştır. Bu öğrencilerden Murat başlangıçta negatif üslü ifadelerin değerlerini doğru bulmasına rağmen aynı negatif üslü ifadeler için farklı anlarda farklı değerler belirtmiştir. Bu durum Murat’ın kavramsal bilgi eksikliklerine işaret etmektedir. Negatif kuvvetlere yönelik kavramsal bilgi eksikliği görülen öğrencilerin bu sürecine örnek olarak Nehir’in ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Tamam, şu an için E yerine farklı hangi sayıları bulabilirsin?

Nehir: Önce şunları bulsam. (Öğrenci E’nin bulunduğu sütundaki 2^{-1} ve 2^3 ’ü gösteriyor.) -2 oluyo bu. (2^{-1})

A: Yazar mısın, nasıl buluyorsun -2’yi?

Nehir: Önce üssü bulsam?

A: Sen bilirsin nasıl tercih ediyorsan.

Nehir: Yani sonuçta çarpımı tamkare pozitif diyor.

A: Tamam.

Nehir: Yani, 2’yle neyi çarpıcam burda? Burada (2^3) üç kere ikiyi çarpıksam, burada (2^{-1}) da eksi bir kere ikiyi çarpıcam.

A: Eksi birle ikiyi mi çarpmak demek bu?

Nehir: Eksi bir kere ikiyi çarpıcam.

A: İki üzeri eksi bir neye eşit?

Nehir: Eksi 2’ye. (Bir süre sessizliğin ardından) Değil mi?

Diyalogda Nehir’in üslü ifade ile ilgili kavramsal eksikliği görülmektedir. Yukarıdakine benzer ifadeler Hande ve Murat ile de gerçekleşmiştir. Murat başlangıç aşamasında eksi kuvvetle ilgili hata yapmamış ancak çözüm sürecinde taban ve üssü çarparak üslü ifadenin değerini bulmaya çalışmıştır. Pozitif kuvvetli üslü ifadelerle işlemlerde herhangi sorun yaşamayan bu öğrencilerin negatif kuvvetlerde sıkıntılar yaşadıkları tespit edilmiştir. Hande negatif kuvvetlerde eksiklikleri olduğunun farkında olduğu için E ve F için farklı özel durumlar bulmaya çalışırken negatif kuvvetlerle işlem yapmaktan kaçınmış ve negatif kuvveti pozitif olarak değiştirmek istediğini dile getirmiştir. Araştırmacı Nehir, Hande ve Murat’a bu kavram eksiklikleri nedeniyle öncelikle bildikleri bir üslü ifadeyi buldurmuş ve ardından kuvveti sistematik olarak azaltarak üslü ifade kavramını hatırlamalarını sağlamış ve

öğrencilerin soruyu çözmelerini beklemiştir. Negatif kuvvetlerde sorun yaşayan öğrencilere araştırmacının üslû ifadeleri hatırlatmasına yönelik bir kesit aşağıda verilmiştir:

(Öğrenci iki üzeri eksi birin değeri için eksi iki cevabını verdikten sonrası.)

A: *İki üzeri bir neye eşit?*

Nehir: *İkiye. İki üzeri bir, iki üzeri bir, ikidir.*

A: *İki üzeri sıfır?*

Nehir: *Bir.*

A: *Neden iki üzeri sıfır için iki ile sıfırı çarpmadın da bir dedin?*

Nehir: *Çünkü örüntü.*

A: *Nasıl bir örüntü var?*

Nehir: *Yani ikiyle, iki.*

A: *Yazarak yapar mısın söylediğin şeyi?*

Nehir: *Şimdi şöyle, (yazmaya başlıyor) iki üzeri bir eşittir iki oluyor. 2 üzeri iki eşittir dört oluyor. İki üzeri üç de eee kaç oluyo, iki, dört, sekiz oluyo. İki üzeri dört de kaç oluyo, iki, dört, sekiz, onaltı oluyo. Yani bunların hepsi, eee (aşağıya doğru oklar çiziyor.) Burdan çarpı iki gidiyo, burdan çarpı iki gidiyo, burdan çarpı iki gidiyo. Yani. İki üzeri sıfır da o yüzden 1 oluyo (üst tarafa yazıyor). Çünkü bir çarpı iki (Üstten aşağıya ikiyle çarptığını gösteriyor.)*

A: *Tamam, iki üzeri eksi bir ne olur?*

Nehir: *İki üzeri, şuraya yazıyorum. İki üzeri eksi bir de iki üzeri bir olur. Yok bir üzeri iki olur. (Öğrenci 1/2 yazıyor fakat yazdığı kesri üslû ifade gibi okuyor.)*

Burada Nehir'in üslû ifadelere sistematik yaklaşarak kat örüntüsünü fark ettiği ve negatif kuvvetli üslû ifadelerin değerlerini bulabildiği görülmektedir. Ayrıca Nehir'in bu kesitin sonundaki ifadesinde, elde ettiği kesirli ifadeyi bir üslû ifade gibi okuduğu, bundan da çok emin olmadığı dikkat çekmektedir. Kesirleri okuma ile ilgili farklı bir hataya Murat'ta da rastlanmıştır. Aşağıda Murat'ın kesirlerle çarpma işlemi yaparken yaşadığı kafa karışıklığı ve kesirli ifadeyi hatalı okuma süreçlerini gösteren ifadelerine yer verilmiştir:

A: *2⁻² ne oluyor?*

Murat: *Dört üzeri bir oluyor (dörtte bir demek istiyor ve 1/4 yazıyor.)*

...

Murat: 2 üzeri 4 eşittir 16. 16'yla ikide biri çarpsak.

A: Neye ulaşırsın?

Murat: (16.1/2 işleminde yapılacak çarpma için) Bunla bunu (1) mu çarpcaz, bunla bunu (2) mu çarpcaz?

A: Kesirlerde çarpmada ne yapılıyordu?

Murat: Gizli bir var. (Çizip gösteriyor.)

A: Tamam hangisi hangisiyle çarpılır?

Murat: Bu bunla çarpılıyor. (Pay, payla çarpılır demek istiyor.) 16'da 2. (16/2 demek istiyor, yanlış okuyor.)

A: (Araştırmacı hatalı ifadeyi düzelterek söylüyor.) 16 bölü 2, evet. Bu ne olur?

Murat: Tam olur. 16 bölü 2 değil ki, 2 bölü 16.

A: Alttan mı okuyorsun sen?

Murat: Öyle değil miydi? Tam olan alttaki değil mi? (Bütünü gösteren demek istiyor.)

A: Evet.

Murat: E tamam, tamın üstünde bir de 16 var. Tamın kaç, 8 katı. Bu 8 tam oluyor.

Yukarıdaki ifadelerden de görüldüğü üzere Murat kesirli ifadelerle çarpma işleminde ne yapacağını bilememektedir. Ayrıca kesirli ifadeleri okurken kullandığı iki farklı ifade türü de öğrencinin kesirlere yönelik kavramsal eksikliklerini göstermektedir.

Hande, Murat, Sevda ve Nehir verilen problemin çözümünde üslü ifadelerle çarpma işlemi özelliklerini kullanmamış, sayıların değerlerini bularak çözüme başlamışlardır. Aşağıda Sevda ve Nehir'in bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

Sevda: (2. 1/4. F = tamkare sayı yazıyor.)

A: Tamam, E yerine yazılabilecek farklı sayılar bulabilir misin?

Sevda: Ee, şimdi bu, burası 16 yapıyor. (8. 1/2 ifadesi için)

A: 16 mı yapıyor?

Sevda: Sekiz kere iki onaltı.

A: Sekizle ikiyi mi çarpıyorsun? Yoksa sekizle bir bölü ikiyi mi çarpıyorsun?

Sevda: Önce bunu çarpıp sonra buna bölmüyor muyuz? (8 ile 2'yi çarpıp 1'e bölmekten bahsediyor.)

...

(F için özel durumlar bulmaya çalışırken)

Sevda: *Bir bölü iki. Bir bölü iki çarpı F tamkare sayı. ("1/2. F=tamkare sayı" yazıyor.) Şimdi bunun (F) yerine ne yazabilirim? Üslü ifadeyle bi kesirli ifadeyi nasıl çarpıcam ki? (Düşünüyor.) İki olmuyor zaten. Üç tane yok, 4 tane çeyrek.*

Nehir: *İki üzeri üç, sekiz ediyo. Bunla sekizi çarpsam.*

A: *Tamam, çarpabilirsin.*

Nehir: *(8/1.2/4=16/4 yazıyor) 16 bölü 4.*

A: *Yani?*

Nehir: *Çeyrek ediyor.*

Sevda ve Nehir'in yukarıdaki ifadeleri kesirli ifadelere ve kesirli ifadelerle işlemlere yönelik yaşadıkları zorlukları ortaya koymaktadır. Bu öğrenciler negatif üslü ifadelerin kesirli gösterimini kullandıkları çarpma işlemlerinde ne yapacaklarını bilmemeleri ya da kesirli ifadelerle çarpma işlemi yapmayı unutmaları nedeniyle zorluklar yaşamışlardır. Sevda "Üslü ifadeyle bi kesirli ifadeyi nasıl çarpıcam ki?" sözleriyle yaşadığı kafa karışıklığını ifadelerine de yansıtmıştır. Nehir ise kesirlerle çarpma işlemini doğru olarak sonuçlandırmış ancak ulaştığı değerin ne olduğunun farkında olmadığını sözel ifadelerine yansıtmıştır. Buradan hareketle Sevda ve Nehir'in kesir konusuna yönelik kavramsal düzeyde eksiklikleri söylenebilir.

Murat ve Hande'nin sorudaki koşula uygun bir şekilde E ve F değerleri bulma süreçleri benzer niteliktedir. Hande farklı olarak ulaştığı tamkare ifadelerin kareköklerini alarak ilerlemiş ve fark ettiği bu ilişkiyi bu değerler üzerinden ifade etmiştir. Hande E ve F için sorudaki koşula uygun özel durumlar bulmaya çalışırken negatif kuvvetlerde zorluk yaşamış, negatif kuvvetleri pozitif kuvvetle değiştirmeye çalışmış ve ayrıca kat ve kuvvet terimlerini aynı anlamda kullanmıştır. Hem Murat hem de Hande kesirli ifadelerle çarpma işlemini yaparken zorluklar yaşamışlardır. Hande sorudaki negatif üslü ifadeyi kesir haline dönüştürdükten sonra "Nasıl çarpıyorduk?" sorusuyla çarpma işlemini hatırlamadığını da dile getirmiştir. Aşağıda Hande'nin bu süreçteki yazılı ve sözlü ifadeleri yer almaktadır:

A: *Başka ne yazabilirsin E yerine?*

Hande: *2⁸ yapsam.*

A: Tamam, neye ulaşacaksın sonucunda?

Hande: Tamkareye.

A: Tamam, ulaşacağın sayıya ilişkin bir tahminin var mı?

Hande: (Düşünüyor) Şimdi burada bir şey var illaki, üçünün arasında (yaptığı işlemleri gösteriyor.)

A: Bilmiyorum, belki var belki yok, sen bir şey mi görüyorsun?

Hande: Deneyeyim. (Tam işleme başlayacakken duruyor.) Bi dakika, 4-8-16.

A: Ne oldu?

Hande: İki katı, 32'nin tamkaresi bulunur. (Öğrenci 32'yi 32'yle çarpıyor, 1024'e ulaşıyor.)

A: Gerçekten işlem sonuncunda da bu mu çıkacak?

Hande: (Öğrenci önceden yazdığı 2.2.2.2.2'nin yanına eklemeler yaparak 2^8 'i hesaplıyor.) Bunu, şu 256'yı bir daha 4'le çarpsak. (İşlemi yapıyor, 1024'e ulaşıyor.) Aynı çıktı.

A: Tamam, yazar mısın o durumu da.

Hande: ($4 \cdot 2^8 = 1024$ yazıyor. Daha sonra 1024'ü kök içine alıyor ve 32'ye eşitliyor.) İki katına çıktı. (Öğrenci kökten çıkardığı değerler arasındaki örüntüyü fark etmiş durumda.)

A: İkişer olarak katlanıyor diyorsun, öyle mi?

Hande: Evet.

Şekil 25'te Hande'nin E için özel durumlar aradığı süreçteki yazılı ifadeleri görülmektedir.

olmadığını fark ettikten sonra F değerlerinin kuvvetlerinin tek olacağına yönelik bir ilişki görerek farklı F değerlerine ulaşmışlardır.

Sevda ve Nehir soruyu anlamadan çözüme başlamış, bu süreçte Nehir negatif kuvvetlere yönelik zorluklar yaşamıştır. Her iki öğrenci de soruya birçok kez geri dönmek zorunda kalmış, verilen koşulları ifade etmelerine rağmen bu koşullara dikkat etmemişlerdir. İki öğrenci de E yerine 4'ün ardından 5, 6, 7, 8 tamsayı değerlerini vererek tamkare bir ifadeye ulaşmaya çalışmışlardır. Aşağıda E ve F yerine verilecek değerlerin 2'nin kuvveti olmasının anlaşılması sürecine örnek olarak Sevda ile gerçekleşen diyalog verilmiştir:

A: Tamam, soruyu tekrar okur musun?

(Öğrenci soruya dönüyor, sesli olarak tekrar okuyor.)

A: Ne anladın?

Sevda: İkinin birbirinden farklı tamsayı kuvvetleri... İkinin birbirinden farklı...

A: Yani?

Sevda: İkinin katı mı olmalı?

A: İkinin katı mı diyor?

Sevda: Hayır, ikinin birbirinden farklı tamsayı kuvvetleri.

A: Yani?

Sevda: İkinin çarpanları mı, yooo. 2'nin üslerinin yazılı olduğu bir tablo. (Sorunun giriş kısmını okuyor.)

A: E yerine ne yazmanı bekliyor o halde?

Sevda: Yani 2'nin üzeri bir şey olması lazım. (Öğrenci yazdığı 4'ü silip 2^2 yazıyor.) Yani iki üzeri iki.

A: 4 yerine iki üzeri iki dedin, tamam. Başka ne yazılabilir?

Sevda: Üç üzeri 2.

A: Üç üzeri iki uygun mu?

Sevda: Evet.

A: İkinin kuvveti mi bu?

Sevda: Hayır. (Yazdığını siliyor.)

Diyalogda Sevda'nın E ve F yerine konulacak sayıların ikinin kuvveti olması gerektiğini söylemesinin hemen ardından ikinin kuvveti olmayan bir değeri E ya da F yerine yazacağını söylediği görülmektedir. Sevda ve Nehir ayrıca kesirli ifadelerle

$$\begin{array}{r}
 292 \\
 \times 242 \\
 \hline
 584 \\
 7360 \\
 11680 \\
 \hline
 70664
 \end{array}$$

Şekil 26'dan Nehir'in E için özel durumlar bulma sürecinde belli bir düzen takip etmediği anlaşılmaktadır. Öğrenci kâğıdının sol tarafında uygun E değerlerini yazmış olsa da buraya herhangi bir not düşmemiştir. Nerede, neyi bulmaya çalıştığını gösterir kişisel semboller vs. kullanmadığı için F için özel durumlar bulmaya çalışırken aynı işlemleri tekrar tekrar yapmak zorunda kalmış, bu da çözüm sürecinin gereğinden fazla uzamasına neden olmuştur. Bu düzensizliğinin farkında olan öğrenci, çözüm

sürecinde bu durumu birkaç kez ifadelerine yansıtmıştır. Buna yönelik bir diyalog aşağıda yer almaktadır:

A: Tamam, 2 üzeri 2 yazınca neye ulaştın?

Nehir: Eee, 4, 4'le 4'ü çarpınca 16 ediyordu.

A: 16'ya ulaştın. 2 üzeri 4 yazınca neye ulaştın?

Nehir: Haa 4, 4 de 16 yapıyordu. 16'yla 4'ü çarpınca. Burda nerde bulcam onu şimdi. 16'yla nerde çarpmışım? (Öğrenci işlemlerini çok karışık yaptığı için aradığını hemen bulamıyor.) Bulamadım. Çarpıyım bari (Gülüyor.) 6 kere 4, 24, 2-8 şey 4. 64, bu da 8. (8'in karesi demek istiyor.) Nerde yazmışım 64'ü?

A: 64'e ulaştın.

Nehir: Evet, o da tamkare.

A: Tamam, 2 üzeri 6 yazınca nereye ulaştın?

Nehir: 64, 4'le çarpınca onu bi daha hiç çarpmam. (Nerede çarptığını arıyor, araştırmacı gösteriyor.) Hah buradaymış. 256.

A: 256'ya ulaştın.

Nehir: O da bişeyin tamkaresiydi..

A: 2 üzeri 8 yazınca neye ulaştın?

Nehir: 2 üzeri 8'de nerde bakıyım, şu mu? (2'nin kuvvetlerini listeleyerek yazdığı bölümde 2 üzeri 8'i arıyor.) Şu, 256'yla 4'ü çarpınca, nerde çarptım? (Arıyor.) 256'yla 4'ü çarpınca 1024 buldum.

Buradan da görüldüğü gibi Nehir birçok işlem hatası yaparak tamkare olup olmadığını bulduğu sayıları notlar almadan düzensiz bir şekilde yazdığı için bu sayılara tekrar ihtiyaç duyduğunda kâğıt üzerinde arayarak yine zaman kaybetmiştir. Yazılı ifadelerinde aradığı işlemi bulamadığı için aynı işlemi tekrar yapmak zorunda kaldığı durumlar da olmuştur.

Sonuç olarak araştırmaya katılan tüm öğrenciler E ve F için sorudaki koşula uygun olacak şekilde farklı özel durumlar bulabilmişlerdir.

3.3.2. Varsayımda Bulunma Sürecine İlişkin Bulgular

Araştırmaya katılan öğrencilerin tamamı verilen üslü ifade sorusundaki E ve F yerine konulabilecek birden fazla özel durum tespit edebilmişlerdir. Öğrencilerin üslü ifade sorusunu çözerken buldukları E değerleri, F değerleri ve ulaştıkları tamkare

ifadeleri inceleyerek ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların gelişimi süreci bu kısımda yer almaktadır.

Sorunun çözümünü üslü ifadelerle çarpma işlemi özelliklerini kullanan Barış, Melek, Tuğçe ve Uğur'un varsayımda bulunma süreci diğer öğrencilere göre daha kısa bir sürede gerçekleşmiştir. Barış ve Tuğçe elde ettikleri E değerlerinden hareketle E'nin 2^2 ile çarpıldığını söyleyerek sorudaki ilk varsayımlarını ifade etmişlerdir. Barış daha sonra varsayımını "*E değerlerinin kuvvetleri 2'nin katı olacak*" şeklinde güncellemiştir. Melek ise farklı E değerleri bulduktan sonra E'nin 4'le çarpılarak ilerlediğini ifade etmiştir. Barış F değerleri bulmaya çalışırken önce E için bulunduğu 2'nin çift kuvveti olması gerektiğine yönelik varsayımına yönelik denemeler yapmış, bu denemelerden herhangi bir sonuç elde edemeyince F değerlerinin de E gibi 2^2 ile çarpıldığını ifade etmiştir. Melek ise birkaç özel durum denemesinin ardından E değerlerinin 2'nin çift kuvveti; F değerlerinin ise 2'nin tek kuvveti olması gerektiğini ifade etmiştir. Hem Barış hem de Melek ulaştıkları tamkare değerlerle ilgili olarak 4'le çarpılarak katlandığını ifade etmişlerdir. Barış ulaştığı tamkare sayılarla ilgili bu varsayımını "*üsler 2 ile toplanıp artıyor*" şeklinde daha farklı bir şekilde de ifade etmiş; Melek ise tamkare sayıların da 2'nin çift kuvveti olduğunu belirterek varsayımını güncellemiştir. Aşağıda Melek'in varsayımda bulunma sürecinden bir kesite yer verilmiştir:

A: *Peki yazdığın bu sayıları incelediğinde bir ilişki kural ya da ortak bir özellik fark edebildin mi?*

Melek: *(Düşünüyor.) E, 4'ün katı. (4'le çarpıldığını söylemeye çalışıyor.)*

A: *Hangileri dördün katı?*

Melek: *Hepsi 1, 4, 2 de dördün katı. Hayır değil...*

A: *2'de ulaşamadığını söylemiştin zaten.*

Melek: *Evet, 1 – 4 – 16 – 64. Dördün katı.*

A: *Bir sonraki için ne diyebilirsin mesela?*

Melek: *İl. 64'le 4'ü çarparsak. (İşlemi yapıyor.) 256 olur.*

A: *Peki tamkare midir?*

Melek: *İl. Değil. Tamkare mi? Tamkare.. Tamkare.. (Bir süre sessiz kalıyor.)*

A: *Peki şu anda E'ye şunu yazarsam tamkare bir sayıya ulaşabilirim diyeceğin bir ilişki gördün mü?*

Melek: (Öğrenci bir süre düşünüyor.) Eee. Şey. (Yine düşünüyor) Çift bi kuvvetle çarparsak tamkare bi sayıya ulaşıyoruz.

Diyalogda Melek'in E değerinin 2'nin çift kuvveti olması gerektiğine yönelik ifadeleri görülmektedir. Tuğçe ise bulduğu E değerleri üzerinden ulaştığı tamkare sayıların 2'nin çift kuvveti şeklinde olacağı varsayımında bulunmuştur. Diğer öğrencilerden oldukça farklı bir çözüm süreci olan Tuğçe'nin ifadelerine aşağıda verilmiştir:

A: Mesela bana tamkare olacak bir sayı söyleyebilir misin?

Tuğçe: 2^{12} rakamını verebilirim. 2^{14} olabilir.

A: Neye dayanarak söylüyorsun?

Tuğçe: Sürekli burda 2^2 ile çarpılıyor çünkü.

A: Mesela 2^{30} tamkare midir?

Tuğçe: 2^{30} evet tamkaredir.

A: Neyin karesidir?

Tuğçe: 2^{30} . İuu. 2^{12} 'de mesela 64'ün oluyo. Böyle yazarak gitsem olur mu?

A: Olur.

Tuğçe: (Öğrenci sadece ulaştığı tamkare ifadeleri devam ettiriyor.) 2^{12} 'de 64 oluyor. 2^{14} 'te o zaman 128 olur. 2^{16} 'da 256, 2^{18} 'de 512 oluyor. 2^{20} 'de 1024, 2^{22} 'de 2056 oluyor.

A: Tek tek bakacak mısın?

Tuğçe: Ya aslında... Hepsi 2'nin tamsayı kuvvetleri aslında. (Gülüyor.)

A: Ben sana 2^{50} 'yi sorsaydım ne yapacaktın?

Tuğçe: O kadar gidemezdim. O zaman, 2^{30} 'un farklı sayılar değerinden yapabilir miyim?

A: Deneyebilirsin.

Tuğçe: 2^{30} , 4^{15} 'e eşit oluyor. Başka 16'ya gidemiyorum. 7,5 oluyo o zaman. (Kuvvetleri çarpanlarına ayırarak parçalıyor.) Başkaaa. 8'e gidebilirim. 8^{10} olur.

A: Tamam, nerden çıkardın bunu?

Tuğçe: 2'nin. Ayırım yapıyorum aslında. Üsler üst üste yazıldığında mesela böyle yazarsam, $((2^2)^*)$ yazıp siliyor.) pardon. Şöyle yazarsam $[(2^2)^2]$ bu üsler

çarpılıyor. (Araya çarpı koyuyor.) Bunları (Üstte yazdığı 2^{30} 'u gösteriyor), bunları ben bölüyorum.

...

A: Mesela 2^{30} neyin karesidir dediğimde?

Tuğçe: Tam olarak bilmiyorum aslında. (Bir süre sessiz kalıyor.)

A: Sen burada 2^{30} 'u 4'ün 15. kuvveti olarak yazdın.

Tuğçe: Evet, 8'in ise 10. Kuvveti.

A: Peki herhangi bir sayının karesi olarak yazabilir misin?

Tuğçe: O zaman daha da fazla bölü.. İki. 2^{15} 'in karesi oluyor aslında. (4^{15} 'i gösterip söylüyor.)

A: Peki diğerlerinde de benzer bir durum olabilir mi? 2^{10} neyin karesidir?

Tuğçe: 2^{10} , 32'nin karesiydi. Yani 2^5 'in karesi.

Diyalogda da görüldüğü üzere Tuğçe ulaştığı tamkare (2 'nin çift kuvveti) değerleri “*üssün üssü*” özelliğini kullanarak farklı şekillerde yazabilmiş ve buradan hareketle 2 'nin çift kuvveti olan herhangi bir sayının hangi sayının karesi olduğunu da hızlı bir şekilde belirleyebilmiştir. Bu şekildeki yaklaşımın F değerlerini bulmada Tuğçe'ye pratiklik kazandırdığı anlaşılmaktadır. Tuğçe haricindeki öğrenciler tamkare sayılar için “*2'nin çift kuvveti olduğu*” ya da “*4 ile çarpılarak gittiği*” şeklinde ifadeler kullanmış olsalar da buldukları ifadenin neyin karesi olacağına ilişkin varsayımlarını genişletememişlerdir. Bu süreçteki keşfiyle birlikte Tuğçe, herhangi bir çift kuvvetli ifadenin neyin karesi olduğunu kolaylıkla bulabileceği bir varsayıma ulaşabilmiştir.

Uğur, E için farklı özel durumlar tespit ettikten sonra bu değerlerin çift kuvvetli olması gerektiğini ifade etmiştir. Sonrasında tamkare değerleri üslü olarak da yazmış olmasına rağmen sadece tamkare sayıların 4'er 4'er katlandığını ifade etmiştir. F için özel durumlar bulmaya çalışırken öncelikle tamkare sayılarla ilgili varsayımının burada da geçerli olduğunu ifade etmiş ve ardından F değerlerinin tek kuvvetli olması gerektiğini dile getirmiştir. Aşağıda Uğur'un bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

(F için 2^5 değerini deneyip tamkare olarak 2^4 değerine ulaştıktan sonra)

A: 2 üzeri 4 tamkare midir?

Uğur: Evet, tamkaredir. (E için yaptığı işlemlere de bir göz atıyor.)

A: Sanki diğer işlemlere de bir baktın.

Uğur: Evet.

A: Bir ilişki mi gördün aralarında? Ne düşündün?

Uğur: Evet. Ee, yine aralarında 4 kat oluyor (tamkareleri kastediyor) ama üsler [F için] tek olması gerekiyor.

...

A: Peki tamkareler için ne dersin? 4 kat şeklinde ilerlediğini söyledin zaten, başka bir ilişki söyleyebilir misin? Ya da F yerine başka bir sayı yazabilir misin?

Uğur: (Öğrenci işlemlerine devam ediyor, $2^{-1} \cdot 2^7 = 2^6$ yazıyor.) Tamkaredir.

A: Peki bir sonraki tamkare ne olur?

Uğur: 2 üzeri 8 olur.

A: Sonraki?

Uğur: 2 üzeri 10, iki iki artıyor. Üsler.

Yukarıdaki diyalogdan da görüldüğü üzere Uğur E için özel durumlar oluşturduktan sonra sezgisel olarak F için yeni özel durumlar oluşturabilmiştir. Bu süreçte gördüğü ilişkileri sözel olarak ifade etmiştir. Ancak bu varsayımlarının her zaman geçerli olduğunu araştırmaya katılan tüm öğrenciler gibi sadece sözel olarak ifade etmekle yetinmiş; ayrıca bir doğrulama çabasına girmemiştir. Murat, Hande, Sevda ve Nehir üslü ifade sorusu için E ve F değerleri bulmaya çalışırken üslü ifadeleri tamsayı ya da rasyonel sayıya dönüştürdükleri için ulaştıkları tamkare sayıları da hep tamsayı olarak ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler E için özel durumlar arayışındayken 2'nin ikinci kuvvetinden başlayıp birer birer artırarak farklı kuvvetleri denemiş ve ardından E değerlerinin 2'nin çift kuvveti olduğu varsayımına ulaşmışlardır. Bu varsayımı F için değerleri bulmaya çalışırken de denemişler ve olmadığını gördükten sonra F değerlerinin ikinin tek kuvveti olduğunu ifade etmişlerdir. Murat, Hande, Sevda ve Nehir ulaştıkları tamkare sayıları incelemelerinin ardından tamkare sayılarla ilgili olarak “Dörtle çarpılarak gidiyor” şeklinde söylemde bulunmuşlardır. Murat ise çözümünün sonlarına doğru ulaştığı tamkare değerlerin ikinin kuvvetleri olduğunu fark etmiş, bu sayıları üslü olarak ifade ederek tamkare sayıların kuvvetlerinin de ikişer ikişer arttığını ifade etmiştir. Hande E ve F için farklı özel durumlar tespit ettikten sonra diğer öğrenciler gibi E'nin 2'nin çift kuvveti; F'nin de 2'nin tek kuvveti olması gerektiğini fark etmiştir. Ancak Hande bu değerler aracılığıyla ulaştığı tamkare sayıları kullanmamış, bu sayıların kareköklerini almış ve bu değerler üzerinden tamkare

sayıların karekök değerleri için “ikiyle katlanarak gidiyor” şeklinde varsayımda bulunmuştur. Araştırmaya katılan öğrencilerin tamamı ulaştıkları varsayımlar için bulmuş oldukları özel durumları yeterli görmüş ve tekrar deneme yapma ihtiyacı duymamıştır. Aşağıda Murat’ın varsayımda bulunma sürecinden bir diyaloga yer verilmiştir:

(Ulaştığı tamkare değerlerin 4’le çarpılarak ilerlediğini fark ettikten sonra)

Murat: Hep 4’le çarpcam. 64 kere 4, 256 mı yapar, evet.

A: Bir sonraki?

Murat: 256 çarpı 4, 1024. 1024 çarpı 4...

A: Ulaştığın tamkare sayılarla ilgili bir kural gördün, bu kuralı bana ifade eder misin?

Murat: Ne ilişkisi gördüm. Üsleri bunun (F) tek olacak, bunun E çift olacak. Bunlar da hep 4’ün katı (tamkare sayılar). 2’nin katı.

A: Katı mı?

Murat: Kuvveti. 2’nin kuvveti olurmular?

A: Bilmem, deneyebilirsiniz.

Murat: 2 üzeri 6 eşittir 64, olur.

A: Yani sen 64’e 2 üzeri 6 mı diyeceksin?

Murat: Evet. (Yazıyor.)

A: 16 nedir?

Murat: Üç, sekiz. 2 üzeri 4, 2 üzeri 8 bu da, bu da 2 üzeri 10.

A: O zaman tamkare sayılarla ilgili bir kural mı var?

Murat: Ortak bir şey. 2 katı oluyor.

A: İki katı derken?

Murat: 2 katı olmuyor, artı iki oluyor.

A: Ney artı iki oluyor?

Murat: Şimdi bu 4 ya (2 üzeri 4’ün 4’ü) buna artı 2 eklersek 6 oluyor.

A: Üsler ikişer ikişer artıyor mu diyorsun?

Murat: Evet.

A: Tüm durumlarda geçerli midir?

Murat: Evet.

A: Kontrol eder misin?

Murat: 1024 oluyor, denedik o kadar.

Yukarıdan da görüldüğü üzere Murat E ve F değerleri için nasıl kuvvetlerin gerektiğini fark etmiş ve tamkare değerleri farklı şekillerde ifade edebileceğini fark ettikten sonra varsayımını değiştirebilmiştir. Bu süreç içerisinde Murat'ın kat ve kuvvet terim bilgisinde eksiklikler de görülmektedir.

Ulaşılan tamkare sayıların üslü ifadelerle dönüştürülmesi haricinde Hande ve Sevda da Murat'a benzer bir varsayımda bulunma süreci yaşamıştır. Ancak Hande ve Sevda ulaştıkları tamkare sayıları farklı şekillerde ifade etmediklerinden tamkare sayılara ilişkin varsayımlarını “*dörder dörder katlanıyor*” ifadesinden öteye götürememişlerdir. Nehir ise E ve F'nin farklı değerleri için ulaştığı tamkare sayıların birebir eşleştiğini görememiş, bu değerleri düzenli bir şekilde de yazmadığı için bu sayılar arasındaki ilişkileri de inceleyememiştir.

Öğrencilerin sayılar ve işlemler öğrenme alanına yönelik olarak sorulan üslü ifadeler sorusunda buldukları özel durumları incelemelerinin ardından ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların ifade edilme sıklıkları Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. Üslü ifadeler sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları

Varsayımlar	f
E değerlerinin kuvvetleri 2'nin katı/çift olmalı	8
F değerleri 2'nin tek kuvveti olmalı	7
Tamkare değerleri 4 ile çarpılarak ilerliyor.	7
Tamkare değerler ikinin çift kuvveti olmalı	3
Tamkare değerlerde üsler ikişer artıyor.	3
F değerleri 4'le çarpılarak ilerliyor.	1
E değerleri 4'le çarpılarak ilerliyor.	1
Tamkare değerlerin karekökleri 2 ile çarpılarak ilerliyor.	1

Sonuç olarak tüm öğrenciler, kendilerine yöneltilen üslü ifadeler sorusunda buldukları özel durumlardan yola çıkarak varsayımlara ulaşabilmişlerdir.

3.3.3. Genelleme Sürecine İlişkin Bulgular

Bu kısımda öğrencilerin üslü ifade sorusunu çözerken genellemeye ulaşma süreçlerine yer verilecektir.

Melek ve Tuğçe özel durumlar üzerinde çalışmaları sonrasında hem E'nin hem de F'nin bulunduğu sütunda ulaştıkları tamkare ifadelerin çift kuvvet olması gerektiğini sözel olarak belirtmiş ve doğru bir varsayımda bulunmuşlardır. Sonrasında

araştırmacı tarafından öğrencilerden varsayımlarını daha genel ifade etmeleri talep edildiğinde, üslü ifade sorusu için genel ifadeye ulaşabilen bu iki öğrencinin sözel ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Ulaştığın bu tamkare pozitif sayılar için herhangi bir ortak özellik söyleyebilir misin?

Melek: İu. Çift olması gerekiyor, tek sayılarla olmuyor.

A: Çift olması gereken ne?

Melek: Üsler.

A: Bu bahsettiğin üslerin çift olması tüm durumlar için geçerli olduğunu mu söylüyorsun?

Melek: Evet.

A: Peki bu bahsettiğin özelliği daha genel bir biçimde ifade edebilir misin? Yani harfli ifadeleri kullanarak.

Melek: (Bir süre düşünüyor) Kafam karıştı. Şimdi... (Yine düşünüyor.) (Kısa bir sessizliğin ardından) İki üzeri x. İu. Tamkare olur ama eğer x çift sayıysa. ("2^x=tamkare" yazıyor.)

A: X'in yerine çift sayı olması için ne diyebilirsin mesela?

Melek: (Öğrenci düşünüyor ve ikinin üssü olarak yazdığı x'in yanına 2 yazıyor. (Bkz. Şekil 27.)

Handwritten mathematical expressions on a piece of paper:

$$\begin{aligned} 2^0 &= 1 \\ 2^2 &= 4 \\ 2^4 &= 16 \\ 2^6 &= 64 \\ 2^8 &= 256 \\ 2^{10} &= 1024 \end{aligned}$$

To the right of these, the general formula is written:

$$2^x = \text{tamkare}$$

Şekil 27. Melek'in üslü ifade sorusunda tamkare sayılar için ulaştığı genel ifade.

A: Şu anda oldu mu?

Melek: Evet.

Melek'in varsayımını genel ifadeye dönüştürmesi kısa bir düşünme süreci sonrasında gerçekleşmiştir. Öğrencinin ulaştığı genel ifade de Şekil 27'de görülmektedir. Melek'in bu süreçte çok fazla zorluk yaşamadığı sözel ifadelerinden anlaşılmaktadır.

Varsayımını genel bir ifadeye dönüştürebilen diğer bir öğrenci olan Tuğçe'nin bu süreçteki ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

(Tuğçe, E'deki ilişkileri inceledikten hemen sonra)

Tuğçe: Nasıl bir şey gördüm. Bunları birbirine dönüştürebiliyorum. (Tamkarelerdeki 16 ve 256'yı gösteriyor) Burda da mesela 16'nın karesi oluyor bu da.

A: Anladım, peki genel bir ifade söyleyebilir misin?

Tuğçe: Genel ifade, sayılar, yani harflerle mi yapayım?

A: Evet, harfli ifadeyi kullanabilir misin?

Tuğçe: Mesela, 2^8 için x^y , 2^{16} için $[(x^y)^2]$ yazıyor.). X üzeri y 'nin 2. kuvvetini kullanırım.

...

(Tuğçe, F için özel durumlar bulmasının ardından)

Tuğçe: Evet, bu ikisinin (üslerin) toplamı tamkare bir sayıya eşit olması gerekiyor. İkisinin karesine (Öğrenci çift kuvvet demek istiyor, hatalı ifade ediyor.)

A: Tamkare olması için nasıl olması gerekiyor kuvvetin?

Tuğçe: Kuvvetin çift bi sayı olması lazım.

A: Peki bu söylediğin ifadeyi harfli ifadelerle nasıl anlatırsın?

Tuğçe: Harfli ifadeyle... (Kısa bir süre düşünüyor.) Mesela 2 yerine farklı bir şey mi koyayım?

A: Nasıl düşünüyorsan. Kuvvetin çift olması gerektiğini söyledin.

Tuğçe: Kuvvet kesinlikle çift olacak. O zaman eee, $2x$ diyebilirim kuvvet için (Yazarak ilerliyor.)

A: Kuvvete $2x$ diyebilirim diyorsun. Taban farklı olabilir mi?

Tuğçe: Olabilir, tabana y diyebilirim (y^{2x} yazıyor. Bkz. Şekil 28.)

$$2^x$$

$$y$$

$$\frac{1}{2}; 2^{-1} = 2^{-1} \cdot 2^{-1} = 2^{-2}$$

$$2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2$$

$$2^{-1} \cdot 2^7 = 2^6$$

$$2^{-1} \cdot 2^{11} = 2^{10}$$

Şekil 28. Tuğçe'nin üslü ifade sorusunda tamkare sayılarla ilgili olarak ulaştığı genel ifade.

A: Böyle bir sayı kesinlikle tamkaredir diyebilir misin?

Tuğçe: Evet, her zaman geçerlidir.

Tuğçe'nin yazılı ve sözlü ifadeleri incelendiğinde, Tuğçe'nin E için özel durumlar bulmasının ardından üslü olarak ifade ettiği tamkare ifadelerin kuvvetlerini çarpanlarına ayırma yolunu seçtiği görülmektedir. Ancak başlangıçtaki ifadelerinde x ve y değerlerini bilinen bir sayı için kullandığı görülmektedir. Tuğçe'nin verilen diyalogun son kısmında dile getirdiği ve Şekil 28'de de görülen yazılı ifadelerinde kullandığı x ve y sembollerini değişken olarak kullandığı ise açıktır. Öğrenci 2 tabanından yola çıkarak ulaştığı kuvveti çift olan sayıların tamkare olması gerektiği yönündeki varsayımını, tüm sayıların çift kuvvetlerinin tamkare olacağı şeklinde genişletebilmiştir. (Öğrenciler tüm sayılar derken tamsayıları kastetmektedirler.) Yazılı ve sözlü ifadelerinden de görüldüğü üzere Tuğçe üslü ifadeler sorusunda fazla zorluk yaşamadan genellemeye ulaşmayı başarmıştır.

Barış, Uğur ve Hande'nin üslü ifade sorusu için genellemeye ulaşma süreçlerindeki benzerlikler dikkat çekmektedir. Barış ve Uğur ulaştıkları tamkare ifadeleri hem tamsayı hem üslü ifade olarak yazmışlardır. Hande ise ulaştığı tamkare ifadeleri sadece tamsayı olarak ifade etmiştir. Barış ulaştığı tamkare ifadelerin üslü gösterimleri üzerinden ilk varsayımını “Üsler 2 ile toplanıp gidiyor” şeklinde ifade etse de genellemeye çalıştığı varsayımı Hande ve Uğur gibi “hep dörder katlanıyor” ifadesi olmuştur. Aşağıda Barış'ın varsayımlarını genellemeye dönüştürme sürecinin bir kesitine yer verilmiştir:

(F için özel durumlar bulmasından hemen sonrası)

Bariş: Kuvvetlerde 3 var, 5 var, 7 var. Bi sonrakinde 9 var. Her zaman 2 artarak gidiyor kuvvetler.

A: Cebirsel ifadeleri kullanarak bir şey diyebilir misin?

Bariş: 2^1 'e x dersek, 2^3 'e $4x$, 2^5 'e $16x$, 2^7 'ye $64x$ diyebilirim. Bunları diyebiliriz.

...

(Tamkare sayılarla ilgili varsayım üzerinden görüşme devam ediyor.)

Bariş: 4'le çarpılarak gidiyor.

A: Peki bu ilişkiyi cebirsel ifadeleri kullanarak ifade edebilir misin?

Bariş: O zaman 1'e x desek, 4'e $4x$ desek, 16'ya $16x$ desek, 64'e de $64x$... Genel bir kural çıkmadı.

...

A: Bir sonraki sayıyı neye göre veriyorsun? (Tamkare sayılar için)

Bariş: 2^{12}

A: Neden 2^{11} vermiyorsun da 2^{12} veriyorsun?

Bariş: Çünkü her seferinde ikişer artıyor. Arada [kuvveti] tek sayı olmuyor.

A: Genel bir ifadeye varamıyor musun?

Bariş: Hayır.

Bariş'in ifadeleri öğrencinin genel ifadeye ulaşırken değişkeni nerede kullanması gerektiğini bilmediğini göstermektedir. Öğrenci x değerini bilinen bir sayı yerinde kullanmış ve farklı değerler için uygun olmadığını fark edememiştir. Bariş üslü ifade sorusunda uygun varsayımlarda bulunmuş olmakla birlikte varsayımını genel bir ifadeye dönüştürememiştir.

Uğur ve Hande de Bariş gibi tamkare ifadeler için “dörder dörder katlanıyor” ifadesini söylemişlerdir. Bu varsayımın üzerinden sıradaki ulaşacakları tamkare sayıları bulsalar da genel bir ifadeye ulaşamamışlardır. Bu süreçte örnek olarak Hande'nin ifadeleri aşağıda verilmiştir:

A: Tamam, hep dörtle çarpılarak gittiğini söylüyorsun, bu ilişkiyi başka türlü ifade edebilir misin?

Hande: Harfle mi?

A: Harfle de olabilir, başka türlü de olabilir. Bu sayıları incelersen belki başka bir şey görebilirsin.

Hande: Hepsi dörtle çarpılıyor. İkiyle de çarpılıyor.

A: *Peki bu ilişkiyi harfleri kullanarak ifade edebilir misin?*

Hande: *(Sessizlik)*

A: *Denemek ister misin?*

Hande: *Dört çarpı bişe bişe.*

A: *Mesela bu örüntünün 10. adımında ne olacak?*

Hande: *Dokuzuncu adımı dörtle çarpcaz.*

A: *15.adım için de 14. adımı mı bulacaksın?*

Hande: *(Kafa sallıyor.)*

A: *Başka bir şey görebiliyor musun?*

Hande: *İı (Hayır.)*

A: *Harfli ifade de kullanamıyorsun.*

Hande: *Evet.*

Hande'nin fark ettiği ilişkiyi genel ifadeye dönüştürürken “*dört çarpı bişe bişe*” ifadesini kullandığı diyalogda görülmektedir. Ancak öğrenci bu durumu herhangi bir yazılı ifadeye dönüştürememiştir. Uğur da benzer bir ifadeyle Hande'den farklı olarak “*a.4*” olarak belirtmiştir. “*a yerine 3 yazarsan uygun olur mu?*” sorusu kendisine yöneltildiğinde ise uygun olmadığını ifade etmiştir. Uğur'un bu ifadesinden başka genel ifade yazma girişimi olmamıştır. Hande ve Uğur üslû ifade sorusu için varsayımlarını genel bir ifadeye dönüştürememişlerdir.

Murat ulaştığı tamkare ifadelerle ilgili varsayımını daha önce bulduğu tamkare sayıyı “*Hep dörtle çarpcam*” şeklinde ifade etmiştir. Buradan hareketle varsayımına ilişkin birkaç deneme sonrasında yazdığı tamkare ifadeleri ikinin kuvvetleri şeklinde yazabileceğini fark edip varsayımını “*Tamkare sayıların kuvvetleri ikinin katı olmalı*” şeklinde güncellemiştir. Ancak Murat'ın harfli ifadeleri kullanarak varsayımını genel ifadeye dönüştürmeye yönelik herhangi bir yazılı girişimi olmamıştır. Murat'ın tamkare sayılarla ilgili ifadelerine, varsayımda bulunma sürecine ilişkin bulgular bölümünde yer verilmişti. Bu sürecin devamındaki ifadeleri ise aşağıdaki gibidir:

A: *Sen ulaştığın tamkare sayılar için dörder dörder katlanıyor dedin. Sonra 2'nin kuvvetlerine gittin. 2'nin kuvvetleri ikişer ikişer artıyor dedin.*

Murat: *Belki 3'le de olur.*

A: *Deneyebilirsin.*

Murat: *3 kere 2, 9 (3^2 yazıyor, hatalı okuyor.) 3 kere 3 (3^3), 27 yapmıyo mu?*

A: Tamkare mi?

Murat: Hayır, bunlar olmuyor. (Düşünüyor bir süre) 3 üzeri 4, 81. 81 oluyor mu, evet.

A: Ne gördün?

Murat: X üzeri çift olacak.

A: Humm..

Murat: Çift mi olacak. Evet.

A: Deneyebilirsin.

(Öğrenci farklı tabanlarla birkaç deneme yapıyor. Tabanı 4 yaptığında ulaştığı her sayının tamkare olduğunu fark ettikten sonrası)

Murat: 4'ü deneyelim. 4, 16. 4 kere 3 (4^3 'ü bu şekilde okuyor.) 64. 64 de kare ama, 16 da. Tamkare değil mi, evet. Ama çok karışık bir düzenek bu. 64'te 4 256. (64 kere 4 demek istiyor.) 256 da tamkare.

A: 4'ün kuvvetleri hep tamkare mi gidiyor o zaman?

Murat: Evet.

A: Tamam. Ama 3'ün kuvvetleri hep tamkare gitmedi.

Murat: O tekte oluyor, tekte mi, çiftte oluyor?

A: Ama çiftte 6'da olmadı.

Murat: 6 üzeri 2, 36 ediyor.

A: 6 üzeri 3 olmadı.

Murat: 6 üzeri 4, 1296.

A: O tamkare mi?

Murat: Tamkaredir illaki.

A: Sen bu işe başlamadan önce kuvvet çift olacak demiştin.

Murat: Evet, o zaman 4 olacak, o da çift. O da olur o zaman.

A: Çift kuvvette oldu ama 4'te farklı bir durum mu var o zaman?

Murat: 4'te farklı bir durum var. 4 hepsi tamkare.

A: Burda da hepsi 4'ün kuvveti midir o zaman? (Ulaşılan sayıları gösteriyor.)

Murat: Evet.

A: Tamam, ama 3'ün kuvvetlerinin hepsi tamkare mi?

Murat: Hayır.

A: Hangileri tamkare?

Murat: 9-81. Bu da çift kuvvetler.

A: 6'nın?

Murat: 6 da çifttir.

A: Ama buna bakmadın, bu neyin karesidir söyleyemedin (1296 için). Genel bir ifade söyleyebilir misin?

Murat: Yok.

Buradan da görüldüğü üzere Murat varsayımını farklı tamsayıların kuvvetleri için de genişletmiş, denemiş ve buradan hareketle farklı varsayımlara da ulaşmıştır. Ancak bu varsayımlarını doğrulamak için yeterli girişimde bulunmadığı gibi ulaştığı “tamkare sayılar çift kuvvetli olmalı” varsayımını da genel bir ifadeye dönüştürememiştir.

Sevda ve Nehir üslû ifade sorusunda yaptıkları denemelerin ardından ulaştıkları tamkare ifadelerin aynı olduğunu fark edememişlerdir. Bu durumun bir nedeni öğrencilerin sorunun çözümünü yaptıkları kâğıtta belirli bir düzen takip etmemeleri olabilir. Sevda E için denemeler yaparken ulaştığı tamkareler için “Tamkareler birbirinin dört katı” ifadesini dile getirmiş, ardından F için de “Burda da aynı” ifadesini söylemiştir. Nehir ise tamkare sayılarla ilgili herhangi bir varsayımda bulunamamıştır. İki öğrenci de sadece E değerleri için “İkinin çift kuvveti olmalı” varsayımlarını genel ifadeye dönüştürmeyi başarmışlardır. Ancak F için genel bir ifadeye ulaşamamışlardır. Sevda tamkare sayılarla ilgili “Dörder dörder katlanıyor” ifadesini genel ifadeye dönüştürmek için çaba sarf etmiştir. Sevda’nın bu sürecine aşağıda yer verilmiştir:

(Tamkare sayıların birbirinin dört katı olduğunu ifade ettikten sonrası)

Sevda: 16 ama 16 çarpı 4'ten de 64'e ulaştım. 2 üzeri 6, 64 çarpı 4'ten 256.

Bu da birbirinin, bu da dört katı. (Tamkareler)

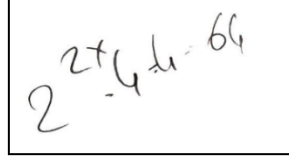
A: Bu her durumda geçerli midir?

Sevda: 2 üzeri 8'e de bakalım. Eee. 256 çarpı 4'ten 1024 oluyor. E burda da öyle.

A: Hep 4 kat diyorsun. Peki o zaman bu ilişkiyi farklı bir şekilde ifade edebilir misin? Daha genel bir şekilde ifade edebilir misin?

Sevda: İu.. (Düşünüyor) İki üz... Mesela. İki üzeri 2x çarpı 4. (Bkz. Şekil 29.)

Şimdi. 2 üzeri 2x çarpı 4, eee... Çarpı dört. Bi tane tamkare mi oluyor?



Şekil 29. Sevda'nın tamkare sayılarla ilgili genelleme sürecindeki yazılı ifadesi.

A: Çarpı 4 derken.?

Sevda: Yani çarpı.. Şimdi.. 2 üzeri 2 üzerinden gitsek. 2 üzeri 2 çarpı 4 kaç yapıyo, 16 yapıyo. 16 çarpı 4 de 64 yapıyo. Yani evet.

A: Yine 4'le çarpılarak gidiyor diyorsun.

Sevda: Evet.

A: Peki buradaki çarpı 4'ü üssün yanına mı yazdın yoksa üslü ifadenin yanına mı?

Sevda: 2 üzeri 2x, 4 ile çarpılıyor. Yani 4 çarpı. Hayır, 2 üzeri 2x, hayır, yoo, bilmiyorum. (Yazdığını siliyor.)

A: Başka bir şey diyebilir misin?

Sevda: Hayır.

Sevda'nın sözel ve yazılı ifadeleri birlikte incelendiğinde öğrencinin uygun bir genel ifadeye ulaşamadığı anlaşılmaktadır. Sevda ve Nehir sadece E için genel bir ifade belirtebilmiş ancak sorudaki asıl hedef olan tamkare sayılarla ilgili genel bir ifadeye ulaşamamışlardır.

Kısacası, öğrenciler soruyu anladıklarını belirttikten sonra sorudaki koşullara uygun olacak şekilde farklı E ve F değerleri bulmaya çalışmışlardır. Bu süreçte dört öğrenci üslü ifadeleri kullanarak, diğer öğrenciler ise üslü ifadeleri tamsayı ya da rasyonel sayıya çevirerek çarpma işlemleri yapmıştır. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler üslü ifade sorusunda E ve F yerine yazılabilecek birbirinden farklı özel durumlar oluşturmuş ve oluşturdukları bu özel durumlar içindeki ilişkileri araştırarak varsayımlarda bulunabilmişlerdir. Genellemeye ulaşma sürecinde ise öğrencilerin çoğunluğu (6 kişi) zorluklar yaşamış ve genel bir ifadeye ulaşmayı başaramamıştır. Sadece iki öğrenci rahat bir şekilde tamkare sayılarla ilgili genel bir ifadeye ulaşabilmiştir. Bazı öğrenciler ulaştıkları tamkare sayılarla ilgili varsayımlarını genel ifadeye dönüştürmek için girişimde bulunmuşlar ancak başarılı olamamış; iki öğrenci ise tamkare sayılarla ilgili doğru olan varsayımlarını genel bir ifadeye dönüştürmek

için hiçbir yazılı girişimde bulunmamışlardır. İki öğrenci sadece sorudaki koşula uygun olacak şekilde buldukları E değerleri için genel bir ifadeye ulaşabilmişlerdir.

3.4. Cebir Sorusuna İlişkin Bulgular

3.4.1. Özel Durumlar Üzerinde Çalışma Sürecine İlişkin Bulgular

Bütün öğrenciler cebir öğrenme alanına yönelik olan kurs ücreti karşılaştırma problemini anladıklarını ifade etmişlerdir. Barış ve Murat başlangıçta kayıt ücretinin her ay ödeneceğini düşünmesine rağmen soruyu tekrar inceledikten sonra bu hatalarını düzeltmişlerdir. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler her iki kursa devam edilecek ilk dört aylık süre için ödenecek tutarları kolaylıkla bulabilmişlerdir. Aşağıda Barış'ın ilk dört aylık süreçte kurslara ödenecek tutarlara ulaşma sürecine yönelik gözlem ve diyaloga yer verilmiştir:

A: *Kursların her biri için 1, 2, 3 ve 4 aylık ödeme miktarlarını hesaplayabilir misin?*

Barış: *Hesaplayabiliriz. (Yazarak ilerliyor.) Birinci kursa bakıyorum. Bir ayda 40 TL, iki ayda 80 TL, üç ayda 120 TL, dört ayda ise 160 TL ödenecek.*

A: *Sadece o kadar mı ödeniyor?*

Barış: *(Öğrenci birkaç saniye duraklıyor.) Bir de kayıt ücreti var. (Öğrenci önceki yazdıklarının yanına ekleme yaparak ilerliyor) Artı 310 TL ile 350 TL öder. (80 TL'nin yanına) ikinci ayda artı 350 TL ile...*

A: *Neden 350 ekliyorsun?*

Barış: *İuu. Toplam tutara bakacağız.*

A: *Sen iki ayda 80 TL ödeyeceğini söylemiştin kayıt ücretini katmadan.*

Barış: *(Öğrenci yazdığı 350 TL'nin üzerini karalıyor.)*

A: *Neden sildin?*

Barış: *(Öğrenci birkaç saniye duraklıyor, silgi arıyor, karaladığı yeri siliyor.) İkinci ayda 80 TL ödüyor, 310. Hepsine 310 ekleyeceğim. (Hepsinin yanına +310 yazıyor.) Yani üçüncü ayda 430 TL, dördüncü ayda 470 TL ödemiş oluyor.*

Yukarıdan da görüldüğü gibi Barış kayıt ücretinin sadece bir kere hesaplanacağını fark edip sözel olarak da ifade etmesine rağmen bu ücreti her aya ilave etmeye çalışmıştır. Daha sonra farkına varıp doğru sonuçlara ulaşabilmiştir. Murat da benzer bir yaklaşımla çözüme başlamış ve soruyu tekrar inceledikten sonra her iki kursa ödenecek ilk dört aylık tutarları doğru bir şekilde bulabilmiştir. Araştırmaya katılan diğer öğrenciler soruyu anlamış ve her iki kursun ilk dört aylık tutarlarını doğru bir şekilde bulabilmişlerdir. Bu süreçte Hande ve Nehir'in işlem hataları söz konusudur. Aşağıda her iki kursa ait ilk dört ayın toplam tutarlarını bulan Sevda'nın ifadelerine yer verilmiştir:

Sevda: *Şimdi ilk başta kayıt ücretimiz varmış, 310 TL. Yani onu önce bir ödememiz lazım. (310+ yazıyor.) Sonra bir, iki, üç ve dört ay. Ama biz şu an birinci kursa bakıyoruz. (Öğrenci yazdıklarının üstüne 1. kurs notunu düşüyor.) Aylık ücret 40 TL ise, bunu 4 ay için yaparsak 40 çarpı 4'ten 160 TL yapıyor. Her ay 40. 350. (310'un yanına 40 yazıp ekliyor devam ediyor; $350+40=390$; $390+40=430$.) Üçüncü ay. Bir de dördüncü ayımız var. ($430+40=470$ yazıyor.) Yani 470 TL ödeyecek.*

A: *Peki ikinci kursta durum nedir?*

Sevda: *İkinci kursa baktığımızda şimdi önce 130 TL kayıt ücretimiz var. (Öğrenci 130+ yazıyor.) Sonra 55 TL, yani birinci ayımız 185. (Öğrenci yazarak ilerliyor; $185+55=240$.) Bu ikinci ay. Üçüncü aya bakalım. ($240+55=295$ yazıyor.) Bu üçüncü ay. ($295+55=350$.)*

A: *Bu da dördüncü ay diyorsun.*

Sevda: *Evet.*

Sevda'nın ifadeleri incelendiğinde öğrencinin her iki kurs için herhangi bir aydaki toplam tutara nasıl ulaşacağını farkında olduğu görülmektedir. Cebir öğrenme alanına yönelik bu soruda araştırmaya katılan öğrencilerin tamamı kursların ilk dört ayı için ödenecek toplam tutarları hesaplayabilmişlerdir.

Kursların ilk dört aylık ücretlerinin hesaplanmasının ardından öğrencilerden her iki kurs için 12 aylık toplam ücreti hesaplamaları istenmiştir. Öğrencilerden Uğur hariç tamamı kursların 12 aylık tutarına ilişkin hesaplamaları benzer şekilde yapmıştır. Barış, Melek, Tuğçe, Hande, Murat ve Sevda kursa kaç ay gidilecekse o süreyi aylık ücretle çarpıp kayıt ücreti ekleyerek 12 aylık toplam tutarları hesaplamışlardır. Nehir

ise ilk ay ödenecek toplam tutara kaçınıcı ayın ücreti isteniyorsa o sayının bir eksiği kadar aylık ücreti ekleyeceğini belirtip 12 aylık toplam tutarları hesaplamıştır. Aşağıda öğrencilerin 12 aylık toplam tutarı bulma süreçlerini gösteren bir diyaloga yer verilmiştir:

A: *Peki 12. ayda ne kadar ödemen gerektiğini nasıl bulursun?*

Murat: *4'ü 12'yle çarpalım.*

A: *4'ü mü?*

Murat: *Sıfırı ekleriz.*

A: *Tamam.*

Murat: *4'le 12'yi çarpalım, kaç yapıyo, 48 yapıyor. 48. 480 yapıyo. Ona bi de 310 koycam. Kaç yapıyo, toplam. Dokuz, yedi. 790. (Üzerine 1. kurs yazıyor.)*

A: *İkinci kurs için ne yaparsın?*

Murat: *İkinci kurs, 55'le 12'yi çarpcam. Çarparsam, (işlemi yapıyor.) 660, 660'a 130 ekleyelim. 790.*

A: *Bu 790 da ikinci kursun 12 aylık ücreti diyorsun, doğru mudur?*

Murat: *Evet. İkisi de aynı oldu.*

A: *Aynı mı oldu?*

Murat: *Evet, nasıl aynı mı oldu, evet aynı oldu!*

A: *Aynı olmaması mı gerekiyordu? Niye öyle şaşırdın?*

Murat: *Olmaz ki, ne bilim. Bunların arasında kat vardır belki öyle oluyordur.*

Murat'ın her iki kurs için 12 aylık toplam tutarları hesaplama süreci incelendiğinde öğrencinin ne yapacağını bildiği ve kaç aylık tutar istenirse kolaylıkla hesaplayabileceği görülmektedir. Murat'ın iki kursun da 12 aylık tutarının eşit olduğunu bulduğunda şaşkınlık yaşadığı gözlemlenmiştir. Bununla ilgili kendine özgü bir gerekçe de beyan etmiştir. Sevda da Murat gibi her iki kursun 12 aylık tutarının eşit olduğunu fark ettiğinde şaşkınlığını ifade etmiş ve ardından hesaplamalarında hata yaptığını düşünüp işlemlerini tekrar inceleme gereği duymuştur. Diğer öğrenciler iki kursun 12 aylık toplam tutarlarının eşit olduğunu fark etmiş olsalar bile bu noktada herhangi bir tereddüte düşmemişlerdir. Şekil 30'da Hande'nin her iki kurs için ilk dört

aylık toplam tutarlar ve 12 aylık toplam tutarları hesaplamalarını gösteren yazılı ifadeleri görülmektedir.

1. kurs

$$\begin{array}{r} 390 \\ + 40 \\ \hline 430 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 430 \\ \times 12 \\ \hline 860 \\ 4300 \\ \hline 5160 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 390 \\ + 30 \\ \hline 420 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 420 \\ \times 12 \\ \hline 840 \\ 4200 \\ \hline 5040 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 400 \\ + 30 \\ \hline 430 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 430 \\ \times 12 \\ \hline 860 \\ 4300 \\ \hline 5160 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 470 \\ + 30 \\ \hline 500 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 500 \\ \times 12 \\ \hline 1000 \\ 5000 \\ \hline 6000 \end{array}$$

2. kurs

$$\begin{array}{r} 130 \\ + 55 \\ \hline 185 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 185 \\ \times 12 \\ \hline 370 \\ 1850 \\ \hline 2220 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 55 \\ + 55 \\ \hline 110 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 12 \\ \hline 220 \\ 1100 \\ \hline 1320 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 130 \\ + 130 \\ \hline 260 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 260 \\ \times 12 \\ \hline 520 \\ 2600 \\ \hline 3120 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 55 \\ + 55 \\ \hline 110 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 110 \\ \times 12 \\ \hline 220 \\ 1100 \\ \hline 1320 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 130 \\ + 130 \\ \hline 260 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 260 \\ \times 12 \\ \hline 520 \\ 2600 \\ \hline 3120 \end{array}$$

Şekil 30. Hande'nin cebir öğrenme alanı sorusunda özel durumlar üzerinde çalışma sürecini gösteren yazılı ifadeleri

Hande'nin yazılı ifadeleri öğrencinin iki kursta da ilk dört ay için kayıt ücretine aylık ücreti ilave ederek hareket ettiğini göstermektedir. Ayrıca Şekil 30'da Hande'nin 12 aylık toplam ücretlere aylık ücret ile 12'yi çarpıp ve kayıt ücretini ilave ederek ulaştığı da görülmektedir.

Öğrencilerden 12 aylık toplam tutarların hesaplanması istendiğinde en farklı çözüm süreci Uğur'a aittir. İlk dört aylık toplam tutarları doğru bir şekilde hesaplamasının ardından 12 aylık toplam tutarları hesaplaması istendiğinde Uğur, dört aylık toplam tutarı üçle çarparak orantısal bir akıl yürütme gerçekleştirmiştir. Araştırmacı öğrenciden 12 aylık toplam tutarları farklı şekilde de hesaplamasını isteyerek öğrencinin hatasının farkına varmasını beklemiştir. Aşağıda Uğur'la gerçekleşen bu sürece ait diyalog verilmiştir:

A: Peki 12 ayın sonunda hangi kursa ne kadar ödeneceğini hesaplayabilir misin? Nasıl hesaplıyorsun?

Uğur: Dört ayda 470'se 12'yle 4 arasında 3 kat var zaten, 470'in de üç katını alırsak. (Yazarak ilerliyor, 470'le 3'ü çarpıyor) 1410. İkinci kurs, 350 çarpı 3, 1050 yapıyor.

A: Peki başka türlü hesaplayabilir misin 12. ayı?

Uğur: 12. ayı. (Uzunca düşünüyor, sessiz kalıyor.)

A: Bu yaptığın yöntem haricinde farklı bir şekilde birinci kursun 12. ayında ödenecek tutarı hesaplayabilir misin?

Uğur: (Düşünüyor.) Farklı bir şekilde. Yani... Ayları yaza yaza?

A: Tek tek mi gideceksin [tabloya] devam ederek?

Uğur: Hıhı. (Onaylıyor. Tablonun devamını başka bir kâğıtta devam ettiriyor.) 350. İkinci kurs için 185. (İlk dört ayı önceki hesaplarından bakarak geçiriyor. Daha sonra birinci kursa ait farklı ay ücretlerini kafasında hesaplayarak yazıyor, 12. ayın ücretini 790 olarak buluyor.)

A: Tamam, ikinci kursu da yapar mısın?

Uğur: (Öğrenci önce ilk dört ayı yazıyor, beşinci ayı yapmadan 8. aya 700 yazıyor. Bkz. Şekil 31.)

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.
1.350	350	430	470	510	550	590	630	670	710	750	790
2.185	240	295	350	405	460	515	570	625	680	735	790
											+55
											845

13.	14.	15.	16.
830	870	910	950
845			

630	790
1260	1580
310	310
350	240
	360
	1750

Şekil 31. Uğur'un her iki kurs için farklı aylardaki toplam tutarlarıyla ilgili yazılı ifadeleri.

A: Burada dördüncü aydan sonra neden sekizinci aya geçtin?

Uğur: İki kat.

A: Burada da var mı o durum? (Birinci kursta.)

Uğur: Var.

A: 470'ten, 630'a iki kat var mı?

Uğur: Bi dakika, yok. Orda yok.

A: Neden yok?

Uğur: (Bir süre düşünüyor.) Anladım. (Öğrenci 55 ekleyerek ilerliyor, 700'e varamayacağını fark ediyor.) Evet olmuyor. 55 daha 40. 515. 515,

55 daha 570. (700'ün üstünü karalıyor, 570 yazıyor.) 55 daha, 30, 625, 680. (İkinci kursun 12 aya kadarki toplam tutarlarını tamamlıyor.)

A: Ne gördün?

Uğur: İkisinin de 12 ay sonunda eşit olduğunu gördüm, ödenecek toplam miktarın.

Şekil 31'de Uğur'un ikinci kurs için ilk dört ayı hesapladıktan sonra doğrudan sekizinci aya yazdığı 700 üstü çizili olarak görülmektedir. Uğur'un yazılı ve sözlü ifadeleri ile gözlem kayıtlarından da görüldüğü üzere öğrenci orantısal bir akıl yürütme ile hatalı sonuçlara ulaşmıştır. Uğur'dan farklı bir şekilde ilk 12 aydaki toplam tutarları bulması talep edildiğinde hatasını fark etmiştir. Öğrenciden farklı aylardaki toplam tutarları hesaplamasını istendiğinde öğrenci yine orantısal akıl yürütmeyi kullanmıştır. Bu süreçte orantısal akıl yürütmeye hatalı olarak bulduğu aylardaki tutarlardan yararlanarak doğru değere ulaşma süreci de aşağıda verilmiştir:

A: Peki ben sana herhangi bir kurs, birinci kurs için 30. ayı sorsam ne yaparsın? 30. ayı bulabilir misin?

Uğur: (Düşünüyor) Bir şey deniycem de. (Öğrenci yazarak ilerliyor, tablosuna 13., 14. ve 15. ayı ekliyor.) 790, 40 daha 830, 870, 910.

A: Tamam, neye bakacaksın? Denediğin şey ne?

Uğur: Eee, 5'in iki katı 10 (Birinci kurstaki 5. ay ile 10. ayı gösteriyor.) 510'la 710 oluyor, 200 (Aralarındaki farktan bahsediyor.) Öyle bir şey yaptım.

A: 200? Neden 15. aya kadar gittin?

Uğur: 3 katta da 400 oldu. 30. ayı 6 katıyla bulabilirim sanki.

A: Şimdi 510'la 710 arasında 200 fark var dedin. 510'la 910 arasında 400 fark var dedin. Bir sonrakinde ne düşünüyorsun? 600 fark 30. ayda mı olacak diyorsun?

Uğur: Hayır, 600 fark 20'de olacak. 25. ayda 800 fark olacak. 30'da da 1000 fark olacak.

A: Tamam. Peki sen 5. aydan yola çıktın, 7. aydan yola çıkamaz mıydın? 37. Ayı sorsam ne yapacaktın?

Uğur: (Öğrenci düşünüyor) 7, 590. Her 12 ayda 790..

A: 12 aydan kastın? 36. aya gitmek mi?

Uğur: (Öğrenci gülüyor, kafa sallayarak onaylıyor.) Her 12 ayda 790 ama ilk kaydolmuyor, diğer. Azalıyor. Birinci kursta 310 eksi yapacağız o zaman diğer 13 de.

A: Nasıl yani anlayamadım?

Uğur: Şimdi ilk kayıt yaptırdığı zaman ekledik kayıt ücretini. Daha bir daha kayıt yaptırmayacak. O zaman 40 40 artması gerekiyor. Yani...790'ın 2 katı olamaz 24'te. Onu 310 çıkartırsak bulabiliriz. 310 kayıt ücreti.

A: 310'u çıkarınca neye ulaşmayı bekliyorsun?

Uğur: 24. ayın ücretine ulaşmayı düşünüyorum.

A: Gerekçen nedir? Onu bana açıkla mısın?

Uğur: Kayıt ücreti bir kere yaptırdık birinci ayda. Bir daha yaptırmıycaz. Yani o yüzden 12'den sonraki aylarda. Yani, 13. ayda tekrar başlıyoruz. Yani birinci ay olarak. Kayıt ücretini ödemeyeceğimiz için.

A: Anladım. Peki o söylediğin durumu 3 ve 6. ayda söyleyebilir misin? Üç ayda 430 ödeyeceğini söyledin, 6. ayda da 550 olduğunu buldun. Bunun iki katı çıkmamıştı. Sen iki katı olması gerektiğini söylemiştin ilk başta. İki katı neden çıkmıyor?

Uğur: Bi saniye. (Düşünüyor.) Kayıt ücretinden dolayı. Kayıt ücreti de vardı.

A: Yani buna (6. aya) bir kere kayıt ücretini eklersen olacak mı?

Uğur: Olacak.

Diyalogda Uğur'un, araştırmacının özellikle asal sayı olarak seçtiği aylar için toplam tutarları hesaplarken önceden bulmuş olduğu ayların katlarını kullanarak istenen aya ulaşabileceğini düşündüğü görülmektedir. Kayıt ücretinin bu hesaplama biçiminde birden fazla ödendiğinin de farkında olan öğrenci kaçla çarparak ilerlediyse o sayının bir eksiği kadar kayıt ücretini çıkaracağını da ifade etmiştir. Bu diyalogun devamı aşağıda verilmiştir:

(Öğrenci 24. ayın toplam ücretine ulaşmaya çalışıyor.)

Uğur: (Öğrenci tabloda 15. ayın devamı olarak 16. ayı yazıyor.)

A: 24.ay nasıl bulursun?

Uğur: 24. 320 eklersem 24. ay oluyor.

A: 320? O nerden geldi?

Uğur: 8'le çarptım 40'ı.

A: Niye çarptın 8'le?

Uğur: Çünkü arada 8 ay var, 40 40 artıyor.

Buradan da görüldüğü üzere Uğur istenen aya yakın bir ayın ücretine, istenen aydan bu ayın farkı kadar aylık ücreti ilave ederek istenen aya ulaşmıştır. Burada Uğur'un orantısal akıl yürütmenin ardından farklı bir metot kullanarak yeni bir çözüm yolu ürettiği görülmektedir. Ancak Uğur bu çözümü orantısal akıl yürütme ile istenen aya yaklaştıktan sonra kullanmakta ısrar etmiş ve daha farklı bir çözüm gerçekleştirememiştir.

Araştırmaya katılan tüm öğrenciler her iki kurs için farklı aylardaki toplam tutarları bularak birden fazla özel durum oluşturabilmişlerdir.

3.4.2. Varsayımda Bulunma Sürecine İlişkin Bulgular

Öğrencilerin tamamı cebir öğrenme alanına yönelik soruda birden fazla özel durum tespit edebilmişlerdir. Bu kısımda öğrencilerin, her iki kursa ait farklı aylardaki toplam tutarlar üzerinden oluşturdukları varsayımlar ve bu varsayımların gelişim süreci yer almaktadır.

Uğur haricindeki tüm öğrenciler kursların ücretleri ile ödenecek tutar arasındaki ilişkiyi fark etmiş ve bunu sözel olarak ifade edebilmişlerdir. Nehir bu ilişkiyi istenen ayın tutarını bulmak için birinci ayda ödenecek toplam tutara istenen ayın bir eksiği kadar aylık ücretin ekleneceği şeklinde ifade etmiştir. Diğer öğrenciler ise kursların ücretleri için “40'ar 40'ar artıyor” ve “55'er 55'er artıyor” gibi söylemlerde bulunduktan sonra kayıt ücretine istenen ay kadar aylık ücret ekleneceğini belirtmişlerdir. Aşağıda Hande'nin varsayımda bulunma sürecine ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

A: Birinci kurs için farklı aylarda ödenen ücretler arasında bir ilişki/ortak özellik fark edebildin mi?

Hande: 40-40 artmış.

A: İkinci kursta görebildin mi böyle bir şey?

Hande: 55 artıyor.

A: Peki tüm durumlar için bu söylediğin geçerli midir?

Hande: Evet. (Kafa sallıyor.)

A: Peki, birinci kursta herhangi bir ay için ne kadar ücret ödenir? Nasıl yaparsın?

Hande: Kaçınıcı ay mesela?

A: Kaçınıcı ay olduğunu sorarsın yani, mesela 32. ay?

Hande: 32. ayla 40'ı. Yani 32'yle 40'ı çarparım, 310 eklerim.

A: Nasıl bir ilişki var yani o zaman?

Hande: Bunla (Aylık ücretleri gösteriyor.) çarpıyorsun, bunla (Kayıt ücreti) topluyosun. Ayla aylık ücreti çarpıyorum, sonra kayıt ücretini ekliyorum.

Diyalogda Hande, istenen ayın sayısı ile aylık ücreti çarpıp kayıt ücretini ekleyerek kursların herhangi bir ayı için ödenecek toplam tutarı bulacağını ifade etmektedir. Bu varsayımını kontrol etme ihtiyacı duymamış ve her zaman doğru olduğunu belirtmiştir. Barış, Melek, Tuğçe, Murat ve Sevda da benzer şekilde düşüncelerini belirtmişlerdir. Nispeten farklı bir varsayımla hareket eden Nehir'in bu süreçteki ifadeleri aşağıda yer almaktadır:

A: Peki herhangi bir ayın ücretini bulmak için ne yaparsın? Burada bir ilişki, ortak özellik görebildin mi? Bunu nasıl kullanırsın?

Nehir: Burada her ay 40 artıyor, (Birinci kursu gösteriyor.) Ya 40 artarak giderim ya da.. İkinci kurs için 350'ye 40 ekliycem işte.

A: Herhangi bir ayı sorsam sana ne yaparsın?

Nehir: Ona da yine biri (1. ay) saymadan, mesela yedinci ay dersiniz yedinci ayda birinci ayı saymam. 6'yla 40'ı çarparım, sonra ona eklerim.

A: Birinci ayı mı eklerim diyorsun?

Nehir: Evet.

A: Peki ikinci kursta herhangi bir ay ücreti için ne dersin?

Nehir: Onu da yine 7'yle çarparsam. Şey, 7. ayı bulmak için, şöyle, şu 55'le, 6'yı çarparım, 185'i (1. ay) eklerim.

A: Ben sana 53. ayı sorsam birinci kurs için?

Nehir: O zaman, birinci kursu [ay] saymam, 52 ile kaç çarparım, 40'ı çarparım. Sonra birinci kursla [birinci ayın toplam tutarı] eklerim.

Nehir'in bu ifadeleri öğrencinin her ay sabit bir şekilde artan miktardan yararlandığını göstermektedir. Diğer öğrenciler istenen ay ile aylık ücreti çarpıp kayıt ücretini ilave ederek hareket ederken Nehir istenen ayın bir eksiği ile aylık ücreti çarpıp birinci ayın toplam tutarına ekleyeceğini ifade etmiştir. Uğur hariç tüm öğrenciler kursların herhangi bir ayı için ödenecek toplam tutar ile istenen ay süresi arasındaki ilişkiyi görmüş ve bunu sözel olarak dile getirmişlerdir. Uğur ise özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde yer alan ifadelerinden de görüldüğü üzere orantısal akıl yürütme ile belirlediği bir ayı kullanarak ay sayısı kaç katına çıkarsa ödenecek toplam tutarın da o kadar katlanacağı varsayımıyla çözümüne başlamıştır. Araştırmacının yönlendirmesiyle hatalı sonuçlara ulaştığını fark etse de çözüm stratejisini değiştirmemiş ve kaç kata çıkarıyorsa bir eksiği kadar kayıt ücreti çıkararak doğru sonuçlara ulaşabilmiştir. Süreçte farklı bir yöntem geliştirse de hep belirlediği bir değeri orantısal olarak katlayarak hareket etmiş, farklı bir ilişki aramamış ve varsayımında da bir değişiklik yapmamıştır.

Cebir öğrenme alanına yönelik bu soruda öğrencilere ayrıca hangi kursun daha ekonomik olduğu da sorulmuştur. Aşağıda Melek'in hangi kursun daha ekonomik olduğunu sorusuna yönelik ifadeleri yer almaktadır:

A: Peki hangi kurs daha ekonomik olur? Neden? Açıklar mısın?

Melek: (Öğrenci soruyu tekrarlayıp düşünüyor) İı... Aynı aylara bakarım ikisinin de. Birinci kurs için 6. ayı hesaplarsak, 6. ayı hesaplamak istedim. 40'la 6'yı çarparım, 240 yapar. 240, 310 daha 550 TL 6. ay yapar. Birinci kurs diye yazarım. Altıncı ayı bulduğum için ikincisinde de 6. ayı bulurum. (İşlemi yazıyor, $6 \times 55 + 130 = 460$ TL) 460 TL, 6. ay ikinci kurs. İkinci kurs daha ekonomik.

A: Kesinlikle böyle midir?

Melek: (Düşünerek) Böyle midir?

A: Tek bir aya bakarak bunu söyleyebilir misin?

Melek: (Duraklıyor). Söyleyemeyiz galiba.

A: İnceleyebilirsin, ilk dört ayı zaten bulmuştun.

Melek: Evet, birinci ayda ikinci kurs daha ekonomik. Ama ikinci ayda ikinci kurs daha ekonomik.

A: Peki bu her zaman böyle midir? Daha çok aya baksan fark eder mi?

Melek: Hayır fark etmez.

A: Peki verileri inceleyince ne düşünürsün?

Melek: İu.. (Düşünüyor, tablosunu inceliyor.) Birinci kurs kayıt ücreti için çok az bir değer olmasına rağmen aylık ücreti fazla. İkinci kursta kayıt ücreti az aylık ücreti de fazla. (Öğrenci yaptığı işlemleri inceliyor).

A: Ne düşünüyorsun?

Melek: (Bir süre cevap yok.) Fark her zaman aynı.

A: Ne farkı her zaman aynı?

Melek: Şimdi 350'den 185'i çıkarırsam.. İlk ayın ücreti [Birinci kurs birinci ay] ve bu da ikinci ayın [ikinci kurs birinci ay], aralarındaki farka bakmak istiyorum. (İşlemi yapıyor.) İlk ay 165 tl fark var. 390'dan 240'ı çıkarırsak, 150. Üçüncü ay (430'dan 295'i çıkarıyor, 135 buluyor.) Fark giderek azalıyor aslında.

A: Peki bu durumla ilgili herhangi bir şey söyleyebilir misin?

Melek: İu. Birkaç ay sonra eşitlenebilirler.

A: Peki ne kadar süre sonra eşitlenebilirler? Kaç ay devam ederlerse iki kurs ücreti arasında bir fark olmaz?

Melek: (Öğrenci düşünüyor, bir süre susuyor.)

A: Peki burada bir ilişki ya da ortak özellik görebildin mi?

Melek: Burada 15 azalmış, burada kaç azalmış? 15, 15 azalıyor.

A: Bir süre sonra eşitleneceğini söylemiştin. O zaman ne zaman eşitlenir?

Melek: (Öğrenci 90'ı 15'e bölüyor.)

A: Ne yapıyorsun? 15'e neden bölüyorsun?

Melek: 90'ı 15'e bölüyorum. Kaç ayda 90'a ulaşabileceğimizi bulup 6'ya (6. ay) ekliycem. (6 buluyor.) Yani 6 ay daha, o zaman 12. ayda eşit olmaları gerekir. (Öğrenci önceden hesapladığı 12. ayları fark ediyor, gülüyor.)

Buradan da görüldüğü üzere Melek iki kursun karşılaştırılmasına yönelik soru karşısında sadece birkaç ayı inceleyerek ikinci kurs cevabını vermiştir. “Her zaman böyle midir?” sorusu üzerine verilerini biraz daha incelemiş, her iki kursun aynı aydaki ücretlerini karşılaştırarak farkın gittikçe azaldığını ifade etmiş ve bir süre sonra

eşitleneceği varsayımına ulaşmıştır. İki kursun karşılaştırmasına yönelik soruya Melek gibi Barış, Hande ve Sevdâ da her iki kursun ya sadece belirli bir ayını ya da birkaç aylık toplam tutarlarını inceleyerek doğrudan ikinci kursun daha ekonomik olduğu cevabını vermişlerdir. Bu süreçte öğrencilerin verileri biraz daha incelemesi için fırsat sunulduktan sonra Barış ve Melek her iki kursun aylara göre ödenecek tutarları arasındaki farkın gittikçe azaldığını ifade etmişlerdir. Burada öğrencilerin, her iki kursa ödenen 12 aylık toplam tutarlarının eşit olduğunu önceden bulmuş olmalarına rağmen hatırlayamadıkları da dikkat çekmektedir. Sevdâ da Barış ve Melek gibi belirlediği bir ayı dikkate alarak doğrudan ikinci kursun daha ekonomik olacağını söylemiştir. Araştırmacının “Her zaman böyle midir?” sorusu üzerine Melek gibi o da verilerini incelemiş ve farkın 15’er azaldığını belirtmiştir. Sevdâ da tıpkı Melek ve Barış gibi her iki kursun 12 aylık toplam tutarlarını eşit bulduğunu hatırlayamamış ve her iki kursun toplam tutarlarının belirli bir ay sonunda eşitleneceğini ifade etmiştir. Her iki kursun 13 aylık toplam tutarlarını da hesapladıktan sonra ise birinci kursun ekonomik olduğunu söylemiş ve “24 aylık toplam tutarlarda tekrar ikinci kursun daha ekonomik olacağı” varsayımında bulunmuştur. Bu varsayımını kontrol edip doğru olmadığını fark ettikten sonra kursların hangisinin ekonomik olacağına ilişkin nihai ifadesine ulaşmıştır. Hande de Barış ve Melek gibi birkaç veriye bakarak ikinci kursun ekonomik olacağını ifade etmiş, araştırmacının sorusu üzerine verilerini incelemiş, sonrasında 12. ayda aynı olan tutarları fark etmiş ve bunun üzerine “12’nin katı olan aylarda her iki kursa da ödenen toplam tutarların aynı olacağı” varsayımında bulunmuştur. 13. ve 24. ayları hesapladıktan sonra bile yine ikinci kursun daha ekonomik olacağı varsayımını yinelemiştir. Aşağıda Hande’nin bu süreçteki ifadelerinden bir kesite yer verilmiştir:

Hande: 12. ay. Haaa. 12’nin katlarında aynı mı olacak?

A: Deneyebilirsin.

Hande: (Öğrenci 55 ile 24’ü çarpıyor, 130 ekliyor. 1450 buluyor. Daha sonra 40 ile 24’ü çarpıyor, 960 buluyor. 310 ekleyince 1270’e ulaşıyor.)

A: Geçerliymiş söylediğin?

Hande: Hayır.

A: *12. ayda eşit oluyorlar ama 12'nin diğer katlarında öyle bir durum yok diyorsun. Şimdi hangi kursun daha ekonomik olduğu hakkında ne diyebilirsin? Neden?*

Hande: *Yine ikinci olur.*

A: *Neden?*

Hande: *12 ay dışında bütün aylarda o daha ucuza denk geliyor.*

Yukarıdaki diyalogdan da görüldüğü üzere Hande'nin, bulduğu sonuçlar sonrasında düşüncelerinde herhangi bir değişikliğe gitmemiş, hangi kursun daha ekonomik olduğuna dair varsayımını değiştirmemiştir. Bu diyalogun sonrasında verilerini daha detaylı incelemiş ve hangi kursun daha ekonomik olacağına ilişkin nihai sonuca ulaşabilmiştir.

Tuğçe ve Uğur hangi kursun daha ekonomik olacağı sorusunu daha sorgulayıcı bir şekilde ele alarak diğer öğrenciler gibi doğrudan bir ifade belirtmemişlerdir. Uğur her iki kurs için 13. aya kadar ödenecek toplam tutarları bulduğu için doğrudan “12 aya kadar ikinci kurs, 12 ayda eşit, 12 aydan sonra ikinci kurs daha ekonomik olur.” varsayımına ulaşmıştır. Tuğçe ise her iki kursun verilerini inceledikten sonra aynı aylar için ödenecek toplam tutarlar arasındaki farkın giderek azaldığını ifade etmiştir. Sonrasında “12 aya kadar ikinci kurs, 12 aydan fazla devam edecekse birinci kurs, 12 ay devam edecekse ikisi de aynı” şeklinde varsayımını ifade etmiştir. Aşağıda Tuğçe'nin bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

A: *Peki hangi kurs daha ekonomik olur? Neden?*

Tuğçe: *Hangi kurs daha ekonomik olur? İı, ben açıkçası buradaki (Tablosunu gösteriyor.) değerlere bakarak yorum yapabilirim bence.*

A: *Tamam, bakabilirsin.*

Tuğçe: *Birinci ayda ikinci kurs daha ekonomik yani. İkinci ayda da, üçüncü ayda da, dördüncü ayda da ikinci kurs daha ekonomik oluyor.*

A: *Peki hep böyle mi olur?*

Tuğçe: *Ee, mesela 10. kuvvetini (Ay demek istiyor.) denediğimizde de ikinci kurs daha şey [ekonomik] oluyor. (Biraz duraklıyor, 10. ay verilerini inceliyor, içinden hesap yapıyor.) Mesela 11. ayı bulacaksam birinci kurs için 710 artı 40 yaparım. Yani ordan da 11. kurs (ay) için*

750 bulurum. Burda (2. kursu kastediyor) da 11.kurs (ay) için 55 eklerim.
Ee 735 yaparım.

A: Tamam.

Tuğçe: Aralarındaki mesafe gittikçe kısalıyor aslında. 12. aya bakarsam
eğer bu 790 ediyor, burada 55 eklersek 790 ediyor bu da.

A: Ne oldu yani?

Tuğçe: 12. ayda eşit oluyorlar.

A: Peki, hangi kurs daha ekonomiktir sorusuna nasıl cevap verirsin
şimdi?

Tuğçe: Yani bir yıllık ücret olarak bakarsak ikinci kurs daha ekonomik,
ama bir yılın bir yıldan sonra devam etmeye şeyapcaksa birinci kurs
daha ekonomik oluyo.

Tuğçe ile gerçekleşen bu diyalog öğrencinin diğer öğrenciler gibi sadece bir
aya bakarak doğrudan karar vermediğini, birkaç ayın verisini karşılaştırarak hareket
ettiğini göstermektedir. Uğur ve Tuğçe daha fazla veriyi karşılaştırarak incelemiş ve
hangi kursun ekonomik olacağına ilişkin varsayımlarını bu aşamadan sonra dile
getirmişlerdir.

Murat iki kursun 12 aylık toplam tutarlarının eşit olduğunu fark edince sorulan
hangi kursun daha ekonomik olduğu sorusu karşısında tereddütte kalmıştır. Aşağıda
Murat'ın bu sorudaki ilk tepkisine yönelik diyaloga yer verilmiştir:

A: Bu kurslardan hangisi daha ekonomiktir?

Murat: Ekonomiktir?

A: Verilerini inceleyebilirsin. Sen olsan hangi kursa giderdin, neden?
Açıklar mısın?

M: Ama 12 ayda eşit oluyor.

A: Tamam.

M: 11. aylarda eşit olmayacak mı o zaman?

A: Deneyebilirsin.

M: 11 çarpı 40 yapalım. (İşlemi yapıyor) 440, 440'a bir de 310 ekleyelim.
750. Birinci kurs, 11. Ay. İkinci kurs, haa, 11'le 55'i çarpcam. (İşlemi
yapıyor.) 605, 605'e bir de 130 ekliycem, 735. Bu daha ekonomik. (İkinci
kurs)

A: Yani hangi kursun ekonomik olduğuna dair söyleyebileceğin bir ifade var mı?

Murat: Ama bir karıştı yaa,

A: Ne karıştı? Ne karışık geldi?

Murat: Aynı olmaması gerekmiyo ki, bu şimdi bundan fazlaysa bi dahaki ayda da fazla olmuycak mı? Evet.

A: Neden değişiyor?

Murat: Yanlış mı yaptık?

12 aylık toplam ücretlerin eşit olmasının ardından hangi kursun ekonomik olacağı sorusunda Murat'ın tereddüt yaşadığı ve hata yaptığını düşündüğü görülmektedir. Murat bu diyalogun devamında kursların tek ve çift aylara göre değişebileceği varsayımıyla hareket etmiş ve bunun da geçerli olmadığını görmüştür. Daha sonra ise hesaplamış olduğu aylar için hep ikinci kursun daha ekonomik olduğunu dile getirmiştir. Aşağıda bu diyalogun devamına yer verilmiştir:

Murat: Yine ikinci, hep ikinciymiş. 12. ayda eşitleniyor ama.

A: 13. ayda ne olur?

Murat: Yine ikinci daha... Bir dakika deneyelim. (İşlemi yapıyor.) 13 çarpı 40. 520 artı 310, 830. Bu kaç 13. ay 1. kurs. Şimdi eee napcaktım, kafam karıştı. Haa 13'le 55'i. 13'le 55'i çarpcam. Şuraya yazayım. 13'le 55'i çarpcam. (İşlemi yapıyor.) 715.

A: 715'le mi kalacak?

Murat: Ha 715'e 130 ekliycez. 130 ekledik mi kaç yapıyor? 845 yapıyor.

A: Tamam.

Murat: 12. aydan sonra herhalde birincisi daha şey oluyor.

A: Niye, niye böyle bir şey oluyor?

Murat: Niye, niye öyle oluyor? (Öğrenci duraklıyor, düşünüyor.)

A: 12. aya kadar ne oluyor yani o zaman?

Murat: 12. aya kadar bu ikincisi daha iyi. 12. aydan sonra birincisi daha iyi.

A: 12. ayda ne oluyor?

Murat: 790. İkisi de eşit. Bir yerde ikisi çarpıştıyo, ne oluyo ki?

Diyalogda Murat’ın iki kursa ait farklı aylardaki verileri inceledikten sonra varsayımında değişikliğe gittiği görülmektedir. Murat, hesapladığı değerleri incelemiş “12. aya kadar ikinci kurs, 12. ayda aynı ve 12 aydan fazlasında birinci kurs daha ekonomiktir” varsayımına ulaşmıştır.

Nehir hangi kursun ekonomik olduğuna ilişkin soruya sadece iki kursun aylık sabit ücretlerini düşünerek birinci kurs cevabını vermiştir. Aşağıda Nehir’in bu süreçteki ifadeleri yer almaktadır.

A: Hangi kurs daha ekonomiktir, neden?

Nehir: Burda 40 40 artıyordu. Her ay 40 lira daha fazla ödemek, 55 lira daha fazla ödemekten daha karlıdır diye düşünüyorum.

A: Tamam, peki bir ayda ne kadar ödemişsin?

Nehir: Şey bir ayda 350 lira. Orda (ikinci kursta) 185 lira ödemişim.

A: İkinci ay için?

Nehir: İkinci kurs için 240, birinci kurs için 390. (Duraklıyor.)

A: Ne diyorsun?

Nehir: Ama ikisinde de 12. ay için 790 lira ödemişim.

A: Yani? Aklında ne var?

Nehir: Yani, 12. ayın sonunda aynı tutarı ödüyorum.

A: Peki hangi kurs daha ekonomiktir o zaman?

Nehir: İkisi de eşit.

...

A: 13. ayda ne olur acaba?

Nehir: 13. ayda? Buraya 40, buraya 55. 13. ayda ikinci kursa daha fazla öderim.

A: Hangi, kurs daha ekonomiktir? Ne düşünüyorsun şu anda?

Nehir: (Düşünüyor.) Bence birinci kurs daha ekonomik çünkü hem 40 40 gidiyor. Ama ayın (yılın demek istiyor) sonunda 790. Ama 12. aydan sonra buraya (birinci kursu gösteriyor) daha az ödüyorum. O zaman birinci kurs oluyor.

A: Yani nasıl ifade edersin durumu?

Nehir: 12’den sonra artan şey birinci kurs daha ekonomik oluyo. Şimdi birinci kursta 350’yle başlıyo. 40 40 ilerliyo. 12. ayda 790 liraya varıyor.

Ama 12. aydan sonra yedi yüz şey, 11. ayda [13 demek istiyor ancak sözlü ve yazılı ifadesi 11. ay] Kaç ediyö, 790, 830 ediyö. 11. ay eşittir 830. Şuraya da şunu yazıyım bari, hazır bulmuşum. İkinci kurs 185 liradan başlıyo, birinci kurstan daha avantajlı başlıyor. Ama eee, 790 lirada bitiyor ikinci kurs da. Ama bundan sonra 55 lira artacağı için birinci kurstakinden daha fazla ödemek zorunda kalıyor.

A: Tamam, o zaman hangi kursun daha ekonomik olacağına ilişkin ne diyebilirsiniz?

Nehir: Kaç ay gideceğine bağlı şimdi.

...

Nehir: 12 aydan az giderse ikinci kursu tercih etmesi lazım. 12 aydan fazla giderse de birinci kursu tercih etmesi lazım.

A: 12. ayda ne olacak peki?

Nehir: O zaman neyi tercih ederse artık. (Gülüyor, eşit olduğunu farkında.)

Diyalogda Nehir'in ilk iki ayı karşılaştırmasının talep edilmesi üzerine verilerini incelediği, 12 aylık tutarların eşit olduğunu fark ettiği ve sonrasında iki kursun da ekonomik olarak eşit olacağını ifade ettiği görülmektedir. Bu sürecin sonrasında verilerini incelemiş 12 aya kadar ikinci kursun ekonomik olduğunu görmüş ancak bunu ifadelerine yansıtıırken güçlükler yaşamıştır. En sonunda ise 12 aya kadar ikinci kurs, 12 ayda eşit ve 12 aydan sonra birinci kursun daha ekonomik olacağı varsayımına ulaşabilmiştir.

Öğrencilerin cebir öğrenme alanına yönelik olarak sorulan iki kursun karşılaştırılmasını gerektiren soruda farklı aylarda ödenecek toplam tutarları bulmalarının ardından ulaştıkları varsayımlar ve bu varsayımların ifade edilme sıklıkları Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7. Kursların karşılaştırılması sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları.

Varsayımlar	f
12. aya kadar ikinci kurs, 12. ayda eşit, 12. aydan sonra birinci kurs daha ekonomiktir.	8
İstenen ay sayısı ile aylık ücretin çarpımına kayıt ücretini ekliyorum.	6
Birinci kurs 40'ar 40'ar, ikinci kurs 55'er 55'er artıyor.	5

Tablo 7 (Devam). Kursların karşılaştırılması sorusunda öğrencilerin ulaştıkları varsayımlar ve kullanılma sıklıkları.

(Kurslarda belirledikleri bir ayı karşılaştırarak) İkinci kurs daha ekonomiktir.	4
Kursların aynı aylarındaki fark miktarları 15'er azalıyor.	4
(12.ayların eşit olduğunu bulduktan sonra) Kurslar ekonomik olarak eşit	4
Bir süre sonra iki kursun tutarları eşitlenebilir.	3
Birinci ayın tutarına istenen ayın bir eksiği kadar aylık ücret ekliyorum.	1
Bilinen bir ayın katını alarak istenen aya ulaşabilirim.	1
40'ar artan kurs, 55'er artan kurstan daha ekonomiktir.	1
24. ayda tekrar ikinci kurs daha ekonomik olabilir.	1
12'nin katı olan aylarda iki kursun ücretleri aynı olabilir.	1

Araştırmaya katılan tüm öğrenciler her iki kurs için belirli bir aydaki toplam tutar ile ay arasındaki ilişkiyi sözel olarak ifade edebilmiş ve varsayımlar oluşturabilmişlerdir. Bu süreci diğer öğrencilerden farklı bir şekilde yürüten Uğur varsayımında bir değişikliğe gitmeden süreci tamamlamıştır.

3.4.3. Genelleme Sürecine Yönelik Bulgular

Bu kısımda cebir öğrenme alanına yönelik problemin çözümünde katılımcıların genellemeye ulaşma süreçlerine yer verilmiştir.

Barış, Melek, Tuğçe, Hande, Murat ve Sevda'nın birbirine benzer olan genellemeye ulaşma sürecine örnek olabilecek bir diyaloga aşağıda yer verilmiştir:

A: Tamam, herhangi bir aydaki ücreti bulmak için ne yaparsın?

Sevda: Herhangi bir ayda kaçınıcı ay için bakıyorsam onu aylık ücretle çarpıyorum bi kayıt ücretini ekliyorum üzerine.

A: Peki bu ilişkiyi cebiri kullanarak ifade edebilir misin?

Sevda: Cebiri kullanarak, x ayı için bakalım mesela.

A: Tamam, birinci kurs için nasıl ifade edersin?

Sevda: Mesela şimdi x ayı bakalım. X ile 40'ı çarpırım, 40x oluyor. (40.x=40x yazıyor.) bi de buna 310 ekliyorum. (Zorluk yaşamadan 40x+310 yazıyor ve kutu içine alıyor.) (Bkz. Şekil 32.)

$$\begin{aligned} & x \text{ ayı} \\ & 40 \cdot x \quad \boxed{40x + 310} \\ & 55 \cdot x = 55x \\ & 55x + 130 \end{aligned}$$

Şekil 32. Sevda'nın her iki kurs için genel ifadeye ulaşma sürecindeki yazılı ifadeleri.

A: Bu formül bize herhangi bir ayı verir mi diyorsun?

Sevda: Evet.

A: Peki ikinci kurs için böyle bir ifade yazabilir misin?

Sevda: İkinci kursta yine x ayına bakarsak ee, 55 çarpı x. eee 55x oluyor işte bu, bi de buna 130 ekliyorum, kayıt ücretini. (55x + 130 yazıyor.)

Yukarıdaki diyalogdan ve Sevda'nın Şekil 32'de verilen yazılı ifadelerinden Sevda varsayımını kullanarak genel ifadelere ulaşabildiği görülmektedir. Gözlem verileri de dikkate alınınca Sevda'nın bu süreçte zorluk yaşamadığı, öğrencinin akıcı bir şekilde kursların herhangi bir ayı için genel ifadelere ulaştığı aşıkardır. Barış, Melek, Tuğçe, Hande ve Murat da her iki kursun herhangi bir ayındaki toplam tutara ulaşabilecekleri varsayımlarını dile getirdikten sonra zorluk yaşamadan genel bir ifadeye ulaşabilmişlerdir. Bu süreçte Hande ve Tuğçe değişkeni, aylık toplam tutar için kullanma hatasına düşmüşler ancak bu hatalarını kısa sürede anlayarak düzeltmiş ve kursların herhangi bir ayı için genel ifadelere ulaşmayı başarmışlardır.

Nehir kurslardaki herhangi bir ayın toplam tutarına ulaşabilmek için istenen ayın bir eksiği kadar aylık ücreti ilk ayın toplam tutarına ekleyeceğini ifade etmiş ve bu varsayımını kullanarak istenen farklı ayların toplam tutarlarına ulaşabilmiştir. Aşağıda Nehir'in bu süreçteki ifadelerine yer verilmiştir:

A: Peki bu gördüğün ilişkiyi bana daha genel olarak ifade edebilir misin? Cebiri kullanarak ifade edebilir misin?

Nehir: Hayır. (Öğrenci hiç düşünmeden hemen "hayır" diyor.)

A: Neden?

Nehir: Bilmem. Şimdi. Birinci ayın ödenecek tutarına, 350 zaten, onu biliyorum.

A: Herhangi bir ayı ifade edeceksin. Cebiri kullanacaksın, değişken kullanarak az önce bahsettiğin kuralı yazabilir misin?

Nehir: (Öğrenci duraklıyor.)

A: Birinci kursta herhangi bir ayı sorduğumda ne yaptın?

Nehir: Birinci ayı saymadım.

A: Tamam.

Nehir: 53. için 52 ayın şeyini yaptım.

A: Peki 55. için ne yapacaksın?

Nehir: Yine birinciye saymayıp 54'le şunun için 40'ı çarpıcam.

A: Tamam, bu bahsettiğin kuralın tüm durumlarda geçerli olduğunu söylüyorsun.

Nehir: Evet.

A: Ben bunu cebirle ifade etmeni istiyorum, değişken kullanarak.

Nehir: (Düşünüyor.)

A: Aklından ne geçiyor?

Nehir: (Düşünüyor) Şimdi. (Sessizlik) mesela, 14. ayın tutarını bilmiyorum, buna x desem. Buu, 14. ayı bulmak için 13 çarpıu, hayır olmuyo. Nası yapcam?

A: X dediğin şey ne olacak burda?

Nehir: X dediğim şey, bilmediğim ayın tutarı.

Yukarıdan da görüldüğü üzere Nehir varsayımını rahatlıkla ifade edip herhangi bir ayın ücretini kolaylıkla bulabilmesine rağmen varsayımını genel ifadeye dönüştürmesi istendiğinde hiçbir çaba göstermeden yapamayacağını belirtmiştir. Yapılan yönlendirmeye hangi değişken için bilinmeyen kullanacağını belirtememiş ve sonuç olarak genel bir ifadeye ulaşamamıştır. Uğur ise genel bir ifade elde etmeye yönelik herhangi bir girişimde bulunmamıştır.

Bu sorunun devamındaki “Hangi kurs daha ekonomiktir?” sorusu için ise araştırmaya katılan hiçbir öğrenci genel bir ifadeye ulaşamamış ve ifadeler yalnızca sözel düzeyde kalmıştır. Aşağıda Melek’in kursların karşılaştırılmasına yönelik ifadelerine yer verilmiştir:

A: Peki hangi kursun daha ekonomik olduğuna dair şimdi ne diyebilirsin?

Melek: (Öğrenci duraklıyor) 12. aya kadar ikinci kurs daha ekonomikken, 12. aydan sonra birinci kurs mu daha ekonomik oluyor?

A: 12. ayda durum ne?

Melek: 790.

A: Fark eder mi o zaman 12. ayda?

Melek: Hayır.

A: 12 aydan az gidecek olursan?

Melek: İkinci kursa gidersin çünkü daha az.

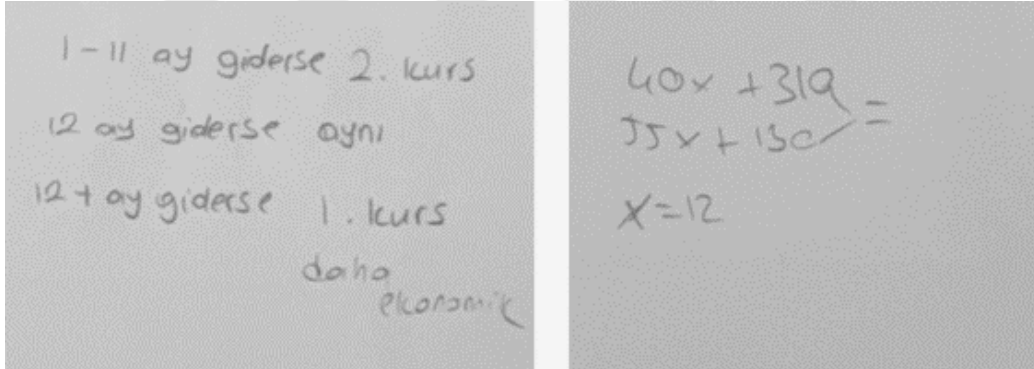
A: 12 aydan daha fazla gidersen?

Melek: Birinci kursu tercih edersin çünkü fiyatı giderek azalıyor.

A: Peki bu duruma ilişkin bir şey yazabilir misin?

Melek: (Düşünüyor) o zaman. Eee $40x + 310$ ee, $55x + 130$ birbirlerine eşittir, x 12'ye.

Buradan da görüldüğü üzere Melek kursların hangisinin ekonomik olacağına ilişkin bir düşünce geliştirmiş ve bu düşüncesini kursların genel ifadelerini kullanarak sembolik bir eşitlikle ifade etmeye çalışmıştır. Soldan sağa doğru sırasıyla Barış ve Melek'in bu süreçteki yazılı ifadeleri Şekil 33'te yer almaktadır.



Şekil 33. Soldan sağa sırasıyla Barış ve Melek'in kursların karşılaştırılmasına ilişkin yazılı ifadeleri.

Şekil 33'te de görüldüğü üzere araştırmaya katılan öğrencilerden sadece Melek her iki kursa ilişkin ulaştığı genel ifadelerini eşitleyeceğini belirterek yazılı olarak ifade etmiştir. 12 aydan önce ikinci, 12 aydan sonra birinci kursun daha ekonomik olacağını ve 12 ayda her iki kursun ekonomik olarak eş değerde olacağını ifade edebilen diğer öğrenciler Melek gibi bir yazılı ifade ortaya koyamamışlardır. Yine de Melek'in yazılı ifadesi, matematiksel doğru kabul edilememektedir. Barış ise Şekil 33'te de görüldüğü üzere düşüncesini matematiksel sembol kullanmadan yazılı olarak ifade etmiştir.

Kısacası, araştırmaya katılan altı öğrenci her iki kursun herhangi bir ayındaki toplam tutar için oluşturdukları varsayımları geliştirip genel bir ifadeye ulaşabilmişlerdir. İki ise iki kursun herhangi bir ayındaki toplam tutarı elde edebilecekleri genel bir ifadeye ulaşamamışlardır. Ayrıca öğrencilerin tamamı, kursların ekonomik olarak karşılaştırılmasına yönelik herhangi bir genel ifadeye ulaşamamışlardır.



4. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

İlgili alanyazında önemi ve işlevi sıklıkla vurgulanan matematiksel düşünme ulusal ve uluslararası matematik öğretim programlarının da ana hedeflerinden biridir. Bu alandaki çalışmalar incelendiğinde, matematiksel düşünmenin farklı tanımlara göre farklı boyutlarının olduğu ve farklı yönleriyle sıklıkla araştırılan bir konu olduğu görülmektedir. Bu araştırmada öğrencilerin beceri temelli sorularda matematiksel düşünme becerileri özel durumlar oluşturma, varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri üzerinden araştırılmıştır. Sadece buna odaklanması öğrencilerin bu süreçteki tıkanma nedenlerini ortaya çıkaramayacağı için öğrencilerin zorluk yaşadıkları durumlar da ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

4.1. Olasılık Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

NCTM (2000, s. 254) kesirlerle ilgili basit bir işlem gibi görünen olasılık hesaplamalarında, öğrencilerin aslında olasılıkla ilgili kavramları anlamak için birçok kavramsal zorlukla baş etmelerinin gerektiğine dikkat çekmektedir. Kazak (2014) da öğrencilerin olasılıkla ilgili sezgi ve deneyimleri sonucunda edindikleri kavramlar ile olasılık teorisinin bu sezgilere ters düşen kavram ve prensiplerinin varlığının öğrencilerin olasılık öğrenmelerini zorlaştırdığını ifade etmektedir. Bu araştırmada olasılık öğrenme alanına yönelik olarak sorulan soru, öğrencilerin bu öğrenme alanında yaşadıkları zorlukları açıkça gözler önüne sermiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin genellikle, dört adet kırmızı topun üç torbaya dağıtılması sürecinde sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Ayrıca çözüm sürecinde farklı özel durumlar oluşturan öğrencilerin, soruda genel ifadelerle olasılık hesabının nasıl yapıldığı verilmiş olmasına rağmen, kırmızı top sayısını beyaz top sayısına oranlayarak olasılık hesabı yaptığı gözlenmiştir. Bazı öğrenciler ise soruda verilen koşullara uygun olacak şekilde torbalara beyaz toplar ekledikten sonra kırmızı top sayılarını torbalardaki toplam top sayılarına oranlamış ancak sadeleştirme yapmayı düşünmeyerek olasılıkların eşit olduğunu başlangıçta görememişlerdir. Gözlenen bu durumlar öğrencilerin kesirler konusuna yönelik kavramsal eksikliklerinin göstergesi niteliğindedir. Kesirler ilköğretim matematiğinin günlük hayatta geniş bir kullanım alanına sahip olan ve kavramsal açıdan oldukça zengin bir konudur (Alacacı, 2014). Aynı zamanda

kesirler konusu, yüzdeler, oran ve orantı, olasılık ve ölçme gibi farklı birçok konu içerisinde de geçmekte ve bu nedenle bu konunun iyi bir şekilde anlaşılması bu konularda da oluşabilecek kavram yanılgılarının önlenmesi için önemli görülmektedir (Bkz. s. 92). Bu noktada araştırmanın katılımcılarının altıncı sınıfın ikinci döneminde yaşadıkları koronavirüs salgını kaynaklı eğitim kesintisi ve ardından yaşadıkları bir yıllık uzaktan eğitim sürecinin öğrencilerin bu konularda öğrenme kaybı yaşamalarına neden olmuş olabileceği düşünülmektedir. Üç aylık yaz tatilinin öğrencilerin matematik bilgilerinde öğrenme kayıpları oluşturduğunu (Arı, 2004); matematikte yaşanan öğrenme kayıplarının cinsiyet, sosyoekonomik düzey, etnik köken ya da öğrencilerin evlerindeki kaynaklar fark etmeksizin tüm öğrencilerde neredeyse eşit olduğunu (Cooper, 2003) ve koronavirüs salgını sonrasında eğitimdeki uzun süreli kesintilerin ve bizzat uzaktan eğitim uygulamalarının öğrencilerde oluşabilecek öğrenme kayıplarını artıracığını (Baz, 2021) belirten farklı araştırmalar mevcuttur. Bu araştırmadaki öğrencileri araştırmanın sürecinden önce de tanıyan ve bizzat matematik derslerini yürüten araştırmacı, öğrencilerin daha önce sorun yaşamadıklarını bildiği kesirler konusunda önemli düzeyde gerileme olduğunu araştırma sürecinde fark etmiştir.

Olasılık öğrenme alanına yönelik soruda öğrenciler birden fazla özel durum oluşturabilmiş, bu özel durumlar yardımıyla ilişkileri keşfetmiş ve varsayımlarda bulunabilmişlerdir. Ulaştıkları varsayımları genel ifadelere dönüştürmede ise zorluklar yaşamakla birlikte öğrencilerin genellemelere varabildiği tespit edilmiştir. Matematiksel düşünme süreçleri ile ilgili alanyazındaki araştırmalarda varsayımda bulunma ve genelleme süreçleri neredeyse aynı anlamı içermektedir. Mason, Burton ve Stacey'nin (1984, s. 70) “varsayımlar kelebekler gibidir, her biri geldiğinde dikkat diğerinden uzaklaşır ve öncekinin izi kaybedilir” ifadesine dayanarak bu araştırmada varsayımda bulunma öğrencilerin soru içerisinde keşfettikleri ilişkileri sözel olarak ifade etmeleri olarak ele alınmıştır. Öğrencilerin bu soruyu çözerken özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde genel olarak zorlanmadıkları, ulaştıkları varsayımları sözel olarak ifade edebilmelerine rağmen cebirsel olarak ifade etmede zorluk yaşadıklarını gösteren sonuçlar, farklı araştırma sonuçlarıyla (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Rivera ve Becker, 2006; Tosun, 2019; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2017) da tutarlıdır.

Genellemeye ulaşma sürecinde sorudaki ilişki fark edilmiş olmasına rağmen bu ilişkiyi sözel olarak doğru bir şekilde ifade edememe, sayısal değişkenlik içermeyen kırmızı top sayılarına “x” denilerek değişkeni hatalı yerde kullanma gibi durumlara rastlanılmıştır. Yine genellemeye ulaşma sürecinde “4 beyaz top” anlamında yazılan “4b” ifadesindeki “b”nin silinerek yerine “x” yazılması ve “1x” ifadesinde x yerine “1” konulduğunda “11” ulaşılacağını da ifade etme gibi durumlar gözlenmiştir. Burada Küchemann (1978) ile Çelik ve Güneş’in (2013) “*harfli sembolü nesne olarak kullanma*” olarak ifade ettiği durum gözlenmiştir. Kat ve kuvvet kavramlarına yönelik olarak iki kırmızı top konulan torbaya “iki a” kadar beyaz top konulacağını ifade ederken “a . a=a²” yazılıp bulunan “a²” ifadesinin “iki a” şeklinde okunması durumu da gözlenmiştir. Fark edilen ilişki ile bu ilişkinin sözel ya da yazılı ifadesinin aynı olmaması varsayımların genellemelere dönüştürülme sürecini de etkileyebilmektedir.

4.2. Veri İşleme Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

Daire grafiği, bir bütün ile parçalarını orantılı bir şekilde temsil etmek için kullanılan, veri gruplarını bir bütün olarak tek parçada gösterebilen ve günlük yaşamda da sıkça karşılaşılan bir grafik türü olması sebebiyle matematik öğretiminde önemli bir yere sahiptir (Şahin, 2019). Bu öğrenme alanına yönelik olarak sorulan daire grafiği sorusunda öğrencilerden, farklı kitap türlerinin merkez açı ölçülerinin verildiği bir daire grafiğinden hareketle bu kitap türlerinin kaçar tane olacağına ilişkin uygun sayılar bulmaları istenmektedir. Çözüm sürecinde öğrenciler genellikle ortak bölen ve ortak kat kavramlarını karıştırmış ya da birbirinin yerine kullanmışlardır. Bu durum sözel ifade eksikliğinden kaynaklanabileceği gibi öğrencilerin ortak kat ve ortak bölen kavramlarına yönelik kavramsal düzeyde eksiklikleri olabileceğini de düşündürmektedir. Sorunun çözümünde bazı öğrenciler tek bir yöntem izlerken bazı öğrenciler birden fazla yöntem kullanmışlardır. Öğrencilerin kullandıkları yöntemleri tercih sıklıklarına göre ortak bölen kullanma, ortak kat kullanma, kesir kavramı ile birlikte ortak kat kullanma ve orantı kurma şeklinde sıralamak mümkündür. Orantı kurma yoluyla kitap türlerinden birine rastgele bir sayı vererek ilerleyen bir öğrencinin, çarpım (içler ve dışlar) durumundaki sayıları sadeleştireceğini belirtmesi ve çözüm sürecinde tam katlar göremediği durumlarda sayıları değiştirme yoluna gitmesi öğrencinin denklem çözme konusunda eksiklikleri olduğunu ortaya

çıkarmıştır. Diğer bir öğrenci kesir bağlamı kullanarak verilen grafiğe uygun birden fazla özel durum tespit ettikten sonra kitap türlerinin ortak bölenlerini kullanarak yeni özel durumlar bulmuş ve yeni varsayımına odaklanarak önceki durumların uygun olmadığını ifade etmiştir. Bu durum Mason, Burton ve Stacey'nin (2010) varsayımların kaydedilmedikleri takdirde kolaylıkla unutabileceğini ifade ederken yaptığı “kelebekler” benzetmesini akla getirmektedir. Aynı öğrenci varsayımını sözel olarak ifade etmiş ancak bu varsayımı genel ifadeye dönüştürürken de matematiksel olarak uygun olmayan kişisel semboller kullanmıştır. Çözüm sürecinde kullandığı kesirleri okurken de matematiksel olarak uygun olmayan ifadeler kullanan bu öğrenci zorluk yaşamadan verilen grafiğe uygun özel durumlar tespit edebilmesine rağmen uygun bir genel ifadeye ulaşamamıştır. Alacacı'nın (2014) “kesir öğretiminde altın üçgen” olarak ifade ettiği öğrencilerin kesirlerde model, sembol ve sözlü ifade arasındaki esnek bir şekilde geçiş yapabilme becerisi kesir anlayışının gelişmesi için önemlidir. Buradan hareketle öğrencinin kesirler konusuna ilişkin temel kavramsal unsurları iyi bir şekilde bilmediği söylenebilir.

Veri işleme öğrenme alanına yönelik sorulan daire grafiği sorusunda öğrencilerin tamamı birden fazla özel durum tespit etmiş ve varsayımlarda bulunabilmişlerdir. Ancak ulaştıkları varsayımları genel ifadeye dönüştürme noktasında öğrenciler zorluklar yaşamış ve öğrencilerin ancak yarısı uygun bir genellemeye ulaşabilmiştir. Bu bulgular matematiksel düşünme süreçleri konulu farklı araştırmaların (Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Rivera ve Becker, 2006; Tosun, 2019; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2017) sonuçlarıyla uyumludur.

Daire grafiği sorusunun, Ekinci ve Bal'ın (2019) beceri temelli sorular konulu araştırmalarında ifade ettiği gibi birden fazla kazanımı içeren ve günlük yaşamla bağlantılı olan bir soru olduğu öğrencilerin kullandıkları farklı çözüm yöntemleri üzerinden de görülmektedir.

Öğrencilere herhangi bir verinin daire grafiğindeki diliminin merkez açı ölçüsü ile bu verinin sayısal değeri verildiğinde, öğrenciler oran ve orantı kullanarak diğer verilerin sayısal değerlerini daha kolay tespit edebilmektedir. Ancak bu sorudaki gibi kitap türlerine ait sayısal değerler verilmeyip sadece daire grafiğindeki merkez açılar

verildiğinde, araştırma grubumuzda da görüldüğü üzere öğrenciler ciddi sıkıntılar yaşamaktadırlar.

4.3. Sayılar ve İşlemler Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

Van de Walle, Karp ve Bay-Williams (2019) ortaokul öğrencilerinin doğal sayıların tamsayılara ve kesirlerin rasyonel sayılara genişletilmesi dahil olmak üzere sayı sistemini daha bütüncül olarak anlamaları gerektiğini ifade etmektedir. Sayılar ve işlemler öğrenme alanına yönelik olan üslü ifadeler sorusu sayı sistemini anlamayı, üslü ifadelerle işlem becerisini ve tam kare sayı kavramını bilmeyi gerektiren ve aynı zamanda birden fazla koşul barındırdığı için de dikkat isteyen bir sorudur. Bu nedenle sorunun Ekinci ve Bal'ın (2019) beceri temelli sorularla ilgili ifade ettiği gibi birden fazla kazanımı barındıran ve üst düzey düşünme becerisi gerektiren bir soru olarak da değerlendirilmesi mümkündür.

Araştırmaya katılan öğrencilerin yarısı soruyu dikkatle okumadan ve yeterince anlamadan çözüme başlamış ve bu nedenle çözüm sırasında soruya tekrar geri dönme ihtiyacı duymuşlardır. Koşul sayısının fazla olduğu bu soruda öğrencilerin yeterince dikkatli olmadığı gözlenmiştir. Çözüm sürecinde öğrencilerin yarısı üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanarak, diğerleri ise verilen üslü ifadeleri tamsayı ya da rasyonel sayılara çevirerek hareket etmişlerdir. Üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanmayan bu öğrenciler sorunun üst kısmında yer alan üslü ifadelerle işlem özelliklerinin genel ifadelerle açıklandığı kısma da dikkat etmemişlerdir. Çözüm sürecinde üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanan öğrenciler ise soruda verilen sayılar arasındaki ilişkileri daha kolay bir şekilde fark etmiş ve çözüm süreçleri diğer öğrencilere nazaran daha kısa olmuştur. Üslü ifadeler konusu sonrası yapılan görüşmelerde ortaya çıkan üslü ifadelerle işlem özelliklerinin kullanılmaması durumunun nedeni, bu konunun işlendiği sırada sınıfta iki koronavirüs vakası çıkmış olması nedeniyle uygulanan 14 günlük sınıf karantinasında yapılan uzaktan eğitim süreci olabilir. Ayrıca üslü ifadelerle ilgili kazanımlar bir alt sınıf düzeyinde de uzaktan eğitimle alınmış, MEB'in talimatıyla yüz yüze veya uzaktan herhangi bir sınav yapılmadığı için öğrencilerin bu konulardaki gelişimleri takip edilememiş ve gerekli önlemlerin alınamamış olması diğer bir neden olabilir.

Fischbein (1987) ve Ball (1990) öğrencilerin negatif sayıları karşılaştırırken yaşadıkları güçlükler ve yaptıkları hataların temelinde pozitif sayılara has özelliklerin negatif sayılara da genellenebileceği düşüncesinin yattığını ifade etmektedirler (akt. Işıksal Bostan, 2014). Negatif sayıların matematik dünyasındaki kabulünün de 19. yüzyılda gerçekleştiği (Işıksal Bostan, 2014) düşünüldüğünde öğrencilerin negatif sayılara yönelik kavramsal düzeyde zorluklar yaşaması oldukça normal görünmektedir. Dolayısıyla üslü ifadelerle özgü zorlukların beraberinde negatif üs kavramı da öğrencilerin üslü ifadeler sorusunda zorluk yaşamalarının bir nedenidir. Bu çalışmada ortaya çıkan bir diğer sonuç da negatif kuvvetlerle ilgilidir. Öğrencilerin hiçbiri kendilerine sorulmadan önce E ve F için 2'nin negatif kuvvetlerini denememiştir. Bunun nedeni öğrencilerin pozitif kuvvetlere daha fazla aşina olması ya da öğrencilerin negatif kuvvetlerle ilgili yaşadıkları zorluklar olabilir. Nitekim sorunun çözüm sürecinde özellikle üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanmayan öğrencilerin negatif kuvvetlerle ilgili olarak yaşadıkları zorluklar ve verilen negatif kuvvetleri pozitif kuvvetlerle değiştirme istekleri de bunu desteklemektedir. Üslü ifadeler konusuna yönelik kavram yanılgıları literatüründe sayıların negatif kuvvetlerini belirleyememe, üslü ifadelerde dört işlem yaparken güçlükler yaşama ve taban ile üssü çarparak sonuç bulma gibi durumlar mevcuttur (Baran Bulut, Güveli ve Güveli, 2021). Araştırma sürecinde de farklı öğrencilerde belirtilen bu kavram yanılgılarıyla karşılaşılmıştır. Bazı öğrencilerin üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanmadan soruyu çözmeye çalışmış olmalarının nedeni kavram yanılgıları kaynaklı olabilir.

Soruda verilen negatif üslü ifadeleri rasyonel sayılara çeviren öğrenciler kat ve kuvvet terimlerini karıştırma, negatif kuvvetli üslü ifadelerde taban ve üssü çarpma, tamsayıları hatalı çarpma, rasyonel sayıları hatalı okuma, rasyonel sayılarla çarpma işlemini unutma gibi zorluklar yaşamışlardır. Özellikle negatif üslü ifadeleri rasyonel sayılara çeviren öğrencilerin yaşadığı rasyonel sayılarla çarpma işlemine yönelik sorunlar ile öğrencilerin bu süreçteki yazılı ve sözlü ifadeleri öğrencilerin rasyonel sayılarla üslü ifadeler arasındaki ilişkiyi anlamadığını, dolayısıyla sayı sistemini bütüncül olarak kavrayamadıklarını göstermektedir. Bir öğrencinin çözüm sürecindeki “Üslü ile kesiri nasıl çarpıcam ki?” ifadesi öğrencilerin rasyonel sayılar ile üslü ifadelerin birbirinden ayrık olduğunu düşündüğünü ortaya çıkarmaktadır. Bu

öğrenciler Van de Walle, Karp ve Bay-Williams'ın (2019) ifade ettiği gibi kesirleri sayıdan ziyade bir obje (grupların ya da nesnelerin parçası) olarak görüyor olabilir. Alacacı (2014) kesirlerle ilgili temel kavramları tam olarak geliştiremeyen öğrencilerin, hem kesirlerle hem de kesirlerin genelleştirilmiş hali olan rasyonel sayılarla işlemler yaparken kavram yanlışları oluşturabildiğine dikkat çekmektedir. Bu araştırma sırasında karşılaşılan rasyonel sayıların hatalı okunması ve rasyonel sayılarla çarpma işlemi hatalarından hareketle öğrencilerin kesir ve kesirlerin genelleştirilmiş hali olan rasyonel sayılar konularına yönelik kavram yanlışlarının olduğu söylenebilir. Dolayısıyla öğrencilerin rasyonel sayılarla ilgili yaşadıkları sorunlar çözülmeden üslü ifadeler konusunun öğrenilmesi bu konunun anlamlı bir bütün haline gelmemesine neden olmuş olabilir. Yine koronavirüs sürecinde yaşanan uzun süreli eğitim kesintisi ile bizzat uzaktan eğitim süreci ve öğrencilerin öğrenme düzeylerinin gözlenemeyip bu konuda öğrencilere gerekli dönütlerin verilememesi tüm bu durumların nedeni olabilir.

Araştırmaya katılan tüm öğrenciler (negatif kuvvetlerde zorluk yaşayanlarla üslü ifadelerin kısa bir tekrarının ardından) E ve F için birden fazla özel durum bulabilmişlerdir. Öğrenciler ulaştıkları E ve F değerlerini inceleyerek ilişkileri keşfetmiş ve varsayımda bulunma basamağını da gerçekleştirebilmişlerdir. Öğrenciler soruda E ve F değerleri 2'nin kuvveti olarak istendiği için buldukları değerleri üslü olarak ifade ettiklerinden üslerde oluşan örüntüyü fark edebilmişlerdir. “*İkinin çift kuvveti*”, “*ikinin tek kuvveti*”, “*üsler ikişer artarak gidiyor*” ya da tamsayıya çevirirken “*4 ile çarpılarak gidiyor*” şeklindeki ifadeler öğrencilerin ilişkileri fark ettiğini ve varsayımda bulunabildiklerini göstermektedir. Genelleme basamağında ise öğrenciler diğer öğrenme alanlarında olduğundan daha fazla zorluk yaşamışlardır. Bu durum üslü ifadeler konusunun öğrencileri zorlayan bir konu olmasından kaynaklanıyor olabilir. Öğrencilerin genel ifadelere ulaşırken zorluk yaşadıkları bulgusu, matematiksel düşünme süreçleri üzerine yapılan farklı araştırmalarla da tutarlıdır (Akarsu-Yakar ve Yılmaz, 2019; Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Rivera ve Becker, 2006; Tosun, 2019; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2017). Öğrencilerin üslü ifadeler sorusunda genelleme sürecinde yaşadıkları bu zorluğun nedeni ulaştıkları ya da fark ettikleri ilişkilerin üslü ifadelerin kuvvetlerinde olması olabilir. Yalnızca iki öğrenci sorunun ana hedefi olan tamkare ifadelerin çift kuvvetli

olması gerektiği varsayımını keşfedip genel bir ifadeye ulaşabilmişken diğer öğrenciler ulaştıkları varsayımları genel ifadeye dönüştürememişlerdir. Oysa tüm öğrenciler E değerleri için de negatif kuvvetler haricinde tamkare ifadelerle ulaşmış ve E değeri için “2'nin çift kuvvetidir” varsayımını ifade edebilmiştir. Buna rağmen ulaştıkları tamkare ifadelerle kullandıkları E değerleri arasındaki ilişkiyi fark edememişlerdir. Genellemeye ulaşamayan öğrencilerde ulaştığı varsayımı genel ifadeye dönüştürmeye çalışırken bilinen bir değeri değişkenle ifade etme, çözüm yapılan kâğıtta belirli bir düzen takip etmeme, buldukları sonuçlar için kişisel notlar almama ve sonuç olarak ilişkileri keşfetmekte zorluk yaşama gibi durumlar gözlenmiştir. Sorunun çözüm sürecinde tamkare ifadeye ulaşmaya çalışırken bulunan sonucun karekök içine alınıp eşitliğin devam ettirilmesi ve eşitlik işaretinin hatalı kullanımına da rastlanmıştır. Araştırmaya katılan iki öğrenci ulaştıkları varsayımları farklı tabanlara genişletmeyi düşünerek hareket etmiş ve tamsayıların çift kuvvetlerinin tamkare olmak zorunda olduğunu keşfetmişlerdir. Sorunun hedefi olan bu varsayımına ulaşan öğrencilerden üslü ifadelerle işlem özelliklerini kullanma becerisi yüksek olan genel ifadeye ulaşabilmiş, diğeri genel ifadeye ulaşmak için çabalamak istememiştir. Bu öğrencinin genellemeye ulaşmak için çaba göstermeme nedeni değişken kavramına yönelik sorun yaşaması olabilir.

4.4. Cebir Öğrenme Alanına Yönelik Sonuçlar ve Tartışma

Cebir matematiğin dili olmasının yanı sıra bir düşünme aracı, bir problem çözme aracı ve aynı zamanda bir okul dersidir (Dede ve Argün, 2003). Cebir aynı zamanda matematiğin her dalıyla sıkı bir ilişkisi bulunan bir öğrenme alanıdır. Birçok farklı alandaki kullanımı dolayısıyla cebir hayatın her alanında öğrenilme ihtiyacını hissettirmektedir.

Cebir öğrenme alanına yönelik olarak sorulan soruda öğrencilerden, kayıt ücreti ve aylık ücretleri farklı olan iki farklı kursa ait farklı aylardaki toplam tutarların bulunması ve iki kursun ekonomik olarak karşılaştırılması istenmiştir. Araştırmaya katılan tüm öğrenciler -başlangıçta soruyu tam anlayamama kaynaklı sorun yaşayan öğrenciler bulunmakla birlikte- rahatlıkla her iki kursa ait farklı aylardaki toplam tutarları bulabilmişlerdir. Verilen soru bağlamının günlük yaşamla ilişkili olması öğrencilerin zorluk yaşamamalarının kaynağı olabilir.

Her iki kurstaki 12 aylık toplam tutarın hesaplanmasında öğrencilerin çoğu kayıt ücretine kaç ay gidilecekse o kadar aylık tutar ilave edeceklerini; bazı öğrenciler ise birinci ayda ödenen toplam tutara kaç ay gidilecekse o sayının bir eksiği kadar aylık tutar ekleyeceğini ifade etmişlerdir. Bir öğrencinin 12 aylık toplam tutar hesabında ise orantısal akıl yürütme gözlenmiştir. Sonuç olarak araştırmaya katılan tüm öğrenciler her iki kursa ait birden fazla ayın toplam ücretlerini hesaplayarak özel durumlar üzerinde çalışma sürecinde başarılı olabilmışlerdir. Bir öğrenci hariç tüm öğrenciler hesapladıkları ayların toplam tutarları ile istenen ayın sayısı arasında ilişki kurarak varsayımda bulunabilmiştir. Geri kalan öğrenci ise orantısal akıl yürütme üzerinde yaptığı düzeltmelerle varsayımlar oluşturmuştur. Araştırmaya katılan öğrencilerin çoğu ulaştıkları varsayımları kullanarak kursların her birine ait genel ifadelere ulaşabilmiştir. Cebir sorusunda iki kursa ait herhangi bir aydaki tutara ulaşılmasını sağlayan genel ifadeye ulaşabilen öğrenciler bu aşamada diğer öğrenme alanlarındaki gibi zorluk yaşamamışlardır. Bu noktada diğer araştırmalarla bir tutarlılık söz konusu değildir (Akarsu-Yakar ve Yılmaz, 2019; Arslan ve Yıldız, 2010; Keskin, Akbaba-Dağ ve Altun, 2013; Rivera ve Becker, 2006; Tosun, 2019; Yıldırım, 2015; Yıldırım ve Yavuzsoy Köse, 2017). Araştırmaya dahil edilen farklı öğrenme alanlarına yönelik sorularda genellemeye ulaşan öğrenci sayısı en fazla cebir öğrenme alanında olmuştur. Bu durumun nedenleri arasında ders kitaplarında cebir öğrenme alanına sıklıkla örüntüler odaklı giriş yapılması, sorunun günlük yaşam bağlantılı olması ve bu tarz soruların derslerde sıklıkla çözülmesi sayılabilir.

Soruda öğrencilerden ayrıca iki kursun ekonomik olarak karşılaştırılması istenmiştir. Tüm öğrenciler 12. ayda her iki kursun toplam tutarlarını hesaplamalarına rağmen bazıları bu tutarların eşit olduğunu fark edememişlerdir. Bazı öğrenciler bu tutarların eşit olduğunu fark ettiklerinde bir tereddüt yaşamış, biri “*Yanlış mı yaptık?*” diyerek yaşadığı tereddütü ifade etmiştir. Araştırmaya katılan öğrencilerin çoğu iki kursta da belirledikleri aynı aydaki toplam tutarları karşılaştırmış ve doğrudan ikinci kursun daha ekonomik olduğunu ifade etmişlerdir. Sadece iki öğrenci birden fazla ayı inceleyerek bu soruya cevap vermiştir. Bu öğrencilerden biri kursların toplam tutarlarının gittikçe birbirine yaklaştığını ifade etmiştir, diğeri ise zaten bulmuş olduğu ilk 12 aylık ücreti kıyaslayarak bu sonuca varmıştır. Hangi kursun daha ekonomik olduğuna yönelik olan bu ek soruya ilişkin hiçbir öğrenci genel bir ifadeye

ulaşamamıştır. Sadece bir ğrenci iki kurs için yazdığı genel formüllerin $x=12$ olduğunda eşit olacağını belirtmiş ve bu sözel ifadesini yazılı hale getirmiştir. Öğrencilerin iki kursun karşılaştırılması sorusunda zorluk yaşamalarının nedeni uzaktan eğitim sürecinde yaşananlar olabileceği gibi araştırmanın yapıldığın sırada henüz öğrenilmemiş olan doğrusal denklemler ve eşitsizliklerle ilgili kavramlara yönelik bilgi eksiklikleri olabilir.

Matematikte rntler her öğrenme alanında uygulama alanı olan bir kavram olsa da ortaokul matematik ders kitaplarında ve kaynak kitaplarda çoğunlukla cebir öğrenme alanında ön plana çıkmaktadır. Cebir ğrenme alanı da tüm öğrenme alanlarıyla bütünleşik bir yapıya sahiptir. Matematiksel düşünme süreçlerinin aktif olabilmesi için öğrencilerin belirli bir problem durumunda özel durumlar bulup bunlar arasındaki örüntüleri ya da ilişkileri keşfetmeleri ve buradan hareketle varsayımlara ulaşmaları gerekmektedir. Bir sonraki süreçte ise ulaşılan varsayımların genel ifadelere dönüştürülmesi gerçekleşmektedir. Ortaokul matematik dersleri içerisinde her öğrenme alanında örüntüler odaklı ğretim yapılması öğrencilerin karşılaştıkları problem durumlarında daha sistematik bir şekilde ilişki aramalarını sağlayacak ve böylece genelleme yapma ve matematiksel düşünme becerilerinin gelişmesine katkıda bulunacaktır.

MEB tarafından 2010 yılında hayata geçirilen Fırsatları Artırma ve Teknolojiyi İyileştirme Hareketi [FATİH] projesi sonrasında Türkiye'nin neredeyse tüm okullarında ve sınıflarında etkileşimli tahtalar eğitime dahil edilmiştir. Başıbüyük, Erdem, şahin, Gökkurt ve Soylu (2014) etkileşimli tahtaların kullanımı konusunda yaptıkları araştırma neticesinde öğretmenlerin müfredat yoğunlukları ve sınav odaklı ğretim nedeniyle etkileşimli tahtayı amacına uygun olarak kullanamadıkları ve etkileşimli tahta kullanımının öğrencilerin not tutma becerilerini olumsuz etkilediği sonuçlarına ulaşmışlardır. Uzaktan eğitim sürecinde kısalan ders saatleri nedeniyle öğretmenlerin müfredat yetiştirme kaygıları, öğrencilerin not tutmasına yeterli önemin verilmemesine neden olmuş, dolayısıyla öğrencilerin not tutma becerisi etkileşimli tahtaların etkisinin ardından uzaktan eğitim sürecinde de olumsuz yönde etkilenmiştir. Bu süreçte öğrencilerin defter kullanma düzenleri takip edilememiş, dijital olarak verilen ödevler yine dijital olarak yapılmış, öğrenciler bu ödevleri düzenli bir şekilde kaydetme gereği duymamış ve öğrencilerin çoğu dersleri izleyici pozisyonunda takip

etmiştir. Dolayısıyla uzaktan eğitim süreci öğrencilerin not tutma becerilerinde de gerilemeye neden olmuştur. Düzenli not tutma alışkanlığının olmaması öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine de yansımaktadır. Örüntülerin keşfi sistematik bir yaklaşımla ve bir düzen görmeye mümkün olmaktadır. Ancak bu araştırmanın çalışma grubunda da görüldüğü üzere öğrencilerin çoğu soru çözümlerini çok düzensiz bir şekilde yapmaktadırlar. Ayrıca Mason, Burton ve Stacey'nin (2010) de önerdiği üzere herhangi bir problem durumuyla uğraşılırken keşfedilen ilişkilerin de yazılı olarak kaydedilmesi matematiksel düşünmeye katkı sunmaktadır.

4.5. Öneriler

Yağdıran (2018) okul matematiğinde matematiksel düşünme süreçlerini içeren etkinliklerin bu süreçlerin gelişimini olumlu yönde etkilediğini belirtmektedir. Bu nedenle matematiksel düşünmenin gelişimine katkı sağlayacak öğrenme ortamlarının oluşturulması, etkinliklerin tasarlanması ve uygulanması gerekmektedir.

Bu araştırma koronavirüs salgınında eğitim süreçleri uzun süre kesintiye uğramış ve yedinci sınıfı tamamen uzaktan eğitimle geçirmiş olan sekizinci sınıf öğrencileriyle yürütülmüştür. Araştırmacı, öğrencilerin altıncı sınıftan itibaren matematik derslerini yürüten ve araştırma öncesindeki akademik başarılarının da farkında olan bir öğretmendir. Araştırma öncesinde yaşanmış olan bu sürecin araştırmanın sonuçlarını etkilediği düşünülmektedir. Bu gibi bir salgın ya da özel durum yaşamamış öğrencilerde farklı sonuçlar elde edilebileceği düşüncesiyle benzer bir araştırmaların yapılması önerilebilir.

Bu çalışmada sekizinci sınıf düzeyinde dört farklı öğrenme alanına yönelik birer soru kullanılmıştır. Sadece bir öğrenme alanına yönelik birden fazla soru kullanılarak seçilen öğrenme alanında öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri incelenebilir. Örneğin oldukça geniş kapsamı bulunan sayılar ve işlemler öğrenme alanı bu çalışmada öğrencilerin en çok zorluk yaşadığı öğrenme alanı olarak öne çıkmıştır. Reel sayılar kavramının da kazanıldığı sekizinci sınıf düzeyinde bu öğrenme alanına ilişkin belirlenecek sorularla öğrencilerin sayı sistemine ilişkin algıları hakkında daha derin bilgiler edinilebilir.

Bu araştırma kapsamında geometri ve ölçme öğrenme alanı incelenmemiştir. Konu kapsamının daha dar tutulması ilgili öğrenme alanına yönelik daha derin bilgi

edinilmesini sağlayabileceği düşüncesiyle geometri ve ölçme alanı veya yalnızca bir öğrenme alanı üzerinden benzer araştırmalar gerçekleştirilebilir.

İlgili alan yazında matematiksel düşünme süreçlerinin duyuşsal bileşenleri üzerinde yeterli araştırmanın olmadığı görülmektedir. Farklı matematik konu ve/veya kavramları üzerinde matematiksel düşünmenin duyuşsal bileşenlerine odaklanılarak öğrencilerin bu süreçlerdeki duygu ve düşünceleri araştırılabilir.

Güncel bir konu olması sebebiyle beceri temelli sorularda öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri daha farklı sorular üzerinde de araştırılabilir. Basına ve sosyal medyaya “zor oldukları” gerekçesiyle oldukça fazla yansıyan beceri temelli sorularda öğrencilerin matematiksel düşünme süreçleri beraberinde öğrencilerin bu sorular hakkındaki düşünceleri de araştırılabilir. Böylece öğrencilerin ifadeleriyle ne tür durumlarda zorluk yaşadıklarına ilişkin bilgilere de ulaşılabilir.

Bu araştırmada ulaşılan, öğrencilerin beceri temelli sorularda soruyu anlamadan çözüm sürecine girdiklerine ilişkin bulgular öğrencilerin beceri temelli sorulardaki genel tutumunu da gösterir niteliktedir. Bu nedenle öğretmenlerin derslerinde sorunun anlaşılması aşamasına gereken önemi vermeleri sorunun çözüm süreci için de oldukça önemlidir. Sınav odaklı öğretim süreci ve belirli süreler içerisinde öğretim programını yetiştirme kaygısı öğretmenlerin bu aşamaya gerekli önemi verememelerine neden olmaktadır. Burton’a (1984), Mason ve arkadaşlarına (2010) ve Polya’ya (2017) göre de problemin anlaşılması aşaması oldukça önemlidir ve en fazla zaman ayrılması gereken kısımdır. Bu aşamaya yönelik olarak Mason, Burton ve Stacey’nin (2010) önerdikleri “Ne biliyorum?”, “Ne istiyorum?” ve “Nereden başlamalıyım?” rubriklerinin (Bkz. Şekil 4.) dersler sürecinde sürekli kullanımı öğrencilerin karşılaştıkları problem durumlarında nasıl hareket edeceklerini de öğretici nitelikte olacaktır.

2018 LGS itibarıyla eğitim sistemimize giriş yapan beceri temelli sorularda sorunun ilgili olduğu konuya ait genel kural veya formüller soru bağlamı öncesinde verilmektedir. Bu araştırmada öğrencilerin genel olarak bu kısımları okumadıkları ve kullanmadıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin soru içerisinde verilmiş olan bu kuralları daha rahat anlamlandırmalarının sağlanması için öğretmenlerin öğretim süreçlerinde soru içerisinde verilen bu kısımlara dikkat çekmeleri ve bu genel ifadeleri açıklayıcı ifadeler kullanmaları etkili olabilir.

Bu araştırmada öğrencilerin yarısının kesirleri obje/nesne ya da bir bütünün parçası olarak gördüğü bulgusuna ulaşılmıştır. Yedinci sınıf düzeyinde kesir kavramı rasyonel sayılara genişletilirken rasyonel sayıların sayı sistemi içerisindeki yerine gerekli vurgunun yapılması öğretmenlere önerilebilir.



KAYNAKÇA

- Akarsu Yakar, E. ve Yılmaz S. (2019). “Matematiğin Üç Dünyası” teorisine göre 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme becerilerinin procept düzeyleri. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi*, 10(1), 1–13.
- Akarsu Yakar, E. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin ve matematiksel dil becerilerinin matematiğin üç dünyası kuramsal çerçevesi açısından incelenmesi*. (Yayınlanmamış doktora tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Alacacı, C. (2014). Öğrencilerin Kesirler Konusundaki Kavram Yanılgıları. E. Bingölbali ve M. F. Özmentar (Ed.) *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* içinde (s. 63-95). Ankara: Pegem Akademi.
- Altun, M. (2006). Matematik Öğretiminde Gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*. XIX(2), 223–238.
- Altheide, D. L. (1987). Ethnographic content analysis. *Qualitative Sociology*, 10(1), 65–77.
- Arı, A. (2004). Yaz tatili öğrenme kaybı. *Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24(2), 243–258.
- Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11. Sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17–31.
- Aygün, Y. İ. (2019). *Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve tanı konulmamış öğrencilerin farklı ortamlarda matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Amasya Üniversitesi, Amasya.
- Aygün, Y. İ., Orbay, K. ve Aydın Güç, F. (2021). Üstün yetenekli tanısı konulmuş ve konulmamış öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerinin karşılaştırılması. *Milli Eğitim Dergisi*, 50(229), 337–362.
- Bahadır, K. (2020). *Matematiksel düşünmenin sınıf ortamına yansımaları: 8. sınıf örneği*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Giresun Üniversitesi, Giresun.
- Bal, A. P. ve Dinç Artut, P. (2020). Developing the Mathematical Thinking Scale: Validity and Reliability. *Cukurova University Faculty of Education Journal*, 49(1), 278–315.
- Ball, D. L. (1990). *With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association Boston, USA.

- Baran-Bulut, D., Güveli, E. ve Güveli, H. (2021). Üslû ifadeler konusu ile ilgili üç aşamalı kavram testi geliştirme çalışması. *Cumhuriyet International Journal of Education*, 10(3), 1150-1167. <http://dx.doi.org/10.30703/cije.819260>
- Başbüyük, K., Erdem, E., Şahin, Ö., Gökkurt, B. ve Soylu, Y. (2014). Matematik Derslerinde Akıllı Tahta Kullanımına İlişkin Öğretmen ve Öğrenci Görüşleri. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi*, 4(2), 72-97. DOI: <http://dx.doi.org/10.17984/adyuebd.78901>
- Baz, B. (2021). COVID-19 Salgını Sürecinde Öğrencilerin Olası Öğrenme Kayıpları Üzerine Bir Değerlendirme. *Temel Eğitim Dergisi*, 3(1), 6-19. <https://doi.org/10.52105/temelegitim.3.1.3>.
- Biber, A. Ç., Tuna, A., Uysal, R. ve Kabuklu, Ü. N. (2018). Liselere Geçiş Sınavının Örnek Matematik Sorularına Dair Destekleme ve Yetiştirme Kursu Matematik Öğretmenlerinin Görüşleri. *Asya Öğretim Dergisi*, 6(2), 63-80. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/aji/issue/41386/428527>
- Burger, E. B. ve Starbird, M. (2005). *The heart of mathematics: An invitation to effective thinking*. Emeryville, CA: Key College Publishing.
- Burton, L. (1984). Mathematical Thinking: The Struggle for Meaning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(1), 35-49. doi:10.2307/748986
- Cai, J. (2003). Singaporean students' mathematical thinking in problem solving and problem posing: An exploratory study. *International Journal of Mathematical Education* 34(5), 719-737.
- Çelik, D. (2016). Matematiksel düşünme. E. Bingölbalı, S. Arslan ve İ. Ö. Zembat (Ed.). *Matematik eğitiminde teoriler içinde* s. 17-42. Ankara: Pegem Akademi.
- Çelik, D. ve Güneş, G. (2013). Farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin harfli sembolleri kullanma ve yorumlama seviyeleri. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri*, 13(2), 1157-1175.
- Çeziktürk Kipel, Ö. (2016). Kâğıt şeritle düzgün beşgen origamisi: Öğrenci cevaplarının matematiksel düşünce açısından içerik analizi. *Kalem Eğitim ve İnsan Bilimleri Dergisi*, 7(1), 159-182. DOI: 10.23863/kalem.2017.79
- Cooper, H. (2003). Summer learning loss: The problem and some solutions. *ERIC Digest*. Erişim: <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED475391.pdf>
- Cooper, H., Nye, B., Charlton, K., Lindsay, J., ve Greathouse, S. (1996). The effects of summer vacation on achievement test scores: A narrative and meta-analytic review. *Review of Educational Research*, 66(3), 227-268. doi: 10.3102/00346543066003227
- Coşkun, S. (2012). *Üst düzey matematiksel düşünme süreçlerinin sorgulayıcı problem çözme ve öğrenme modeline göre tasarlanmış çalışma yaprakları yardımıyla*

- incelenmesi. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya.
- Creswell, J. (2013). *Araştırma deseni: Nitel, nicel ve karma yöntem yaklaşımları* (S. B. Demir, Çev.). Ankara: Eğiten Kitap.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, öğrencilere niçin zor gelmektedir? *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24. 180–185.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2004). Matematiksel düşüncenin başlangıç noktası: matematiksel kavramlar. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Yönetimi*, 39(39), 338–355.
- Dewey, J. (2019). *Okul ve Toplum*. (H. A. Başman, çev.). Ankara: Pegem Akademi.
- Dreyfus, T. (2002). The nature of advanced mathematical thinking. In R. J. Sternberg ve T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 253–284). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Durmuş Akgeyik, S. (2019). *PISA 2015 uygulamasında Türk öğrencilerin matematiksel düşünme süreçlerine ilişkin durumu*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Ekinci, O. ve Bal, A. P. (2019). 2018 Yılı Liseye Geçiş Sınavı (LGS) Matematik Sorularının Öğrenme Alanları ve Yenilenmiş Bloom Taksonomisi Bağlamında Değerlendirilmesi. *Anemon Muş Alparslan Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi*, 7(3), 9–18. DOI: 10.18506/anemon.462717
- Erden, B. (2020). Türkçe, Matematik ve Fen Bilimleri Dersi Beceri Temelli Sorularına İlişkin Öğretmen Görüşleri. *Academia Eğitim Araştırmaları Dergisi (AJER)*. 5(2), 270–292.
- Erdener, E. (2009). Vygotsky'nin düşünce ve dil gelişimi üzerine görüşleri: Piaget'e eleştirel bir bakış. *Türk Eğitim Bilimleri Dergisi*. 7(1), 85–103.
- Ersoy, E. ve Güner, P. (2014). Matematik öğretimi ve matematiksel düşünme. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, 3(2). 102–112.
- Ersoy, E. ve Başer, N. (2016). Matematiksel düşünme ölçeğinin geliştirilmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 21(4), 1471–1486.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics: An Educational Approach*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Co.
- Fraivilling, J., Murphy, L. A. ve Fuson, K. C. (1999) Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics reform classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 148–170.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. The Netherlands: Riedel Publishing Company.

- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (Eds), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 517–545). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers
- Goos, M. ve Kaya, S. (2020). Understanding and promoting students' mathematical thinking: a review of research published in ESM. *Educational Studies in Mathematics*, 103, 7–25. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09921-7>
- Güler, M., Arslan, Z. ve Çelik, D. (2019). 2018 Liselere Giriş Sınavına İlişkin Matematik Öğretmenlerinin Görüşleri. *Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 16(1), 337–363. Retrieved from <https://dergipark.org.tr/tr/pub/yyuefd/issue/50700/660875>
- Gürten, E., Demirkaya, A. S. ve Doğan, N. (2019). Uzmanların PISA ve Timms Sınavlarının Eğitim Politika ve Programlarına Etkisine İlişkin Görüşleri. *Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, (52), 287–319. DOI: 10.21764/maeuefd.599615
- Harel, G. ve Sowder, L. (2005). Advanced mathematical thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, 7(1), 27–50.
- İşıksal Bostan, M. (2014). Negatif Sayılara İlişkin Zorluklar, Kavram Yanılgıları ve Bu Yanılgıların Giderilmesine Yönelik Öneriler. E. Bingölbali ve M. F. Özmentar (Ed.) *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* içinde (s. 155–186). Ankara: Pegem Akademi.
- Kabael, T. (2019). Matematik okuryazarlığı ve PISA. T. Kabael (Ed.), *Matematik okuryazarlığı ve PISA* içinde (s. 11–43). Ankara: Anı Yayıncılık.
- Kabael, T. ve Ata Baran, A. (2019). Ortaokul matematik öğretmen adaylarının matematik okuryazarlığı performanslarının ve matematik okuryazarlığına ilişkin görüşlerinin incelenmesi. *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Türk Dünyası Uygulama ve Araştırma Merkezi (ESTÜDAM) Eğitim Dergisi (ESTUDAM Journal of Education)*, 4(2), 51–67.
- Kazak, S. (2014). Olasılık Konusu Öğrencilere Neden Zor Gelmektedir? E. Bingölbali ve M. F. Özmentar (Ed.) *İlköğretimde Karşılaşılan Matematiksel Zorluklar ve Çözüm Önerileri* içinde (s. 217–239). Ankara: Pegem Akademi.
- Kertil, M., Gülbağcı-Dede, H. ve Ulusoy, E. G. (2021). Skill-based mathematics questions: What do middle school mathematics teachers think about and how do they implement them?. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 12(1), 151–186. <http://doi.org/10.16949/turkbilmat.774651>
- Keskin, M., Akbaba, S. ve Altun, M. (2013). 8. ve 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme aşamalarındaki davranışlarının karşılaştırılması. *Journal of Educational Sciences*, 1, 33–50.

- Kılcan, T. (2021). Yeni Nesil Matematik Sorularına İlişkin Tutum Ölçeği Geliştirme: Geçerlik ve Güvenirlik Çalışması. *Anadolu Kültürel Araştırmalar Dergisi*, 5(2), 170–180.
- Kirk, J. ve Miller, M. L. (1986). *Reliability and validity in qualitative research*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. In: *Mathematics in School*, 7(No.4), p. 23-26.
- Kükey, E. (2018). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme biçimleri ile öğretmen ve öğretmen adaylarının bu konudaki görüşlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış doktora tezi). İnönü Üniversitesi, Malatya.
- Lane, C. P. ve Harkness, S.S. (2012). Game show mathematics: Specializing, conjecturing, generalizing, and convincing. *The Journal of Mathematical Behavior*. 31(2). 163 – 173. doi:10.1016/j.jmathb.2011.12.008.
- LeCompte, M. D. ve Goetz, J. P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research. *Review of Educational Research*, 52, 31–60.
- LeCompte, M. D., Preissle, J. ve Tesch, R. (1993). *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*, (2nd ed.). Orlando, FL: Academic Press.
- Lincoln, Y. D. ve Guba, E. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, CA: Sage.
- Liu, C. Y. ve Chin, E. T. (2016). Developing eleventh graders' conjecturing and justifying power on generalization of binary number patterns. *Taiwan Journal of Mathematics Education*, 3(2), 31–53. doi: 10.6278/tjme.20161005.002
- Mason, J., Burton, L. ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (Second Edition). London: Pearson Education Limited.
- MEB. (2018a). *Matematik Dersi Öğretim Programı (1,2,3,4,5,6,7,8. Sınıflar)*. Ankara: Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı.
- MEB, (2018b). Milli Eğitim Bakanlığı Ortaöğretime Geçiş Yönergesi. https://www.meb.gov.tr/meb_iys_dosyalar/2018_03/26191912_yonerge.pdf adresinden 13.07.2022 tarihinde erişilmiştir.
- Merriam, S. B. (2013). *Nitel araştırma: Desen ve uygulama için bir rehber* (S. Turan, Çev.). Ankara: Nobel Akademi Yayıncılık.
- Miller, M. D., Linn, R. L. ve Gronlund, N. E. (2009). *Measurement and assessment in teaching* (10th ed.). Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Or, M. B. (2020). *Ortaokul öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Çukurova Üniversitesi, Adana.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research and evaluation methods* (3rd ed.) Thousand Oaks, CA: Sage.
- Polya, G. (2017). *Nasıl çözmeli: Matematiksel yönteme yeni bir bakış*. (Çev: B. S. Soyer). Ankara: Tübitak Popüler Bilim Kitapları.
- Putri, A. L., Lukito, A. ve Wijayanti P. (2020). Students' specializing in mathematics problem solving. *Journal of Physics: Conference Series*. 1470. doi:10.1088/1742-6596/1470/1/012075.
- Rivera, F. ve Becker, J. R. (2006). Accounting for sixth graders' generalization strategies in algebra. In S. Alatorre, J. Cortina, M. Sáiz, ve A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp.155–157). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.
- Sahlberg, P. (2021). *Eğitimde Finlandiya Modeli*. (C. Mavituna, Çev.). İstanbul: Metropolis Yayıncılık.
- Schoenfeld, A. H. (1987). Polya, Problem Solving, and Education. *Mathematics Magazine*, 60(5), 283–291. doi:10.2307/2690409.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Thinking Mathematically: Problem Solving, Metacognition and Sense-Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 334–370. New York: MacMillan.
- Stacey, K. (2006). What is mathematical thinking and why is it important?. https://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2007/paper_pdf/Kaye%20Stacey.pdf
- Stacey, K. ve Turner, R. (2015). *Assessing mathematical literacy: The PISA experience*. New York, NY: Springer.
- Şahin, S. (2019). *Ortaokul öğrencilerinin grafik okuryazarlık becerileri ve karşılaştıkları zorluklar: Daire grafiği örneği*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.
- Tall, D. O. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking, in D. Carraher and L. Miera (eds.), *Proceedings of XIX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Recife, Brazil. Vol. 1, pp. 61–75.
- Tosun, N. (2019). *9. sınıf öğrencilerinin açığortay konusundaki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir.

- Tuncay, H. A. (2015). *Matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas.
- Türk Dil Kurumu Eğitim Bilimleri Sözlüğü, (2021). <https://sozluk.gov.tr/> adresinden 19.05.2021 tarihi 19.34 saatinde erişilmiştir.
- Umay, A. (1993). Matematiksel Düşünmede Süreci ve Sonucu Yoklayan Testler Arasında Bir Karşılaştırma. *Eğitim ve Bilim*, 17(90).
- Uzun, N., Topan, B., Demir, A. ve Çelik, D. (2019). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi. *Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 38(1), 266–282. DOI: <https://doi.org/10.7822/omuefd.466863>
- Ünsal, S. ve Kaba, A. (2022). The Characteristics of The Skill Based Questions and Their Reflections on Teachers and Students. *Kastamonu Education Journal*, 30(2), 273–282. doi: 10.24106/kefdergi.753717
- Van de Walle, J. A., Karp, K. S. ve Bay-Williams, J. M. (2019). *İlkokul ve ortaokul matematiği; Gelişimsel yaklaşımla öğretim*. S., Durmuş (Ed.), Yedinci baskıdan çeviri. Ankara: Nobel Akademik Yayıncılık.
- Yağdıran, B. (2018). *Teknoloji destekli öğrenme ortamlarında 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.
- Yazan, B. (2015). Three approaches to case study methods in education: Yin, Merriam and Stake. *The Qualitative Report*, 20(2), 134–152.
- Yeşildere, S. (2006). *Farklı matematiksel güce sahip ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünme ve bilgiyi oluşturma süreçlerinin incelenmesi*. Yayınlanmamış doktora tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 40(1), 181–213.
- Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, D. ve Yavuzsoy Köse, N. (2018). Ortaokul öğrencilerinin çokgen problemlerindeki matematiksel düşünme süreçleri. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18 (1), 605–633.
- Yıldırım, D. (2015). *Ortaokul öğrencilerinin geometri problemlerindeki matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Anadolu Üniversitesi, Eskişehir.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2018). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri*. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Yiğit, A. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi*. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, Ankara.



EKLER

Ek-1. Beceri Temelli Matematik Soruları ve Görüşme Soruları

2020 LGS - Olasılık

1. Bir olayın olma olasılığı = $\frac{\text{İstenilen olası durumların sayısı}}{\text{Tüm olası durumların sayısı}}$

Renkleri dışında özdeş olan toplardan 4'ü kırmızı, geri kalanı beyazdır. Bu topların tamamı aşağıdaki boş A, B ve C torbalarına dağıtılıyor.



A B C

Bu torbaların her birinden rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılığı birbirine eşittir.

- a) Bu torbalardan rastgele çekilen bir topun kırmızı olma olasılıklarının eşit olması için A, B ve C torbalarına konulması gereken beyaz top sayıları neler olabilir? Kaç farklı durum bulunabilir? Bu sayıları neye göre belirliyorsun?
- b) A, B ve C torbalarına konulacak beyaz top sayılarını incelediğinizde bir ilişki/kural ya da ortak bir özellik fark ettiniz mi? Açıklayınız.
- Bu ilişki tüm örnek durumlar için doğru mudur? Açıklayabilir misin?
 - Bu ilişkiyi nasıl ifade edebilirsin?
 - Bu ilişkiyi daha farklı şekilde ifade edebilir misin?
- c) Torbalarda bulunan kırmızı top sayıları ile beyaz top sayıları için genel bir ifade olarak ne yazılabilir?

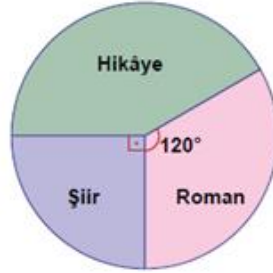
Torbalardaki top sayılarını temsil eden ilişkiyi harfli ifadeleri kullanarak yazabilir misin?

Ek–1 (Devam). Beceri Temelli Matematik Soruları ve Görüşme Soruları

2020 LGS - VERİ İŞLEME

2. Ayşe'nin bir yılda okuduğu kitapların türlerine göre dağılımı aşağıdaki daire grafiği ile gösterilmiştir.

Grafik: Ayşe'nin Okuduğu Kitapların Türlerinin Dağılımı



- a) Ayşe'nin okuduğu hikâye, şiir ve roman türü kitapların sayıları neler olabilir? Kaç farklı durum bulunabilir? Bu sayıları neye göre belirliyorsun?
- b) Ayşe'nin okuduğu hikâye, şiir ve roman türü kitap sayılarını incelediğinizde bir ilişki/kural ya da ortak bir özellik fark ettin mi? Açıklayabilir misin?
- Bu ilişki tüm örnek durumlar için doğru mudur?
 - Bu ilişkiyi nasıl ifade edebilirsin?
 - Bu ilişkiyi daha farklı şekilde ifade edebilir misin?
- c) Ayşe'nin okuduğu hikâye, şiir ve roman türü kitap sayıları ile ilgili genel bir ifade yazabilir misin?
- Ayşe'nin okuduğu kitap türü sayıları arasındaki ilişkiyi harfli ifadeleri kullanarak yazabilir misin?

Ek-1 (Devam). Beceri Temelli Matematik Soruları ve Görüşme Soruları

2021 LGS - Sayılar ve İşlemler

3. $a \neq 0$ ve m, n tam sayılar olmak üzere

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \text{ ve } \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ dir.}$$

Aşağıda, her bir hücreinde 2'nin birbirinden farklı tam sayı kuvvetlerinin yazılı olduğu iki sütunlu bir tablo verilmiştir. Tabloda bu üslü ifadelerden ikisi E ve F harfleriyle gösterilmiştir.

I. Sütun	II. Sütun
2^{-1}	2^{-2}
E	F
2^3	2^1

I. sütundaki üç üslü ifadenin çarpımı tam kare pozitif bir tam sayıya ve II. sütundaki üç üslü ifadenin çarpımı da tam kare pozitif bir tam sayıya eşittir.

- a) Sorudaki koşulu sağlayacak şekilde E ve F yerine yazılabilecek farklı sayılar bulabilir misin? Kaç farklı durum bulunabilir? Bu sayıları nasıl belirledin?
- b) Yazdığın sayıları incelediğinde bu sayılar arasında herhangi bir ilişki/kural ya da ortak bir özellik fark edebildin mi?
- Bu ilişki tüm örnek durumlar için doğru mudur?
 - Bu ilişkiyi nasıl ifade edebilirsin?
 - Bu ilişkiyi farklı şekilde ifade edebilir misin?
- c) Fark ettiğin bu ilişkiyi herhangi bir sayı için nasıl ifade edersin?
- Bu ilişkiyi, harfli ifadeleri kullanarak nasıl yazabilirsin?

Ek-1 (Devam). Beceri Temelli Matematik Soruları ve Görüşme Soruları

2018 LGS - Cebir

- 4.** İki farklı yüzme kursuna ait ücretler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo: Kursların Ücretleri

Kurslar	Kayıt Ücreti (TL)	Aylık Ücret (TL)
1. Kurs	310	40
2. Kurs	130	55

Yüzme kursuna katılan bir kişi bir defalık kayıt ücreti ve devam ettiği her ay için aylık ücret ödemektedir.

- a) Kursların her biri için 1, 2, 3 ve 4 aylık ödeme miktarlarını hesaplayabilir misin?
- (Eğer tablo kullanılmışsa) Burada neden tablo kullandın? Tablo kullanımı farklı süre devam edilen kurs ücretlerinin bulunmasına nasıl yardımcı oldu?
- b) 12 ayın sonunda her iki kursa katılan öğrencilerin kurslara ödeyecekleri miktarları nasıl bulabilirsin?
- Farklı aylarda ödenen miktarlar arasında herhangi bir ilişki/kural ya da ortak özellik fark edebildin mi?
 - Bu ilişki tüm örnek durumlar için doğru mudur?
 - Bu ilişkiyi nasıl ifade edebilirsin?
 - Bu ilişkiyi daha farklı şekilde nasıl ifade edebilirsin?
 - Farklı bir ilişki bulabilir misin?
- c) Herhangi bir ayın sonunda öğrencilerin kurslara ödeyeceği miktar için ne söyleyebilirsin? Açıklayabilir misin?
- n. ayın sonunda öğrencilerin kursa ödeyeceği miktarı nasıl bulursun?
 - Öğrenci hangi kursa giderse ödeyeceği tutar daha ekonomik olur? Neden?
 - Bu durumu matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsin?
 - Öğrenciler kurslara kaç ay devam ederse ödeyecekleri miktarlar arasında fark olmaz? Bu durumu matematiksel olarak nasıl ifade edebilirsin?

Ek-2. İl Milli Eğitim Müdürlüğü'nden Alınan İzin Yazısı



T.C.
RİZE VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

Sayı : E-57774812-605.01-38255803
Konu : Tez Çalışması İzni (Ceyda DÜZGÜN)

03.12.2021

VALİLİK MAKAMINA

İlgi : a) Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Müdürlüğünün
01/12/2021 tarihli ve 2755 sayılı yazısı.
b) Milli Eğitim Bakanlığının 21/01/2020 tarihli ve 1563890 (2020/2) sayılı Genelgesi.

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı İlköğretim Matematik Eğitimi Tezli Yüksek Lisans Programı Öğrencisi Ceyda DÜZGÜN'ün "Beceri Temelli Sorularda Öğrencilerin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi" konulu bilimsel araştırması kapsamında ekte sunulan ölçekleri 2021-2022 Eğitim Öğretim Yılında Rize ili merkez ilçemizde bulunan Atatürk Ortaokulunda öğrenim gören 8.sınıf öğrencilerine uygulama isteği yazı ile bildirilmektedir.

Söz konusu ölçeklerin 2021-2022 Eğitim Öğretim Yılında denetimi okul idaresinde olmak üzere, tüm salgın tedbirlerine uyularak, kurum faaliyetlerini aksatmadan, gönüllülük esasına göre Rize ili merkez ilçemizde bulunan Atatürk Ortaokulunda öğrenim gören 8.sınıf öğrencilerine uygulanması Müdürlüğümüzce uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

Ahmet GÜRBÜZ
Müdür a.
Müdür Yardımcısı

OLUR
Engin EMEN
Vali a.
Milli Eğitim Müdürü

Bu belge güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır.
Adres : Belge Doğrulama Adresi : <https://www.turkiye.gov.tr/meb-ebys>
Telefon No : Bilgi için: Unvan : Öğretmen
E-Posta: İnternet Adresi: Faks:
Kep Adresi : meb@hs01.kep.tr

Bu evrak güvenli elektronik imza ile imzalanmıştır. <https://evrak.vorgu.meb.gov.tr> adresinden 431e-69f9-39ce-ae77-7c92 kodu ile teyit edilebilir.

ETİK KURUL KARARI



T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL VE BEŞERİ BİLİMLER ETİK KURULU

DEĞERLENDİRME RAPORU

Toplantı Tarihi : 26/10/2021
Toplantı K. Sayısı : 2021/225

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Lisans Üstü Eğitim Enstitüsü Yüksek Lisans Öğrencisi Ceyda DÜZGÜN “Beceri Temelli Sorularda Öğrencilerin Matematiksel Düşünme Süreçlerinin İncelenmesi” isimli projesi kapsamında yürütülecek çalışmalar için izin talebi kurulumuzca değerlendirilmiş olup;

- ☒ Etik açıdan uygun bulunmuştur.
☐ Etik açıdan uygun bulunmamıştır.
☐ Etik açıdan önerilen değişikliklerin yapılmasıyla uygun bulunmuştur.

Prof. Dr. Ahmet İshak DEMİR
Başkan



Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fener Mah. Zihni Derin Yerleşkesi 53100 RİZE
Tel: 0464 223 81 00 Faks: 0464 223 63 28
www.erdogan.edu.tr