

**BELL SAYILARIYLA İLİŞKİLİ SINIRLI DÖNEN
FONKSİYONLAR SINIFI İÇİN LOGARİTMİK KATSAYILARIN
HANKEL DETERMİNANTLARI**

GİZEM NUR TUFAN

TEMMUZ 2024

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BELL SAYILARIYLA İLİŞKİLİ SINIRLI DÖNEN
FONKSİYONLAR SINIFI İÇİN LOGARİTMİK KATSAYILARIN
HANKEL DETERMİNANTLARI**

Gizem Nur TUFAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

TEMMUZ 2024

DİYARBAKIR

BELL SAYILARIYLA İLİŞKİLİ SINIRLI DÖNEN FONKSİYONLAR SINIFI İÇİN LOGARİTMİK KATSAYILARIN HANKEL DETERMİNANTLARI

Gizem Nur TUFAN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

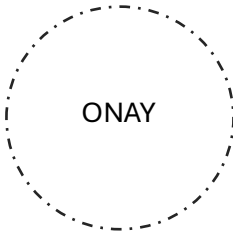
Prof. Dr. Sevtap SÜMER
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY (*)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Sevtap SÜMER (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Bilal ŞEKER
Matematik Bölümü, Batman Üniversitesi



Savunma Tarihi: 02 / 07 / 2024

(*) Jüri Başkanı.
(**) Tez Danışmanı.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Gizem Nur TUFAN

İmza:

TEŞEKKÜR

Araştırmacı olma yolumdaki ilk adımlarımı atarken kıymetli bilgi, teşvik ve tecrübeleriyle yoluma ışık tutan, sorularıma her daim sabır ve anlayışla yaklaşan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyacağım değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Sevtap SÜMER' e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmamın düzenlenmesinde bana rehberlik eden, desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ' e teşekkür ederim.

Yüreklendirici sözleri ile bana akademik yolda yürüme şevki kazandıran değerli hocam Sayın Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY' e teşekkür ederim.

Araştırmama katkı sağlayan ve zaman ayırıp tez jürimde de yer alan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Bilal ŞEKER' e teşekkür ederim.

Bu tezin başlamasında içimdeki tutkuyu ateşleyen, uykusuz gecemde, günümde zorlandığım her anda bu yolda yürümem için destek olan sevgili eşim Erdem TUFAN' a teşekkür ederim.

Son olarak, doğduğum günden bu yana elimi hiç bırakmayan, hayatım boyunca aldığım tüm kararlarda arkamda duran, bugünlere gelmemde en büyük katkısı olan canım aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER.....	vi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
SİMGELER LİSTESİ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ.....	1
2. KOMPLEKS ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI.....	5
3. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR.....	12
3.1 Ünivalent Fonksiyonlar.....	12
3.2 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları.....	21
3.3 Logaritmik Katsayılar.....	30
3.4 Hankel Determinantı.....	34
3.5 Bell Sayıları.....	39
4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI.....	42
4.1 Bell Sayılarıyla İlişkili Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı.....	42
4.2 Bell Sayıları ile İlişkili Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı için Ters Logaritmik Katsayıların Hankel Determinantları.....	45
4.3 Bell Sayıları ile İlişkili Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı için Ters Logaritmik Katsayıların Hankel Determinantları.....	54
5. SONUÇLAR.....	61
KAYNAKLAR.....	62
ÖZGEÇMİŞ.....	65

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1 Bağlantılı küme ve Bağlantısız küme.....	6
Şekil 2.2 Eğri.....	7
Şekil 2.3 Basit eğri ve Basit olmayan eğri.....	7
Şekil 2.4 Basit kapalı eğri.....	8
Şekil 2.5 Düzgün eğri ve Parçalı düzgün eğri.....	8
Şekil 3.1 U birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü.....	15
Şekil 3.2 Yıldızıl küme.....	25
Şekil 3.3 Konveks küme.....	26

SİMGELER LİSTESİ

Simge	Açıklama
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Gerçek Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{U}$	$\{z: z < 1\}$, Birim disk
$\mathbb{U}_R$	$\{z: z < R\}$
$K(z)$	$\frac{z}{(1-z)^2}$, Koebe fonksiyonu
$L_0(z)$	$\frac{1+z}{1-z}$, Mobius fonksiyonu
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
Ω	Schwarz fonksiyonlar sınıfı
A	Normalize edilmiş analitik fonksiyonlar sınıfı
P	Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı
S	$\mathbb{U}$ da analitik, ünivalent ve normalize edilmiş fonksiyonlar sınıfı
S^*	Yıldızlı fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	α mertebeli yıldızlı fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}$	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{R}$	Sınırlı dönen fonksiyonlar sınıfı
$H_q(n)$	q -uncu dereceden Hankel determinanı
$H_{q,n}(F_f/2)$	q -uncu dereceden logaritmik Hankel determinanı
$H_{q,n}(F_{f^{-1}}/2)$	q -uncu dereceden ters logaritmik Hankel determinanı
B_n	Bell sayıları
$\mathcal{R}_B$	Bell sayıları ile ilgili sınırlı dönen fonksiyonlar sınıfı

ÖZET

BELL SAYILARIYLA İLİŞKİLİ SINIRLI DÖNEN FONKSİYONLAR SINIFI İÇİN LOGARİTMİK KATSAYILARIN HANKEL DETERMİNANTLARI

TUFAN, Gizem Nur

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Sevtap SÜMER

Temmuz 2024, 75 sayfa

Bu tezde katsayıları Bell sayıları olan fonksiyona subordinate olan, sınırlı dönen fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanımlanarak bu alt sınıfa ait fonksiyonların bazı başlangıç logaritmik ve ters logaritmik katsayı sınırları elde edilmiştir. Bu katsayılardan faydalanarak, Bell sayıları ile ilişkili sınırlı dönen fonksiyonların $H_{2,1}(F_f/2)$ logaritmik katsayılarının ikinci Hankel determinantı ve $H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)$ ters logaritmik katsayılarının ikinci Hankel determinantı için kesin sınırlar belirlenmiştir. Ayrıca, tanımlanmış olan bu yeni sınıfa ait fonksiyonların logaritmik katsayılarının $H_{3,1}(F_f/2)$ üçüncü Hankel determinantı ve $H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)$ ters logaritmik katsayılarının üçüncü Hankel determinantının sınırları hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçların daha anlaşılabilir olması için öncelikle kompleks fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturan tanım ve teoremler verilmiş, daha sonra ünivalent fonksiyonlar teorisinin temelini oluşturan tanım ve teoremler verilerek, bazı önemli alt sınıfları tanıtılmıştır. Bundan başka, Hankel determinantı ve Bell sayıları hakkında bilgi verilerek tezde tanımlanan sınıfın ve sonuçların anlaşılabilirliğinin sağlanması amaçlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Univalent fonksiyon; Hankel Determinantı; Logaritmik Katsayılar; Bell Sayıları.

ABSTRACT

HANKEL DETERMINANTS OF LOGARITHMIC COEFFICIENTS FOR A CLASS OF BOUNDED TURNING FUNCTIONS ASSOCIATED WITH BELL NUMBERS

TUFAN, Gizem Nur

Master of Science of Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sevtap SÜMER

July 2024, 75 pages

In this thesis, a new subclass of bounded turning functions whose coefficients are subordinate to the function whose coefficients are Bell numbers is defined and some initial logarithmic and inverse logarithmic coefficient bounds of the functions belonging to this subclass are obtained. Using these coefficients, exact bounds for the second Hankel determinant of the logarithmic coefficients $H_{2,1}(F_f/2)$ and the second Hankel determinant of the inverse logarithmic coefficients $H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)$ of bounded turning functions associated with Bell numbers are determined. Moreover, bounds for the third Hankel determinant of the logarithmic coefficients $H_{3,1}(F_f/2)$ and the third Hankel determinant of the inverse logarithmic coefficients $H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)$ of functions belonging to this new class are calculated. To enhance the clarity of the results, the thesis first presents the definitions and theorems underlying the theory of complex functions, followed by the definitions and theorems underlying the theory of univalent functions, and introduces some important subclasses. Additionally, the thesis provides information about the Hankel determinant and Bell numbers to facilitate understanding of the defined class and the obtained results.

Keywords: Univalent functions; Hankel Determinant; Logarithmic Coefficients; Bell Numbers.

1. GİRİŞ

Kompleks sayılar 16. yy. da üçüncü dereceden denklemlerin köklerini veren formülde bir rastlantı sonucu ortaya çıkmıştır. René Descartes 1637 yılında yayınladığı Geometri kitabında negatif sayıların kareköklerini “imajiner” olarak nitelemiştir. Leonhard Euler, -1 sayısının karekökünü i sembolünü $i = \sqrt{-1}$ veya eşdeğer olarak $i^2 = -1$ şeklinde tanımlayan ve bu sayıları ders kitaplarında da ilk kez kullanan matematikçidir. 18. yy. da Alman matematikçi Carl Friedrich Gauss bu tür sayılar için şimdi yaygın olarak kullanılan “kompleks sayılar” ifadesini ilk kez kullanmıştır. Gauss kompleks sayıları reel sayı sisteminin bir genişlemesi gibi değerlendirmiştir. 19. yy. da Augustin Louis Cauchy ve Bernhard Riemann klasik kompleks analizin gelişiminin büyük bir kısmını tamamlamışlardır.

Kompleks değişkenli geometrik fonksiyonlar teorisi, analitik fonksiyonların geometrik özelliklerini inceleyen kompleks analizin önemli bir dalıdır. 1851 yılında B. Riemann, z – düzleminin herhangi bir basit bağlantılı alt bölgesini, w – düzleminin basit bağlantılı bir bölgesi üzerine konformal olarak resmeden analitik bir fonksiyonun olduğunu göstermiş ve böylece geometrik fonksiyonlar teorisinin ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biri, ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Bu teori 1907 yılında Koebe’ nin, normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki sınırları ispatlamaya çalışması ile başlamıştır. 1916 yılında Bieberbach’ ın bu tür fonksiyonların ikinci katsayıları için elde ettiği kestirimi ve bu kestirimin sonuçları ünivalent fonksiyonlar teorisinin önemini ortaya koymuştur. Katsayı problemleri pek çok matematikçinin ilgisini çekmiş ve ünivalent fonksiyonların alt sınıfları üzerinde birçok çalışma yapılmıştır. Öyle ki, 1916 yılında Bieberbach tarafından öne sürülen S sınıfına ait bir fonksiyonunun Taylor açılımındaki katsayı sınırları tahmini 1984 yılına kadar sadece altıncı terime kadar elde edilebilmiştir. 1984 yılında tüm a_n katsayıları için Branges tarafından ispatlanana kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler, bununla birlikte birçok problemi de incelemeye almış, normalize edilmiş analitik ve ünivalent fonksiyonlar sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlayarak bu sınıflara ait fonksiyonlarla farklı bağıntılar elde etmişlerdir. Katsayı problemlerinin çözülmüş olması, bu alanda çalışacak tüm problemlerin bittiği anlamına gelmemiş, tersine ünivalent fonksiyonlarla teorisini daha da zenginleştirerek, bu alanda çalışan

matematikçiler katsayı problemini çalışmayı S sınıfının farklı alt sınıfları için devam ettirmişlerdir.

Geometrik fonksiyon teorisinde S sınıfının en önemli ve en temel aileleri arasında S^* ile gösterilen yıldızlı fonksiyonlar ailesi, C ile gösterilen konveks fonksiyonlar ailesi ve R ile gösterilen sınırlı dönen fonksiyonlar ailesi yer almaktadır. 1994 yılında Ma-Minda [1] tarafından, $\mathbb{U}$ birim diskini sağ yarı düzlemde $\varphi(0) = 1$ e göre yıldızlı bölgeye resmeden ve reel eksene göre simetrik olan analitik ünivalent fonksiyonlar $\varphi(z)$ sınıfını tanıtmışlardır. Yakın zamanlarda, Kumar ve arkadaşları [2] birim disk bir kardiod bölgeye resmeden Ma-Minda tipi yıldızlı fonksiyonlar sınıfını tanıtmış ve temel özelliklerini vermişlerdir. Simetrik kardiod bölgeyle ilişkili konveks fonksiyonlar sınıfı Malik ve arkadaşları [3] tarafından, Ma-Minda tipi subordinasyon koşulunu sağlayan ve hilal şeklindeki bir bölgeyle ilişkili analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları Sharma ve arkadaşları [4] tarafından araştırılmıştır. Wani ve Swaminathan [5], nefroid bölgeyle ilişkili Ma-Minda tipi yıldızlı ve konveks fonksiyonlar tanıtmışlardır. Mendiratta ve arkadaşları [6] tarafından üstel fonksiyonla ilgili güçlü yıldızlı fonksiyonlar, Raina ve Sokol [7] tarafından ise Ma-Minda tipi subordinasyon koşulunu sağlayan lune ile ilişkili analitik fonksiyonların bazı alt sınıfları çalışılmıştır. Bu çalışma da bunlardan yola çıkılarak Ma-Minda tipi sınırlı dönen fonksiyonlar sınıfı $R(\varphi)$ den yararlanılacaktır.

S deki her bir f fonksiyonu logaritmik katsayılar kuvvet serileri cinsinden tanımlanabilir. f fonksiyonunun logaritmik katsayıları γ_n ile gösterilir. Logaritmik katsayılar, ünivalent fonksiyonların katsayılar ile ilgili problemlerde sıklıkla kullanılır. S sınıfının en önemli fonksiyonlarından biri olan Koebe fonksiyonunun logaritmik katsayıları $\gamma_n = 1/n$ dir. Koebe fonksiyonunun ekstremal özellikleri nedeniyle yıldızlı fonksiyonlar için de $|\gamma_n| \leq 1/n$ olması beklenir. Ancak bu eşitsizlik $k = 2$ için bile yanlıştır. $k \geq 3$ olması durumunda ise logaritmik katsayıların kesin tahmini bilinmemektedir. Son zamanlarda, logaritmik katsayılar çeşitli yazarlar tarafından çalışılmış ve S sınıfının bazı önemli alt sınıflarındaki fonksiyonların logaritmik katsayılarının üst sınırları elde edilmiştir.

Hankel determinantları ise; S sınıfı için önemli bir rol oynamamasına rağmen, son yıllarda elemanları S nin alt sınıflarındaki fonksiyonların katsayıları olan Hankel determinantlarına büyük önem verilmiştir. S sınıfında Hankel determinantı için kesin sonuçlar bulmak açıkça zordur ve bu yönde çok az şey bilinmektedir. $H_q(n)$ ile gösterilen Hankel determinantının doğru büyüme oranını bulmak açık bir sorun olmaya devam etmektedir. Her ne kadar S sınıfı için $H_2(2)$ nin kesin üst sınırı bilinmese de geometrik fonksiyon teorisinde, analitik fonksiyonların çeşitli alt sınıfları için ikinci Hankel determinantı ve üçüncü Hankel determinantının kesin üst sınırını hesaplama problemi yaygın olarak çalışılmıştır. Çok yakın zamanda ise Kowalczyk ve Lecko [8], analitik bir fonksiyonun logaritmik katsayıları olan Hankel determinantı $H_{q,n}(F_f/2)$ yi tanıtmıştır. Bu Hankel determinantının katsayılarının, logaritmik katsayılar ile değiştirilmiş halidir. Yaptıkları çalışma da yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfı için $H_{2,1}(F_f/2)$ determinantının kesin sınırlarını elde etmişler ve sonraki çalışmalarında ise; α mertebeden yıldızıl ve konveks fonksiyonlar sınıfı için $H_{2,1}(F_f/2)$ determinantının kesin sınırlarını hesaplamışlardır [9]. Güçlü yıldızıl ve güçlü konveks fonksiyonlar için $H_{q,n}(F_f/2)$ determinantının kesin sınırlarını hesaplama problemi Sümer Eker ve arkadaşları [10] tarafından ele alınmıştır. Ayrıca S sınıfının bazı alt sınıfları için logaritmik katsayıların ikinci Hankel determinantı için üst sınırlar Srivastava ve arkadaşları [11], Sümer Eker ve arkadaşları [12] ve Shi ve arkadaşları [13] tarafından ele alınmıştır.

Negatif olmayan bir n tamsayısı için, Bell sayıları, n elemanlı bir kümenin boştan farklı alt kümelerle olası ayrık parçalanışlarının veya eşdeğer olarak, üzerindeki denklik bağıntılarının sayısını sayar. Bell sayıları, binom katsayılarını içeren bir yenileme bağıntısını sağlar. Kumar ve arkadaşları [14] 1 noktasına göre yıldızıl olan ve katsayıları Bell sayılarını üreten bir fonksiyonu ele almışlardır.

Bu çalışmada yukarıda bahsedilen fikirlere dayanarak, sınırlı dönen fonksiyonların Bell sayılarıyla ilişkili olan fonksiyona subordinate olduğu yeni bir sınıf tanımlanarak, girdileri bu sınıftaki bir f fonksiyonunun logaritmik katsayıları olan Hankel determinantı incelenmiştir. Bunun için öncelikle tanımlanan yeni sınıfa ait fonksiyonların bazı başlangıç logaritmik katsayı sınırları elde edilmiştir. Daha sonra

bu sınırlardan faydalananarak ikinci Hankel determinantı için kesin sınırlar belirlenmiş ve son olarak, Bell sayıları ile ilişkili sınırlı dönüş fonksiyonlarının logaritmik katsayılarının üçüncü Hankel determinantının sınırlarını hesaplanmıştır.



2. KOMPLEKS ANALİZİN TEMEL KAVRAMLARI

Bu bölümde kompleks analizin temelini oluşturan ve tezde daha sonra kullanılacak olan temel tanımlar yapılacaktır. Tez boyunca ihtiyaç duyulacak bazı önemli teoremler ve bunların sonuçları kanıtsız olarak verilecektir.

Tanım 2.1 (Komşuluk) $\varepsilon > 0$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun.

$$D(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 noktasının ε – komşuluğu veya merkezi z_0 noktası, yarıçapı ε olan çemberin içi denir. Bazen " $D(z_0; \varepsilon)$ komşuluğu" yerine " $\mathbb{C}$ de z_0 merkezli, ε yarıçaplı açık disk" ifadesi de kullanılabilir.

$$D(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember,

$$D(z_0; \varepsilon) \setminus \{z_0\}$$

kümesine ise z_0 noktasının delinmiş ε – komşuluğu denir ve $D^*(z_0; \varepsilon)$ ile gösterilir. Bu kümenin

$$D^*(z_0; \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$$

şeklinde gösterilebileceği açıktır.

Tanım 2.2 (İç Nokta) $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ olsun. z_0 noktasının en az bir ε – komşuluğu tamamıyla A kümesinde kalıyorsa, z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir. Başka bir ifadeyle $D(z_0; \varepsilon) \subset A$ koşulunu sağlayan bir $\varepsilon > 0$ sayısı bulunabiliyorsa z_0 noktası A kümesinin iç noktası olarak adlandırılır. $\text{int} A$ veya A° ile gösterilen ve A kümesinin içi olarak adlandırılan küme A nın bütün iç noktalarının kümesidir.

Tanım 2.3 (Açık Küme) A kümesinin her noktası bir iç nokta ise bu kümeye *açık küme* denir. Başka bir deyişle $A^\circ = A$ ise, $A, \mathbb{C}$ de açık kümedir.

Tanım 2.4 (Yığılma Noktası) $A \subset \mathbb{C}$ olsun. $A \neq \emptyset$ ve $z_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. z_0 noktasının her delinmiş komşuluğu A kümesinin en az bir noktasını içeriyorsa, z_0 noktasına A kümesinin *yığılma noktası* denir.

Tanım 2.5 (Kapalı Küme) Tüm yığılma noktalarını kapsayan kümeye *kapalı küme* denir.

Tanım 2.6 (Ayrık Küme) Kompleks sayılar kümesinde boş olmayan iki kümenin ara kesiti boş ise bu iki kümeye *ayrık küme* denir. Başka bir deyişle, $U, V \subset \mathbb{C}$ kümeleri verilsin. $U \cap V = \emptyset$ oluyorsa bu kümelere *ayrık küme* denir.

Tanım 2.7 (Bağlantılı ve Bağlantısız Küme) $A \neq \emptyset$ olsun. $A \subseteq U \cup V$, $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$, $A \cap U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V gibi boş olmayan iki ayrık açık küme bulunamıyorsa, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine *bağlantılı küme* denir. Bağlantılı olmayan kümeye ise *bağlantısız küme* denir. (Şekil 2.1)

Örneğin; $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ve $A = \{z: |z| < 1\}$ kümeleri birer bağlantılı kümedir ancak $B = \{z: \text{Im}z = 0 \text{ ve } \text{Re}z \text{ rasyonel sayı}\}$ kümesi bağlantısız bir kümedir.



Şekil 2.1 Bağlantılı Küme ve Bağlantısız Küme

Tanım 2.8 (Bölge) Kompleks düzlemde bağlantılı ve açık bir küme bölge olarak adlandırılır.

Örneğin; $\mathbb{C}$ kümesi hem bağlantılı hem de açık olduğundan bir bölgedir. Ancak $B = \{z: \text{Im}z = 0 \text{ ve } \text{Re}z \text{ rasyonel sayı}\}$ kümesi bağlantısız olduğundan bölge belirtmez.

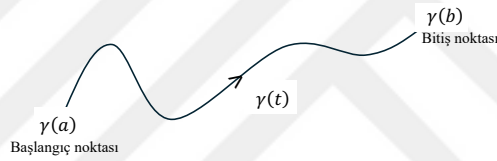
Tanım 2.9 (Eğri) $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ kümesinde bir *eğri* denir. Geometrik olarak bir eğri $[a, b]$ aralığının γ fonksiyonu altındaki resmi olarak tanımlanır.

$x = x(t)$ ve $y = y(t)$ reel t değişkeninin reel değerli fonksiyonları olsun. $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eğrisi parametrik olarak

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

kuralı ile verilir.

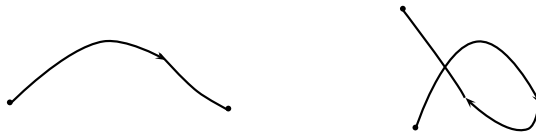
$\gamma(a)$ eğrinin başlangıç noktası, $\gamma(b)$ eğrinin bitiş noktası olarak tanımlanır. t , a dan b ye artarken buna karşılık gelen $\gamma(t)$ nin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2 Eğri

Örneğin; $\gamma: [1, 2] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = t + 2it$ ile verilen fonksiyon sürekli olduğundan $\mathbb{C}$ de bir eğridir.

Uç noktalar dışında, kendini kesmeyen eğriye *basit eğri* denir. Uç noktalar hariç kendini en az bir noktada kesen eğriye *basit olmayan eğri* denir. (Şekil 2.3)

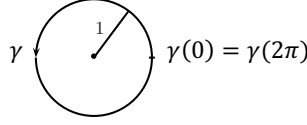


Şekil 2.3 Basit eğri ve basit olmayan eğri

Başlangıç noktası, bitiş noktasına eşit yani $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ eğrisi kapalı eğri olarak adlandırılır. Kapalı bir eğrinin yönü pozitif veya negatiftir.

Basit ve kapalı olan eğrilere *Jordan eğrisi* veya *basit kapalı eğri* adı verilir.

Örneğin; $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ birim çemberi Jordan eğrisidir. (Şekil 2.4)



Şekil 2.4 Basit kapalı eğri

$\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi sıfırdan farklı ve sürekli ise γ eğrisine *düzgün eğri* denir.

γ ve γ' eğrilerinin her ikisi de parçalı yani $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ biçiminde yazılabiliyor ve sürekli ise γ eğrisine *parçalı düzgün eğri* denir. (Şekil 2.5)



Şekil 2.5 Düzgün eğri ve parçalı düzgün eğri

Tanım 2.10 (Kompleks Fonksiyon) Kompleks fonksiyon tanım kümesi ve görüntü kümesi $\mathbb{C}$ nin alt kümeleri olan bir fonksiyondur. Daha açık bir ifadeyle, $A \subset \mathbb{C}$ ve $A \neq \emptyset$ olmak üzere; A nın her bir z elemanına bir $w \in \mathbb{C}$ sayısı karşılık getiren kuraldır. $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = w$ ile gösterilir.

Tanım 2.11 (Kompleks Fonksiyonun Limiti) Limit kavramı fonksiyonun bir noktadaki değeri değil, o noktadaki davranışdır. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere; $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0 \in \mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Ayrıca $w_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için, $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa z , z_0 a yaklaşırken $f(z)$ fonksiyonunun limiti w_0 dır denir ve bu durum $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ ile gösterilir.

Limitin tanımı aşağıdaki şekilde de verilebilir:

$A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere; $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon $z_0 \in \mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. Ayrıca $w_0 \in \mathbb{C}$ verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için $f(A \cap D^*(z_0; \delta)) \subset D(w_0; \varepsilon)$ olacak

şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa z, z_0 a yaklaşıırken $f(z)$ fonksiyonunun limiti w_0 dır denir.

Tanım 2.12 (Kompleks Fonksiyonun Sürekliliği) $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere; $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ ve $|z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabiliyorsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında *süreklidir* denir.

Tanım 2.13 (Diferansiyellenebilirlik) $A, \mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümesi olmak üzere; $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa f fonksiyonuna, z_0 noktasında *diferansiyellenebilir* veya *türevlenebilir fonksiyon* denir. Yukarıda verilen limitin değeri $f'(z)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ ile gösterilir ve f fonksiyonunun z_0 noktasındaki *türevi* denir.

Tanım 2.14 (Analitiklik) $A, \mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin alt kümesi olmak üzere; $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilirse, f e, z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir. f fonksiyonu z_0 noktasında analitik olma koşulunu sağlamıyorsa, bu noktaya fonksiyonun *singüler (tekil) noktası* denir. $\mathbb{C}$ de analitik olan fonksiyona ise *tam fonksiyon* denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ fonksiyonu analitik ise;

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

ile verilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Örneğin; $f_1(z) = e^z$ fonksiyonu ve $f_2(z) = c$ sabit fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin her noktasında analitiktir yani, bir tam fonksiyondur. $f_3(z) = \bar{z}$ fonksiyonu ise hiç bir noktada türevlenemediğinden hiç bir yerde analitik değildir. $f_4(z) = z^2$ fonksiyonu kompleks düzleminin her z noktasında diferansiyellenebilir olduğundan analitiktir.

Teorem 2.15 (Cauchy İntegral Formülü) f fonksiyonu basit bağlantılı bir B bölgesinde analitik ve γ , tamamen B de kapsanan basit kapalı bir eğri olsun. γ içindeki herhangi bir z_0 noktası için;

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

eşitliği sağlanır [15]. ■

Teorem 2.16 (Türevler İçin Cauchy İntegral Formülü) Basit bağlantılı bir B bölgesinde f analitik ve γ , tamamen B bölgesinde kapsanan basit kapalı bir eğri olsun. γ eğrisi içindeki herhangi bir z_0 noktası için, $n = 0, 1, \dots$ olmak üzere;

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

eşitliği gerçekleşir [15]. ■

Bir bölgede analitik olan bir fonksiyonun her mertebeden türevinin var ve bu türevlerinde analitik olması Türevler için Cauchy İntegral formülünün en önemli sonucudur.

Belirli bir B bölgesinde analitik olan f fonksiyonunun uygun bir komşuluğunda kuvvet serisi olarak gösterilebileceğini söyleyen Taylor Teoremi, Cauchy İntegral Formülünden erişilen önemli bir kavramdır.

Teorem 2.17 (Maksimum Modül Teoremi) f , basit kapalı bir γ eğrisi ile sınırlı B bölgesinde sabit olmayan analitik bir fonksiyon olsun. Bu durumda $|f(z)|$, maksimum değerini γ üzerinde alır [15]. ■

Teorem 2.18 (Taylor Teoremi) f fonksiyonu, bir B bölgesinde analitik ve z_0 , B de bir nokta olmak üzere $D(z_0; r)$, B nin alt kümesi olsun. Bu durumda $D(z_0; r)$ diskinde;

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k$$

dir. Bu eşitlikteki seriye f fonksiyonunun z_0 noktasında komşuluğundaki *Taylor serisi* denir [15]. ■

$f(z)$ fonksiyonunun analitik olduğu $z_0 \in B$ noktasının komşuluğunda Taylor serisine açıldığında, bu serinin yakınsaklık yarıçapı şu şekilde bulunur: a , z_0 noktasına en yakın olan $f(z)$ fonksiyonunun analitik olmadığı nokta olsun. z_0 noktasının a noktasına uzaklığı Taylor serisinin *yakınsaklık yarıçapını* verir.

Tanım 2.19 (Maclaurin Serisi) Taylor serisinde özel olarak $z_0 = 0$ alınırsa;

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

olur. Bu seriye *Maclaurin serisi* denir [15].

Tanım 2.20 (Konform Dönüşüm) f kompleks düzlemin bir B bölgesinde tanımlı kompleks dönüşümü olsun. z_0 noktasında kesişen C_1 ve C_2 düzgün eğrilerinin z_0 noktasında aralarında α açısı bulunmak üzere; bu eğrilerin $f(C_1)$ ve $f(C_2)$ resim eğrilerinin $\omega_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında hem büyüklük hem yön bakımından α açısı varsa; f fonksiyonuna z_0 noktasında *konform dönüşüm* denir.

f , her $z_0 \in B$ noktasında konform ise; f fonksiyonuna B bölgesinde “*konformdur*” denir.

Başka bir deyişle; $\omega = f(z)$ bir B bölgesinde tanımlı kompleks dönüşüm olsun. B bölgesindeki bir z_0 noktasında kesişen herhangi iki eğri arasındaki açıyı koruyan dönüşüme z_0 noktasında konformal dönüşüm denir [15].

3. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümde öncelikle ünivalent fonksiyonlar ve bu fonksiyonların bazı önemli alt sınıfları hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca logaritmik katsayılar, Hankel determinantı ve Bell sayıları ile ilgili temel tanımlara değinilerek araştırmamız için ön bilgi oluşturmak amaçlanmıştır.

3.1 Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 3.1.1 (Ünivalent Fonksiyon) Kompleks düzlemin B alt kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu, tanım kümesindeki farklı z değerlerine karşılık farklı görüntüler oluşturuyorsa, bu fonksiyona B bölgesinde *ünivalenttir* denir. Bu tanım şu şekilde de verilebilir:

$f: B \rightarrow \mathbb{C}$, $B \subset \mathbb{C}$ de açık ve bağlantılı küme olsun. $z_1, z_2 \in B$ olmak üzere;

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonuna *ünivalent fonksiyon* denir.

Tanım 3.1.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon) Kompleks düzlemin bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan f fonksiyonu bir $z_0 \in B$ noktasının herhangi bir komşuluğunda ünivalent ise bu f fonksiyonu z_0 noktasında *yerel (lokal) ünivalent fonksiyondur* denir.

$B, \mathbb{C}$ kompleks düzleminin bir alt kümesi olsun. Bu bölgede analitik olan f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeter şart $z_0 \in B$ noktasında $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır. Diğer bir deyişle, z_0 noktasında analitik olan bir f fonksiyonu için,

$$f'(z_0) \neq 0 \Leftrightarrow f, z_0 \text{ da yerel ünivalent}$$

olur.

Teorem 3.1.3 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı bir B bölgesi olmak üzere; her $z_0 \in B$ noktası için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak biçimde B bölgesini $\mathbb{U} = \{z: |z| < 1\}$ birim diskinde resmeden tek bir f fonksiyonu vardır [16]. ■

Bu teorem, ünivalent fonksiyonlar ile ilgili problemlerin çözümü için basit bağlantılı bir bölge yerine, $\mathbb{U}$ birim diskinin kullanılabileceğini söyler.

Tanım 3.1.4 (Normalize Edilmiş Fonksiyonlar) $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olan bir g fonksiyonu;

$$g(z) = b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde bir Maclaurin açılımına sahiptir ve g fonksiyonu birim diskte yakınsaktır.

$\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent olan bir $g(z)$ fonksiyonuna, sabit bir C sayısı eklemesi yapılarak elde edilen $g(z) + C$ fonksiyonu, yalnızca bölgeyi öteler. Bu sebeple fonksiyon $\mathbb{U}$ da ünivalent olur. Bu sebeple yukarıda verilen formüldeki b_0 sabit terimi keyfidir. $g(z)$ fonksiyonundan b_0 sabit terimini çıkararak elde edilen $g(z) - b_0$ fonksiyonu birim diskte ünivalent olduğundan; $b_1 = g'(0) \neq 0$ dır. Böylece $g(z) - b_0$ fonksiyonunu b_1 e bölerek elde edilen $h(z) = \left(\frac{g(z)-b_0}{b_1}\right)$ fonksiyonunu göz önüne alabiliriz. Bu fonksiyon $\frac{1}{b_1}$ ile çarpıldığından resim bölgesi sadece döner ve genişler veya daralır. Bundan dolayı, $g(z)$ fonksiyonu, B bölgesinde ünivalent ise, $h(z) = \left(\frac{g(z)-b_0}{b_1}\right)$ fonksiyonu da B bölgesinde ünivalenttir.

$$h(z) = z + \frac{b_2}{b_1}z^2 + \frac{b_3}{b_1}z^3 + \dots$$

fonksiyonunda $\frac{b_n}{b_1} = a_n$ dersek;

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (3.1)$$

fonksiyonu elde edilir. (3.1) denklemi ile verilen bu fonksiyona *normalize edilmiş* veya *normalleştirilmiş fonksiyon* denir. Eğer f fonksiyonu (3.1) ile verilen biçimde ve

ünivalent ise *normalize edilmiş ünivalent fonksiyondur* denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı özel bir öneme sahiptir. Bu yüzden özel bir isimle, *S sınıfı* olarak adlandırılır.

$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ ile tanımlanan Koebe fonksiyonu *S* sınıfındaki fonksiyonların en temel örneğidir.

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + 4z^4 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

Koebe fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$ bölgesine resmeder.

Eğer Koebe fonksiyonu;

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - \frac{1}{4}$$

olarak tekrar düzenlenir ve

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad g(z) = u^2(z), \quad f(z) = \frac{1}{4}(g(z) - 1)$$

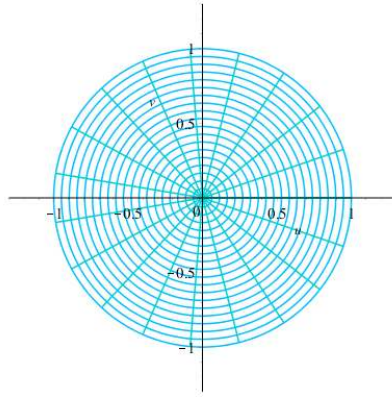
olarak düşünülürse;

$u(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $Re u > 0$ yarı düzlemine dönüştürür.

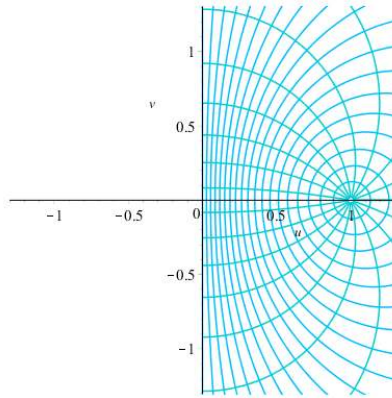
$g(z) = u^2(z)$ fonksiyonu $Re u > 0$ yarı düzlemini negatif reel eksen hariç kompleks düzlemin tamamına dönüştürür.

Son olarak $f(z) = \frac{1}{4}(g(z) - 1)$ fonksiyonu $-\infty$ dan $-\frac{1}{4}$ e kadar olan negatif reel eksen hariç bütün kompleks düzleme dönüştürür.

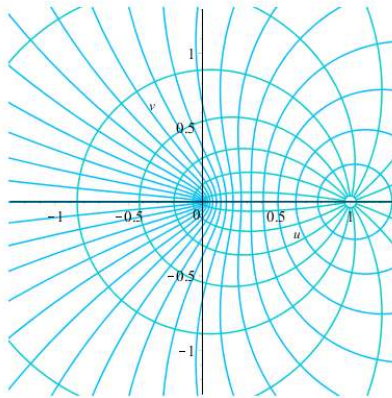
Yukarıda açıklanan dönüşümler Şekil 3.1 de verilmiştir.



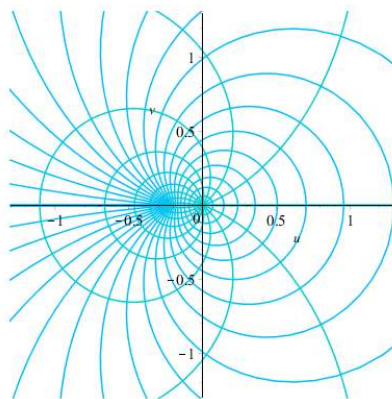
$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}$$



$$g(z) = u^2(z)$$



$$f(z) = \frac{1}{4}(g(z) - 1)$$



Şekil 3.1 $\mathbb{U}$ birim diskinin Koebe fonksiyonu altındaki görüntüsü

S sınıfına ait diğer fonksiyon örnekleri de aşağıdaki gibidir:

i. $\mathbb{U}$ birim diskini kendisi üzerine resmeden

$$f(z) = z$$

birim fonksiyonu,

ii. $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{Re z > -\frac{1}{2}\right\}$ sağ yarı düzleme resmeden

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + z^2 + z^3 + \dots$$

fonksiyonu,

iii. $\mathbb{U}$ birim diskini $\left\{-\frac{\pi}{4} < Im z < \frac{\pi}{4}\right\}$ yatay şeridi üzerine resmeden

$$f(z) = \left(\frac{1}{2}\right) \log \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu.

Bununla birlikte S sınıfında toplama işlemine göre kapalılık özelliğini yoktur. Diğer bir ifadeyle, $f, g \in S$ fonksiyonları için $f + g \in S$ olmak zorunda değildir.

$$f \in S \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$g \in S \Rightarrow g'(0) = 1$$

$$f + g \in S \Rightarrow (f + g)'(0) = f'(0) + g'(0) \neq 1$$

O halde $f + g \notin S$ dir. Dolayısıyla toplamaya göre kapalı değildir. O halde S kümesi bir vektör uzayı değildir.

Örneğin; $f(z) = \left(\frac{z}{1-z}\right)$, $g(z) = \left(\frac{z}{1+iz}\right)$ fonksiyonları S sınıfına aittir. Fakat $f + g$ fonksiyonu S sınıfına ait değildir.

$$f'(z) + g'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{1}{(1+iz)^2} = \frac{2 - 2z(1-i)}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

$z = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2}$ noktası için; $f'(z) + g'(z) = 0$ olur. O halde $f + g$, $\mathbb{U}$ ' da ünivalent olmaz.

S sınıfı birçok temel dönüşüm altında korunur. Bu dönüşümlerden bazıları şunlardır [16]:

i. Eşlenik alma (Conjugation): $f \in S$ ve

$$g(z) = \overline{f(\bar{z})} = z + \overline{a^2}z^2 + \overline{a^3}z^3 + \dots = z + \sum_{n=2}^{\infty} \overline{a_n}z^n, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise; $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ ' da birebir, analitik ve normalize koşullarını sağladığından $g \in S$ dir.

ii. Dönme dönüşümü (Rotation): $f \in S$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise; $g \in S$ dir.

iii. Genişleme-Daralma dönüşümü (Dilation): $f \in S$, $0 < r < 1$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{1}{r} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise; $g \in S$ dir.

iv. Disk otomorfizmi: $f \in S$ ve $|z_0| < 1$ için,

$$g(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise; $g \in S$ dir.

v. Atılmış Değer Dönüşümü: $f \in S$, $f(z) \neq w$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w - f(z)}, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise; $g \in S$ dir.

vi. *Menzil Dönüşümü:* $f \in S$, ϕ fonksiyonu $f(\mathbb{U})$ üzerinde analitik ve ünivalent olmak üzere,

$$g(z) = \frac{(\phi \circ f)(z) - \Phi(0)}{\Phi'(0)}, \quad z \in \mathbb{U}$$

ise; $g \in S$ dir.

vii. *n. Kök Dönüşümü:* $f \in S$, $n = 2, 3, 4, \dots$ olmak üzere, $z \in \mathbb{U}$ için;

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^3} (2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + \dots$$

ise; $g \in S$ dir.

S sınıfına ait fonksiyonların katsayıları matematikçilerin uzun süreden beri uğraştığı bir problem olmuştur. İlk defa Bieberbach 1916 yılında yaptığı bir çalışmada, bu fonksiyonların Taylor seri açılındaki ikinci teriminin katsayısı olan a_2 nin kesin sınırına yer vermiştir.

Teorem 3.1.5 (Bieberbach Teoremi) S sınıfındaki her f fonksiyonu için, $|a_2| \leq 2$ dir. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitliğin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul $f(z)$ nin Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olan;

$$f(z) = e^{-i\theta} K(e^{i\theta} z) = \frac{z}{(1 - e^{i\theta} z)^2}$$

olmasıdır [17]. ■

Birçok matematikçi Bieberbach' ın 1916 da yaptığı bu tahminin üzerinde araştırma yapmış ve kanıtlamaya çalışmışlardır. Bu varsayım yirminci yüzyılın en ünlü matematik problemlerinden biri haline gelmiştir. S sınıfına ait bir f fonksiyonunun Taylor açılımındaki katsayılarının üst sınırları ile yapılan çalışmalar sonucu 1984 yılına kadar sadece altıncı terime kadar elde edilebilmiştir. Nihayetinde 1984 yılında Louis de Branges, $|a_n| \leq n$ olduğunu göstererek, Bieberbach tahmini yaklaşık 70 yıl sonunda kanıtlamıştır.

Teorem 3.1.6 (Bieberbach Tahmini-De Branges Teoremi) S sınıfındaki her f fonksiyonu için

$$|a_n| \leq n, \quad (\forall n \geq 2)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır [17], [18]. ■

Verilen varsayımlar altında, eşitliğin korunduğu bir fonksiyon ile eşitsizliği iyileştirmek (yani bir üst sınırı azaltmak ya da alt sınırı arttırmak) olanaksız ise, bu eşitsizliğe *kesin eşitsizlik* adı verilir. Bir eşitsizliğin kesinliği, eşitlik durumunu sağlayan fonksiyon bulunarak gösterilir. Eşitlik halini sağlayan fonksiyona ise *ekstramal fonksiyon* denir.

Koebe'ye ait örtme teoremi, Bieberbach Teoreminin ilk uygulamasıdır. Her bir $f \in S$ fonksiyonu $f(0) = 0$ olduğundan f fonksiyonunun görüntüsü orijin merkezli en az bir diski kapsar. 1907 yılında Koebe, ρ mutlak sabiti için, S sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntü kümelerinin, ortak bir $|w| < \rho$ diskini kapsadığını ispatlamıştır [19]. Koebe fonksiyonu, $\rho \leq 1/4$ olmasını gerektirir. ρ sabitinin $1/4$ alınabileceği şeklindeki Koebe kestirimi, Bieberbach tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.7 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) S sınıfındaki her fonksiyonun görüntü kümesi

$$\left\{ w: |w| < \frac{1}{4} \right\}$$

diskini içerir [16]. ■

S sınıfındaki fonksiyonlar için Bieberbach Teoreminin kanıtlanmış olması, bu sınıfa ait fonksiyonlar için farklı sonuçların da ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Bu kuramların başında Bükülme ve Büyüme Teoremleri gelir.

Teorem 3.1.8 (Bükülme Teoremi) S sınıfına ait bütün f fonksiyonları için;

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}, \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır [20]. ■

Teorem 3.1.9 (Büyüme Teoremi) S sınıfına ait bütün f fonksiyonları için;

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}, \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır [20]. ■

Büyüme Teoremi ve Bükülme Teoreminin birleştirilmesi ile aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.10 S sınıfında bulunan bütün f fonksiyonları için;

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır [21]. ■

Teorem 3.1.8, Teorem 3.1.9, Teorem 3.1.10 de eşitlik halinin olması için gerek ve yeter koşul $z \in \mathbb{U}$ ve $z \neq 0$ iken f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi olmasıdır.

f fonksiyonu bir B bölgesinde analitik bir fonksiyon olsun. Eğer f ünivalent ise f fonksiyonunun tersi $f(B)$ bölgesinde $g(f(z)) = z$ kuralı ile verilen g fonksiyonudur. $\mathbb{U}$ birim diskinin her $f \in S$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün $1/4$ yarıçaplı diski içine aldığını bilinmektedir. S sınıfındaki her fonksiyon için, fonksiyonun tersi aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 3.1.11 Her $f \in S$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir f^{-1} fonksiyonuna sahiptir:

$$f^{-1}(f(z)) = z \quad (z \in \mathbb{U})$$

ve

$$f(f^{-1}(z)) = z \quad (|z| < r_0(f), r_0(f) \geq 1/4).$$

Buradaki f^{-1} fonksiyonu aşağıdaki şekildedir:

$$\begin{aligned} g(w) = f^{-1}(w) &= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \\ &= w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3) w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4) w^4 + \dots \end{aligned}$$

3.2 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda S sınıfının önemli alt sınıfları olarak ele alınan sınıflara ve temel özelliklerine değinilecektir. Bu alt sınıflar arasında sınırlı dönen fonksiyonlar, yıldızıl, konveks, α mertebeli yıldızıl ve α mertebeli konveks sınıflara değinilecektir. Analitik ve geometrik özelliklere sahip olan bu sınıfları vermeden önce bu alt sınıflar ile yakından ilgili olan pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ve subordinasyon kavramı vermek uygun olacaktır.

Tanım 3.2.1 (Pozitif Reel Kısma Sahip Fonksiyonlar Sınıfı) p , $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $p(0) = 1$ olsun. $0 \leq \alpha < 1$ için; $Rep(z) > \alpha$ koşulunu sağlayan

$$p(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_nz^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_nz^n \quad (3.2)$$

Taylor seri açılımına sahip p fonksiyonlarının sınıfı P_α ile gösterilir.

$\alpha = 0$ olması halinde P_0 yerine P gösterimi kullanılır ve P sınıfındaki fonksiyonlar pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar veya Caratheodory fonksiyonları olarak adlandırılır.

P_α sınıfının en bilinen örneği;

$$p(z) = \frac{1 + (1 - 2\alpha)z}{1 - z} = \frac{1 + z}{1 - z}(1 - \alpha) = 1 + 2(1 - \alpha) \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini $\{w: Rew > \alpha\}$ yarı düzlemine üzerine resmeder.

$$p(z) = 1 - (1 - \alpha)z^n, \quad (n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu P_α sınıfında olan bir başka örnek olarak verilebilir. Ancak bu fonksiyon $n \geq 2$ için ünivalent değildir. $p(z)$ fonksiyonunun ünivalent olması şart değildir.

Daha genel bir fonksiyon olarak $-1 \leq B < A \leq 1$ olmak üzere;

$$p(z, A, B) = \frac{1 + Az}{1 + Bz} = 1 + (A - B) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} B^{n-1} z^n$$

fonksiyonu verilebilir. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini çap uç noktaları $\frac{1-A}{1-B}$ ve $\frac{1+A}{1+B}$ olan ve reel eksene göre simetrik olan konveks bir bölge üzerine resmeder.

A ve B nin değerlerini belirtmek pozitif reel kısma sahip fonksiyonlara daha fazla örnek sağlar:

- i.* $A = -B = 1$ için elde edilen $p(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + 2z + 2z^3 + \dots$, fonksiyonu Möbius fonksiyonu olarak isimlendirilir. Bu fonksiyon P sınıfı için önemli bir rol oynar. $\mathbb{U}$ da hem ünivalent hem de analitiktir. Ayrıca bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini, sağ yarı düzlem üzerine eşler.
- ii.* $0 < A \leq 1, B = 0$ için elde edilen $p(z) = 1 + Az$ fonksiyonu birim diski merkezi 1 ve yarıçapı A olan bölgeye eşler.
- iii.* $A = 1 - 2\alpha$ ve $B = -1$ için yukarıda bahsedilen $p(z) = \frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}$ fonksiyonu elde edilir.

1907 yılında Caratheodory, P sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için, aşağıdaki kesin tahmini kanıtlamıştır. Bu teorem S sınıfının alt sınıflarındaki fonksiyonlarla yapılan çalışmalarda temel öneme sahiptir.

Teorem 3.2.2 (Caratheodory Teoremi) (3.2) ile verilen $p(z)$ fonksiyonu P sınıfında ise;

$$|p_n| \leq 2, n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [22]. ■

Tanım 3.2.3 (Schwarz Fonksiyonu- Ω Sınıfı) $\mathbb{U}$ birim diskinde $\varphi(0) = 0$ ve $|\varphi(z)| < 1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyona *Schwarz fonksiyonu* denir. Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω sembolü ile gösterilir [23].

Pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı P ile Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω arasında,

$$p(z) \in P \Leftrightarrow p(z) = \frac{1 + \varphi(z)}{1 - \varphi(z)}, \varphi(z) \in \Omega$$

şeklinde bir ilişki vardır. Bu önerme pozitif reel kısma sahip fonksiyonların özelliklerinden Schwarz fonksiyonlarının özelliklerinin, Schwarz fonksiyonlarının özelliklerinden pozitif reel kısma sahip fonksiyonların özelliklerinin elde edilmesine yardımcı olur.

Tanım 3.2.4 (Subordinasyon) f ve g , $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun. Eğer $z \in \mathbb{U}$ için, $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde bir w Schwarz fonksiyonu varsa, f fonksiyonu, g fonksiyonuna *subordinatedir* denir ve $f \prec g$ ile gösterilir [23].

Eğer g fonksiyonu ünivalent ise subordinasyon kavramı; her bir $|z| < r < 1$ diskinin g altındaki görüntüsünün aynı diskin f altındaki görüntüsünü içerdiğini ima eder.

Aşağıda verilen yardımcı önerme subordinasyon kavramının en temel sonuçlarındandır:

Yardımcı Önerme 3.2.5 $g, \mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent fonksiyon ve f de $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik fonksiyon olmak üzere; $f \prec g$ olması için gerek ve yeter koşul $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ olmasıdır [21]. ■

Eğer $f \prec g$ ise; $z \in \mathbb{U}$ için $|w'(0)| \leq 1$ ve $|w(z)| \leq |z|$ koşullarının sağlandığı Schwarz Yardımcı Önermesinden görülür. Buradan $r \in [0,1)$ için;

$$|f'(0)| \leq |g'(0)| \text{ ve } f(|z| \leq r) \subset g(|z| \leq r)$$

sonucu çıkar.

Eğer $f < g$ ise; $\max_{|z| \leq r} |f(z)| \leq \max_{|z| \leq r} |g(z)|$, $(0 \leq r < 1)$ olması durumu, *Lindelöf subordinasyon prensibi* olarak bilinir.

Tüm $r \in [0,1)$ değerleri için $f(\mathbb{U}_r) \subseteq g(\mathbb{U}_r)$ olması durumu ise, yukarıda verilen yardımcı önermeyle birlikte *subordinasyon prensibi* olarak bilinir.

Teorem 3.2.6 (Subordinasyon Prensibi) f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ve analitik olsun. g fonksiyonu da U birim diskinde ünivalent fonksiyon ise $f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olması halinde $r \in (0,1)$ için $f(\mathbb{U}_r) \subseteq g(\mathbb{U}_r)$ kapsamı sağlanır [21]. ■

Subordinasyon prensibi kompleks analizde önemli bir yere sahiptir. Son zamanlarda kompleks analiz ile ilgilenen pek çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. Kompleks bir değişkenin iki fonksiyonu arasındaki subordinasyon kavramı, reel bir değişkenin fonksiyonları arasındaki eşitsizlik fikrinin doğal bir genellemesidir. Teorik olarak, subordinasyon kavramının kullanılmasındaki temel amaç, özellikleri belli olmayan bir fonksiyonu özellikleri bilinen bir fonksiyon sayesinde araştırabilmektir.

Tanım 3.2.7 (Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı) $f \in A$ olsun. $f' \in P$ olacak şekilde fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{R}$ ile gösterilir.

$$\beta = \arg f'(z_0)$$

z_0 noktasındaki bir doğru parçasının $f(z)$ fonksiyonu altındaki görüntüsünün dönüş açısı olduğundan, $\mathcal{R}$ sınıfındaki fonksiyonlara *sınırlı dönen fonksiyonlar* denir. $\mathcal{R}$ sınıfındaki fonksiyonlar için $|\beta| < \pi/2$ dir.

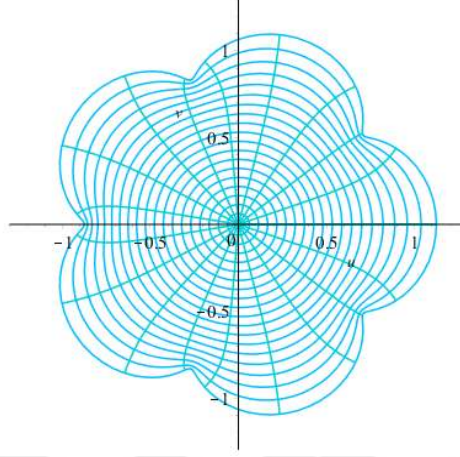
$\mathcal{R}$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki teorem geçerlidir:

Teorem 3.2.8 $f \in \mathcal{R}$ ise;

$$|a_n| \leq 2/n$$

olur [20]. ■

Tanım 3.2.9 (Yıldızıl Küme) Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi ve $z_0 \in B$ noktası ele alındığında, eğer z_0 noktasını her $z \in B$ noktasına birleştiren $[z_0 z]$ doğru parçası tümüyle B bölgesi içinde kalıyorsa, B bölgesine z_0 noktasına göre yıldızıl küme adı verilir. Özel olarak z_0 noktası orijin noktası seçilirse bu kümeye kısaca yıldızıl küme denir. Başka bir deyişle, B kümesinin tüm noktaları z_0 noktasından görünüyorsa, B kümesine z_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. (Şekil 3.2)



Şekil 3.2 Yıldızıl küme

Tanım 3.2.10 (Yıldızıl Fonksiyon) $\mathbb{U}$ birim diskini z_0 noktasına göre yıldızıl bir kümeye resmeden bir f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Özel olarak, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ve normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonlar sınıfı S^* ile gösterilir. Bu sınıf ilk kez Alexander (1915) tarafından tanımlanmıştır.

Örnek: Koebe fonksiyonu, $K(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ yıldızıl fonksiyondur.

Yıldızıl fonksiyonların analitik karakterizasyonu, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar yardımıyla aşağıdaki teoremden verildiği gibi yapılabilir:

Teorem 3.2.11 $f \in A$ olsun. $f \in S^*$ olması için gerek ve yeter koşul $\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$ olması yani;

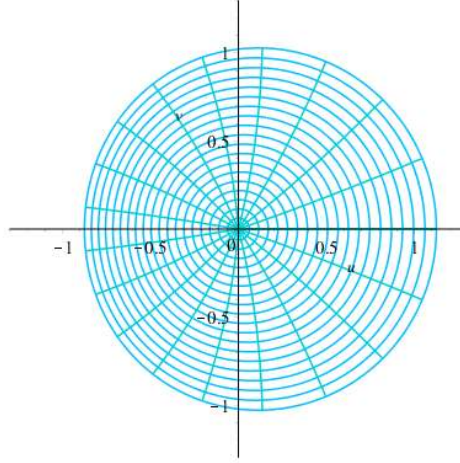
$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır [16]. ■

Tanım 3.2.12 (Konveks Küme) B , $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde bir küme olmak üzere; B den alınan herhangi iki z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren $[z_1 z_2]$ doğru parçası tamamen B kümesi içinde kalıyorsa; diğer bir deyişle $z_1, z_2 \in B$ ve $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere;

$$tz_1 + (1 - t)z_2 \in B$$

koşulu sağlanıyorsa B ye *konveks küme* adı verilir. (Şekil 3.3)



Şekil 3.3 Konveks küme

Tanım 3.2.13 (Konveks Fonksiyon) Bir f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini konveks bir bölge üzerine resmediyorsa bu fonksiyona *konveks fonksiyon* denir. $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ve normalize edilmiş konveks fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir.

Konveks ve yıldızlı fonksiyon sınıfları için $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ şeklindeki kapsama bağıntısının sağlandığını görmek kolaydır.

Konveks fonksiyonların analitik karakterizasyonu, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar yardımıyla aşağıdaki şekilde verilebilir:

Teorem 3.2.14 $f \in \mathcal{A}$ olsun. $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter koşul $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$ olması yani;

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0 \quad (z \in \mathbb{U})$$

olmasıdır [16]. ■

Konveks ve yıldızlı fonksiyonlar arasındaki ilişki ilk defa J.W. Alexander tarafından verilmiştir.

Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu için; $F(z) = zf'(z)$ tanımlandığında;

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = \frac{z(zf'(z))'}{zf'(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

olur. Böylece $F'(z) \neq 0$ iken

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir. k –nıncı mertebeden sıfıra sahip bir f fonksiyonu, son eşitliğin her iki tarafı da orijinde analitik olur. Bu eşitlik ile yıldızlı ve konveks fonksiyonlar için verilen eşitsizlikler karşılaştırıldığında;

$$Re\left(\frac{zF'(z)}{F(z)}\right) = Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)$$

olduğundan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.15 (Alexander Teoremi) $\mathbb{U}_R = \{z: |z| < R, 0 < R < 1\}$ şeklinde verilsin. $\mathbb{U}_R$ bölgesinde $f'(z) \neq 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_R$ bölgesinde konveks olması için gerekli ve yeterli koşul bu bölgede $zf'(z)$ fonksiyonunun yıldızlı olmasıdır [24]. ■

Bu teoremi matematiksel sembollerle;

$$f \in C \Leftrightarrow zf' \in S^*$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Alexander teoremine bir örnek vermek için; $\mathbb{U}$ birim diskini $Re w > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine resmeden

$$f(z) = \frac{z}{1-z} = z + \sum_{n=2}^{\infty} z^n$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde konveks,

$$F(z) = z. f'(z) = z. \frac{(1-z) - z(-1)}{(1-z)^2} = \frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde yıldızlı fonksiyondur. Bilindiği üzere bu ifadenin sağ tarafı Koebe fonksiyonudur.

R. Nevanlinna 1921 yılında yıldızlı fonksiyonun katsayılarının modülü için bir üst sınıra sahip olduğunu söylemiştir. Bu üst sınır aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.2.16 $f \in S^*$ fonksiyonu (3.1) ile verilen formda olmak üzere; $n \in \mathbb{Z}$ ve $n > 0$ için;

$$|a_n| \leq n$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her n için kesindir. Eşitlik hali sadece $n \geq 2$ için gerçekleşirse, o zaman $f(z)$, Koebe fonksiyonunun bir dönmesidir [16]. ■

C. Loewner ise 1917 yılında konveks fonksiyonun katsayılarının modülü için bir üst sınıra sahip olduğunu söylemiştir. Bu üst sınır aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.2.17 $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonu (3.1) ile verilen formda olmak üzere; $n \in \mathbb{Z}$ ve $n > 0$ için;

$$|a_n| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her n için kesindir. Eşitlik hali sadece $n \geq 2$ için gerçekleşirse, o zaman $f(z)$, $z/(1-z)$ fonksiyonunun bir dönmesidir [16]. ■

1936 yılında Robertson α mertebeli yıldızlı ve α mertebeli konveks fonksiyon kavramları aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.18 (α Mertebeli Yıldızlı Fonksiyon) f , (3.1) ile verilen fonksiyon olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için,

$$Re \left[\frac{zf'(z)}{f(z)} \right] \geq \alpha$$

şartı sağlanıyorsa; bu fonksiyon α mertebeli yıldızlı fonksiyon olarak adlandırılır. Bu şekildeki fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir [25].

Tanım 3.2.19 (α Mertebeli Konveks Fonksiyon) f , (3.1) ile verilen fonksiyon olsun. Her $z \in \mathbb{U}$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için,

$$\operatorname{Re} \left[1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right] > \alpha$$

şartı sağlanıyorsa; bu fonksiyon α mertebeli konveks fonksiyon olarak adlandırılır. Bu şekildeki fonksiyonların sınıfı $C(\alpha)$ ile gösterilir [25].

Aşağıda verilen teorem; Alexander teoreminin α mertebeli konveks ve α mertebeli yıldızlı fonksiyonlar sınıfları arasında da geçerli olduğunu gösterir.

Teorem 3.2.20 $f \in A$ olmak üzere;

$$f \in C(\alpha) \Leftrightarrow zf' \in S^*(\alpha)$$

önermesi sağlanır [21]. ■

Ma ve Minda 1994 yılında yaptıkları çalışmada $\frac{zf'(z)}{f(z)}$ veya $1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}$ niceliklerinden herhangi birinin daha genel bir üst fonksiyona subordinate olduğu yıldızlı ve konveks fonksiyonların çeşitli alt sınıflarını birleştirmişlerdir. Bu amaçla, $\mathbb{U}$ birim diskinde pozitif reel kısma sahip, $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(z) > 0$ olan $\mathbb{U}$ yu 1 e göre yıldızlı ve reel eksene göre simetrik bir bölgeye eşleyen analitik bir fonksiyon düşünmüşlerdir.

Tanım 3.2.21 Ma-Minda yıldızlı fonksiyonlar sınıfı,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} < \varphi(z)$$

subordinasyonunu sağlayan $f \in A$ fonksiyonlarından oluşur. Benzer şekilde Ma-Minda konveks fonksiyonlar sınıfı,

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \varphi(z)$$

subordinasyonunu sağlayan fonksiyonların sınıfıdır. Aynı düşünceyle Ma-Minda sınırlı dönen fonksiyonlar sınıfı,

$$f'(z) < \varphi(z)$$

subordinasyonunu sağlayan fonksiyonların sınıfı olarak tanımlanır [1].

Bu bilgiler ışığında;

$$S^*(\varphi) = \left\{ f \in A: \frac{zf'(z)}{f(z)} < \varphi(z) \right\},$$

$$C(\varphi) = \left\{ f \in A: 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} < \varphi(z) \right\},$$

$$R(\varphi) = \{ f \in A: f'(z) < \varphi(z) \}$$

yazılabilir.

Katsayı problemleri ile çalışılırken bazı durumlarda dönme değişmezliği kavramına ihtiyaç duyulur.

Tanım 3.2.22 (Dönme Değişmezliği) $f \in A$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere, f fonksiyonunun dönmesi;

$$f_\theta(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad z \in \mathbb{U}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer her $f \in \mathcal{F}$ için, $f_\theta \in \mathcal{F}$, $(\forall \theta \in \mathbb{R})$ oluyorsa, $\mathcal{F} \subset A$ ailesine dönme değişmezliğine sahip aile denir [21].

Örneğin; $f \in S^*$ ve $\theta \in \mathbb{R}$ için, $f_\theta(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ olsun. Bu durumda

$$f'_\theta(z) = f'(e^{i\theta} z)$$

bulunur ve buradan

$$Re \left[\frac{zg'(z)}{g(z)} \right] = Re \left[\frac{e^{i\theta} z f'(e^{i\theta} z)}{f(e^{i\theta} z)} \right] > 0$$

elde edilir. Böylece S^* sınıfı dönme değişmezliğine sahiptir.

Benzer düşünceyle; konveks fonksiyonlar sınıfının da dönme değişmezliğine sahip olduğu gösterilebilir.

Bir fonksiyon sınıfı dönme değişmezliğine sahip olsa bile, bu sınıftaki tüm fonksiyonların dönme değişmezliğine sahip olduğu söylenemez.

Örneğin; eğer $f \in S$ ve $f_\theta(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$ ($\theta \in \mathbb{R}$) olmak üzere; $|a_2 a_4 - a_3^2|$ fonksiyonu dönme değişmezliğine sahiptir. Gerçekten $f_\theta(z) = z + \alpha_2 z^2 + \dots$ olduğundan;

$$|\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3^2| = |a_2 e^{i\theta} a_4 e^{3i\theta} - (a_3 e^{2i\theta})^2| = |a_2 a_4 - a_3^2|$$

ile dönme değişmezliğine sahip olur.

Bununla birlikte; $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$|\alpha_3^2 - \alpha_2^2| = |(a_3 e^{2i\theta})^2 - (a_2 e^{i\theta})^2| \neq |a_3^2 - a_2^2|$$

oldüğundan, $|a_3^2 - a_2^2|$ fonksiyoneli dönme değişmezliğine sahip değildir.

3.3 Logaritmik Katsayılar

Bu bölümde logaritmik katsayı ve ters logaritmik katsayı tanımları verilecek ve bu tanımlardan yararlanılarak tezde kullanılacak olan denklemler elde edilecektir.

Tanım 3.3.1 (Logaritmik Katsayı) $f \in S$ olmak üzere, $z \in \mathbb{U}$ için f in γ_n logaritmik katsayıları:

$$F_f = \log \frac{f(z)}{z} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n$$

ile tanımlanır [21].

f fonksiyonu (3.1) de verilen formda olmak üzere; yukarıda verilen F_f fonksiyonun türevi alınarak logaritmik katsayılar:

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} a_2 \quad (3.3)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \left(a_3 - \frac{1}{2} a_2^2 \right) \quad (3.4)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{2} \left(a_4 - a_2 a_3 + \frac{1}{3} a_2^3 \right) \quad (3.5)$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{2} \left(a_5 + a_2^2 a_3 - a_2 a_4 - \frac{1}{2} a_3^2 - \frac{1}{4} a_2^4 \right) \quad (3.6)$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{2} \left(a_6 - a_2^3 a_3 + a_2^2 a_4 + a_2 a_3^2 - a_2 a_5 - a_3 a_4 + \frac{1}{5} a_2^5 \right) \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilir.

Logaritmik katsayılar, ünivalent fonksiyonların katsayıları ile ilgili problemlerde sıklıkla kullanılır.

$z \in \mathbb{U}$ için, $K(z) := z(1-z)^{-2}$ Koebe fonksiyonunun logaritmik katsayıları;

$$\gamma_k = \frac{1}{k}$$

dır. Her $f \in S$ için Koebe fonksiyonunun ekstremal olma özelliği nedeniyle, $\gamma_k \leq \frac{1}{k}$ olması beklenir. Ancak bu varsayım $k = 2$ olduğunda bile yanlıştır. Tüm S sınıfı için logaritmik katsayıların kesin tahminleri sadece şu durumlar için bilinmektedir:

$$|\gamma_1| \leq 1 \text{ ve } |\gamma_2| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{e^2} = 0.6353 \dots$$

$k \geq 3$ olması durumunda ise; logaritmik katsayıların kesin tahminleri bilinmemektedir.

Tanım 3.3.2 (Ters Logaritmik Katsayı) $f \in S$ olmak üzere, $w \in \mathbb{U}_{r_0}$ için f^{-1} in Γ_n ters logaritmik katsayıları:

$$F_{f^{-1}} = \log \frac{f^{-1}(w)}{w} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Gamma_n w^n$$

ile tanımlanır [21].

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) &= w + \sum_{n=2}^{\infty} b_n w^n \\ &= w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots \end{aligned}$$

olduğu hatırlanırsa, $F_{f^{-1}}$ fonksiyonun türevi alınarak ters logaritmik katsayılar:

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{2}a_2 \quad (3.8)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{4}(-2a_3 + 3a_2^2) \quad (3.9)$$

$$\Gamma_3 = \frac{1}{6}(12a_2 a_3 - 10a_2^3 - 3a_4) \quad (3.10)$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{8}(-4a_5 - 60a_2^2 a_3 + 10a_3^2 + 35a_2^4 + 20a_2 a_4) \quad (3.11)$$

$$\Gamma_5 = \frac{1}{10}(-5a_6 - 105a_2 a_3^2 - 105a_2^2 a_4 + 280a_2^3 a_3 - 126a_2^5 + 30a_2 a_5 + 30a_3 a_4) \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir.

3.4 Hankel Determinantı

Bu bölümde elemanları $f \in S$ fonksiyonunun katsayıları olan Hankel determinantının tanımı ve bazı fonksiyon sınıflarının katsayıları ile hesaplanan Hankel determinantlarının üst sınırları ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 3.4.1 (Hankel Determinantı) $f \in S$, $q \geq 1$ ve $n \geq 1$ olmak üzere q -uncu Hankel determinantını

$$H_q(n) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+q-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n+q-2} & a_{n+q-1} & \cdots & a_{n+2q-3} \\ a_{n+q-1} & a_{n+q} & \cdots & a_{n+2q-2} \end{vmatrix} \quad (3.13)$$

şeklinde tanımlıdır [21].

Hankel determinantları S sınıfında önemli bir rol oynamamasına rağmen, son yıllarda elemanları S nin alt sınıflarındaki fonksiyonların katsayıları olan Hankel determinantlarına pek çok matematikçi büyük ilgi göstermektedir. S sınıfında $H_q(n)$ için kesin sonuçlar bulmak açıkça çok zordur ve bu yönde çok az şey bilinmektedir. Belki de en önemli sonuç A mutlak sabit olmak üzere, $H_2(n) \leq An^{\frac{1}{2}}$ eşitsizliğidir [26].

$H_q(n)$ ile tanımlanan (3.13) de verilen Hankel determinantında;

i. $q = 2$ ve $n = 1$ alınırsa;

$$H_2(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 - a_2^2$$

elde edilir. $f \in S$ fonksiyonu için $a_1 = 1$ olduğundan

$$H_2(1) = a_3 - a_2^2$$

olur. Bu determinanta *Fekete-Szegö fonksiyoneli* denir.

ii. $q = 2$ ve $n = 2$ alınırsa;

$$H_2(2) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = a_2 a_4 - a_3^2$$

elde edilir. Bu determinant ikinci Hankel determinantı olarak bilinir.

iii. $q = 3$ ve $n = 1$ alınır;

$$H_3(1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = a_3(a_2a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2a_3) + a_5(a_3 - a_2^2)$$

ifadesi elde edilir. Bu determinant üçüncü Hankel determinanı olarak bilinir.

Tanım 3.4.2 (Logaritmik Hankel Determinanı) Girdileri f fonksiyonunun logaritmik katsayıları olan;

$$H_{q,n}(F_f/2) = \begin{vmatrix} \gamma_n & \gamma_{n+1} & \cdots & \gamma_{n+q-1} \\ \gamma_{n+1} & \gamma_{n+2} & \cdots & \gamma_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \gamma_{n+q-2} & \gamma_{n+q-1} & \cdots & \gamma_{n+2q-3} \\ \gamma_{n+q-1} & \gamma_{n+q} & \cdots & \gamma_{n+2q-2} \end{vmatrix} \quad (3.14)$$

determinant, q . dereceden logaritmik Hankel determinanı olarak adlandırılır [8].

Bazı özel q ve n seçimleri ile;

$$H_{2,1}(F_f/2) = \gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2 \quad (3.15)$$

$$H_{2,2}(F_f/2) = \gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2 \quad (3.16)$$

$$H_{3,1}(F_f/2) = \gamma_3(\gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2) - \gamma_4(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3) + \gamma_5(\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2) \quad (3.17)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$H_{2,1}(F_{f_\theta}/2) = e^{4i\theta} H_{2,1}(F_f/2)$$

$$H_{2,2}(F_{f_\theta}/2) = e^{6i\theta} H_{2,2}(F_f/2)$$

$$H_{3,1}(F_{f_\theta}/2) = e^{9i\theta} H_{3,1}(F_f/2)$$

olduğundan, $H_{2,1}(F_f/2)$, $H_{2,2}(F_f/2)$ ve $H_{3,1}(F_f/2)$ fonksiyonlarının dönme değişmezliğine sahip olduğunu belirtmek faydalı olacaktır.

Tanım 3.4.3 (Ters Logaritmik Hankel Determinantı) Girdileri f^{-1} fonksiyonunun logaritmik katsayıları olan;

$$H_{q,n}(F_{f^{-1}}/2) = \begin{vmatrix} \Gamma_n & \Gamma_{n+1} & \cdots & \Gamma_{n+q-1} \\ \Gamma_{n+1} & \Gamma_{n+2} & \cdots & \Gamma_{n+q} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \Gamma_{n+q-2} & \Gamma_{n+q-1} & \cdots & \Gamma_{n+2q-3} \\ \Gamma_{n+q-1} & \Gamma_{n+q} & \cdots & \Gamma_{n+2q-2} \end{vmatrix} \quad (3.18)$$

determinant, q . dereceden ters logaritmik Hankel determinantı olarak adlandırılır.

Bazı özel q ve n seçimleri ile;

$$H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) = \Gamma_1 \Gamma_3 - \Gamma_2^2 \quad (3.19)$$

$$H_{2,2}(F_{f^{-1}}/2) = \Gamma_2 \Gamma_4 - \Gamma_3^2 \quad (3.20)$$

$$H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2) = \Gamma_3(\Gamma_2 \Gamma_4 - \Gamma_3^2) - \Gamma_4(\Gamma_1 \Gamma_4 - \Gamma_2 \Gamma_3) + \Gamma_5(\Gamma_1 \Gamma_3 - \Gamma_2^2) \quad (3.21)$$

olduğu kolaylıkla görülür.

$$H_{2,1}(F_{f_\theta^{-1}}/2) = e^{4i\theta} H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)$$

$$H_{2,2}(F_{f_\theta^{-1}}/2) = e^{6i\theta} H_{2,2}(F_{f^{-1}}/2)$$

$$H_{3,1}(F_{f_\theta^{-1}}/2) = e^{9i\theta} H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)$$

olduğundan, $H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)$, $H_{2,2}(F_{f^{-1}}/2)$ ve $H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)$ fonksiyonellerinin dönme değişmezliğine sahip olduğunu belirtmek faydalı olacaktır.

Aşağıdaki teoremlerde yıldızlı fonksiyonlar sınıfındaki fonksiyonlar için Fekete-Szegö fonksiyonelinin ve ikinci Hankel determinantı için kesin sınırı ve üçüncü Hankel determinantı için mümkün olan en iyi katsayı sınırları verilmiştir:

Teorem 3.4.4 $f \in S^*$ fonksiyonu (3.1) de verilen formda olsun.

$\mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \max\{1, |4\mu - 3|\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [21]. ■

Janteng ve arkadaşları tarafından f yıldızlı fonksiyon iken, $H_2(2)$ için aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

Teorem 3.4.5 $f \in S^*$ fonksiyonu (3.1) de verilen formda olmak üzere,

$$|H_2(2)| = |a_2 a_4 - a_3^2| \leq 1$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [27]. ■

Kowalczyk ve arkadaşları tarafından elde edilen aşağıda verilen teorem, f yıldızlı fonksiyon iken, $H_3(1)$ için hesaplanan bu değerin bugüne kadarki en iyi tahmin olmasına rağmen kesin olmadığını belirtmek gerekir.

Teorem 3.4.6 $f \in S^*$ fonksiyonu (3.1) de verilen formda olmak üzere,

$$|H_3(1)| = |a_3(a_2 a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2 a_3) + a_5(a_3 - a_2^2)| \leq \frac{8}{9}$$

eşitsizliği sağlanır [28]. ■

Aşağıdaki teoremlerde ise konveks fonksiyonlar sınıfındaki fonksiyonlar için Fekete-Szegö fonksiyonelinin ve ikinci Hankel determinantı için kesin sınırı ve üçüncü Hankel determinantı için katsayı sınırları verilmiştir:

Teorem 3.4.7 $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonu (3.1) de verilen formda olsun.

$\mu \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$|a_3 - \mu a_2^2| \leq \frac{1}{3} \max\{1, 3|1 - \mu|\}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [21]. ■

Konveks fonksiyonlar sınıfı için Janteng ve arkadaşları $H_2(2)$ determinantı ile ilgili aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

Teorem 3.4.8 $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonu (3.1) de verilen formda olmak üzere,

$$|H_2(2)| = |a_2 a_4 - a_3^2| \leq \frac{1}{8}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [27]. ■

Konveks fonksiyonlar sınıfı için Kowalczyk ve arkadaşları $H_3(1)$ determinanı ile ilgili aşağıdaki teoremi elde etmişlerdir.

Teorem 3.4.9 $f \in \mathcal{C}$ fonksiyonu (3.1) de verilen formda olmak üzere,

$$|H_3(1)| = |a_3(a_2a_4 - a_3^2) - a_4(a_4 - a_2a_3) + a_5(a_3 - a_2^2)| \leq \frac{4}{135}$$

eşitsizliğı sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [28]. ■

α mertebeli yıldızlı ve α mertebeli konveks fonksiyonlar için ikinci Hankel determinanı sınırları aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.4.10 f fonksiyonu (3.1) de verilen formda olmak üzere,

i. Eğer $f \in S^*(\alpha)$ ise, bu durumda;

$$|H_2(2)| \leq \frac{1}{3}(1 - \alpha)^2|(3 - 2\alpha)(2\alpha - 1)|$$

eşitsizliğı sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir [21].

ii. Eğer $f \in \mathcal{C}(\alpha)$ ise, bu durumda

$$|H_2(2)| \leq \frac{(1 - \alpha)^2}{144} \cdot \frac{17\alpha^2 - 36\alpha + 36}{\alpha^2 - 2\alpha + 2}$$

eşitsizliğı sağlanır [21]. ■

3.5 Bell Sayıları

Bu bölümde adını Eric Temple Bell den alan Bell sayılarının tanımına, sağladığı yineleme bağıntısına, Bell üçgenine ve katsayıları Bell sayılarını oluşturan fonksiyona değinilecektir.

Tanım 3.5.1 Negatif olmayan bir n tamsayısı için Bell sayıları, n elemanlı bir kümenin boştan farklı alt kümelerle olası ayrık parçalanışlarının ya da bölünüşlerinin veya üzerindeki denklik bağıntılarının sayısını verir.

Örneğin; $\{a, b, c\}$ kümesinin bölümleri;

$\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \quad \{\{a, b\}, \{c\}\}, \quad \{\{a, c\}, \{b\}\}, \quad \{\{b, c\}, \{a\}\}, \quad \{\{a, b, c\}\}$
şeklindedir.

Bölümler matematiğin birçok alanında ortaya çıkar.

Örneğin; " $\equiv$ " bir S kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı ise; $\equiv$ nin denklik sınıfları S nin bir bölünüşünü oluşturur. Sonlu bir S kümesinin bölünüşlerinin sayısı düşünüldüğünde; başka bir küme söz konusu olmadığı sürece bu küme $[n] = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ olarak alınır.

n elemanlı bir kümenin bölümlerinin sayısı B_n ile gösterilen *Bell Sayıları*dır.

Yukarıda verilen örnekten $B_3 = 5$ olduğu görülür. $B_0 = 1, B_1 = 1, B_2 = 2$ olduğunu görmek oldukça basittir.

B_n için bilinen basit bir formül yoktur. Bu nedenle yineleme bağıntısından yararlanılır.

Teorem 3.5.2 $B_0 = 1$ olmak üzere, Bell sayıları;

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} B_k$$

denklemini sağlar [29].

İlk birkaç Bell sayısını hesaplamak için teoremden verilen yineleme bağıntısı kullanılırsa;

Kumar ve arkadaşları, 1 noktasına göre yıldızlı olan ve katsayıları Bell sayılarını üreten aşağıdaki fonksiyonu ele almışlardır.

Tanım 3.5.4 $n \geq 0$ olmak üzere, B_n ile gösterilen Bell sayısı e^{e^t-1} fonksiyonu tarafından

$$e^{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{t^n}{n!}, \quad (t \in \mathbb{R})$$

şeklinde üretilen katsayıları Bell sayılarını veren fonksiyondur [14].



4. ARAŞTIRMA SONUÇLARI

Bu bölümde önce Bell sayıları ile ilişkili sınırlı dönen fonksiyonlar sınıfı tanımlanarak araştırmada kullanılan yardımcı önermeler verilecek, ardından Bell sayıları ile ilişkili sınırlı dönen fonksiyonlar sınıfı için logaritmik katsayıları ve ters logaritmik katsayıları hesaplanacaktır.

4.1 Bell Sayılarıyla İlişkili Sınırlı Döner Fonksiyonlar Sınıfı

Tanım 4.1.1 $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olan ve

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, (z \in \mathbb{U}) \quad (4.1)$$

formuna sahip fonksiyonların sınıfının A ile gösterildiği ve A sınıfındaki ünivalent fonksiyonların sınıfının S ile gösterildiği üçüncü bölümde verilmişti.

Ayrıca, $p \in P$ fonksiyonlarının, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve $p(0) = 1$ olmak üzere, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşulunu sağlayan

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \cdots + p_n z^n + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n \quad (4.2)$$

Taylor seri açılımına sahip fonksiyonlar olduğu yine üçüncü bölümde detaylı olarak verilmişti.

Öncelikle ünivalent fonksiyonların bir alt sınıfı olarak, katsayıları Bell sayıları olan fonksiyona subordinate olan fonksiyonların sınıfı tanımlanacaktır.

Tanım 4.1.2 $f \in S$ fonksiyonu (4.1) de verilen formda olmak üzere;

$$\mathcal{R}_B = \{f \in A: f'(z) < e^{e^z - 1} = Q(z), \quad z \in \mathbb{U}\}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonlar sınıfı, *Bell sayıları ile ilişkili sınırlı döner fonksiyonlar sınıfı* olarak adlandırılır.

Araştırma sonuçlarımızın ispatlarında kullanılması sebebiyle P sınıfındaki fonksiyonların katsayılarıyla ilgili bazı yardımcı önermeleri vermek uygun olacaktır.

Yardımcı Önerme 4.1.3 Eğer $p \in P$, $c_1 \geq 0$ olmak üzere (4.2) formunda ise, $d_1 \in [0,1]$ ve $d_2, d_3 \in \overline{\mathbb{U}} := \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ için;

$$\begin{aligned} c_1 &= 2d_1 \\ c_2 &= 2d_1^2 + 2(1 - d_1^2)d_2 \\ c_3 &= 2d_1^3 + 4(1 - d_1^2)d_1d_2 - 2(1 - d_1^2)d_1d_2^2 + 2(1 - d_1^2)(1 - |d_2|^2)d_3 \end{aligned} \quad (4.3)$$

olur.

$d_1 \in \mathbb{U}$ ve $d_2 \in \partial\mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ için c_1 ve c_2 değerlerinin (4.3) teki gibi olduğu tek bir $p \in P$ fonksiyonu yani;

$$p(z) = \frac{1 + (\overline{d_1}d_2 + d_1)z + d_2z^2}{1 + (\overline{d_1}d_2 - d_1)z + d_2z^2}, \quad (z \in \mathbb{U})$$

dir [30].

Yardımcı Önerme 4.1.4 Eğer $p \in P$, (4.2) de verilen biçimde ise aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir [31]:

$$|c_n| \leq 2, \quad n \geq 1 \quad (4.4)$$

$$|c_{n+k} - \mu c_n c_k| \leq 2, \quad 0 \leq \mu \leq 1 \quad (4.5)$$

$$|c_m c_n - c_k c_l| \leq 4, \quad m + n = k + l \quad (4.6)$$

$$|c_{n+2k} - \mu c_n c_k^2| \leq 2(1 + 2\mu), \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

λ kompleks sayısı için [32];

$$|c_2 - \lambda c_1^2| \leq 2 \max(1, |\lambda - 1|). \quad (4.8)$$

Yardımcı Önerme 4.1.5 $p \in P$, (4.2) formunda ise;

$$|Kc_1^3 - Lc_1c_2 + Mc_3| \leq 2|K| + 2|L - 2K| + 2|K - L + M| \quad (4.9)$$

eşitsizliği vardır [33].

Yardımcı Önerme 4.1.6 A, B, C birer reel sayı olmak üzere;

$$Y(A, B, C) := maks\{|A + Bz + Cz^2| + 1 - |z|^2 : z \in \overline{\mathbb{U}}\}$$

olsun. Bu durumda,

1. $AC \geq 0$ ise;

$$Y(A, B, C) = \begin{cases} |A| + |B| + |C|, & |B| \geq 2(1 - |C|) \\ 1 + |A| + \frac{B^2}{4(1 - |C|)}, & |B| < 2(1 - |C|) \end{cases}$$

2. Eğer $AC < 0$ ise;

$$Y(A, B, C) = \begin{cases} 1 - |A| + \frac{B^2}{4(1 - |C|)}, & -4AC(C^{-2} - 1) \leq B^2 \wedge |B| < 2(1 - |C|) \\ 1 + |A| + \frac{B^2}{4(1 + |C|)}, & B^2 < \min\{4(1 + |C|)^2, -4AC(C^{-2} - 1)\} \\ R(A, B, C), & \text{diğer} \end{cases}$$

$$R(A, B, C) := \begin{cases} |A| + |B| - |C|, & |C|(|B| + 4|A|) \leq |AB| \\ -|A| + |B| + |C|, & |AB| \leq |C|(|B| - 4|A|) \\ (|A| + |C|) \sqrt{1 - \frac{B^2}{4AC}}, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklindedir [34].

4.2 Bell Sayıları ile İlişkili Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı için Logaritmik Katsayıların Hankel Determinantları

Bu bölümde Bell sayılarıyla ilişkili sınırlı dönen fonksiyonların $\mathcal{R}_B$ sınıfına ait fonksiyonların bazı başlangıç logaritmik katsayıları hesaplanmıştır. Ayrıca bu sınıfa ait fonksiyonlar için $H_{2,1}(F_f/2)$ ve $H_{3,1}(F_f/2)$ logaritmik Hankel determinantlarının üst sınırları elde edilmiştir. Bu bölümde elde edilen sonuçların bir kısmı Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından gerçekleştirilen 2. Uluslararası Fen Bilimleri Lisansüstü Araştırmalar Sempozyumunda sunulmuş olup genişletilmiş hali yayınlanmak üzere dergiye gönderilmiştir.

Teorem 4.2.1 (4.1) de verilen f fonksiyonu $\mathcal{R}_B$ sınıfında ise;

$$|\gamma_1| \leq \frac{1}{4} \quad (4.10)$$

$$|\gamma_2| \leq \frac{1}{6} \quad (4.11)$$

$$|\gamma_3| \leq \frac{1}{8} \quad (4.12)$$

$$|\gamma_4| \leq \frac{653}{3840} \quad (4.13)$$

$$|\gamma_5| \leq \frac{223}{1440} \quad (4.14)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İlk üç eşitsizlik, aşağıdaki f_1, f_2, f_3 fonksiyonları ile kesindir.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_0^z (e^{e^t-1}) dt, \\ f_2(z) &= \int_0^z (e^{e^{t^2}-1}) dt, \\ f_3(z) &= \int_0^z (e^{e^{t^3}-1}) dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

İspat: Subordinasyon tanımından;

$$f'(z) = e^{e^{w(z)}-1} \quad (4.16)$$

olacak şekilde $w(0) = 0$ ve $|w(z)| \leq 1$ koşulunu sağlayan bir $w(z)$ Schwarz fonksiyonu vardır.

$$p(z) = \frac{1 + w(z)}{1 - w(z)} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + c_4 z^4 + \dots \quad (z \in \mathbb{U})$$

olacak şekilde p fonksiyonu tanımlayalım.

Buradan da $w(z)$ fonksiyonunu yalnız bırakılırsa, $z \in \mathbb{U}$ için;

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{p(z) - 1}{p(z) + 1} \\ &= \frac{1}{2} c_1 z + \frac{1}{2} \left(c_2 - \frac{1}{2} c_1^2 \right) z^2 + \frac{1}{2} \left(c_3 + \frac{1}{4} c_1^3 - c_1 c_2 \right) z^3 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(c_4 - \frac{1}{8} c_1^4 + \frac{3}{4} c_1^2 c_2 - c_1 c_3 - \frac{1}{2} c_2^2 \right) z^4 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(c_5 + \frac{1}{16} c_1^5 - \frac{1}{2} c_1^3 c_2 + \frac{3}{4} c_1^2 c_3 + \frac{3}{4} c_1 c_2^2 - c_1 c_4 - c_2 c_3 \right) z^5 + \dots \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $p \in P$ olur. Buradan;

$$\begin{aligned} e^{e^{w(z)}-1} &= 1 + \frac{1}{2} c_1 z + \frac{1}{2} c_2 z^2 + \left(\frac{1}{2} c_3 - \frac{1}{48} c_1^3 \right) z^3 + \left(\frac{1}{128} c_1^4 - \frac{1}{16} c_1^2 c_2 + \frac{1}{2} c_4 \right) z^4 \\ &\quad + \left(-\frac{1}{480} c_1^5 + \frac{1}{32} c_1^3 c_2 - \frac{1}{16} c_1^2 c_3 - \frac{1}{16} c_1 c_2^2 + \frac{1}{2} c_5 \right) z^5 + \dots \end{aligned} \quad (4.17)$$

ve

$$f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + 4a_4 z^3 + \dots \quad (4.18)$$

(4.17) ve (4.18) de karşılık gelen katsayılar eşitlenirse;

$$a_2 = \frac{1}{4} c_1 \quad (4.19)$$

$$a_3 = \frac{1}{6} c_2 \quad (4.20)$$

$$a_4 = \frac{1}{192} (24c_3 - c_1^3) \quad (4.21)$$

$$a_5 = \frac{1}{640} (64c_4 - 8c_1^2c_2 + c_1^4) \quad (4.22)$$

$$a_6 = \frac{1}{2880} (240c_5 - 30c_1c_2^2 - 30c_1^2c_3 + 15c_1^3c_2 - c_1^5) \quad (4.23)$$

sonuçları elde edilir.

(3.3) ten (3.7) ye kadar ve (4.19) dan (4.23) e kadar olan denklemleri karşılaştırırsak;

$$\gamma_1 = \frac{1}{8} c_1 \quad (4.24)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{192} (16c_2 - 3c_1^2) \quad (4.25)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{48} (3c_3 - c_1c_2) \quad (4.26)$$

$$\gamma_4 = \frac{1}{92160} (4608c_4 - 96c_1^2 - 640c_2^2 + 87c_1^4 - 1440c_1c_3) \quad (4.27)$$

$$\gamma_5 = \frac{1}{11520} (480c_5 - 20c_1c_2^2 - 15c_1^2c_3 + 38c_1^3c_2 - 5c_1^5 - 144c_1c_4 - 120c_2c_3) \quad (4.28)$$

değerlerini elde ederiz.

Yardımcı Önerme 4.1.4 te verilen (4.4) eşitsizliği (4.24) e uygulandığında;

$$|\gamma_1| = \left| \frac{1}{8} c_1 \right| \leq \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Yardımcı Önerme 4.1.4 te yer alan (4.8) eşitsizliğinde $\lambda = \frac{3}{16}$ alınarak (4.25) e uygulandığında;

$$|\gamma_2| = \frac{1}{12} \left| c_2 - \frac{3}{16} c_1^2 \right| \leq \frac{1}{12} \cdot 2 \max(1, |\lambda - 1|) = \frac{1}{6}$$

değeri elde edilir.

Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.5) eşitsizliğinde $\mu = \frac{1}{3}$ alınarak (4.26) ya uygulanırsa;

$$|\gamma_3| = \frac{1}{16} \left| c_3 - \frac{1}{3} c_1c_2 \right| \leq \frac{1}{8}$$

elde edilir.

γ_4 için üst sınır elde etmek amacıyla (4.27) eşitsizliğine önce üçgen eşitsizliği uygulanır. Ardından Yardımcı Önerme 4.1.4 teki (4.4) eşitsizliği, (4.5) eşitsizliğinde $\mu = \frac{5}{36}$ ile Yardımcı Önerme 4.1.5 te bulunan (4.9) eşitsizliğinde $K = 87$, $L = 96$ ve $M = -1440$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\gamma_4| &= \left| \frac{1}{92160} (4608c_4 - 96c_1^2 - 640c_2^2 + 87c_1^4 - 1440c_1c_3) \right| \\ &\leq \frac{1}{92160} \left(|c_1| |87c_1^3 - 96c_1c_2 - 1440c_3| + 4608 \left| c_4 - \frac{5}{36}c_2^2 \right| \right) \\ &\leq \frac{653}{3840} \approx 0.17. \end{aligned}$$

elde edilir.

γ_5 için üst sınır elde etmek amacıyla (4.28) eşitsizliğine önce üçgen eşitsizliği uygulanır. Ardından Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.7) eşitsizliğinde $\mu_1 = -\frac{1}{3}$, (4.5) eşitsizliğinde $\mu_2 = \frac{3}{10}$ ve Yardımcı Önerme 4.1.5 te bulunan (4.9) eşitsizliğinde $K = 38$, $L = 20$, $M = 120$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\gamma_5| &= \left| \frac{1}{11520} (480c_5 - 20c_1c_2^2 - 15c_1^2c_3 + 38c_1^3c_2 - 5c_1^5 - 144c_1c_4 - 120c_2c_3) \right| \\ &\leq \frac{1}{11520} \left(15|c_1|^2 \left| c_3 + \frac{1}{3}c_1c_2^2 \right| + |c_2| |38c_1^3 - 20c_1c_2 + 120c_3| + 480 \left| c_5 - \frac{3}{10}c_1c_4 \right| \right) \\ &\leq \frac{223}{1440} \approx 0.154. \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \int_0^z (e^{e^t-1}) dt = z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + \frac{5}{24}z^4 + \frac{1}{8}z^5 + \dots \\ f_2(z) &= \int_0^z (e^{e^{t^2}-1}) dt = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{1}{5}z^5 + \frac{5}{42}z^7 + \frac{5}{72}z^9 + \dots \\ f_3(z) &= \int_0^z (e^{e^{t^3}-1}) dt = z + \frac{1}{4}z^4 + \frac{1}{7}z^7 + \frac{1}{12}z^{10} + \dots \end{aligned}$$

olduğundan, teoremde verilen ilk üç eşitsizliğin kesinliği kolayca görülür. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.2 Eğer $f \in \mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ ise;

$$|H_{2,1}(F_f/2)| \leq \frac{1}{36} \quad (4.29)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir.

İspat: (4.1) ile verilen f fonksiyonu $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ sınıfında olsun. Teorem 4.2.1 de,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4} c_1 \\ a_3 &= \frac{1}{6} c_2 \\ a_4 &= \frac{1}{192} (24c_3 - c_1^3) \end{aligned}$$

olduğu elde edilmişti.

$\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$ sınıfı ve $|H_{2,1}(F_f/2)|$ dönmenin değişmezliği özelliğine sahip olduğundan, genelliği kaybetmeden $a_2 \geq 0$ kabul edebiliriz. Böylece $c = c_1 \in [0,2]$ ve dolayısıyla Yardımcı Önerme 4.1.3 deki (4.3) eşitlikleri sebebiyle $d_1 \in [0,1]$ olur. Böylece;

$$\begin{aligned} H_{2,1}(F_f/2) &= \gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2 = \frac{1}{4} \left(a_2 a_4 - a_3^2 + \frac{1}{12} a_2^4 \right) \\ &= \frac{1}{36864} (288c_1 c_3 - 256c_2^2 - 9c_1^4) \\ &= \frac{1}{2304} (-d_1^4 + 16d_1^2 d_2 (1 - d_1^2) - 8d_2^2 (1 - d_1^2) (d_1^2 + 8) + 72d_1 d_3 (1 - d_1^2) (1 - |d_2|^2)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

elde edilir.

Bu son eşitlikte d_1 e göre aşağıdaki durumlar söz konusu olacaktır.

1. Durum: $d_1 = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.30) denkleminde;

$$|H_{2,1}(F_f/2)| = |\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2| = \frac{1}{2304}$$

elde edilir.

2. Durum: $d_1 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.30) denkleminde;

$$|H_{2,1}(F_f/2)| = |\gamma_1 \gamma_3 - \gamma_2^2| = \left| \frac{1}{2304} (-8d_2^2 (1 - d_1^2) (d_1^2 + 8)) \right| = \frac{1}{36} |d_2|^2 \leq \frac{1}{36}$$

bulunur.

3. **Durum:** $d_1 \in (0,1)$ olduğunu varsayalım. (4.30) ifadesine üçgen eşitsizliği uygulanırsa, $|d_3| \leq 1$ ile birlikte;

$$\begin{aligned}
|H_{2,1}(F_f/2)| &= |\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2| \\
&= \left| \frac{1}{2304} (-d_1^4 + 16d_1^2d_2(1-d_1^2) - 8d_2^2(1-d_1^2)(d_1^2+8) \right. \\
&\quad \left. + 72d_1d_3(1-d_1^2)(1-|d_2|^2) \right| \\
&\leq \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2) \left(\left| \frac{-d_1^3}{72(1-d_1^2)} + \frac{2}{9} d_1d_2 - \frac{(d_1^2+8)d_2^2}{9d_1} \right| + 1 - |d_2|^2 \right) \\
&= \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2) (|A + Bd_2 + Cd_2^2| + 1 - |d_2|^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$A = \frac{-d_1^3}{72(1-d_1^2)}, \quad B = \frac{2}{9}d_1, \quad C = -\frac{d_1^2+8}{9d_1}$$

şeklindedir. $d_1 \in (0,1)$ olduğundan $A \leq 0$, $B \geq 0$ ve $C \leq 0$ olduğu açıktır.

Yardımcı Önerme 4.1.6'yı uygulamak için AC çarpımı incelendiğinde, $AC \geq 0$ olduğu görülür. Böylece Yardımcı önermenin birinci kısmı uygulanabilir.

$$\begin{aligned}
|B| - 2(1-|C|) &= \frac{2}{9}d_1 - 2\left(1 - \frac{d_1^2+8}{9d_1}\right) = \frac{2(2d_1^2 - 9d_1 + 8)}{9d_1} \\
&\geq \frac{2(d_1-1)(d_1-8)}{9d_1} > 0
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece Yardımcı Önerme 4.1.6 ten;

$$\begin{aligned}
|H_{2,1}(F_f/2)| &= |\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2| \leq \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2)Y(A, B, C) \\
&= \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2)(|A| + |B| + |C|) \\
&= \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2) \left(\frac{d_1^3}{72(1-d_1^2)} + \frac{2}{9}d_1 + \frac{d_1^2+8}{9d_1} \right) \\
&= \frac{1}{2304} (-23d_1^4 - 40d_1^2 + 64) \\
&\leq \frac{64}{2304}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{36}$$

sonucu elde edilir.

Yukarıda incelenen üç durum analiz edildiğinde;

$$|H_{2,1}(F_f/2)| \leq \frac{1}{36}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür.

Elde edilen sonucun kesin olduğunu göstermek için;

$$p(z) := \frac{1+z^2}{1-z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2z^{2k}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. p fonksiyonunun $\mathcal{R}_B$ sınıfında olduğu açıktır. Ayrıca $c_1 = c_3 = 0$ ve $c_2 = 2$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan; $a_2 = a_4 = 0$ ve $a_3 = \frac{1}{3}$ elde edilir.

$$|H_{2,1}(F_f/2)| = |\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2| = \left| \frac{1}{4} \left(a_2a_4 - a_3^2 + \frac{1}{12}a_2^4 \right) \right| = \frac{1}{36}$$

sonucu elde edilir.

Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.3 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise, bu durumda;

$$|\gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2| \leq \frac{25261}{552960} \approx 0.0456 \quad (4.31)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitliklerinden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned} \gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2 &= \left(\frac{1}{192}(16c_2 - 3c_1^2) \frac{1}{92160}(4608c_4 - 96c_1^2c_2 - 640c_2^2 + 87c_1^4 \right. \\ &\quad \left. - 1440c_1c_3) - \left(\frac{1}{48}(3c_3 - c_1c_2) \right)^2 \right) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{17694720} (13834c_1^2c_4 - 4320c_1^3c_3 - 1680c_1^4c_2 + 10240c_2^3 + 69120c_3^2 + 261c_1^6 + 7296c_1^2c_2^2 - 73728c_2c_4 - 23040c_1c_2c_3)$$

Son eşitlik tekrar düzenlendikten sonra her iki tarafın mutlak değeri alınıp üçgen eşitsizliği uygulanır. Ardından, Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.8) eşitsizliğinde $\lambda_1 = \frac{13824}{73728}$, $\lambda_2 = -\frac{7296}{10240}$, $\lambda_3 = -\frac{261}{1680}$ ve Yardımcı Önerme 4.1.5 te bulunan (4.9) eşitsizliğinde $K = -4320$, $L = 23040$, $M = 69120$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2| &\leq \frac{1}{17694720} \left(73728|c_4| \left| c_2 - \frac{13824}{73728}c_1^2 \right| \right. \\ &\quad + |c_3| |-4320c_1^3 - 23040c_1c_2 + 69120c_3| \\ &\quad + 10240|c_2|^2 \left| c_2 + \frac{7296}{10240}c_1^2 \right| + 1680|c_1|^4 \left| c_2 + \frac{261}{1680}c_1^2 \right| \Big) \\ &\leq \frac{25261}{552960} \approx 0.0456. \end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.4 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise, bu durumda;

$$|\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3| \leq \frac{17}{320} \approx 0.053 \quad (4.32)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.24), (4.25), (4.26) ve (4.27) eşitliklerinden yararlanılarak;

$$\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3 = \frac{1}{737280} (640c_1c_2^2 - 720c_1^2c_3 - 336c_1^3c_2 + 87c_1^5 + 4608c_1c_4 - 3840c_2c_3)$$

yazılabilir.

Bu ifadeyi yeniden düzenleyip her iki tarafın mutlak değeri alınır, sonra üçgen eşitsizliği uygulanabilir. Ardından, Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.5) eşitsizliğinde $\mu_1 = \frac{720}{4608}$, $\mu_2 = \frac{640}{3840}$ ve (4.8) eşitsizliğinde $\lambda = \frac{87}{336}$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
|\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3| &\leq \frac{1}{737280} \left(336|c_1|^3 \left| c_2 - \frac{87}{336} c_1^2 \right| + 4608|c_1| \left| c_4 - \frac{720}{4608} c_1 c_3 \right| \right. \\
&\quad \left. + 3840|c_2| \left| c_3 - \frac{640}{3840} c_1 c_2 \right| \right) \\
&\leq \frac{17}{320} \approx 0.053.
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.2.5 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise, bu durumda;

$$|H_{3,1}(F_f/2)| \leq \frac{1263809}{66355200} \approx 0.019 \quad (4.33)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.17) denkleminde

$$H_{3,1}(F_f/2) = \gamma_3(\gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2) - \gamma_4(\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3) + \gamma_5(\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2)$$

olduğu biliniyor. Bu ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınır, üçgen eşitsizliğini kullanarak,

$$|H_{3,1}(F_f/2)| = |\gamma_3||\gamma_2\gamma_4 - \gamma_3^2| + |\gamma_4||\gamma_1\gamma_4 - \gamma_2\gamma_3| + |\gamma_5||\gamma_1\gamma_3 - \gamma_2^2|$$

yazılabilir. Bu son ifade de Teorem 4.2.1 de elde edilen (4.12), (4.13), (4.14), Teorem 4.2.2 te elde edilen (4.29), Teorem 4.2.3 te elde edilen (4.31) ve Teorem 4.2.4 te elde edilen (4.32) eşitsizlikleri kullanılırsa;

$$|H_{3,1}(F_f/2)| \leq \frac{1263809}{66355200}$$

sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

4.3 Bell Sayıları ile İlişkili Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı için Ters Logaritmik Katsayıların Hankel Determinantları

Bu bölümde Tanım 4.1.2 de verilen Bell sayılarıyla ilişkili sınırlı dönen fonksiyonların $\mathcal{R}_B$ sınıfına ait fonksiyonların ters logaritmik katsayılarının Hankel determinantları hesaplanmıştır. Bu bölümde elde edilen sonuçlar yayınlanmak üzere dergiye gönderilmiştir.

Teorem 4.3.1 (4.1) de verilen f fonksiyonu için f^{-1} fonksiyonu $\mathcal{R}_B$ sınıfında ise;

$$|\Gamma_1| < \frac{1}{4} \quad (4.34)$$

$$|\Gamma_2| < \frac{1}{6} \quad (4.35)$$

$$|\Gamma_3| < \frac{1}{8} \quad (4.36)$$

$$|\Gamma_4| < \frac{33}{80} \quad (4.37)$$

$$|\Gamma_5| < \frac{47}{30} \quad (4.38)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: $f \in S$ olsun. Bu durumda Tanım 3.1.12 de verilen şartları sağlayan f^{-1} fonksiyonu vardır. Tanım 3.3.2 de f^{-1} fonksiyonundan yararlanılarak logaritmik katsayılar hesaplanmıştır. f^{-1} fonksiyonunun logaritmik katsayılarının verildiği (3.8)-(3.12) denklemleri ile $\mathcal{R}_B$ sınıfının tanımından yazılan $f'(z) = e^{w(z)-1}$ eşitliğinde her iki tarafın katsayılarının eşitlenerek elde edilen (4.19)-(4.23) denklemlerinden

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{8}c_1 \quad (4.39)$$

$$\Gamma_2 = \frac{1}{192}(-16c_2 + 9c_1^2) \quad (4.40)$$

$$\Gamma_3 = -\frac{1}{384}(24c_3 + 9c_1^3 - 32c_1c_2) \quad (4.41)$$

$$\Gamma_4 = \frac{1}{92160}(-4608c_4 - 6624c_1^2c_2 + 3200c_2^2 + 1203c_1^4 + 7200c_1c_3) \quad (4.42)$$

$$\Gamma_5 = -\frac{1}{92160}(3840c_5 + 6240c_1c_2^2 + 7080c_1^2c_3 - 5376c_1^3c_2 + 695c_1^5 - 6912c_1c_4 - 5760c_2c_3) \quad (4.43)$$

değerleri elde edilir.

Yardımcı Önerme 4.1.4 te verilen (4.4) eşitsizliği (4.39) a uygulandığında;

$$|\Gamma_1| = \left| -\frac{1}{8}c_1 \right| \leq \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4}$$

bulunur.

Yardımcı Önerme 4.1.4 te yer alan (4.8) eşitsizliğinde $\lambda = \frac{9}{16}$ alınarak (4.40) ifadesine uygulandığında;

$$|\Gamma_2| = \frac{1}{12} \left| c_2 - \frac{9}{16}c_1^2 \right| \leq \frac{1}{12} \cdot 2 \max(1, |\lambda - 1|) = \frac{1}{6}$$

değeri elde edilir.

Yardımcı Önerme 4.1.5 te bulunan (4.9) eşitsizliğinde $K = 9$, $L = 32$ ve $M = 24$ alınarak (4.41) e uygulanırsa;

$$|\Gamma_3| = \frac{1}{384} |24c_3 + 9c_1^3 - 32c_1c_2| \leq \frac{1}{8}$$

elde edilir.

Γ_4 için üst sınır elde etmek amacıyla (4.42) eşitsizliğine önce üçgen eşitsizliği uygulanır. Ardından Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.5) eşitsizliğinde $\mu = \frac{3200}{4608}$ ve Yardımcı Önerme 4.1.5 te verilen (4.9) eşitsizliğinde $K = 1203$, $L = 6624$, $M = 7200$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\Gamma_4| &= \left| \frac{1}{92160} (-4608c_4 - 6624c_1^2c_2 + 3200c_2^2 + 1203c_1^4 + 7200c_1c_3) \right| \\ &\leq \frac{1}{92160} \left(|c_1| |1203c_1^3 - 6624c_1c_2 + 7200c_3| + 4608 \left| c_4 - \frac{3200}{4608}c_2^2 \right| \right) \\ &\leq \frac{33}{80} \approx 0.41. \end{aligned}$$

elde edilir.

Γ_5 için üst sınır elde etmek amacıyla (4.43) eşitsizliğine önce üçgen eşitsizliği uygulanır. Ardından Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.5) eşitsizliğinde $\mu = \frac{6240}{6912}$, (4.8) eşitsizliğinde $\lambda_1 = \frac{7080}{5760}$ ve $\lambda_2 = \frac{695}{5376}$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\Gamma_5| &= \left| \frac{1}{92160} (3840c_5 + 6240c_1c_2^2 + 7080c_1^2c_3 - 5376c_1^3c_2 + 695c_1^5 \right. \\ &\quad \left. - 6912c_1c_4 - 5760c_2c_3) \right| \\ &\leq \frac{1}{92160} \left(6912|c_1| \left| c_4 - \frac{6240}{6912}c_2^2 \right| + 5760|c_3| \left| c_2 - \frac{7080}{5760}c_1^2 \right| \right. \\ &\quad \left. + 5376|c_1|^3 \left| c_2 - \frac{695}{5376}c_1^2 \right| + 3840|c_5| \right) \\ &\leq \frac{47}{30} \approx 1.5667 \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3.2 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise;

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{1}{36} \quad (4.44)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik kesindir.

İspat: (4.1) ile verilen f fonksiyonu $\mathcal{R}_B$ sınıfında olsun. Teorem 4.2.1 de,

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{1}{4}c_1 \\ a_3 &= \frac{1}{6}c_2 \\ a_4 &= \frac{1}{192}(24c_3 - c_1^3) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmişti.

$\mathcal{R}_B$ sınıfı ve $|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)|$ dönmenin değişmezliği özelliğine sahip olduğundan, genelliği kaybetmeden $a_2 \geq 0$ kabul edebiliriz. Böylece $c = c_1 \in [0,2]$ ve dolayısıyla Yardımcı Önerme 4.1.3 deki (4.3) eşitlikleri sebebiyle $d_1 \in [0,1]$ olur. Böylece;

$$H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2) = \Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2 = \frac{1}{4} \left(a_2a_4 - a_3^2 - a_2^2a_3 + \frac{13}{12}a_2^4 \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{36864} (-96c_1^2c_2 - 256c_2^2 + 27c_1^4 + 288c_1c_3) \\
&= -\frac{1}{2304} (13d_1^4 + 32d_1^2d_2(1-d_1^2) + 8d_2^2(1-d_1^2)(d_1^2+8) \\
&\quad - 72d_1d_3(1-d_1^2)(1-|d_2|^2))
\end{aligned} \tag{4.45}$$

elde edilir.

Son eşitlikte d_1 e göre aşağıdaki durumlar incelenirse;

1. Durum: $d_1 = 1$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.45) denkleminden;

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| = |\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2| = \frac{13}{2304}$$

elde edilir.

2. Durum: $d_1 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (4.45) denkleminden;

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| = |\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2| = \left| \frac{1}{36} d_2^2 \right| = \frac{1}{36} |d_2|^2 \leq \frac{1}{36}$$

bulunur.

3. Durum: $d_1 \in (0,1)$ olduğunu varsayalım. (4.45) ifadesine üçgen eşitsizliği uygulanırsa, $|d_3| \leq 1$ ile birlikte;

$$\begin{aligned}
&|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| = |\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2| \\
&= \left| \frac{-1}{2304} (13d_1^4 + 32d_1^2d_2(1-d_1^2) + 8d_2^2(1-d_1^2)(d_1^2+8) - 72d_1d_3(1-d_1^2)(1-|d_2|^2)) \right| \\
&\leq \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2) \left(\left| \frac{13d_1^3}{72(1-d_1^2)} + \frac{4}{9} d_1d_2 + \frac{(d_1^2+8)d_2^2}{9d_1} \right| + 1 - |d_2|^2 \right) \\
&= \frac{1}{32} d_1(1-d_1^2) (|A + Bd_2 + Cd_2^2| + 1 - |d_2|^2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada;

$$A = \frac{13d_1^3}{72(1-d_1^2)}, \quad B = \frac{4}{9}d_1, \quad C = \frac{d_1^2+8}{9d_1}$$

şeklindedir. $d_1 \in (0,1)$ olduğundan $A \geq 0, B \geq 0$ ve $C \geq 0$ olduğu açıktır.

Yardımcı Önerme 4.1.6 yı uygulamak için AC çarpımı incelendiğinde, $AC \geq 0$ olduğu görülür. Böylece yardımcı önerme birinci kısmı uygulanabilir.

$$\begin{aligned} |B| - 2(1 - |C|) &= \frac{4}{9}d_1 - 2\left(1 - \frac{d_1^2 + 8}{9d_1}\right) = \frac{2(3d_1^2 - 9d_1 + 8)}{9d_1} \\ &\geq \frac{2(d_1 - 1)(d_1 - 8)}{9d_1} > 0 \end{aligned}$$

olduğu kolayca görülür. Böylece Yardımcı Önerme 4.1.6 dan;

$$\begin{aligned} |H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| &= |\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2| \leq \frac{1}{32}d_1(1 - d_1^2)Y(A, B, C) \\ &= \frac{1}{32}d_1(1 - d_1^2)(|A| + |B| + |C|) \\ &= \frac{1}{32}d_1(1 - d_1^2)\left(\frac{13d_1^3}{72(1 - d_1^2)} + \frac{4}{9}d_1 + \frac{d_1^2 + 8}{9d_1}\right) \\ &= \frac{1}{2304}(-27d_1^4 - 24d_1^2 + 64) \\ &\leq \frac{64}{2304} \\ &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Yukarıda incelenen üç durum analiz edildiğinde;

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{1}{36}$$

eşitsizliğin doğru olduğu görülür.

$$p(z) := \frac{1 + z^2}{1 - z^2} = 1 + 2z^2 + 2z^4 + \dots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2z^{2k}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. p fonksiyonunun P sınıfında olduğu açıktır. Ayrıca $c_1 = c_3 = 0$ ve $c_2 = 2$ olduğunu görmek kolaydır. Buradan; $a_2 = a_4 = 0$ ve $a_3 = \frac{1}{3}$ olduğu sonucu çıkar.

$$|H_{2,1}(F_{f^{-1}}/2)| = |\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2| = \left|\frac{1}{4}\left(a_2a_4 - a_3^2 - a_2^2a_3 + \frac{13}{12}a_2^4\right)\right| = \frac{1}{36}$$

sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.3 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise, bu durumda;

$$|\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_3^2| \leq \frac{241}{3840} \approx 0.06276 \quad (4.46)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.40), (4.41) ve (4.42) eşitliklerinden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned} \Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_3^2 &= \left(\frac{1}{192}(-16c_2 + 9c_1^2) \right) \left(\frac{1}{92160}(-4608c_4 - 6624c_1^2c_2 + 3200c_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 1203c_1^4 + 7200c_1c_3) \right) - \left(\frac{-1}{384}(24c_3 + 9c_1^3 - 32c_1c_2) \right)^2 \\ &= \frac{1}{17694720}(-41472c_1^2c_4 + 12960c_1^3c_3 - 9744c_1^4c_2 - 51200c_2^3 \\ &\quad - 69120c_3^2 + 1107c_1^6 + 11904c_1^2c_2^2 + 73728c_2c_4 + 69120c_1c_2c_3) \end{aligned}$$

Son eşitlik tekrar düzenlenip her iki tarafın mutlak değeri alınır ve sonra üçgen eşitsizliği uygulanabilir. Ardından, Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.5) eşitsizliğinde $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \frac{11904}{41472}$, $\mu_3 = \frac{51200}{73728}$ ve Yardımcı Önerme 4.1.5 te verilen (4.9) eşitsizliğinde $K = 1107$, $L = 9744$ ve $M = 12960$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_3^2| &\leq \frac{1}{17694720} \left(69120|c_3||c_3 - c_1c_2| \right. \\ &\quad \left. + |c_1|^3|1107c_1^3 - 9744c_1c_2 + 12960c_3| \right. \\ &\quad \left. + 41472|c_1|^2 \left| c_4 - \frac{11904}{41472}c_2^2 \right| + 73728|c_2| \left| c_4 - \frac{51200}{73728}c_2^2 \right| \right) \\ &\leq \frac{241}{3840} \approx 0.06276. \end{aligned}$$

sonucu elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.4 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise, bu durumda;

$$|\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_2\Gamma_3| \leq \frac{343}{5120} \approx 0.066 \quad (4.47)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (4.39), (4.40), (4.41) ve (4.42) eşitsizliklerinden yararlanılarak;

$$\begin{aligned} \Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_2\Gamma_3 &= \frac{1}{245760} (640c_1c_2^2 - 1680c_1^2c_3 + 768c_1^3c_2 - 131c_1^5 + 1536c_1c_4 \\ &\quad - 1280c_2c_3) \end{aligned}$$

Bu ifade yeniden düzenlenip her iki tarafın mutlak değeri alınır, sonra da üçgen eşitsizliği uygulanabilir. Ardından Yardımcı Önerme 4.1.4 te bulunan (4.4) eşitsizliği, (4.5) eşitsizliğinde $\mu_1 = \frac{640}{1280}$, (4.7) eşitsizliğinde $\mu_2 = -\frac{131}{1680}$ ve $\mu_3 = -\frac{768}{1536}$ alınarak uygulanırsa;

$$\begin{aligned} |\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_2\Gamma_3| &\leq \frac{1}{245760} \left(1680|c_1|^2 \left| c_3 + \frac{131}{1680}c_1c_1^2 \right| + 1536|c_1| \left| c_4 + \frac{768}{1536}c_2c_1^2 \right| \right. \\ &\quad \left. + 1280|c_2| \left| c_3 - \frac{640}{1280}c_1c_2 \right| \right) \\ &\leq \frac{343}{5120} \approx 0.066. \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.3.5 Eğer $f \in \mathcal{R}_B$ ise, bu durumda;

$$|H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{873653}{11059200} \approx 0.078 \quad (4.48)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: (3.21) denkleminde

$$H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2) = \Gamma_3(\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_3^2) - \Gamma_4(\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_2\Gamma_3) + \Gamma_5(\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2)$$

olduğu biliniyor. Bu ifadenin her iki tarafının mutlak değeri alınırsa, üçgen eşitsizliği kullanılarak;

$$|H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)| = |\Gamma_3||\Gamma_2\Gamma_4 - \Gamma_3^2| + |\Gamma_4||\Gamma_1\Gamma_4 - \Gamma_2\Gamma_3| + |\Gamma_5||\Gamma_1\Gamma_3 - \Gamma_2^2|$$

yazılabilir. Bu son ifade Teorem 4.3.1 de elde edilen (4.36), (4.37), (4.38), Teorem 4.3.2 de elde edilen (4.44), Teorem 4.3.3 te elde edilen (4.46) ve Teorem 4.3.4 te elde edilen (4.47) eşitsizlikleri kullanılarak,

$$|H_{3,1}(F_{f^{-1}}/2)| \leq \frac{873653}{11059200}$$

sonucu elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmuştur.

Giriş bölümünde kompleks analiz, ünivalent fonksiyonlar ve bazı alt sınıflarının katsayılarının hesaplanması ile ilgili yapılan çalışmalar hakkında kısa bir bilgilendirme yapılmıştır.

İkinci bölümde kompleks analizin temel kavramları verilmiştir. Elde edilen sonuçların anlaşılır olabilmesi için ihtiyaç duyulan bazı temel tanım ve teoremler bu bölümde ele alınmıştır.

Üçüncü bölümde, ünivalent fonksiyonlar ve bu fonksiyonların bazı alt sınıfları ile ilgili tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Ayrıca logaritmik katsayılar, Hankel determinanı ve Bell sayıları açıklanarak araştırma sonuçlarına ulaşabilmek için zemin hazırlanmıştır.

Dördüncü bölüm üç ana başlık altında verilmiştir. İlk olarak; Bell sayıları ile ilişkili sınırlı dönen fonksiyonların $\mathcal{R}_B$ sınıfı tanımlanmış ve ispatları yaparken kullanılan yardımcı önermeler verilmiştir. Daha sonra, bu sınıftaki fonksiyonların logaritmik katsayılarının Hankel determinantları için sınırlar hesaplanmıştır. Son bölümde ise; bu sınıftaki fonksiyonların ters logaritmik katsayılarının Hankel determinantları için sınırlar belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] W.C. Ma and D. Minda, “A unified treatment of some special classes of univalent functions”, Proceedings of the conference on Complex Analysis, Tianjin, 1994, pp. 157-169.
- [2] S.S. Kumar and G. Kamaljeet, “A cardioid domain and starlike functions”, *Anal. Math. Phys.*, vol. 11, 54, 2021.
- [3] S.N. Malik, M. Raza, Q. Xin, J. Sokól, R. Manzoor and S. Zainab. “On Convex Functions Associated with Symmetric Cardioid Domain”, *Symmetry*, 13(12), 2321, 2021.
- [4] P. Sharma, R.K. Raina and J. Sokól. “Certain Ma-Minda type classes of analytic functions associated with the crescent-shaped region”, *Anal. Math. Phys.*, vol. 9, pp. 1887-1903, 2019.
- [5] L.A. Wani and A. Swaminathan. “Starlike and Convex Functions Associated with a Nephroid Domain”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 44, pp. 79-104, 2021.
- [6] R. Mendiratta, S. Nagpal and V. Ravichandran. “On a Subclass of Strongly Starlike Functions Associated with Exponential Function”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 38, pp. 365-386, 2014.
- [7] R.K. Raina and J. Sokól. “Some properties related to a certain class of starlike functions”, *C. R. Mathématique*, vol. 353(11), pp. 973-978, 2015.
- [8] B. Kowalczyk and A. Lecko. “Second Hankel Determinant of Logarithmic Coefficients of Convex and Starlike Functions”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol. 105(3), pp. 458-467, 2022.
- [9] B. Kowalczyk and A. Lecko. “Second Hankel Determinant of Logarithmic Coefficients of Convex and Starlike Functions of Order Alpha”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 45, pp. 727-740, 2022.
- [10] S. Sümer Eker, B. Şeker, B. Çekiç and M. Acu. “Sharp Bounds for the Second Hankel Determinant of Logarithmic Coefficients for Strongly Starlike and Strongly Convex Functions”, *Axioms*, vol. 11(8), pp. 369, 2022.
- [11] H.M. Srivastava, S. Sümer Eker, B. Şeker and B. Çekiç. “Second Hankel Determinant of Logarithmic Coefficients for a Subclass of Univalent Functions”, *Miskolc Math. Notes*, vol. 25(1), pp. 479-488, 2024.
- [12] S. Sümer Eker, A. Lecko, B. Çekiç and B. Şeker. “The Second Hankel Determinant of Logarithmic Coefficients for Strongly Ozaki Close-to-Convex Functions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 46, pp. 183, 2023.
- [13] L. Shi, M. Arif, J. Iqbal, K. Ullah and S.M. Ghufra. “Sharp Bounds of Hankel Determinant on Logarithmic Coefficients for Functions Starlike with Exponential Function”, *Fractal Fract.*, vol. 6(11), pp. 645, 2022.
- [14] V. Kumar, N.E. Cho, V. Ravichandran and H.M. Srivastava. “Sharp Coefficient Bounds for Starlike Functions Associated with The Bell Numbers”, *Mathematica Slovaca*, vol. 69(5), pp. 1053-1064, 2019.

- [15] D.G. Zill, P.D. Shanahan. *A First Course in Complex Analysis with Applications*. Boston, Toronto, London, Singapore: Jones and Bartlett Publishers, 2003.
- [16] P. L. Duren, *Univalent Functions*. Grundlehren der Math. Wissenschaften 259, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.
- [17] L. Bieberbach, “Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln.” *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.* pp. 940–955, 1916.
- [18] L. De Branges, “A proof of the Bieberbach conjecture.” *Acta Math*, 154, pp 137-152, 1985.
- [19] P. Koebe, “Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven.” *Nach. Ges. Wiss. Gottingen*, pp: 191-210. 1907.
- [20] A. W. Goodman. *Univalent Functions Vols. I and II.*: Washington, New Jersey: Polygonal Publishing House, 1983.
- [21] D.K. Thomas, N. Tuneski, A. Vasudevarao. *Univalent Functions: A Primer*. Berlin, Boston: De Gruyter Studies In Mathematics 69, 2018.
- [22] C. Carathéodory. “Sur quelques applications du théorème de *Landau-Picard*” *C. R. Acad. Sci., Paris*, 144, pp. 1203–1206, 1907.
- [23] I. Graham and G. Kohr, *Geometric function theory in one and higher dimensions*. Marcel Dekker, Inc., 2003.
- [24] J. W. Alexander, “Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions.” *Ann. of Math.*, 17: pp. 12-22, 1915.
- [25] M. S. Robertson, “On the theory of univalent functions.” *Ann. of Math.* 37: pp. 374–408, 1936.
- [26] W. K. Hayman, “On the second Hankel determinant of mean univalent functions”, *Proc. London Math. Soc. Vols 3*, 18, 77–94, 1968.
- [27] A. Janteng, S. Abdul Halim, M. Darus, “Hankel determinant for starlike and convex functions”, *Int. J. Math. Anal. (Ruse)*, vol 1 (1), pp. 619-625, 2007.
- [28] B. Kowalczyk, A. Lecko, Y.J. Sim, “The sharp bound of the Hankel determinant of the third kind for convex functions”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol 97(3), pp. 435-445, 2018.
- [29] Bell Numbers Whitman College. Erişim: https://www.whitman.edu/mathematics/cgt_online/book/section01.04.html (n.d).
- [30] N. Cho, B. Kowalczyk, A. Lecko, “Sharp Bounds of Some Coefficient Functionals Over The Class of Functions Convex in The Direction of the Imaginary Axis”, *Bull. Aust. Math. Soc.*, vol 100 (1), pp. 1-11, 2019.
- [31] C. Pommerenke, “Univalent Functions”, *Studia Mathematica Mathematische Lehrbücher*, Vanderhoeck, Ruprecht, Gottingen, Germany, 1975.
- [32] F.R. Keogh, E.P. Merkes, “A coefficient inequality for certain classes of analytic functions”, *Proc. Am. Math. Soc.*, vol 20, pp. 8-12, 1969.

[33] M. Arif, M. Raza, H. Tang, S. Hussian, H. Khan, “Hankel determinant of order there for familiar subsets of analytic functions related with sine function”, *Open Mathematics*, vol 17, pp. 1615-1630, 2019.

[34] J.H. Choi, Y.C. Kim, T. Sugawa, “A general approach to the Fekete-Szegö problem”, *J. Math. Soc. Jpn.*, vol 59 (3), pp. 707-727, 2007.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

TUFAN, Gizem Nur

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Formasyon	Çanakkale 18 Mart Üniversitesi Eğitim Fakültesi	2014
Lisans	Çanakkale 18 Mart Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2013
Lise	Edirne/Keşan Yusuf Çapraz Anadolu Lisesi	2009

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2013-2014	Edirne/İpsala Kocahıdır İlköğretim Okulu	Öğretmen
2014-2015	Edirne/Keşan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Öğretmen
2015-2019	Gaziantep/Şehitkamil Şehit Serdal Şakır Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Öğretmen
2019-	Diyarbakır/Yenişehir 15 Temmuz Şehitleri Anadolu Lisesi	Öğretmen

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Gizem Nur TUFAN		
Öğrenci No	22804033		
Ana Bilim Dalı	Matematik Ana Bilim Dalı		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☒	Doktora ☐
Tez Danışmanı	Prof. Dr. Sevtap SÜMER		
Tez Başlığı	Bell Sayılarıyla İlişkili Sınırlı Dönen Fonksiyonlar Sınıfı İçin Logaritmik Katsayıların Hankel Determinantları		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	75		
Raporlama Tarihi	06.07.2024		
Benzerlik Oranı (%)	%13		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 75 sayfalık kısmına ilişkin, 06/07/2024 tarihinde tez danışmanım tarafından TURNİTİN isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %13 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☒Diğer (Her şey dahil)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Gizem Nur TUFAN

Tarih:10.07.2024

İmza:

Danışman Prof. Dr. Sevtap SÜMER

Tarih:10.07.2024

İmza:

Ana Bilim Dalı Başkanı Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY

Tarih:10.07.2024

İmza: