



BELİRSİZ MATRİSLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Yüksek Lisans Tezi

Duygu GÜRBÜZ

Eskişehir 2021

BELİRSİZ MATRİSLERİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Duygu GÜRBÜZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof.Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2021

ÖZET

Belirsiz Matrislerin Spektral Özellikleri

Duygu GÜRBÜZ

Matematik Anabilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak 2021

Danışman: Prof.Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

Bu tez çalışmasında sürekli ve kesikli belirsiz doğrusal sistemlerin asimptotik kararlılıkları ele alınmıştır. Her iki sistem için temel tanımlar ve teoremler özetlenmiştir. Bir matrisin özdeğerlerinin kompleks düzlemdeki konumu, o matrisin belirlediği sistemin asimptotik kararlılığını karakterize etmektedir. Sisteme karşılık gelen Lyapunov (Stein) matris eşitsizliğinin pozitif belirli çözümünün varlığı o sistemin asimptotik kararlılığına denktir. Sonlu sayıda matris için Lyapunov (Stein) matris eşitsizliğinin ortak çözümü kavramı ve bununla ilgili sonuçlar ele alınmıştır. Farklarının rankı 1 olan iki tane Schur kararlı matrisin Stein eşitsizliğinin ortak çözümü için bir koşul verilmiştir. İki boyutlu sonlu sayıda kare matrisin Lyapunov eşitsizliğinin ortak çözümünü belirlemenin bir yolu, iki boyutlu birim disk üzerinde ağırlık merkezini esas alan bir algoritma ile çalışmaktır. Bu tezde, mevcut algorithmada kullanılan birim disk yerine bu diski içeren bir kare üzerinde çalışmanın yeterli olduğu gösterilmiştir. Ayrıca iki boyutlu kompleks girdili sonlu sayıdaki kare matrislerin ortak çözümü için de bir algoritma geliştirilmiştir. Elde edilen sonuçlarla ilgili örnekler verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Hurwitz Kararlılık, Lyapunov Eşitsizliği, Ortak Kuadratik Lyapunov Fonksiyonu

ABSTRACT

SPECTRAL PROPERTIES OF UNCERTAIN MATRICES

Duygu GÜRBÜZ

Mathematics Program

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January 2021

Supervisor: Prof.Dr. Taner BÜYÜKKÖROĞLU

In this thesis, asymptotic stability of continuous and discrete uncertain linear systems are discussed. Basic definitions and theorems for both systems are summarized. The location of eigenvalues of a matrix in the complex plane characterizes the asymptotic stability of the system given by that matrix. The existence of positive definite solution of Lyapunov (Stein) matrix inequality corresponding to the system is equivalent to the asymptotic stability of that system. The concept of common solution of Lyapunov (Stein) matrix inequality and related results for a finite number of matrices are discussed. A condition is given the common solution of the Stein inequality for two Schur stable matrices whose difference is rank one. One way to determine the common solution of Lyapunov's inequality for a two-dimensional finite number of square matrices is to work with an algorithm based on the centroid on a two-dimensional unit disk. In this thesis, it has been shown that it is sufficient to work on a square containing this disk instead of the unit disk used in the current algorithm. In addition, an algorithm has been developed for the common solution of a finite number of two-dimensional square complex matrices. Examples of the results obtained are given.

Keywords: Hurwitz Stability, Lyapunov Inequality,
Common Quadratic Lyapunov Function

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında desteğini ve yardımlarını esirgemeyen kendisinden çok şey öğrendiğim tez danışmanım Prof.Dr. Taner Büyükköroğlu'na ayrıca bu çalışmada bilgi ve görüşlerini esirgemeyen Prof.Dr. Vakıf Cafer'e sonsuz teşekkür ederim.

Bana her zaman destek olan aileme ve arkadaşlarıma da ayrıca teşekkür ederim.



Duygu GÜRBÜZ
Ocak 2021

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Duygu GÜRBÜZ

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ..	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1 GİRİŞ	1
1.1 Sürekli Doğrusal Sistemlerde Asimptotik Kararlılık	1
1.2 Kesikli Doğrusal Sistemlerde Asimptotik Kararlılık	4
1.3 $\mathcal{D}$ -Kararlılık	5
2 Lyapunov ve Stein Eşitsizlikleri için Ortak P Çözümleri	8
2.1 Lyapunov Eşitsizlik Sistemi için Ortak P Çözümü	8
2.2 Stein Eşitsizlik Sistemi için Ortak P Çözümü	10
3 2×2 Boyutlu Hurwitz Matrisler için Ortak P Algoritması	16
3.1 Konveks Poligonun Köşelerini Saat Yönünde veya Saat Yönünün Tersi Yönde Sıralama	21
3.2 Konveks Poligonun Alanı ve Ağırlık merkezi	23
3.3 2×2 Kompleks Matrisler için Ortak P Çözümü	30
KAYNAKÇA	35
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	: Gerçel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n -boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\dot{x}$	: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $dx(t)/dt$
$\text{Re}(\cdot)$	: Bir kompleks sayının gerçel kısmı
$\mathbb{R}^{n \times n}$	: $n \times n$ boyutlu gerçel matrisler kümesi
A^T	: A matrisinin devriği (transpozesi)
$P > 0$	: $P = P^T$ pozitif belirli matris
conv	: Konveks zarf
$\ \cdot\ $	: Öklid normu
$\text{tr}(A)$	: A Matrisinin izi

1 GİRİŞ

Dinamik sistemlerin kararlılığının farklı çeşitleri vardır. Uygulama ve yapılan çalışmalara bakıldığında sistemin denge noktasının kararlılığı en yaygın kararlılık türü olduğu görülür. Denge noktasının kararlılığı genellikle Lyapunov anlamında karakterize edilmektedir [1, 2, 3].

1.1 Sürekli Doğrusal Sistemlerde Asimptotik Kararlılık

$D \in \mathbb{R}^n$ açık, yol bağlantılı bir küme, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere

$$\dot{x} = f(x) \quad (1)$$

otonom sistemini ele alalım. Eğer $\bar{x} \in D$ için $f(\bar{x}) = \mathbf{0}$ ise $\bar{x}$ vektörüne (1) sisteminin bir denge noktası denir. Kararlılıkla ilgili tanım ve teoremlerin ifadelerinde yazım kolaylığı bakımından denge noktasını $\bar{x} = \mathbf{0}$ vektörü almak genelliği bozmaz. Eğer sistemin denge noktası $\bar{x} \neq \mathbf{0}$ ise $y = x - \bar{x}$ değişken değişimiyle bu denge noktası orjine ötelenebilir.

Tanım 1.1 $\bar{x} = \mathbf{0}$, (1) sisteminin denge noktası olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde $\|x(0)\| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x(0)$ başlangıç noktası için $(x(t); (1) sisteminin $x(0)$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümüdür.)$

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa o zaman (1) sisteminin $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktası kararlıdır denir. Eğer $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktası kararlı ve öyle bir $r > 0$ için

$$\|x(0)\| < r \text{ iken } \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \mathbf{0}$$

ise bu denge noktası asimptotik kararlıdır denir [1, 4].

Sürekli bir sistemin denge noktasının kararlılığı ve asimptotik kararlılığı sistemin $E(x)$ enerji fonksiyonu ele alınarak belirlenebilir. Sistemin yörüngeleri

($x(t)$ çözümleri) üzerinde $\frac{dE}{dt}$ türev fonksiyonu için $\frac{dE}{dt} \leq 0$ olması $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktasının kararlı olmasını ve $\frac{dE}{dt} < 0$ olması da $\bar{x} = \mathbf{0}$ denge noktasının asimptotik kararlı olmasını gerektirir [1].

Denge noktasının kararlılığı sistemin Lyapunov fonksiyonu adı verilen fonksiyonlarla da belirlenebilmektedir.

$V : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir fonksiyon ve $\mathbf{0} \in D$ olsun.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T$$

ve

$$f(x) = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)]^T$$

olmak üzere V fonksiyonunun (1) sisteminin yörüngeleri üzerindeki türevi

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^T f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i(x)$$

şeklinde verilir.

Şimdi, sürekli sistemlerin denge noktasının kararlılığını karakterize eden en temel teoremlerden bir tanesini ifade edelim.

Teorem 1.2 (*Lyapunov Teoremi [1]*)

$x = \mathbf{0}$ sıfır vektörü (1) sisteminin denge noktası olsun. Eğer

i) $V(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ ve her $\mathbf{0} \neq x \in D$ için $V(x) > 0$

ii) Her $\mathbf{0} \neq x \in D$ için $\dot{V}(x) < 0$

koşullarını sağlayacak şekilde sürekli türevlenebilir bir $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa $x = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Lyapunov teoremindeki (i) ve (ii) koşullarını sağlayan $V(x)$ fonksiyonuna (1) sisteminin bir Lyapunov fonksiyonu denir.

A matrisi $n \times n$ boyutlu kare matris olmak üzere

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{2}$$

lineer sistemini ele alalım. Orijin bu sistemin bir denge noktasıdır. Burada (2) sisteminin çözümü $x(t) = e^{At}x_0$ olur. e^{At} üstel matrisi A matrisinin özdeğerleri ve bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörleri ile belirlenmektedir. Bu nedenle (2) sisteminin denge noktasının asimptotik kararlılığını A matrisinin özdeğerleriyle karakterize eden aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 1.3 A matrisi $n \times n$ boyutlu bir matris ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. Eğer A matrisinin tüm özdeğerleri kompleks düzlemin sol açık yarı düzleminde, yani

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ise A matrisine Hurwitz kararlı matris denir [2].

Lineer sistemin (2) denge noktasının $\bar{x} = 0$ asimptotik kararlılığı Lyapunov Teorem 1.2 ile ele alınabilir. Bunun için önce simetrik bir matrisin pozitif ve negatif belirliliği tanımını verelim.

Tanım 1.4 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S = S^T$ simetrik matrisi verilsin. Eğer her $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ için $x^T S x > 0$ ise S matrisine pozitif belirli matris denir ve $S > 0$ şeklinde gösterilir. Eğer $-S$ matrisi pozitif belirli bir matris ise S matrisine negatif belirli matris denir ve $S < 0$ şeklinde gösterilir [7].

Simetrik bir matrisin tüm özdeğerleri gerçeldir. Simetrik matrislerin pozitif (veya negatif) belirliliği özdeğerleri yardımıyla da belirlenebilir.

Teorem 1.5 $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S = S^T$ matrisinin pozitif (veya negatif) belirli olması için gerek ve yeter koşul S matrisinin tüm özdeğerlerinin pozitif (negatif) olmasıdır [7].

$P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P > 0$ simetrik matrisi için

$$V : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}, V(x) = x^T P x$$

kuadratik fonksiyonunu tanımlayalım. Bu V fonksiyonunun (2) sisteminin yörüngeleri üzerindeki türevi

$$\dot{V}(x) = x^T P \dot{x} + \dot{x}^T P x = x^T P A x + x^T A^T P x = x^T (P A + A^T P) x$$

olur. Burada

$$A^T P + P A = -Q$$

diyecek olursak Q matrisi simetrik bir matristir. Eğer bu Q matrisi pozitif belirli ise o zaman Teorem 1.2' ye göre (2) sisteminin denge noktası olan orijin asimptotik karardır.

Lyapunov teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 1.6 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul $Q > 0$ verildiğinde

$$A^T P + P A = -Q \quad (3)$$

Lyapunov denkleminin $P > 0$ çözümü vardır ve bu çözüm tektir. Ayrıca bu çözüm

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{A t} dt$$

şeklindedir [1].

Teorem 1.6'ya göre A matrisinin Hurwitz kararlı olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T P + P A < 0 \quad (4)$$

olacak şekilde bir $P > 0$ matrisinin var olmasıdır. Burada (4) eşitsizliği Lyapunov eşitsizliği olarak adlandırılır. Bu eşitsizliğin çözümü olan $P > 0$ matrisi için $V(x) = x^T P x$ fonksiyonuna (2) sisteminin kuadratik Lyapunov fonksiyonu denir.

1.2 Kesikli Doğrusal Sistemlerde Asimptotik Kararlılık

Sürekli sistemler için yukarıda verdiğimiz sonuçlar $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ olmak üzere

$$x_{k+1} = A x_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

(5) doğrusal kesikli sistemi için de ifade edilebilir.

Teorem 1.7 (Kesikli sistemler için Lyapunov teoremi [8]) $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ yerel Lipschitz özelliğine sahip bir fonksiyon olmak üzere $x = \mathbf{0}$ sıfır vektörü

$$x(k+1) = f(x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

sisteminin denge noktası olsun. Eğer

i) $V(\mathbf{0}) = 0$ ve her $\mathbf{0} \neq x \in D$ için $V(x) > 0$

ii) Her $\mathbf{0} \neq x \in D$ için $V(f(x)) - V(x) < 0$

koşullarını sağlayacak şekilde bir $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu varsa $x = \mathbf{0}$ denge noktası asimptotik kararlıdır.

Eğer $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin tüm $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerleri kompleks düzlemde açık birim diskte, yani $|\lambda_i| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ise A matrisine Schur kararlı matris denir.

Teorem 1.8 [5] (5) sistemi için aşağıdakiler denktir.

i) Sistem asimptotik kararlıdır.

ii) A matrisi Schur kararlıdır.

iii) $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q > 0$ matrisi verildiğinde

$$A^T P A - P = -Q \tag{6}$$

denklemini (Stein denklemi) sağlayan $P > 0$ çözümü vardır ve bu çözüm tektir.

1.3 $\mathcal{D}$ -Kararlılık

Görüldüğü üzere bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin tüm özdeğerlerinin bulunduğu $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesine göre A matrisinin $\mathcal{D}$ -kararlılığı tanımlanmaktadır. Uygulamalarda karşılaşılan bazı kararlılık bölgeleri aşağıdaki gibidir. A matrisinin tüm özdeğerleri

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$$

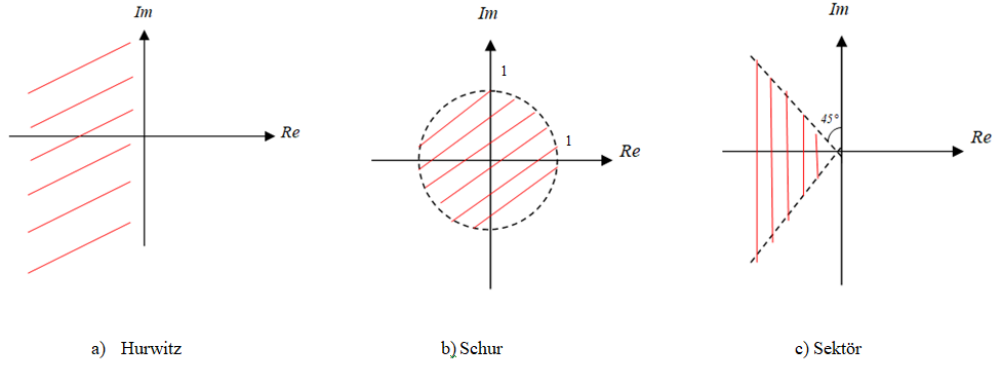
kümesinde ise A matrisi Hurwitz kararlı, eğer

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

kümesinde ise A matrisi Shur kararlı, $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ olmak üzere eğer

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \pi - \phi < \arg(z) < \pi + \phi\}$$

kümesinde ise A matrisi Sektör kararlıdır.



Şekil 1.1: $\mathcal{D}$ -kararlılık bölgeleri

$f_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ polinom fonksiyonları verilsin.

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(f_i(z)) < 0, \quad i = \{1, 2, \dots, m\}\} \quad (7)$$

olarak alalım.

Teorem 1.9 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin $\mathcal{D}$ -kararlı (7) olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f_i^T(A)P + Pf_i(A) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

olacak şekilde bir $P = P^T > 0$ matrisinin var olmasıdır.

Teorem 1.9 ile Kararlılık bölgesi $\mathcal{D}$ (7) olan matrisler için Lyapunov ve Stein eşitsizlikleri gibi matris eşitsizlikleri elde edilmektedir.

Örneğin $f_1(z) = z$ ve $f_2(z) = -z^2$ polinomları için

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) < 0 \quad \text{ve} \quad \operatorname{Re}(-z^2) < 0\} \quad (9)$$

Şekil 1.1 c'deki sektöre karşılık gelmektedir ve bir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisinin $\mathcal{D}$ -kararlı (9) olması için gerek ve yeter koşul

$$A^T P + P A < 0 \quad \text{ve} \quad A^{2^T} P + P A^2 > 0$$

olacak şekilde $P > 0$ matrisinin bulunabilmesidir.



2 Lyapunov ve Stein Eşitsizlikleri için Ortak P Çözümleri

Bu bölümde sürekli (kesikli) lineer belirsiz sistemler için bu sistemlere karşılık gelen sonlu sayıda matrislerin Lyapunov (Stein) eşitsizliklerinin ortak çözümlerini ele alacağız.

2.1 Lyapunov Eşitsizlik Sistemi için Ortak P Çözümü

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matrisleri verilsin.

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \quad (1)$$

lineer belirsiz sistemini ele alalım. Öyle bir $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T > 0$ pozitif belirli matrisi için

$$A_i^T P + P A_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

Lyapunov eşitsizlikleri sağlanıyorsa bu P matrisine A_i matrislerinin ortak Lyapunov çözümü denir.

Eğer (2) eşitsizlik sisteminin ortak $P > 0$ çözümü varsa o zaman (1) sistemi düzgün asimptotik kararlıdır [4]. Böyle bir ortak $P > 0$ çözümünün varlığı durumunda $V(x) = x^T P x$ fonksiyonuna ortak kuadratik Lyapunov fonksiyonu (OKLF) denir. Sürekli sistemler üzerinde yapılan çalışmalarda; [13, 15]'te $n = 2$ ve $N = 2$ durumunda OKLF varlığı için gerek ve yeter koşul verilmiştir. [10, 12, 16]'da OKLF' unun var olması durumunda $P > 0$ çözümünün bulunması için nümerik yöntemler verilmiştir.

Statik çıkıtlı geri beslemeli sistemlerde $A_0, A_1, \dots, A_m$ matrisleri $n \times n$ boyutlu olmak üzere

$$A(q) = A_0 + \sum_{i=1}^m q_i A_i, \quad q \in \mathbb{R}^l$$

afin matris ailesinin Hurwitz kararlılığı söz konusu olmaktadır [3].

$$\mathcal{Q} = \{q \in \mathbb{R}^m : q_i^- \leq q_i \leq q_i^+, \quad i = 1, 2, \dots, m\}$$

kutusunu tanımlayalım. $\mathcal{A} = \{A(q) : q \in Q\}$ matris ailesine matrisler politopu denir. q^i , Q kutusunun i . köşesi olsun ($i = 1, 2, \dots, K = 2^m$). O zaman bu q^i , köşe noktalarına karşılık gelen $A(q^i)$ matrislerinin konveks zarfı $\mathcal{A}$ olur:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \text{conv}\{A(q^1), A(q^2), \dots, A(q^K)\} \\ &= \left\{A = \sum_{i=1}^K \lambda_i A(q^i) : \sum_{i=1}^K \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, K)\right\} \end{aligned} \quad (3)$$

Eğer böyle bir $P = P^T > 0$ matrisi için

$$A^T(q^i)P + PA(q^i) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, K$$

oluyorsa, yani $i = 1, 2, \dots, K$ için $A(q^i)$ matrisine karşılık gelen Lyapunov eşitsizliğinin ortak çözümü varsa o zaman her $A \in \mathcal{A}$ için $A^T P + PA < 0$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda $\mathcal{A}$ ailesindeki tüm matrisler Hurwitz karardır [2]:

$A \in \mathcal{A}$ ise $A = \lambda_1 A(q^1) + \lambda_2 A(q^2) + \dots + \lambda_K A(q^K)$ olacak şekilde $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^K \lambda_i = 1$ koşullarını sağlayan λ_i ($i = 1, 2, \dots, K$) sayıları vardır. O zaman

$$\begin{aligned} A^T P + PA &= \left[\sum_{i=1}^K \lambda_i A(q^i)\right]^T P + P \sum_{i=1}^K \lambda_i A(q^i) \\ &= \sum_{i=1}^K \lambda_i [A^T(q^i)P + PA(q^i)] < 0 \end{aligned} \quad (4)$$

olur.

Teorem 2.1 [14] $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matrisler ve $A_1 A_2 = A_2 A_1$ olsun. $P_0 > 0$ matrisi verildiğinde

$$A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -P_0 \quad \text{denkleminin çözümü olan } P_1 > 0 \text{ için}$$

$$A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1 \quad \text{denkleminin çözümü olan } P_2 > 0 \text{ matrisini alalım.}$$

Bu durumda P_2 matrisi için $A_1^T P_2 + P_2 A_1 < 0$ olur. Başka bir deyişle $V(x) = x^T P_2 x$ fonksiyonu $\dot{x} = A_1 x$ ve $\dot{x} = A_2 x$ sistemleri için OKLF olur.

Kanıt. $V(x) = x^T P_2 x$ fonksiyonu $\dot{x} = A_2 x$ sistemi için kuadratik Lyapunov fonksiyonudur. V fonksiyonunun $\dot{x} = A_1 x$ sisteminin yörüngeleri üzerindeki türevi

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= \dot{x}^T P_2 x + x^T P_2 \dot{x} = x^T A_1^T P_2 x + x^T P_2 A_1 x \\ &= x^T (A_1^T P_2 + P_2 A_1) x\end{aligned}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan, $A_1^T P_1 + P_1 A_1 = -P_0$ ve $A_2^T P_2 + P_2 A_2 = -P_1$ olduğundan

$$\begin{aligned}P_0 &= -(A_1^T P_1 + P_1 A_1) \\ &= A_1^T [A_2^T P_2 + P_2 A_2] + [A_2^T P_2 + P_2 A_2] A_1 \\ &= (A_2 A_1)^T P_2 + A_1^T P_2 A_2 + A_2^T P_2 A_1 + P_2 (A_2 A_1) \\ &= (A_1 A_2)^T P_2 + A_1^T P_2 A_2 + A_2^T P_2 A_1 + P_2 (A_1 A_2) \\ &= A_2^T [A_1^T + P_2 A_1] + [A_1^T P_2 + P_2 A_1] A_2\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. O zaman, A_2 Hurwitz kararlı ve $P_0 > 0$ olduğundan

$$A_2^T [-(A_1^T + P_2 A_1)] + [-(A_1^T P_2 + P_2 A_1)] A_2 = -P_0$$

denklemini sağlandığı için $-(A_1^T + P_2 A_1) > 0$ yani $A_1^T + P_2 A_1 < 0$ olmak zorundadır. Bu durumda V fonksiyonu $\dot{x} = A_1 x$ sistemi için de kuadratik Lyapunov fonksiyonudur. $\square$

2.2 Stein Eşitsizlik Sistemi için Ortak P Çözümü

Hurwitz kararlı matrisler için verilen ortak P kavramı Schur kararlı matrisler için de verilmektedir.

$A_1, A_2, \dots, A_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Schur kararlı matrisleri verilsin.

$$\dot{x}(k+1) = Ax(k), \quad A \in \text{conv}\{A_1, A_2, \dots, A_N\} \quad (5)$$

lineer belirsiz kesikli sistemini ele alalım. Öyle bir $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P = P^T > 0$ pozitif belirli matrisi için

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

Stein eşitsizlikleri sağlanıyorsa bu P matrisine A_i matrislerinin ortak Stein çözümü denir. Ayrıca $V(x) = x^T P x$ fonksiyonu bu sistemler için ortak Lyapunov fonksiyonudur. Bu tür sistemlerin OKLF'leri için yapılan çalışmalardan bazıları [18–20]'da yer almaktadır.

$n \times n$ boyutlu Hurwitz kararlı marisler kümesi ile $n \times n$ boyutlu Schur kararlı matrisler kümesi arasında bilineer bir dönüşüm bulunmaktadır. Bu dönüşüm Cayley Dönüşümü diye adlandırılır.

Teorem 2.2 [21] $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Schur kararlı bir Matris ise

$$A = (C + I)^{-1}(C - I)$$

matrisi Hurwitz kararlıdır. Benzer şekilde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matris ise

$$C = (I - A)^{-1}(I + A)$$

matrisi Schur kararlıdır.

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matris ve

$$C = (I - A)^{-1}(I + A)$$

olsun. $P > 0$ için

$$A^T P + P A < 0 \text{ ise } C^T P C - P < 0$$

olur. $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Schur kararlı matris ve

$$A = (C + I)^{-1}(C - I)$$

olsun. $P > 0$ için

$$C^T P C - P < 0 \text{ ise } A^T P + P A < 0$$

olur.

Hurwitz durumunda olduğu gibi Schur kararlı değişmeli matris çifti için de Stein eşitsizliğinin ortak P çözümü vardır.

Teorem 2.3 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Schur kararlı matrisler ve $C_1 C_2 = C_2 C_1$ olsun. $P_0 > 0$ verildiğinde

$C_1^T P_1 C_1 - P_1 = -P_0$ denkleminin çözümü olan P_1 pozitif belirli matrisi için $C_2^T P_2 C_2 - P_2 = -P_1$ denkleminin çözümü P_2 pozitif belirli matrisi olsun.

O zaman $C_1^T P_2 C_1 - P_2 < 0$ olur. Yani $P_2 > 0$ matrisi C_1 ve C_2 matrisleri için Stein eşitsizliklerinin ortak P çözümüdür.

Kanıt. $V(x) = x^T P_2 x$ fonksiyonu $x(k+1) = C_2 x(k)$ sistemi için bir kuadratik Lyapunov fonksiyonudur. Teorem 1.7'nin ii) koşulu için:

$$\begin{aligned} V(C_2 x) - V(x) &= (C_2 x)^T P_2 (C_2 x) - x^T P_2 x \\ &= x^T C_2^T P_2 C_2 x - x^T P_2 x \\ &= x^T (C_2^T P_2 C_2 - P_2) x \\ &= -x^T P_1 x < 0 \end{aligned}$$

olur. Bu $V(x)$ fonksiyonunun $x(k+1) = C_1 x(k)$ sisteminin de kuadratik Lyapunov fonksiyonu olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} V(C_1 x) - V(x) &= (C_1 x)^T P_2 (C_1 x) - x^T P_2 x \\ &= x^T C_1^T P_2 C_1 x - x^T P_2 x \\ &= x^T (C_1^T P_2 C_1 - P_2) x \end{aligned}$$

olur. Her $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ için $V(C_1 x) - V(x) = x^T (C_1^T P_2 C_1 - P_2) x < 0$, yani $C_1^T P_2 C_1 - P_2 < 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} P_0 &= -(C_1^T P_1 C_1 - P_1) \\ &= C_1^T [C_2^T P_2 C_2 - P_2] C_1 - [C_2^T P_2 C_2 - P_2] \\ &= C_1^T C_2^T P_2 C_2 C_1 - C_1^T P_2 C_1 - C_2^T P_2 C_2 + P_2 \\ &= C_2^T C_1^T P_2 C_1 C_2 - C_1^T P_2 C_1 - C_2^T P_2 C_2 + P_2 \\ &= C_2^T [C_1^T P_2 C_1 - P_2] C_2 - [C_1^T P_2 C_1 - P_2] \end{aligned}$$

olarak elde edilir. C_2 Schur kararlı olduğundan $P_0 > 0$ matrisi için

$$C_2^T [-(C_1^T P_2 C_1 - P_2)] C_2 - [-(C_1^T P_2 C_1 - P_2)] = -P_0$$

eşitliğin çözümü $-(C_1^T P_2 C_1 - P_2) > 0$ yani $C_1^T P_2 C_1 - P_2 < 0$ olur. $\square$

Teorem 2.4 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matrisleri Schur kararlı ve $\text{rank}(C_1 - C_2) = 1$ ise $A_1 = (C_1 + I)^{-1}(C_1 - I)$ ve $A_2 = (C_2 + I)^{-1}(C_2 - I)$ olmak üzere

$$\text{rank}(A_1 - A_2) = 1$$

olur.

Kanıt. $U = (C_1 + I)$ ve $V = (C_1 + I)^{-1}(C_1 - I) - (C_2 + I)^{-1}(C_2 - I)$ diyelim.

C_1 matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olsun. $C_1 + I$ matrisinin özdeğerleri de $\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1$ olur. C_1 matrisi Schur kararlı olduğundan $i = 1, 2, \dots, n$ için $|\lambda_i| < 1$ 'dir. O zaman $\det(C_1 + I) \neq 0$ olur ki buna göre $\text{rank}(U) = n$ 'dir. Diğer taraftan $\text{rank}(V) \leq n$ 'dir.

Sylvester eşitsizliğine göre (bakınız [7], sayfa 13)

$$\text{rank}(U) + \text{rank}(V) - n \leq \text{rank}(UV) \leq \min\{\text{rank}(U), \text{rank}(V)\},$$

$$n + \text{rank}(V) - n \leq \text{rank}(UV) \leq \text{rank}(V)$$

yani

$$\text{rank}(UV) = \text{rank}(V)$$

olur.

$$\begin{aligned} UV &= (C_1 + I)[(C_1 + I)^{-1}(C_1 - I) - (C_2 + I)^{-1}(C_2 - I)] \\ &= (C_1 + I)(C_1 + I)^{-1}(C_1 - I) - (C_1 + I)(C_2 + I)^{-1}(C_2 - I) \\ &= (C_1 - I) - (C_1 + I)(C_2 + I)^{-1}(C_2 - I) \\ &= (C_1 - I)(C_2 + I) - (C_1 + I)(C_2 - I) \\ &= C_1 C_2 + C_1 - C_2 - I - C_1 C_2 + C_1 - C_2 + I \\ &= 2C_1 - 2C_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre

$$\text{rank}(A_1 - A_2) = \text{rank}(V) = \text{rank}(UV) = \text{rank}(2C_1 - 2C_2) = \text{rank}(C_1 - C_2)$$

olduğundan

$$\text{rank}(A_1 - A_2) = 1.$$

□

Teorem 2.5 (22) $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz kararlı matrisler ve $\text{rank}(A_1 - A_2) = 1$ olsun. A_1 ve A_2 matrisleri için Lyapunov eşitsizliğinin ortak $P > 0$ çözümü olması için gerek ve yeter koşul $A_1 A_2$ matrisinin negatif gerçel özdeğeri yoktur.

Teorem 2.6 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Schur kararlı matrisler ve $\text{Rank}(C_1 - C_2) = 1$ olsun. Eğer $(C_1 + I)^{-1}(C_1 - I)(C_2 + I)^{-1}(C_2 - I)$ matrisinin negatif reel özdeğeri yoksa C_1 ve C_2 matrislerinin Stein eşitsizliğini sağlayan ortak P çözümü vardır.

Örnek 2.7 $C_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ ve $C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$ Schur kararlı matrislerini ele alalım.

$$C_1 - C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ olur ve } \text{rank}(C_1 - C_2) = 1 \text{ 'dir.}$$

$$\begin{aligned} & (C_1 + I)^{-1}(C_1 - I)(C_2 + I)^{-1}(C_2 - I) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \\ &= \frac{384}{119} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \\ &= \frac{384}{119} \begin{bmatrix} -\frac{7}{16} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{31}{16} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{29}{24} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{17}{24} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{119} \begin{bmatrix} 299 & -248 \\ -604 & 655 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^2 - \frac{954}{119}\lambda + \frac{387}{119}$, dir. $\lambda_1 = 7.5882$ ve $\lambda_2 = 0.4285$ olduğundan negatif özdeğeri yoktur. O zaman Teorem 2.6' e göre bu matrisler için Stein eşitsizliğinin ortak P çözümü vardır.

Örnek 2.8 $C_1 = \begin{bmatrix} -\frac{27}{29} & \frac{18}{29} \\ -\frac{3}{29} & -\frac{27}{29} \end{bmatrix}$ ve $C_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}$ Schur kararlı matrisleri için $C_1 - C_2 = \begin{bmatrix} \frac{35}{87} & -\frac{40}{29} \\ \frac{49}{87} & -\frac{56}{29} \end{bmatrix}$ olur ve $\text{rank}(C_1 - C_2) = 1$ 'dir.

$$\begin{aligned}
& (C_1 + I)^{-1}(C_1 - I)(C_2 + I)^{-1}(C_2 - I) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{29} & \frac{18}{29} \\ -\frac{3}{29} & \frac{2}{29} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{56}{29} & \frac{18}{29} \\ -\frac{3}{29} & -\frac{56}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -9 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{56}{29} & \frac{18}{29} \\ -\frac{3}{29} & -\frac{56}{29} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -1 & 18 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 6 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -31 & 30 \\ 17 & -20 \end{bmatrix} \tag{8}
\end{aligned}$$

matrisinin karakteristik polinomu $\lambda^2 + 51\lambda + 110$ ' dir. $\lambda_{1,2} = \frac{-51 \mp \sqrt{2161}}{2}$ olduğundan negatif özdeğeri vardır. Teorem 2.6'e göre bu matrisler için Stein eşitsizliğinin ortak P çözümü yoktur.

3 2×2 Boyutlu Hurwitz Matrisler için Ortak P Algoritması

Sonlu sayıda Hurwitz kararlı $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ matrisleri verildiğinde bu matrislere karşılık gelen Lyapunov eşitsizliklerinin ortak P çözümünü bulmak için optimizasyon yöntemlerinin kullanıldığı çalışmalar vardır [11,12]. Bu bölümde sonlu sayıda 2×2 boyutlu Hurwitz kararlı matrislerden oluşan matris kümesinin ortak P probleminin çözümü için [16]'da verilen ve konveks kümelerin ağırlık merkezini esas alan bir algoritmayı ele alacağız. [16] çalışmasında verilen algoritma için kullanılan kavram ve teoremler şu şekildedir.

2×2 boyutlu pozitif belirli herhangi bir P matrisini $\text{tr}(P) = 2$ olacak şekilde normalleştirebiliriz: $x_1^2 + x_2^2 < 1$ olmak üzere

$$P(x) = \begin{bmatrix} 1 + x_1 & x_2 \\ x_2 & 1 - x_1 \end{bmatrix}$$

matrisinin izi 2 ve pozitif belirlidir.

$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ matris ailesi 2×2 boyutlu Hurwitz kararlı matrislerden oluşsun. $x = (x_1, x_2)^T$ için

$$\phi(x) = \max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{\max}(A^T P(x) + P(x)A)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada $\lambda_{\max}(S)$, S simetrik matrisinin en büyük özdeğerini göstermektedir. Bu değer

$$\lambda_{\max}(S) = \max_{\|v\|=1} v^T S v$$

eşitliği ile verilebilir [7]. Burada $\lambda_{\max}(S)$ değerini veren v vektörü, S matrisinin en büyük özdeğerine, yani $\lambda_{\max}$ 'a karşılık gelen özvektördür. $\max_v \max_A = \max_{(v,A)}$ ile gösterilecek olursa $\phi(x)$ fonksiyonu

$$\phi(x) = \max_{\substack{(v,A) \\ \|v\|=1, A \in \mathcal{A}}} v^T (A^T P(x) + P(x)A) v \quad (1)$$

şeklinde yazılabilir. $\phi(x)$ fonksiyonu konveks fonksiyondur.

$\mathcal{A}$ matris ailesi için Lyapunov eşitsizliğinin ortak P çözümünün varlığı $\phi(x) < 0$ olacak şekilde

$$x \in D = \{(x_1, x_2)^T : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$$

olmasına denktir.

Keyfi bir $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2)^T \in D$ noktası için

$$P(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 1 + \hat{x}_1 & \hat{x}_2 \\ \hat{x}_2 & 1 - \hat{x}_1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\max_{\substack{(v, A) \\ \|v\|=1, A \in \mathcal{A}}} v^T (A^T P(\hat{x}) + P(\hat{x}) A) v = \hat{v}^T (\hat{A}^T P(\hat{x}) + P(\hat{x}) \hat{A}) \hat{v}$$

olarak ifade edebiliriz. Burada $\lambda_{\max}(\hat{A}^T P(\hat{x}) + P(\hat{x}) \hat{A})$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $\hat{v}$ ile gösterilmiştir. O zaman

$$\max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{\max}(A^T \hat{P} + \hat{P} A) = \lambda_{\max}(\hat{A}^T \hat{P} + \hat{P} \hat{A})$$

olur. $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{v}_1 & -\hat{v}_2 \\ \hat{v}_2 & \hat{v}_1 \end{pmatrix}$ matrisini ve $\hat{g} = 2\hat{V}\hat{A}\hat{v}$ vektörünü tanımlayalım.

Önerme 3.1 [16] *Keyfi bir $\hat{x} \in D$ alalım. o zaman*

$$i) \phi(\hat{x}) = \hat{x}^T \hat{g} + \hat{v}^T (\hat{A} + \hat{A}^T) \hat{v},$$

$$ii) \text{ Her } x \in D \text{ için } \phi(x) \geq x^T \hat{g} + \hat{v}^T (\hat{A} + \hat{A}^T) \hat{v} \text{ olur.}$$

Herhangi bir $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in D$ için $A^T P(\hat{x}) + P(\hat{x}) A$, $A \in \mathcal{A}$ matrislerinden en büyük özdeğere sahip olan $\hat{A}$ matrisi ve bu matrisin en büyük özdeğerine karşılık gelen $\hat{v}$ özvektörü hesaplanır, yani $(\hat{v}, \hat{A})$ ikilisi bulunurak $\phi(\hat{x})$ hesaplanır. Eğer $\phi(\hat{x}) < 0$ ise $P(\hat{x})$ matrisi $\mathcal{A}$ matris ailesi için ortak çözümdür. Diğer durumda; Önerme 3.1, ii)'ye göre $x^T \hat{g} + \hat{v}^T (\hat{A} + \hat{A}^T) \hat{v} \geq 0$ eşitsizliğini sağlayan x 'ler için $\phi(x) \geq 0$ olur. Eğer $\mathcal{A}$ ailesinin ortak P çözümü varsa bu çözüm

$$D \setminus \{(x_1, x_2) : x^T \hat{g} + \hat{v}^T (\hat{A} + \hat{A}^T) \hat{v} \geq 0\}$$

kümesindedir. Kalan kümenin ağırlık merkezine $\hat{x}$ diyelim. Eğer bu nokta için $\phi(\hat{x}) \geq 0$ ise o zaman atılan parça alan olarak kalan parçanın en az 4/9'u olur.

Teorem 3.2 (*Winternitz Teoremi*) [23, 24] $S \subset \mathbb{R}^2$ basit bağlantılı kompakt bir küme ve S 'nin ağırlık merkezi M ve alanı A olsun. M 'den geçen herhangi bir doğru bu kümeyi alanı en az $4A/9$ olan iki parçaya böler.

Algoritma 3.2 [16] 2×2 boyutlu Hurwitz matrislerden oluşan $\mathcal{A}$ kompakt matris ailesi verilsin.

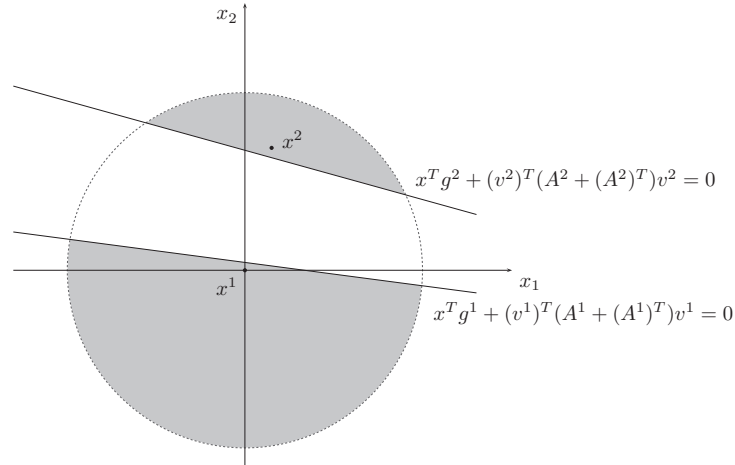
- 1) $x^1 = (0,0)^T$ alınır. Denklem (1) deki maksimalleştirici (v^1, A^1) çifti belirlenir ve g^1 vektörü hesaplanır. $\phi(x^1) < 0$ ise ortak çözüm $P(x^1)$ olur. Değilse

$$x^T g^1 + (v^1)^T (A^1 + (A^1)^T) v^1 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan $x = (x_1, x_2)^T$ noktaları D kümesinden atılır.

- 2) Kalan kümenin ağırlık merkezi hesaplanır ve bu x^2 noktası için 1)'deki prosedür tekrarlanır.

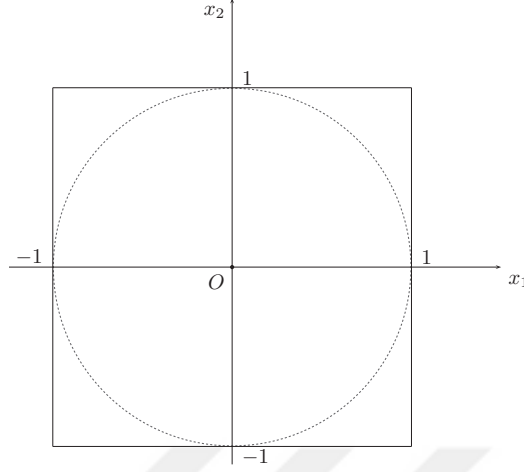
Bu eleme yöntemiyle D bölgesinin tamamı atıldıysa o zaman $\mathcal{A}$ matris ailesi için ortak P çözümü yok demektir.



Şekil 3.1: D -diskinden atılan parçalardan (gri bölgeler) sonra kalan bölge

Algoritma 3.2'in uygulamasında, D kümesinden kalan bölge daire parçası olabilmektedir. Bu bölgenin ağırlık merkezinin hesaplanmasındaki işlemleri

D kümesi yerine D kümesini kapsayan $\mathcal{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ karesini alarak kolaylaştırmak mümkündür.



Şekil 3.2: $\mathcal{K}$ ve D kümeleri

Şimdi, $\mathcal{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$ karesini ele alalım. Önerme 3.1'deki ifadeler $\mathcal{K}$ kümesi için de geçerlidir: her $x \in \mathcal{K}$ için

$$\begin{aligned} \phi(x) = \max_{(v,A)} v^T (A^T P(x) + P(x) A) v &\geq \hat{v} (\hat{A} P(x) + P(x) \hat{A}) \hat{v} \\ &= 2x^T \hat{V} \hat{A} \hat{v} + \hat{v}^T (\hat{A} + \hat{A}^T) \hat{v} \\ &= x^T \hat{g} + \hat{v}^T (\hat{A} + \hat{A}^T) \hat{v} \end{aligned}$$

olur.

Şimdi, yukarıda verilen yöntemi bu $\mathcal{K}$ kümesi üzerinde yeniden ele alalım. 2×2 boyutlu Hurwitz matrislerden oluşan $\mathcal{A}$ matris ailesi verilsin.

$$\mathcal{B}^1 := \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1\}$$

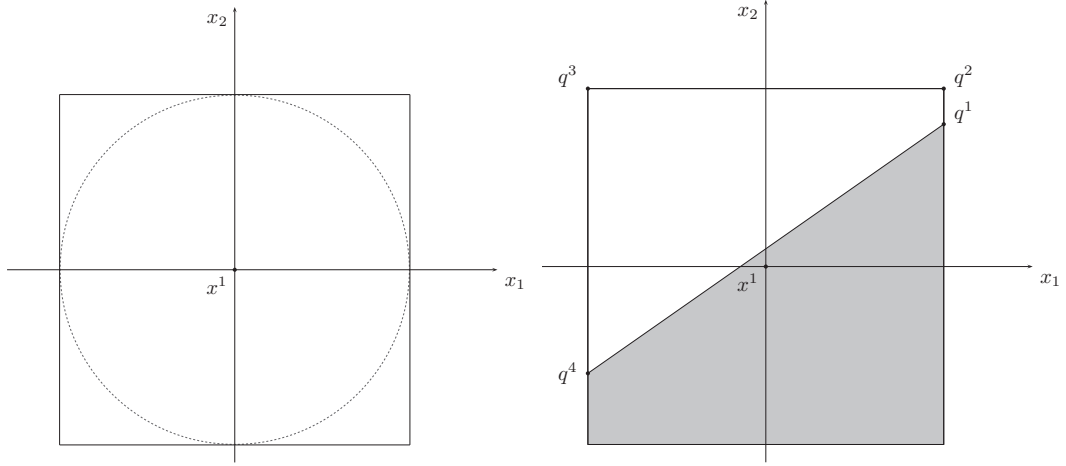
kümesini tanımlayalım. $x^1 = (0, 0)^T \in \mathcal{B}^1$ alalım. Denklem (1) deki maksimize edici (v^1, A^1) çifti için $\phi(x^1) < 0$ ise ortak çözüm $P(x^1)$ olur. Eğer $\phi(x^1) \geq 0$ ise $\mathcal{B}^1$ kümesinden

$$x^T g^1 + (v^1)^T (A^1 + (A^1)^T) v^1 \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktalar atılır. Kalan küme

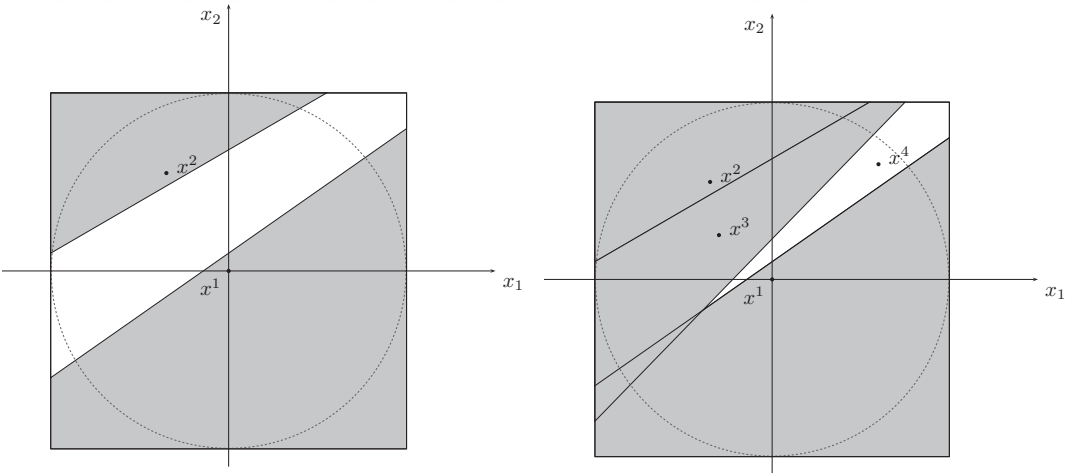
$$\begin{aligned} \mathcal{B}^2 : &= \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \\ &\quad x^T g^1 + (v^1)^T (A^1 + (A^1)^T) v^1 \geq 0\} \end{aligned} \tag{2}$$

olur (Şekil 3.5).



Şekil 3.3: $\mathcal{B}^1$ ve $\mathcal{B}^2$ kümeleri

Doğrusal programlama problemi oluşturularak $\mathcal{B}^2$ kümesinin köşe noktaları bulunur: q^1, q^2, q^3, q^4 . $\mathcal{B}^2 = \text{conv}\{q^1, q^2, q^3, q^4\}$ kümesinin ağırlık merkezi, Alt Bölüm 3.2’de vereceğimiz formülle hesaplanarak x^2 noktası belirlenir ve yukarıdaki prosedür tekrarlanır:



Şekil 3.4: $\mathcal{B}^3$ ve $\mathcal{B}^4$ kümeleri

Algoritma 3.2 2×2 boyutlu sonlu sayıda Hurwitz kararlı matrislerden oluşan $\mathcal{A}$ matris ailesi verilsin. $x^1 = (0, 0)^T \in \mathcal{B}^1$ alınır. Denklem (1) deki maksimalleştirici (v^1, A^1) çifti belirlenir ve g^1 vektörü hesaplanır. $\phi(x^1) < 0$ ise ortak çözüm $P(x^1)$ olur. Değilse

$$x^T g^1 + (v^1)^T (A^1 + (A^1)^T) v^1 \geq 0$$

eşitsizliği $\mathcal{B}^1$ kümesindeki eşitsizliklere eklenerek $\mathcal{B}^2$ kümesi oluşturulur. Bu kümenin ağırlık merkezi bulunur: x^2 .

1) $x^k \in D$ ve $\phi(x^k) < 0$ ise ortak çözüm $P(x^k)$ olur.

$x^k \notin D$ veya $\phi(x^k) \geq 0$ ise denklem (1) deki maksimalleştirici (v^k, A^k) çifti belirlenir ve g^k vektörü hesaplanır.

$$x^T g^k + (v^k)^T (A^k + (A^k)^T) v^k \geq 0$$

eşitsizliği $\mathcal{B}^k$ kümesine eklenerek $\mathcal{B}^{k+1}$ kümesi oluşturulur.

2) $\mathcal{B}^{k+1}$ kümesinin ağırlık merkezi hesaplanır ve bu x^{k+1} noktası için 1)'deki prosedür tekrarlanır.

3.1 Konveks Poligonun Köşelerini Saat Yönünde veya Saat Yönünün Tersi Yönde Sıralama

N kenarlı konveks bir poligonun köşeleri $K_1, K_2, K_3, \dots, K_N$ olsun. Bu noktaların analitik merkezine M diyelim. O halde $\overrightarrow{MK_1}, \overrightarrow{MK_2}, \overrightarrow{MK_3}, \dots, \overrightarrow{MK_N}$ vektörlerini yazabiliriz. $\overrightarrow{MK_i}$ ve $\overrightarrow{MK_j}$ vektörleri arasındaki açıyı $\Theta_{K_i K_j}$ ile gösterelim. O zaman

$$\cos \Theta_{K_i K_j} = \frac{\langle \overrightarrow{MK_i}, \overrightarrow{MK_j} \rangle}{\|\overrightarrow{MK_i}\| \cdot \|\overrightarrow{MK_j}\|}$$

olur. Burada $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$ için $\Theta_{K_i K_j} \in [0, \pi]$ olarak alalım.

$\overrightarrow{MK_1}$ vektörü ile diğer vektörler arasındaki açılar için $\cos \Theta_{K_1 K_2} = \alpha_1$, $\cos \Theta_{K_1 K_3} = \alpha_2$, $\cos \Theta_{K_1 K_4} = \alpha_3$, ..., $\cos \Theta_{K_1 K_N} = \alpha_{N-1}$ olsun. O zaman $\Theta_{K_1 K_2} = \arccos(\alpha_1)$, $\Theta_{K_1 K_3} = \arccos(\alpha_2)$, ..., $\Theta_{K_1 K_N} = \arccos(\alpha_{N-1})$ olur.

$\overrightarrow{MK_1}$ vektörünü seçtiğimiz için M ve K_1 noktasından geçen doğrunun denklemini $ax + by = c$ şeklinde yazalım. Diğer köşeleri de bulduğumuz bu denklemde yerine yazalım. Eğer $ax + by > c$ ise bu köşeler doğrunun bir tarafında $ax + by < c$ ise diğer tarafındadır.

$K_1, K_2, \dots, K_N$ noktalarından $ax + by \geq c$ eşitsizliğini sağlayan noktaları ve $ax + by < c$ eşitsizliğini sağlayan noktaları belirleyelim. Yeniden indisleme yapmamak için, $K_1, K_2, \dots, K_m$ noktalarının $ax + by \geq c$ eşitsizliğini sağladığını, $K_{m+1}, K_{m+2}, \dots, K_N$ noktalarının $ax + by < c$ eşitsizliğini sağladığını varsayalım.

$\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2, \dots, \beta_m = \alpha_m, \beta_{m+1} = 2\pi - \alpha_{m+1}, \beta_{m+2} = 2\pi - \alpha_{m+2}, \dots, \beta_{N-1} = 2\pi - \alpha_{N-1}$ alarak bu β_i sayıları küçükten büyüğe sıralanır. Noktalar bu sıralamadaki indisler dikkate alınarak sıralandığında saat yönünün tersi yönde sıralanmış olur.

Örnek 3.3 $A = (-4, 3), B = (4, -3), C = (-2, -4), D = (5, 5), E = (7, 4)$ noktalarını saat yönünün tersinde sıralayalım. Bu poligonun analitik merkezi $M = (2, 1)$ 'dir. O zaman $\overrightarrow{MA} = (-6, 2), \overrightarrow{MB} = (2, -4), \overrightarrow{MC} = (-4, -5), \overrightarrow{MD} = (3, 4), \overrightarrow{ME} = (5, 3)$ olur. $\overrightarrow{MA} = (-6, 2)$ vektörünü seçelim ve diğer vektörlerle arasındaki açıları bulalım.

$$\begin{aligned}\cos \Theta_{AB} &= \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \rangle}{\|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\overrightarrow{MB}\|} = \frac{-20}{2\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} = -0.7071 \\ \Theta_{AB} &= \arccos(-0.7071) = 0.7499\pi \\ \cos \Theta_{AC} &= \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC} \rangle}{\|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\overrightarrow{MC}\|} = \frac{14}{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{41}} = 0.3457 \\ \Theta_{AC} &= \arccos(0.3457) = 0.3876\pi \\ \cos \Theta_{AD} &= \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD} \rangle}{\|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\overrightarrow{MD}\|} = \frac{-10}{2\sqrt{10} \cdot 5} = -0.3162 \\ \Theta_{AD} &= \arccos(-0.3162) = 0.6024\pi \\ \cos \Theta_{AE} &= \frac{\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{ME} \rangle}{\|\overrightarrow{MA}\| \cdot \|\overrightarrow{ME}\|} = \frac{-24}{2\sqrt{10} \cdot \sqrt{34}} = -0.6507 \\ \Theta_{AE} &= \arccos(-0.6507) = 0.7255\pi\end{aligned}$$

M ve A noktasından geçen doğrunun denklemini $x + 3y = 5$ 'dir. O halde $x_B + 3y_B < 5, x_C + 3y_C < 5, x_D + 3y_D > 5, x_E + 3y_E > 5$ olur. Yani B ve C bu doğrunun bir tarafında, D ve E diğer tarafındadır.

$\Theta_{AB} = 0.7499\pi$, $\Theta_{AC} = 0.3876\pi$, $\Theta_{AD} = 2\pi - 0.6024\pi = 1.3976\pi$, $\Theta_{AE} = 2\pi - 0.7255\pi = 1.2745\pi$ olur. Bu açılar sıralarsak

$$\Theta_{AC} < \Theta_{AB} < \Theta_{AE} < \Theta_{AD}$$

olur. Yani köşelerin saat yönünün tersi yönde sıralaması A, C, B, E, D şeklindedir.

3.2 Konveks Poligonun Alanı ve Ağırlık merkezi

Köşe sayısı n olan konveks bir poligonun köşeleri $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^2$ olsun. Bu köşelerin saat yönünün tersi yönde sıralandığını varsayalım. Poligonun alanını bulmak için poligonun herhangi bir köşesinden $n - 2$ tane üçgen çizebiliriz. Oluşan bu üçgenlerin alanları toplamı poligonun alanını verir.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} + \dots + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_{n-2} & y_{n-2} & 1 \\ x_{n-1} & y_{n-1} & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \end{aligned}$$

Burada $(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$ 'dir.

Oluşan bu üçgenlerin alanları sırasıyla $S_1, S_2, \dots, S_{n-2}$ ve bu üçgenlerin ağırlık merkezleri sırasıyla $M_1, M_2, \dots, M_{n-2}$ olsun. O halde poligonun ağırlık merkezi,

$$\begin{aligned} M &= \frac{M_1 S_1 + M_2 S_2 + M_3 S_3 + \dots + M_{n-2} S_{n-2}}{S_1 + S_2 + \dots + S_{n-2}} \\ &= \frac{1}{6A} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i), \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right) \end{aligned}$$

Örnek 3.4 [16]

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1.6 & -2.5 \\ 2.5 & 1.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -0.3 & 2 \\ -1 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0.9 & 3.3 \\ -4 & -3.5 \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ matris ailesi için ortak P çözümünü Algoritma 3.2 ile araştıralım.

$x^1 = (0, 0)^T$ alalım. Denklem (1)'deki maksimalleştirici ikili $(v^1, A^{(1)})$: $v^1 = (0, 1)^T$, $A^{(1)} = A_1$, $g^1 = (-2.2, -5)^T$ ve $\phi(x^1) = 2.2 > 0$ olarak bulunur.

$$\mathcal{B}^2 = \left\{ (x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \right. \\ \left. x^T g^1 + (v^1)^T (A_1 + A_1^T) v^1 = -2.2x_1 - 5x_2 + 2.2 \geq 0 \right\}$$

olur. $\mathcal{B}^2$ kümesi köşe noktaları:

$$(-1, 1)^T, \quad (-1, 22/25)^T, \quad (1, 1)^T, \quad (1, 0)^T$$

olan bir dörtgendir ve bu dörtgenin ağırlık merkezi $x^2 = (0.261, 0.662)^T$ noktasıdır (Şekil 3.5-(a)). Bu x^2 noktası ile devam edildiğinde:

$$x^2 = (0.261, 0.662)^T, \quad \phi(x^2) = 0.9067 > 0, \\ A^{(2)} = A_3, \quad v^2 = (0.236, 0.971)^T, \quad g^2 = (3.797, 2.931)^T, \\ \mathcal{B}^3 = \text{conv}\{(-1, 1)^T, (-1, 0.88)^T, (0.295, 0.310)^T, (-0.237, 1)^T\} \\ (\text{Şekil 3.5-(b)}),$$

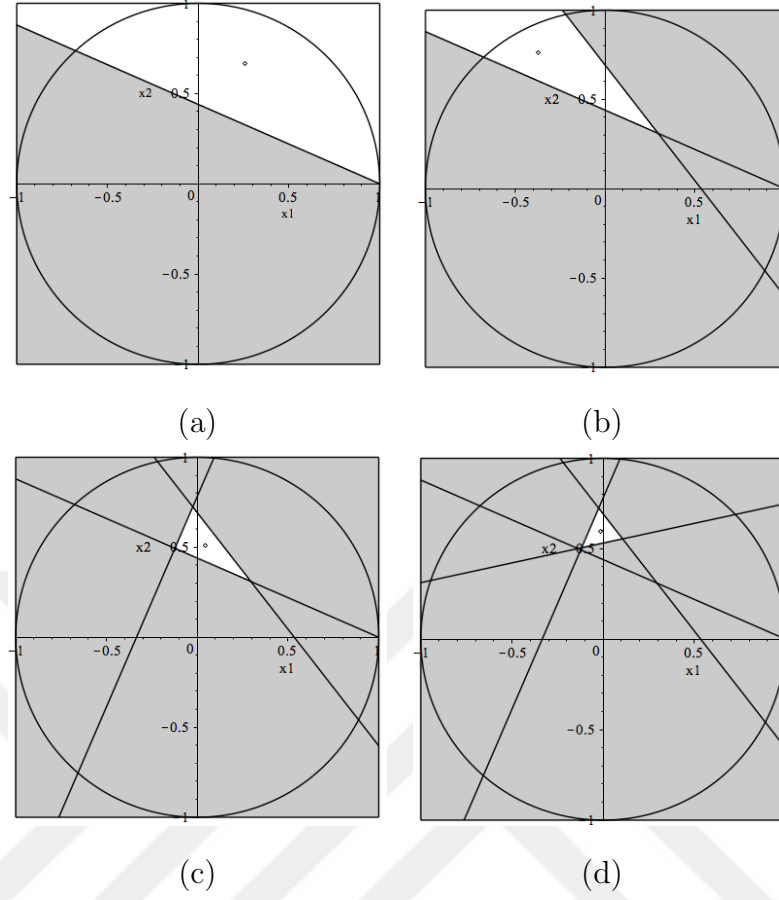
$$x^3 = (-0.372, 0.761)^T, \quad \phi(x^3) = 2.468 > 0, \\ A^{(3)} = A_1, \quad v^3 = (-0.910, -0.413)^T, \quad g^3 = (-6.797, 2.909)^T, \\ \mathcal{B}^4 = \text{conv}\{(-0.123, 0.494)^T, (0.295, 0.310)^T, (-0.024, 0.724)^T\} \\ (\text{Şekil 3.5-(c)}),$$

$$x^4 = (0.049, 0.509)^T, \quad \phi(x^4) = 0.112 > 0, \\ A^{(4)} = A_2, \quad v^4 = (-0.986, 0.164)^T, \quad g^4 = (0.755, -3.458)^T, \\ \mathcal{B}^5 = \text{conv}\{(-0.118, 0.505)^T, (0.106, 0.554)^T, (-0.024, 0.724)^T\} \\ (\text{Şekil 3.5-(d)})$$

ve bu kümenin ağırlık merkezi $x^5 = (-0.012176, 0.594730)^T$ olarak bulunur.

$\phi(x^5) = -0.10008 < 0$ olduğundan

$$P = \begin{bmatrix} 0.987823 & 0.594730 \\ 0.594730 & 1.012176 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.5: Örnek 3.4 için $\mathcal{B}^k$ ($k = 2, 3, 4, 5$) kümeleri

matrisi $A_i^T P + P A_i < 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) eşitsizliklerinin ortak çözümü olur.

Örnek 3.5 [16]

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisleri için $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ matris ailesi verilsin. Algoritma 3.2 ile bu matrisler için ortak P çözümünü araştıralım.

Başlangıç noktası olarak $x^1 = (0, 0)^T$ alalım. Maksimum özdeğeri veren matris ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör ikilisi $(v^1, A^{(1)})$: $A^{(1)} = A_3$ ve $v^1 = (0.957, 0.289)^T$ olur. $\phi(x^1) = 2.605 > 0$ ve $g^1 = (4.386, -1.882)^T$ olarak

bulunur.

$$\mathcal{B}^2 : = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \\ 4.386x_1 - 1.882x_2 + 2.605 \geq 0 \}$$

olur. $\mathcal{B}^2$ kümesi köşe noktaları cinsinden

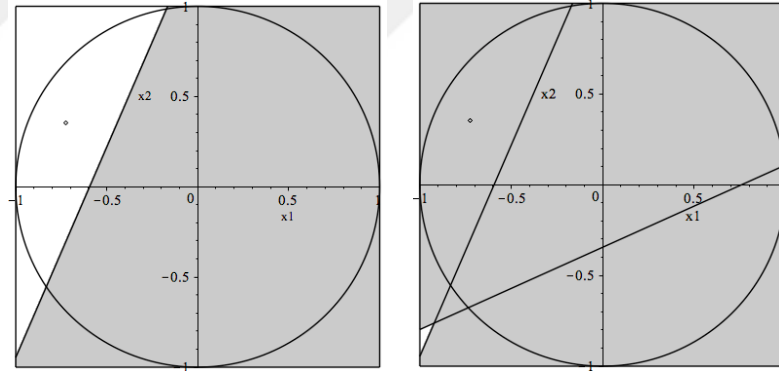
$$\mathcal{B}^2 = \text{conv}\{(-1, 1)^T, (-1, -0.945)^T, (-0.164, 1)^T\}$$

şeklinde yazılabilir (Şekil 3.6-(a)). Bu üçgenin ağırlık merkezi $x^2 = (-0.721, 0.351)^T$ şeklindedir. Bu nokta için

$$\phi(x^2) = 5.594 > 0,$$

$$A^{(2)} = A_1, \quad v^2 = (-0.931, -0.363)^T, \quad g^2 = (-2.480, 5.468)^T,$$

$$\mathcal{B}^3 = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \\ 4.386x_1 - 1.882x_2 + 2.605 \geq 0, \\ -2.48x_1 + 5.468x_2 + 1.883 \geq 0\}.$$



(a)

(b)

Şekil 3.6: Örnek 3.5 için $\mathcal{B}^k$ ($k = 2, 3$) kümeleri

$\mathcal{B}^3$ kümesi ile D kümesinin kesişimi boş küme olduğundan (Şekil 3.6-(b))

$\mathcal{A}$ matris ailesi için ortak P çözümü yoktur.

Örnek 3.6

$$A_1 = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisler olmak üzere $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ matris ailesi verilsin.

$x^1 = (0, 0)^T$ alalım. Denklem (1)'deki maksimalleştirici ikili $(v^1, A^{(1)})$: $A^{(1)} = A_3$, $v^1 = (0.973, 0.229)^T$ olur. Buna göre $\phi(x^1) = 0.236 > 0$ ve $g^1 = (-1.130, 2.788)^T$ olarak bulunur.

$$\mathcal{B}^2 = \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \\ -1.13x_1 + 2.788x_2 + 0.236 \geq 0\}$$

olur. $\mathcal{B}^2$ kümesi köşe noktaları cinsinden

$$\mathcal{B}^2 = \text{conv}\{(-1, -0.490)^T, (-1, -1)^T, (1, -1)^T, (1, 0.320)^T\}$$

şeklinde ifade edilir ve bu kümenin ağırlık merkezi $x^2 = (0.147, -0.512)^T$ noktasıdır. Bu işlemlere devam edildiğinde

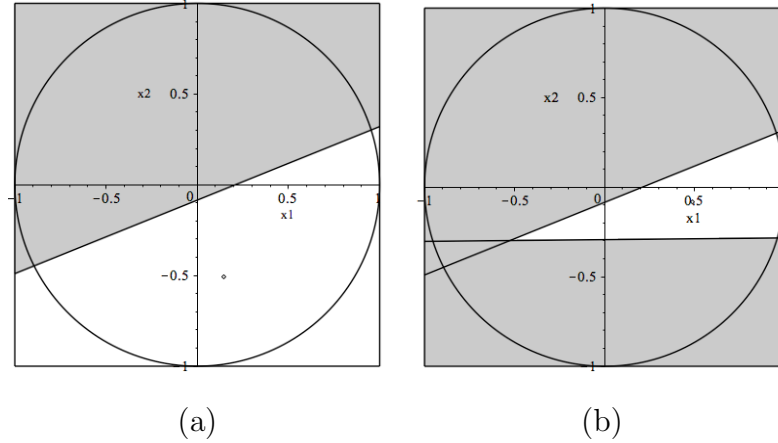
$$\phi(x^2) = 2.106 > 0, \\ A^{(2)} = A_2, \quad v^2 = (-0.988, -0.152)^T, \quad g^2 = (0.091, -9.531)^T, \\ \mathcal{B}^3 = \text{conv}\{(-0.118, 0.505)^T, (0.106, 0.554)^T, (-0.024, 0.724)^T\} \\ (\text{Şekil 3.5-(d)})$$

ve bu kümenin ağırlık merkezi $x^3 = (0.491363, -0.086755)^T$ olarak bulunur.

$\phi(x^3) = -0.165 < 0$ olduğundan

$$P = \begin{bmatrix} 1.491363 & -0.086755 \\ -0.086755 & 0.508636 \end{bmatrix}$$

matrisi $A_i^T P + P A_i < 0$ ($i = 1, 2, 3$) eşitsizliklerinin ortak çözümü olur.



Şekil 3.7: Örnek 3.6 için $\mathcal{B}^2$ ve $\mathcal{B}^3$ kümeleri

Örnek 3.7

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.3 & 2 \\ -1 & -1.3 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -1.3 & -1 \\ 2.7 & -2 \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı matrisleri verilsin. $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ matris ailesi için ortak P çözümünü araştıralım.

Algoritma 3.2 ile çözümü araştırmak için $x^1 = (0, 0)^T$ noktasıyla başlayalım.

Bu nokta için $(v^1, A^{(1)})$: $A^{(1)} = A_2$,

$v^1 = (0.957, 0.289)^T$, $\phi(x^1) = 2.605 > 0$ ve

$g^1 = (4.386, -1.882)^T$ olarak bulunur.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^2 &= \{(x_1, x_2) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \\ &\quad 4.386x_1 - 1.882x_2 + 2.605 \geq 0\} \end{aligned}$$

olur.

$$\mathcal{B}^2 = \text{conv}\{(-1, 1)^T, (-1, -0.945)^T, (-0.164, 1)\}$$

şeklinde yazılabilir ve bu üçgenin ağırlık merkezi $x^2 = (-0.721, 0.351)^T$ olur (Şekil 3.8-(a)).

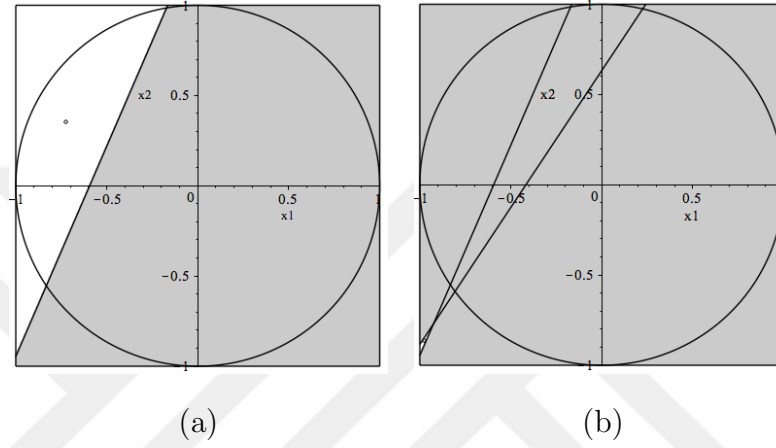
$$\phi(x^2) = 2.223 > 0,$$

$$A^{(2)} = A_3, \quad v^2 = (-0.950, -0.310)^T, \quad g^2 = (-4.148, 2.733)^T,$$

ve buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^3 = \{ (x_1, x_2) : & -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, \\ & 4.386x_1 - 1.882x_2 + 2.605 \geq 0, \\ & -4.148x_1 + 2.733x_2 - 1.73 \geq 0 \}\end{aligned}$$

olur. $\mathcal{B}^3$ kümesi ile D kümesinin kesişimi boş küme olduğundan $\mathcal{A}$ matris ailesi için ortak P çözümü yoktur (Şekil 3.8-(b)).



Şekil 3.8: Örnek 3.7 için $\mathcal{B}^2$ ve $\mathcal{B}^3$ kümeleri

3.3 2×2 Kompleks Matrisler için Ortak P Çözümü

2×2 boyutlu Hurwitz kararlı A ve B kompleks matrisler için ortak çözümün varlığı için [25]'de incelenmiştir. A ve B matrislerinin ortak P çözümünün olması için gerek ve yeter koşul her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $(A + j\alpha I)(B + j\beta I)$ ve $(A + j\alpha I)^{-1}(B + j\beta I)$ matrislerinin negatif özdeğerlerinin olmamasıdır.

Biz burada $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$, 2×2 boyutlu Hurwitz kararlı kompleks matrislerden oluşan matris ailesi için ortak P problemini ele alacağız.

Her $A \in \mathcal{A}$ için

$$A^*H + HA < 0$$

olacak şekilde $H > 0$ pozitif belirli matrisinin varlığını araştıracağız.

$x \in D = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ olmak üzere $\text{Tr}(H(x)) = 2$ olan

$$H(x) = \begin{bmatrix} 1 + x_1 & x_2 + jx_3 \\ x_2 - jx_3 & 1 - x_1 \end{bmatrix} > 0$$

matrisini alalım.

Teorem 3.8 (*Rayleigh-Ritz Teoremi*)

$B \in \mathcal{M}_n$ Hermityen matris ve B 'nin özdeğerleri sırasıyla

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n-1} > \lambda_n$$

olsun. Her $v \in \mathbb{C}^n$ için

$$\lambda_n v^* v \leq v^* B v \leq \lambda_1 v^* v,$$

$$\lambda_{max} = \lambda_1 = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in \mathbb{C}^n}} v^* B v,$$

$$\lambda_{min} = \lambda_n = \min_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in \mathbb{C}^n}} v^* B v$$

olur.

$x = (x_1, x_2, x_3)^T$ için

$$\phi(x) := \max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{max}(A^*H(x) + H(x)A)$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\lambda_{max}(A^*H(x) + H(x)A) = \max_{\substack{\|v\|=1 \\ v \in \mathbb{C}^2}} v^*(A^*H(x) + H(x)A)v$$

şeklinde ifade edilebilir. Buna göre

$$\max_v \max_A = \max_{(v,A)}$$

ile gösterilecek olursa

$$\phi(x) = \max_{\substack{(v,A) \\ \|v\|=1 \\ A \in \mathcal{A}}} v^*[A^*H(x) + H(x)A]v$$

şeklinde yazılabilir.

$\phi(x) < 0$ olacak şekilde $x \in D = \{x = (x_1, x_2, x_3)^T : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$ olması, $\mathcal{A}$ kompleks matris ailesi için ortak P çözümünün varlığı demektir.

Keyfi olarak seçilen bir $\hat{x} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)^T \in D$ noktasını alalım. O zaman

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 1 + \hat{x}_1 & \hat{x}_2 + j\hat{x}_3 \\ \hat{x}_2 - j\hat{x}_3 & 1 - \hat{x}_1 \end{bmatrix}.$$

$i = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere $\lambda_{max}(A_i^* \hat{H} + \hat{H} A_i)$ özdeğerini veren matris $\hat{A} \in \mathcal{A}$ olsun. Yani

$$\max_{A \in \mathcal{A}} \lambda_{max}(A^* \hat{H} + \hat{H} A) = \lambda_{max}(\hat{A}^* \hat{H} + \hat{H} \hat{A}).$$

$(\hat{A}^* \hat{H} + \hat{H} \hat{A})'$ nin maximum özdeğerine karşılık gelen özvektör $\hat{v} = (\hat{v}_1 + j\hat{u}_1, \hat{v}_2 + j\hat{u}_2)^T$ olsun.

$$\max_{\|v\|=1} v^*(\hat{A}^* \hat{H} + \hat{H} \hat{A})v = \hat{v}^*(\hat{A}^* \hat{H} + \hat{H} \hat{A})\hat{v} \quad (3)$$

olur.

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 - j\hat{u}_1 & -\hat{v}_2 + j\hat{u}_2 \\ \hat{v}_2 - j\hat{u}_2 & \hat{v}_1 - j\hat{u}_1 \\ -\hat{u}_2 - j\hat{v}_2 & \hat{u}_1 + j\hat{v}_1 \end{bmatrix} \text{ matrisini ve } \hat{g} = 2\text{Re}(\hat{V} \hat{A} \hat{v}) \text{ vektörünü}$$

tanımlayalım. O zaman

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \max_{\substack{\|v\|=1 \\ A \in \mathcal{A}}} v^*[A^*H(x) + H(x)A]v \\ &\geq \hat{v}^*[\hat{A}^*H(x) + H(x)\hat{A}]\hat{v} \\ &= x^T \hat{g} + \hat{v}^*(A^* + A)\hat{v} \end{aligned} \quad (4)$$

olur.

$\mathcal{K} = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ kutusu için denklem (4)'deki eşitsizlik yardımıyla 2×2 boyutlu Hurwitz kararlı matrislerden oluşan $\mathcal{A}$ kompakt matris ailesinin ortak P çözümü için bir algoritma oluşturacağız.

$$\mathcal{B}^1 := \{(x_1, x_2, x_3) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, -1 \leq x_3, x_3 \leq 1\}$$

kümesini tanımlayalım. $x^1 = (0, 0, 0)^T \in \mathcal{B}^1$ alalım. Denklem (3) deki maksimalleştirici (v^1, A^1) çifti için $\phi(x^1) < 0$ ise ortak çözüm $H(x^1)$ olur. Eğer $\phi(x^1) \geq 0$ ise $\mathcal{B}^1$ kümesinden

$$x^T \hat{g} + \hat{v}^*(A^* + A)\hat{v} \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan noktalar atılır. Kalan küme

$$\mathcal{B}^2 : = \{(x_1, x_2, x_3) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, -1 \leq x_3, x_3 \leq 1, x^T \hat{g}^1 + (\hat{v}^1)^*((A^1)^* + A^1)\hat{v}^1 \geq 0\}$$

olur. Bu kümenin köşe noktaları belirlenir ve bu köşe noktalarının (ağırlık merkezi yerine) analitik merkezi x^2 belirlenir ve bu prosedür tekrarlanır:

Algoritma 3.8 2×2 boyutlu Hurwitz kararlı kompleks matrislerden oluşan $\mathcal{A}$ kompakt matris ailesi verilsin. $x^1 = (0, 0, 0)^T \in \mathcal{B}^1$ alınır. Denklem (3)'deki maksimalleştirici (v^1, A^1) çifti belirlenir ve g^1 vektörü hesaplanır. $\phi(x^1) < 0$ ise ortak çözüm $H(x^1)$ olur. Değilse

$$x^T \hat{g}^1 + (\hat{v}^1)^*[(A^1)^* + A^1]\hat{v}^1 \geq 0$$

eşitsizliği $\mathcal{B}^1$ kümesindeki eşitsizliklere eklenerek $\mathcal{B}^2$ kümesi oluşturulur. Bu kümenin köşe noktaları bulunur ve bu noktaların analitik merkezi hesaplanır: x^2 .

1) $x^k \in D$ ve $\phi(x^k) < 0$ ise ortak çözüm $H(x^k)$ olur.

$x^k \notin D$ veya $\phi(x^k) \geq 0$ ise denklem (3)'deki maksimalleştirici (v^k, A^k) çifti belirlenir ve g^k vektörü hesaplanır.

$$x^T \hat{g}^k + (\hat{v}^k)^*[(A^k)^* + A^k]\hat{v}^k \geq 0$$

eşitsizliği $\mathcal{B}^k$ kümesine eklenerek $\mathcal{B}^{k+1}$ kümesi oluşturulur.

2) $\mathcal{B}^{k+1}$ kümesinin köşe noktalarının analitik merkezi hesaplanır ve bu x^{k+1} noktası için 1)'deki prosedür tekrarlanır.

Örnek 3.9

$$A_1 = \begin{bmatrix} -2-j & 1+2j \\ -1.5-j & -1.1+j \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -2-j & 3+4j \\ -2.5-j & -2.5+j \end{bmatrix}$$

Hurwitz kararlı kompleks matrisleri alalım.

$x^0 = (0, 0, 0)^T$ için (v^1, A^1) : $A^1 = A_2$ ve $v^1 = (0.74, 0.066 - 0.66j)^T$ olur.
 $\phi(x^1) = 0.549 > 0$ olduğundan $g^1 = (3.56, 1.49, 0.049)^T$ için

$$\mathcal{B}^2 : = \{(x_1, x_2, x_3) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, -1 \leq x_3, x_3 \leq 1, \\ 3.56x_1 + 1.49x_2 + 0.049x_3 + 0.549 \geq 0\}$$

olur. Bu kümenin köşe noktaları:

$$\begin{aligned} &(-1, -1, -1)^T, \quad (-1, -1, 1)^T, \quad (-1, 1, -1), \quad (-1, 1, 1), \\ &(0.27, -1, -1)^T, \quad (0.24, -1, 1), \quad (-0.55, 1, -1), \quad (-0.58, 1, 1)^T \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Bu noktaların analitik merkezi

$$x^2 = (-0.57, 0, 0)^T$$

için denklem (3)'teki maksimalleştirici (v^2, A^2) çifti: $A^2 = A_1$,

$v^2 = (0.79, -0.376 - 0.469j)^T$ ve $g^2 = (-2.506, 2.176, 1.602)^T$, $\phi(x^2) = 0.649 > 0$ olarak bulunur. Buna göre

$$\mathcal{B}^3 : = \{(x_1, x_2, x_3) : -1 \leq x_1, x_1 \leq 1, -1 \leq x_2, x_2 \leq 1, -1 \leq x_3, x_3 \leq 1, \\ 3.56x_1 + 1.49x_2 + 0.049x_3 + 0.549 \geq 0, \\ -2.506x_1 + 2.176x_2 + 1.602x_3 - 0.796 \geq 0\}$$

kümesi oluşturulur. Bu kümenin köşe noktalarının analitik merkezi $x^3 = (-0.42, -0.59, -0.08)^T$ olarak bulunur.

$$\phi(x^3) = 1.28 > 0,$$

$$(v^3, A^3) : A^3 = A_2, \quad v^3 = (0.97, 0.07 - 0.22j)^T,$$

$$g^3 = (-1.379, -4.203, 0.08)^T, \quad x^4 = (-0.422, -0.166, -0.237)^T,$$

$$\phi(x^4) = 0.064 > 0,$$

$$(v^4, A^4) : A^4 = A_2, v^4 = (0.91, -0.05 - 0.404j)^T,$$

$$g^4 = (-0.828, -1.242, -0.126)^T, x^5 = (-0.275, -0.183, 0.085)^T$$

şeklinde bulunur. Burada $\phi(x^5) = -0.00162 < 0$ olduğundan

$$H(x^5) = \begin{bmatrix} 0.82498 & -0.1834 + 0.085j \\ -0.1834 - 0.085j & 1.175013 \end{bmatrix}$$

matrisi için $A_1^*H(x^5) + H(x^5)A_1 < 0$ ve $A_2^*H(x^5) + H(x^5)A_2 < 0$

Lyapunov eşitsizlikleri sağlanır.



KAYNAKÇA

- [1] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Prentice Hall, (2001)
- [2] B.R. Barmish, *New Tools for Robustness of Linear systems*, Macmillan, (1994)
- [3] S.P. Bhattacharyya, H.Chapellat, L.H.Keel, *Robust Control: The Parametric Approach*, Prentice Hall, (1995)
- [4] D. Liberzon, *Switching in Systems and Control*, Birkhauser, (2003)
- [5] Z. Sun, S.S. Ge, *Switched Linear Systems: Control and Desing*, Springer, (2005)
- [6] R.K. Yedavalli, *Robust Control of Uncertain Dynamic Systems: A Linear State Space Approach*, Springer, (2014)
- [7] R.A. Horn, C.R. Johnson *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, (1994)
- [8] B. Nicoletta, R. Carli, L. Schenato, *Lyapunov Theory for Discrete Time Systems*, Universita degli studi di Padova - Technical Report, (2001)
- [9] T. Mori, Y. Mori, H. Kokame, *Common Lyapunov Function Approach to Matrix Root Clustering*, Systems Control Letters, vol.44, pp.73-78, (2001)
- [10] V. Dzhafarov, T. Büyükköroğlu, Ş. Yılmaz, *On One Application of Convex Optimization to Stability of Linear Systems*, Trudy Inst. Mat. İ Mekh. Ur0 RAN, vol.21, pp.320-328, (2015)
- [11] Ş. Yılmaz, T. Büyükköroğlu, V. Dzhafarov, *On Asymptotic Stability of Linear Control Systems* , Applied Mathematics, vol.6, pp.71-77, (2015)

- [12] D. Liberzon, R. Tempo *Common Lyapunov Function and Gradient Algorithms*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.49, no.6, pp.990-994, 2004
- [13] R.N. Shorten, K.S. Narendra, *Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Common Quadratic Lyapunov Function for a Finite Number of Stable Second Order Linear Time-Invariant Systems*, International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, vol.16, no.10, pp.709-728, (2002)
- [14] K.S. Narendra, J.A. Balakrishnan, *A Common Lyapunov Function for Stable LTI Systems with Commuting A-Matrices*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.39, no.12, pp.2469-2471, (1994)
- [15] R.N. Shorten, K.S. Narendra, *A Result on Common Quadratic Lyapunov Functions*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.48, no.1, pp.110-113, (2003)
- [16] T. Büyükköroğlu, Ö.Esen, V. Dzhafarov, *Common Lyapunov Function for Some Special Classes of Stable Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.56, no.8, pp.1963-1967, (2011)
- [17] H. Lin, P.J. Antsaklis, *Stability and Stabilizability of Switched linear Systems: A Survey of Recent Results*, IEEE Transactions on Automatic Control, vol.54, no.2, pp.308-322, (2009)
- [18] O. Mason, R. Shorten, *On common quadratic Lyapunov functions for stable discrete-time LTI systems*, IMA Journal of Applied Mathematics, vol. 69, no. 3, pp. 271-283, (2004)
- [19] R. DeCarlo, M. Branicky, S. Petterson, B. Lennartson, *Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems*, IEEE Proceedings, vol. 88, no. 7, pp. 1069-1082, (2000)

- [20] M. Branicky, *Stability of switched and hybrid systems*, Proc. IEEE Conference on Decision and Control, pp. 3498-3503, (1994)
- [21] O. Taussky, *Matrices C with $C^n \rightarrow 0^*$* , Journal of Algebra, vol. 1, pp. 5-10, (1964)
- [22] R.N. Shorten, O. Mason, F. O’Cairbre, P. Curran, *A unifying framework for the SISO circle criterion and other quadratic stability criteria*, International Journal of Control, vol. 77, no. 1, pp. 1-8, (2004)
- [23] I.M.Yaglom, G.V. Boltjanskii, *Convex Figures*, New York: Holt, Rinehart & Whinston, (1961)
- [24] A. Wagener, *Geometric division with a fixed point: Not half the cake, but at least $4/9$* , Group Decision Negotiation, vol. 15, pp. 43–53, (2006)
- [25] T.J. Laffey, H.Smigoc *Common solution to the Lyapunov equation for 2×2 complex matrices*, Linear Algebra and its Applications, vol. 420, pp. 609–624, (2007)

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Duygu GÜRBÜZ

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim Geçmişi:

- 2010-2014, Uşak Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği.