

EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

(DOKTORA TEZİ)

BELLİ TİPTEN KISMİ TÜREVLİ
DENKLEMLER İÇİN STURM-TİPİ
KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ

Sinem ŞAHİNER

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine MISIRLI

İkinci Danışmanı: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Matematik Anabilim Dalı

Bilim Dalı Kodu: 403.06.01

Sunuş Tarihi: 08.05.2015

Bornova-İzmir

2015

Sinem ŞAHİNER tarafından DOKTORA tezi olarak sunulan "Belli Tipten Kısmi Türevli Denklemler İçin Sturm-tipi Karşılaştırma Teoremleri" başlıklı bu çalışma E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği ile E.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Eğitim ve Öğretim Yönergesi'nin ilgili hükümleri uyarınca tarafımızdan değerlendirilerek savunmaya değer bulunmuş ve **08.05.2015** tarihinde yapılan tez savunma sınavında aday oybirliği/~~oyçokluğu~~ ile başarılı bulunmuştur.

Jüri üyeleri

İmza

Jüri Başkanı : Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Raportör Üye : Prof. Dr. Emine MISIRLI

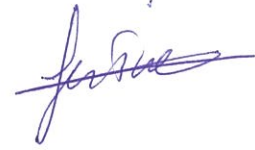
Üye : Prof. Dr. Şennur SOMALI

Üye : Prof. Dr. İbrahim ÇANAK

Üye : Prof. Dr. Gamze TANOĞLU







EGE ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

E.Ü. Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Doktora Tezi olarak sunduğum "Belli Tipten Kısmi Türevli Denklemler İçin Sturm-tipi Karşılaştırma Teoremleri" başlıklı bu tezin kendi çalışmam olduğunu, sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi, bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi, tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını, bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı, bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

05/08/2015



Sinem ŞAHİNER

ÖZET

BELLİ TİPTEN KİSMİ TÜREVLİ DENKLEMLER
İÇİN STURM-TİPİ KARŞILAŞTIRMA
TEOREMLERİ

ŞAHİNER, Sinem

Doktora Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Emine MISIRLI,

İkinci Danışmanı: Prof. Dr. Aydın TİRYAKİ

Mayıs 2015, 73 sayfa

Belli tipten kısmi türevli denklemler için Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri başlıklı bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde çalışmanın konusu ve tarihsel gelişimi hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde konuya ilişkin temel kavramlar üzerinde durulmuş, lineer ve half lineer tipten diferensiyel denklemler için karşılaştırma teoremleri ele alınmış ve bu teoremlerin bazı uygulamalarına yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, literatürde yer alan amaca yönelik karşılaştırma teoremlerini içeren çalışmalar verilmiştir.

Dördüncü bölümde belli tipten kısmi türevli denklemler için önce Picone tipli eşitsizlikler oluşturulmuş ve bu eşitsizlikler yardımıyla Sturm-tipi karşılaştırma sonuçları verilmiştir. Bu bölümde verilen tüm sonuçlar özgündür.

Beşinci bölüm sonuç bölümüdür.

Anahtar Sözcükler: Eliptik denklemler, Picone tipli özdeşlikler/eşitsizlikler, Sturm karşılaştırma teoremleri, salınımlılık.

ABSTRACT

STURMIAN COMPARISON THEOREMS FOR
CERTAIN TYPE OF PARTIAL DIFFERENTIAL
EQUATIONS

SAHİNER, Sinem

Ph.D. in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Emine MISIRLI

Co-Supervisor: Prof. Dr. Aydin TIRYAKI

May 2015, 73 pages

This thesis entitled by Sturmian comparison theorems for certain type of partial differential equations consists of five chapters.

In the first chapter, the subject of the study and the historical developments in the area have been introduced.

The second chapter focuses on the definitions of the fundamental concepts of the issues discussed. The the comparison theorems for linear and nonlinear differential equations are discussed and some examples for the applications of these theorems are given.

In the third chapter, we investigate the previous work about the comparison theorems for partial differential equations in the literature.

In the fourth chapter, Picone type inequalities are observed for the certain type of partial differential equations and Sturmian comparison results are given via the Picone type inequalities. The results are given in this chapter are original.

The fifth chapter is the conclusion.

Key Words: Elliptic equations, Picone type identities/inequalities, Sturm comparison results, oscillation.

TEŞEKKÜR

Lisans eğitimimden bu yana, bilgisiyle ve tecrübesiyle bana her zaman en iyi şekilde destek olan ve iyi bir araştırmacı olmam için beni yönlendiren değerli danışman hocam Prof. Dr. Emine MISIRLI'ya yürekten teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışmasının başlangıcından sonuna kadar tüm sabrıyla, her zaman, her koşulda tüm bilgi ve tecrübesini benimle en iyi şekilde paylaşan ve kendisinden çok şey öğrendiğim ikinci danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Aydın TIRYAKI'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez izleme çalışmalarımızda önerilerinden ve yorumlarından faydalandığım değerli hocalarım Prof. Dr. Şennur SOMALI ve Prof. Dr. İbrahim ÇANAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

İzmir Üniversitesi'nde desteğini her zaman hissettiğim değerli hocalarım ve arkadaşlarıma, benim bu günlere gelmemde her türlü fedakarlığı göze alan aileme, her zaman yanımda olduğunu hissettiğim kardeşim Sevil ÜREMEN'e ve sabrıyla, anlayışıyla her koşulda yanımda olan eşim Burak ŞAHİNER'e şükranlarımı sunarım.

Bu tez sırasında, 2211 Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı ile sunduğu maddi destekten dolayı TÜBİTAK-BİDEB'e teşekkür ederim.

SİNEM ŞAHİNER

Mayıs 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	vii
ABSTRACT	ix
TEŞEKKÜR	xi
SİMGELER DİZİNİ	xv
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı İle İlgili Kavramlar	3
2.2 Sturm Karşılaştırma Teoremi	5
2.3 Half-Lineer Denklemler İçin Sturm-tipi Teoremler	10
2.4 p-Laplasyen Denklemler	14
2.5 Nodal Salınımlılık ve Salınımlılık	16
2.6 Zayıf Türev Kavramı ve Sobolev Uzayı	22
2.7 Bazı Önemli Eşitsizlikler	23
3 BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN LİTERATÜRDE VERİLEN STURM-TİPİ TEOREMLER	25
4 BELLİ TİPTEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN STURM-TİPİ KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ	31
4.1 Sönümlü Terim İçeren Kısmi Türevli Denklemler İçin Sturm-Tipi Karşılaştırma Teoremleri	31
4.1.1 Picone tipli eşitsizlikler	33
4.1.2 Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri	35
4.1.3 Uygulamalar	41
4.2 Sönümlü Terim ve Zorlanmış Terim İçeren Kısmi Türevli Den- klemler İçin Sturm-Tipi Karşılaştırma Teoremleri	44
4.2.1 Picone tipli eşitsizlikler	45
4.2.2 Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri	50
4.2.3 Uygulama	60

İÇİNDEKİLER (devam)

	<u>Sayfa</u>
5 SONUÇ	63
KAYNAKLAR DİZİNİ	64
ÖZGEÇMİŞ	72

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simge</u>	<u>Açıklama</u>
R	Reel sayılar kümesi
R^n	Reel n -boyutlu Öklid uzayı
$ x $	Öklid uzunluğu, $ x = (\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2}$
(a, b)	Açık aralık, $\{x \in R : a < x < b\}$
$[a, b]$	Kapalı aralık, $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$
$x \cdot y$	$x \in R^n$ ve $y \in R^n$ in skaler çarpımı
S_1	$\{x \in R^n : x = 1\}$, R^n de birim küre
ω_n	S_1 birim kümesinin yüzey alanı, $\omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$
$\Gamma(s)$	Gamma fonksiyonu
$B(u, v)$	Beta fonksiyonu
$\bar{G}$	R^n de bir G bölgesinin kapanışı
∂G	R^n de bir G bölgesinin sınırı
Δ	R^n de Laplace operatörü
∇	nabla operatörü $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$
$\nabla \cdot b$	$b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ olmak üzere $\nabla \cdot b = \text{div} b = \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$
$C(A, R)$	$A \subset R^m$ de reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^k(A, R)$	$A \subset R^m$ de k -inci mertebeden sürekli türevlenebilir uzayı
$W^{p,k}(A)$	Sobolev Uzayı

1 GİRİŞ

Doğa bilimleri, mühendislik ve daha birçok alandaki problemler diferansiyel denklemlerle modellenmiştir. Bu nedenle pek çok araştırmacı diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerinde çalışmıştır. Bilindiği üzere diferansiyel denklemlerin çok küçük bir sınıfının analitik çözümlerini elde etmek mümkündür. Çözümü elde edilemeyen bazı diferansiyel denklemlerin yapılarına ve bazı özelliklerine göre çözümleri hakkında bilgi edinmek mümkündür. Diferansiyel denklemleri çözmeden, bu denklemlerin çözümleri hakkında bilgi edinme kalitatif teoreminin temel problemlerinden biridir. Bir denklemin eğer varsa, çözümlerinin sıfırlarının konumu, çözümlerin sayısı, diğer çözümleri ya da çözümlerinin sıfırları ile karşılaştırılması son derece önemlidir. Bu tip incelemeler Sturm teorisi içinde yer alır.

Bir diferansiyel denklemin çözümlerinin sıfırlarından hareketle başka bir diferansiyel denklemin çözümlerinin sıfırlarının konumu hakkındaki ilk çalışmalar Fransız Matematikçi Jacques Charles François Sturm tarafından yapılmıştır (Sturm, 1836). Sturm'un bu konuda öncü sayılan çalışmasından sonra araştırmacılar Sturm teorisi olarak anılan bu teoriyi çeşitli diferansiyel denklemler için geliştirmişlerdir. İtalyan matematikçi Mauro Picone ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Sturm karşılaştırma teoremlerini vermek amacıyla kendi adıyla bilinen Picone özdeşliğini tanımlamıştır (Picone, 1909).

Daha sonraki yıllarda, ikinci mertebeden half (yarı) lineer denklemler için Picone tipli özdeşlik Jaroš ve Kusano tarafından elde edilmiş ve bu özdeşlikler kullanılarak, zorlanmış terimli (forced term) ve zorlanmamış terimli olmayan (unforced term) half-lineer denklemler için Sturm karşılaştırma teoremleri verilmiştir (Jaroš and Kusano, 2002). Lineer denklemlere ilişkin Picone özdeşlikleri ve karşılaştırma teoremleri için (Kreith, 1973, 1975), half lineer eliptik denklemler için (Allegretto, 2000, 2001; Allegretto and Huang, 1998, 1999; Bogner and Došlý, 2003; Clarck and Swanson, 1965; Dunninger, 1995; Kusano et. al., 2000; Yoshida, 2008a, 2008b, 2009a, 2009b) öncelikli

referanslar olarak verilebilir.

Mühendislik ve fizik gibi bir çok uygulama alanlarındaki problemlerde, $A(x)$ birim matris veya skalar bir fonksiyon olmak üzere

$$\operatorname{div} (A(x)||\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

şeklinde p-Laplasyen modellerle karşılaşılır. (Ahmed, 1969; Aris, 1975; As-tarita, 1974; Diaz, 1985; Oden, 1978; Pelissier; 1975, Schoenauer; 1983) Bu nedenle p-Laplasyen içeren genelleştirilmiş eliptik tipten denklemler için Sturm teorisi ile ilgili sonuçların elde edilmesi önemlidir.

Bu tezde p-Laplasyen modeller için, Picone tipli eşitsizlikler yardımıyla bazı özel tipten denklemlerin çözümlerinin sıfırlarının karşılaştırılması üzerinde durulacaktır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, özel tipten kısmi türevli denklemler için literatürdeki mevcut olan bazı karşılaştırma teoremleri ele alınmıştır. Tezin orijinal bölümü olan dördüncü bölümde, daha önce literatürde ele alınmamış, genelleştirilmiş eliptik tipten operatörler göz önünde bulundurularak Picone tipli eşitsizlikler yardımıyla Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri elde edilmiştir. Elde edilen sonuçların bir uygulaması olarak bu operatörlere karşılık gelen denklemlerin salınımlılıkları hakkında özgün sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar, genelleştirilmiş eliptik tipten denklemleri çözmeden, bu denklemlerin çözümlerinin sıfırları hakkında bilgi edinilmesine imkan sağlar. Fizik ve mühendislik problemlerinin matematiksel modellerinde p-Laplasyen denklemler geniş bir yer tutmakta olup bu tip denklemlerin kalitatif incelenmesi oldukça önemlidir. Elde edilen bu sonuçlar p-Laplasyen içeren denklemlerin ya da bu denklemlerin özel hallerinin kalitatif incelenmesinde kullanılabilir. Beşinci bölüm sonuç bölümüdür.

2 TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez boyunca ele alınacak olan konuya ilişkin bazı temel kavramlara yer verilecektir.

2.1 Diferensiyel Denklemlerin Salınımlılığı İle İlgili Kavramlar

İkinci mertebeden

$$u'' = f(x, u, u'), \quad x \geq 0 \quad (1)$$

şeklinde verilen diferensiyel denklemi ele alalım. $u(x)$, $[0, \infty)$ aralığında (1) denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü olsun.

Tanım 2.1

$u(x)$, (1) denkleminin bir çözümü olsun. $u(x^*) = 0$ ise $x = x^*$ noktasına $u(x)$ in bir *sıfır*ı denir.

Tanım 2.2

$x_0 \geq 0$ olmak üzere $[x_0, \infty)$ aralığında (1) denkleminin aşıkâr olmayan $u(x)$ çözümü sonsuz sayıda sıfıra sahipse u fonksiyonuna *salınımlı*dır diğer durumda *salınımsız*dır denir.

(1) denkleminin aşıkâr olmayan bütün çözümleri salınımlıysa denkleme *salınımlı* diğer durumda denkleme *salınımsız*dır denir.

Örneğin; $u'' + u = 0$ denklemi salınımlıdır. Çünkü bu denklemin genel çözümü $u(x) = A \cos x + B \sin x$ dir. Kolaylıkla gösterilebilir ki $[0, \infty)$ aralığında $u(x)$ çözümü, $n = 0, 1, 2, \dots$ ve $AB > 0$ olmak üzere $n\pi + \arctan(\frac{A}{B})$ noktalarında sonsuz sayıda sıfıra sahiptir.

$u'' - u = 0$, $x \geq 0$ denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin genel çözümü $u(x) = Ae^x + Be^{-x}$ dir. Denklemin çözüm fonksiyonları olan $u_1(x) = e^x$ ve $u_2(x) = e^{-x}$ lerin her ikisi de salınımlı değildir.

$a \in C([0, \infty), R)$ ve $b \in C([0, \infty), R)$ olmak üzere

$$u'' + a(x)u' + b(x)u = 0, \quad x \geq 0 \quad (2)$$

lineer homojen denklemi ele alalım:

Teorem 2.1 (Rao, 1979) $a' \in C([0, \infty), R)$ olsun. (2) denkleminin salınımlı olması için gerek ve yeter şart; $c(x) = b(x) - \frac{1}{4}a^2(x) - \frac{1}{2}a'(x)$ olmak üzere

$$u'' + c(x)u = 0 \quad (3)$$

denkleminin salınımlı olmasıdır.

(3) denkleminin salınımlılığı ile ilgili çalışmalar literatürde önemli bir yer tutar. Örneğin;

$$(C1) \lim_{x \rightarrow \infty} c(x) = \infty, \text{ (Fite, 1918)}$$

$$(C2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x c(t)dt = \infty, \text{ (Wintner, 1949)}$$

$$(C3) -\infty < \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x c(t)dt < \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_{x_0}^x c(t)dt \leq \infty, \text{ (Hartman, 1952)}$$

$$(C4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\alpha} \int_{x_0}^x (s-t)^\alpha c(t)dt = \infty, \quad \alpha > 1, \text{ (Kamenev, 1978)}$$

yeter koşulları altında (3) denkleminin salınımlılığını garanti eden ve iyi bilinen önemli çalışmalardan bir kısmıdır.

Teorem 2.2 (Rao, 1979) u_1 ve u_2 fonksiyonları, (2) denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun, bu durumda u_1 ve u_2 ortak sıfıra sahip değildir.

Teorem 2.3 (Rao, 1979) (2) denkleminin aşikar olmayan bir çözümünün sıfırları izole nokta özelliğine sahiptir.

Teorem 2.4 (Sturm Ayırma Teoremi) (Rao, 1979) (3) denkleminin aşikar olmayan lineer bağımsız iki çözümü $u(x)$ ve $v(x)$ olsun. v nin ardışık iki sıfırı arasında u nun bir sıfırı vardır. Bir başka ifadeyle u ve v nin sıfırları ardışıktır.

2.2 Sturm Karşılaştırma Teoremi

Teorem 2.5 (Kreith, 1973; Swanson, 1968) $p(x) > 0$, $P(x) > 0$ olmak üzere q , Q , p ve P , (α, β) de sürekli reel değerli fonksiyonlar olsun. Ayrıca $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (α, β) aralığında sırasıyla aşağıdaki denklemlerin aşikar olmayan çözümleri olsun;

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = 0 \quad (4)$$

$$(P(x)v'(x))' + Q(x)v(x) = 0 \quad (5)$$

$x \in (\alpha, \beta)$ için $p(x) \equiv P(x)$ ve $Q(x) > q(x)$ ise, (α, β) da u nun iki ardışık sıfırı arasında v nin en az bir sıfırı vardır.

Picone, 1909 yılında, Picone özdeşliği olarak bilinen aşağıdaki özdeşliğini elde etti: (Picone, 1909)

(Picone Özdeşliği) u , v , pu' , Pv' ler diferensiyellenebilir ve $v(x) \neq 0$ olsun,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{u}{v} (vpu' - uPv') \right] = u(pu')' - \frac{u^2}{v} (Pv')' + (p - P)u'^2 + P \left(u' - \frac{u}{v}v' \right)^2 \quad (6)$$

dir (Kreith, 1973). Picone bu özdeşlik ile Sturm teoremini aşağıdaki gibi genişletti.

Teorem 2.6 (Sturm-Picone Teoremi) (Kreith, 1973) $x \in [\alpha, \beta]$ olmak üzere $0 < P(x) \leq p(x)$ ve $q(x) \leq Q(x)$ olsun. $u(x)$ (4) denkleminin bir aşikar olmayan bir çözümü ve α ve β , $u(x)$ in ardışık sıfırları ise, (5) denkleminin v çözümü aşağıdaki özelliklerden birine sahiptir:

(i) v , (α, β) aralığında bir sifıra sahiptir, ya da

(ii) v , u nun sabit bir katıdır.

Teorem 2.6, kapalı aralık için aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Teorem 2.7 (*Sturm-Picone Karşılaştırma Teoremi*) (*Kreith, 1973*)

$\alpha \leq x \leq \beta$ aralığında $p(x) \geq P(x) > 0$ ve $q(x) \leq Q(x)$ olsun. Eğer (4) denkleminin $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir u çözümü varsa (5) denkleminin her v çözümü $[\alpha, \beta]$ aralığında bir sifıra sahiptir.

İspat. $u(x)$ ve $v(x)$ sırasıyla (4) ve (5) denklemlerinin çözümleri olsun. $x \in [\alpha, \beta]$ olmak üzere $v(x) \neq 0$ ise (6) ile verilen Picone özdeşliği geçerlidir:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{u}{v} (vp u' - uP v') \right] = (q - Q)u^2 + (p - P)u'^2 + P \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2$$

α dan β ya bu özdeşliğin her iki yanının integrali alınırsa

$$0 \geq \int_{\alpha}^{\beta} \left[(q - Q)u^2 + (p - P)u'^2 + P \left(u' - \frac{u}{v} v' \right)^2 \right] dx \geq 0$$

elde edilir. Buradan $q(x) \equiv Q(x)$, $p(x) \equiv P(x)$, ve

$$u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)} v' \equiv 0$$

bulunur.

$$u'(x) - \frac{u(x)}{v(x)} v' \equiv 0$$

ifadesinden

$$\frac{u(x)}{v(x)} \equiv C \text{ (sabit)}$$

elde edilir. Burada $u(\alpha) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow u(x) \equiv 0$ elde edilir. Bu da $u(x)$ in aşikar olması ile çelişir. Bu çelişki $v(x)$ in sıfırdan farklı kabul edilmesinden

kaynaklanmaktadır. Öyleyse $v(x)$, $[\alpha, \beta]$ aralığında bir sıfıra sahiptir.

Picone özdeşliği ve Picone tipli eşitsizlikler, kalitatif teoride özellikle diferensiyel denklemler ve kısmi türevli denklemlerin Sturm teorisinde önemli bir rol oynamaktadır. Bazı özel tipten diferensiyel denklemlerin Picone özdeşlikleri ile ilgili bir çok makale ve kitap bulunmaktadır (Allegretto, 1998; Jaroš and Kusano, 1999; Jaroš et. al., 2002, 2006; Swanson, 1968; Yoshida, 2008a, 2008b, 2009b). Picone özdeşlikleri, hem Sturm karşılaştırma teoremleri için, hem de diferensiyel denklemlerin çözümlerinin salınımlılığının ele alınması, bir bölge üzerinde öz değerlerin monotonluğunun araştırılması, varlığı ile ilgili sonuçların elde edilmesi ve bazı tipten problemlerin çeşitli öz değerleri için sonuçların elde edilmesine ilişkin konularda son derece önemli bir araçtır (Allegretto, 1999; Yoshida, 1987).

Sturm-Picone teoremi 1962 yılında Leighton tarafından, bir varyasyonel lemma ile geliştirildi (Leighton, 1962). Bu bağlamda, α, β ardışık sıfırlar ve,

$$D = \{u \in C^1[\alpha, \beta] : u(\alpha) = u(\beta) = 0\}$$

olmak üzere $J : D \rightarrow R$ fonksiyoneli

$$J[u] = \int_{\alpha}^{\beta} (Pu' - Qu^2) dx.$$

olarak tanımlansın. Leighton, (7) fonksiyoneli kullanarak aşağıdaki teoremi ifade etmiştir.

Teorem 2.8 (Swanson, 1968) (**Leighton**) $u(x)$, (α, β) aralığında $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ olacak şekilde (4) denkleminin aşikar olmayan reel bir çözümü olsun. $V[u] > 0$ ise bu durumda (5) denkleminin her çözümü (α, β) aralığında bir sıfıra sahiptir. Burada

$$j[u] = \int_{\alpha}^{\beta} (pu'^2 - qu^2) dx \quad u \in D_{\ell} \quad (7)$$

ve

$$V[u] = j[u] - J[u]$$

$$V[u] = \int_{\alpha}^{\beta} \left((p - P)u'^2 + (Q - q)u^2 \right) dx, \quad (8)$$

dir.

Özel olarak $V[u] > 0$ yerine daha zayıf $V[u] \geq 0$ koşulu alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir:

Teorem 2.9 (Swanson, 1968) $Lu = 0$ denkleminin (α, β) aralığında $u(\alpha) = u(\beta) = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan reel bir çözümü varsa ve $V[u] \geq 0$ ise, bu durumda $Lv = 0$ denkleminin her v çözümü aşağıdaki özelliklerden birine sahiptir:

(i) v , (α, β) de bir sifıra sahiptir, ya da

(ii) v , u nun sabit bir katıdır.

Örnek 2.1 (Kreith, 1973) (4) ve (5) denklemlerinde $p(x) = P(x) = -1$, $q(x) = q$ ve $Q(x) = Q$ alınsın.

Eğer $u(x)$ ve $v(x)$,

$$-u'' + qu = 0$$

ve

$$-v'' + Qv = 0$$

denklemlerinin sırasıyla aşikar olmayan çözümleri olsun ve q ve Q sabit olmak üzere, aşağıdaki sonuçlar verilebilir;

- (i) $Q < q$ ise, $u(x)$ in ardışık iki sıfırı arasında $v(x)$ nin bir sıfırı vardır,
- (ii) $q \geq 0$ ise, $u(x)$ herhangi bir aralıkta en fazla bir sıfıra sahiptir,
- (iii) eğer $Q < 0$ ise, $v(x)$, her $[\alpha, \infty)$ aralığında bir sıfıra sahiptir.

Örnek 2.2 (Swanson, 1968) $p(x) = P(x) = q(x) = 1$ ve $Q(x) = x + 1 - k$ olarak alındığında, $0 < k < \pi/2$ olmak üzere $0 \leq x \leq \pi$ aralığında (4) ve (5) diferensiyel denklemleri sırasıyla

$$u'' + u = 0 \quad (9)$$

$$v'' + (x + 1 - k)v = 0 \quad (10)$$

denklemlerine dönüşür. (9) denkleminin $u(x) = \sin x$ çözümü $u(0) = u(\pi) = 0$ koşulunu sağlar. $V[u]$ varyasyonu

$$V[u] = \int_0^\pi (x - k) \sin^2 x dx,$$

olarak elde edilir, buradan bazı basit hesaplamalarla

$$V[u] = \frac{\pi}{2} \left(\frac{\pi}{2} - k \right) > 0$$

sonucuna varılır. Böylece Teorem 2.8 'den (10) denkleminin her çözümü, $(0, \pi)$ aralığında bir sıfıra sahiptir denir.

Örnek 2.3

$$v'' + xv = 0 \quad (11)$$

Airy denkleminin her çözümünün $x_n (n = 1, 2, \dots)$ pozitif sıfırlarının sonsuz bir dizisine sahip olduğu gösterilebilir. Bu dizinin sonlu bir limit noktası yoktur.

Bu sonuç, Sturm'un klasik teoremi Teorem 2.5'in (9) ve (11) denklemlerine uygulanması ile elde edilebilir. $p(x) = P(x) = 1$ ve $q(x) = 1 < x = C(x)$ durumunda ($n = 1, 2, \dots$) olmak üzere her $[n\pi, (n+1)\pi]$ aralığında, $u(x) = \sin x$ çözümü $u(n\pi) = u((n+1)\pi) = 0$ koşulunu sağladığı için $(n\pi, (n+1)\pi)$ aralığında (11) denkleminin her reel çözümü bir sıfıra sahiptir (Swanson, 1968).

2.3 Half-Linear Denklemler İçin Sturm-tipi Teoremler

1999 yılında Jaroš et al., bir önceki kesimde yer verilen, lineer denklemler için Sturm karşılaştırma sonuçlarını aşağıdaki formda verilen half-lineer denklemler için genelleştirdi (Jaroš et al., 1999):

$$\ell_\alpha(u) = (p(x)\varphi(u'))' + q(x)\varphi(u) = 0 \quad (12)$$

ve

$$L_\alpha(v) = (P(x)\varphi(v'))' + Q(x)\varphi(v) = 0 \quad (13)$$

burada $\varphi(u) := |u|^{\alpha-1}u$, $u \in R$, $\alpha > 0$ reel bir sabit, p , q , P ve Q lar da amaca uygun bir I aralığında reel değerli ve $p(x) > 0$, $P(x) > 0$ özelliğine sahip yeterince düzgün fonksiyonlardır.

ℓ_α operatörünün $D_\alpha \ell(I)$ tanım bölgesi, I da u ve $p\varphi(u')$ sürekli diferensiyellenebilir olduğu tüm sürekli reel değerli u fonksiyonlarının bir kümesi olarak tanımlı olsun. L_α nın $D_\alpha L(I)$ tanım bölgesi de benzer şekilde tanımlanabilir.

(12) ve (13) operatörleri **half-lineer** (half-linear) veya α **dereceden homojen** (**homogeneous of degree α**) olarak adlandırılır. Gerçekten de

örneğin, (12) ile tanımlı ℓ_α operatörü ele alındığında,

$$\ell_\alpha(cu) = |c|^{\alpha-1} c \ell_\alpha(u)$$

dır. Bu bize $u(x)$, (12) denkleminin bir çözümü ise $cu(x)$ in de aynı denklemin çözümü olduğunu gösterir (Jaroš and Kusano, 1999).

Burada, half-lineer denklemler için Picone tipli özdeşlik ve diğer temel teoremler üzerinde durulacaktır.

(Picone tipli özdeşlik) $I_0 \subset I$ olsun. $u \in D_\ell(I_0)$ ve $v \in D_L(I_0)$ olmak üzere $x \in I_0$ için $v(x) \neq 0$ ise, bu durumda half-lineer denklemler için Picone özdeşliği olarak bilinen

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left\{ \frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)p\varphi(u') - \varphi(u)P\varphi(v')] \right\} \\ &= (Q - q)|u|^{\alpha+1} + (p - P)|u'|^{\alpha+1} \\ &+ P \left\{ |u'|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{uv'}{v} \right|^{\alpha+1} - (\alpha + 1)u'\varphi\left(\frac{uv'}{v}\right) \right\} \\ &+ \frac{u}{\varphi(v)} \{ \varphi(v)\ell_{\alpha(u)} - \varphi(u)L_{\alpha(v)} \} \end{aligned} \quad (14)$$

özdeşliği sağlanır (Jaroš and Kusano, 1999).

$$U = \{ \eta \in C^1[a, b] : \eta(a) = \eta(b) = 0 \text{ and } \eta(t) \neq 0, t \in [a, b] \}$$

olsun ve $J_\alpha : U \rightarrow R$ fonksiyoneli

$$J_\alpha[\eta] = \int_a^b [P(x)|\eta'(x)|^{\alpha+1} - Q(x)|\eta(x)|^{\alpha+1}] dx$$

şeklinde tanımlı olsun.

Teorem 2.10 (*Wirtinger tipli eşitsizlik*) (13) ile tanımlı $L_\alpha(v) = 0$ denkleminin, (α, β) aralığında $v(x) \neq 0$ olacak şekilde bir v çözümü varsa, herhangi bir $\eta \in U$ için

$$J_\alpha[\eta] \geq 0 \quad (15)$$

dir. Burada eşitlik durumu η , v nin sabit bir katı olduğunda gerçekleşir (Jaroš and Kusano, 1999).

Teorem 2.10 dan aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

Sonuç 2.1

$$J_\alpha[\eta] \leq 0 \quad (16)$$

olacak şekilde bir $\eta \in U$ varsa bu durumda $L_\alpha(v) = 0$ denkleminin her v çözümü c bir sabit olmak üzere $v = c\eta$ olmadıkça (α, β) aralığında bir sifıra sahiptir.

Aşağıdaki teorem, Teorem 2.9 in bir genellemesi olarak verilecektir.

Teorem 2.11 (*Leighton-tipi Karşılaştırma Teoremi*) (Jaroš and Kusano, 1999) $\eta \in U$, $\ell_\alpha(u) = 0$ denkleminin bir aşikar olmayan çözümü olsun. Eğer,

$$V_\alpha[\eta] = \int_a^b [(p(x) - P(x)) |\eta'(x)|^{\alpha+1} + (Q(x) - q(x)) |\eta(x)|^{\alpha+1}] dx \geq 0 \quad (17)$$

koşulu sağlanıyorsa, bu durumda (13) denkleminin her v çözümü aşağıdaki özelliklerden birine sahiptir;

(i) v , (α, β) aralığında bir sifıra sahiptir,

(ii) v, u nun bir katıdır.

Sonuç 2.2 (*Sturm-Picone Karşılaştırma Teoremi*) (*Jaroš and Kusano, 1999*) $u \in U$, $\ell_\alpha(u) = 0$ denkleminin aşıkâr olmayan bir çözümü olsun. Verilen bir $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ aralığında,

$$p(x) \geq P(x) > 0 \quad (18)$$

ve

$$Q(x) \geq q(x) \quad (19)$$

ise $L_\alpha(v) = 0$ denkleminin herhangi bir v çözümü (α, β) aralığında bir sıfıra sahiptir ya da v , ile u lineer bağımlıdır.

Örnek 2.4 (*Jaroš and Kusano, 1999*) Lineer durumda basit harmonik denkleminin karşılık gelen

$$\left(|u'|^{\alpha-1}u'\right)' + \alpha|u|^{\alpha-1}u = 0, \quad \alpha > 0 \quad (20)$$

half-lineer denklem ile

$$\left(|v'|^{\alpha-1}v'\right)' + \beta x^\gamma |v|^{\alpha-1}v = 0, \quad x \geq 0 \quad (21)$$

half-lineer tipten Airy denklemini ele alalım. Burada α , β ve γ lar pozitif sabitlerdir.

Genelleştirilmiş sinüs fonksiyonu olarak adlandırılan $u_k(x) = s(kx)$ fonksiyonu

$$\left(|u'|^{\alpha-1}u'\right)' + \alpha k^{\alpha+1}|u|^{\alpha-1}u = 0$$

denkleminin bir çözümüdür. Bu çözüm $\frac{n\pi_\alpha}{k}$, $n = 1, 2, \dots$ sıfır noktalarının bir sonsuz dizisine sahiptir.

$k \in N$, $x \geq T_k$ için $\beta x^\gamma > \alpha k^{\alpha+1}$ olacak şekilde bir T_k var olduğundan, Sonuç 2.2 nin bir uygulaması olarak, $n \in N$ olmak üzere $\frac{n\pi_\alpha}{k} > T_k$ yeterince büyük ise, (21) denkleminin aşikar olmayan herhangi bir v çözümü $\left(\frac{n\pi_\alpha}{k}, \frac{(n+1)\pi_\alpha}{k}\right)$ aralığında bir sifra sahiptir. Sonuç olarak denkleminin tüm aşikar olmayan çözümleri salınımlıdır.

2.4 p-Laplasyen Denklemler

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0 \quad (22)$$

denklemini p-Laplasyen denklemi olarak bilinir ve p-Laplasyen operatörü açık formda

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \quad (23)$$

$$= |\nabla u|^{p-4} |\nabla u|^2 \Delta u + (p-2) \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \quad (24)$$

şeklinde de ifade edilir. Bu denklemin çözümleri Dirichlet sınır koşulları göz önünde bulundurularak,

$$I(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)^2 \right]^{\frac{p}{2}} dx_1 \dots dx_n$$

integrali ile tanımlı enerji fonksiyoneli minimize eder. Ayrıca (22) denklemini, $I(u)$ fonksiyoneli için Euler denklemi olarak da bilinir.

(23) denkleminde genellikle $p \geq 1$ dir. $p = 2$ olarak alındığında bilinen

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Laplace denklemi elde edilir. Bu Laplace denkleminin karşılık

$$D(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} \dots \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx_1 \dots dx_n$$

Dirichlet-integrali yazılır.

$\nabla u = 0$ denkleminin kritik noktalarından ötürü (22) denkleminin $p > 2$ için *dejenere*, $p < 2$ *tekil (singüler)* denklem denir ve çözümleri de p -harmonik fonksiyon olarak adlandırılır. (Lindqvist, 2006)

Aşağıda p 'nin bazı özel değerleri için (22) denkleminin özel durumlarını irdeleyelim:

p=1 Durumu

$$\Delta_1 u = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) = H,$$

denkleminde H , ortalama eğrilik operatörüdür (mean curvature operatör) ve iki boyut durumunda;

$$H = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

olur. (Lindqvist, 2006)

p=2 Durumu

Bilinen Laplace operatörü;

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Bu operatöre elektrostatik ile ilgili problemlerde oldukça sık rastlanmaktadır. Örneğin $-\Delta \Phi = 4\pi\rho$ denkleminde, ρ , bir Ω bölgesinde yük yoğunluğu,

oluşacak potansiyel ise Φ dir. Ya da daha genel bir örnek olması açısından; $A(x)$ her x için, simetrik, pozitif tanımlı ve bileşenleri a^{ij} olan matris değerli bir fonksiyon olsun,

$$Lu = -\partial_i(a^{ij}(x)\partial_j u) + b^j \partial_j u + cu$$

eliptik operatörü, ikinci mertebeden lineer eliptik diferensiyel operatörünün diverjans formunda verilmiş en genel halidir. $A = I$ alınırsa Laplace operatörü elde edilir. Polarize edilmiş ortamda elektrostatik ile ilgili problemlerde bu operatöre rastlanılır. (Lindqvist, 2006)

p=n Sınır Durumu

n bağımsız değişkenlerin sayısı olmak üzere, $\Delta_n u = 0$ denklemi Möbius dönüşümü altında konformal değişmezdir (conformally invariant). Örneğin, koordinat fonksiyonlarının $y = a + \frac{x-a}{|x-a|^2}$ ile dönüşümü (Möbius dönüşümü) n -harmoniktir. Bu sebeple $p = n$ durumu quasikonformal dönüşümler teorisinde önemli yer tutar (Aranson, 1967).

p -Laplace operatörünün kullanıldığı diğer alanlar arasında potansiyel teori, fizikte; reoloji (sıvı akışı ile ilgilenen bilim dalı), glasiyoloji (buzulları inceleyen bilim dalı), ısı yayılımı, plastik kaplama gibi dallar vardır.(Evans, 1998; Lindqvist, 2006)

2.5 Nodal Salınımlılık ve Salınımlılık

$$\ell[u] := \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + c(x)u = 0, \quad x \in \Omega \quad (25)$$

lineer eliptik denklemini ele alalım, burada Ω , R^n Öklid uzayında sınırsız bir bölge, ve $a(x) \in C^1(\Omega, R)$ ve $c(x) \in C(\Omega, R)$ dir. Ayrıca $x \in R^n$ için $|\cdot|$ de Öklid normudur.

Tanım 2.3

G de $\ell[u] = 0$ ve ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde bir aşikar olmayan $u \in C^2(G, R) \cap C(\bar{G}, R)$ fonksiyonu varsa $G \subset \Omega$ bölgesine (domain) bir *nodal bölge* denir.

Tanım 2.4

$r > 0$ ve $\Omega_r = \Omega \cap \{x \in R; |x| > r\}$ olsun. $\ell[u] = 0$ denkleminin aşikar olmayan u çözümü Ω_r de bir nodal bölge içeriyorsa $\ell[u] = 0$ denklemine Ω *nodal (nodally) salınımlıdır* denir.

$\bar{G}$, C^1 sınıfından parçalı reel değerli u fonksiyonlarını içeren bir bölge olsun ve $M[u, G]$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$M[u, G] = \int_G \left[\sum_{i,j=1}^n a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} - c(x)u^2 \right] dx.$$

Teorem 2.12 (*Yoshida, 2008b*) Ω bölgesi,

- (i) G_k lar sınırları parçalı C^1 sınıfından, düzgün sınırlı bölgeler,
- (ii) $r > 0$ için $G_{k(r)} \subset \Omega_r$ olacak şekilde bir $k(r) \in N$ vardır;
- (iii) ∂G_k da $u_k = 0$ ve $M[u_k, G_k] \leq 0$, ($k = 1, 2, \dots$) olacak şekilde $\bar{G}_k$ da tanımlı C^1 sınıfından aşikar olmayan u_k fonksiyonu vardır.

özelliklerine sahip G_k , ($k = 1, 2, \dots$) bölgelerinin bir dizisini içeriyorsa $\ell[u] = 0$ denklemini Ω da nodal salınımlıdır denir.

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \prod_{j=1}^{n-1} \sin \theta_j \\
x_i &= r \cos \theta_{n-i+1} \prod_{j=1}^{n-i} \sin \theta_j \\
x_n &= r \cos \theta_1
\end{aligned}$$

$$(0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta_i \leq \pi, (i = 1, 2, \dots, n-2, 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi))$$

olmak üzere (r, θ) , R^n de hiperküresel koordinatları gösterebilirsin (Yoshida, 2008b).

Özel halde; $n = 2$ için

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin \theta_1 \\
x_2 &= r \cos \theta_1
\end{aligned}$$

kutupsal koordinatları ve $n = 3$ için

$$\begin{aligned}
x_1 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\
x_2 &= r \cos \theta_1 \sin \theta_2 \\
x_3 &= r \cos \theta_1
\end{aligned}$$

küresel koordinatları verdiği görülür.

$x = (r, \theta)$ ve $x = (r, \theta)$ da $\tilde{c}(r, \theta) = c(x)$ olsun ve $(a_{ij}(x))$ matrisinin en büyük $\lambda(x)$ özdeğeri $\tilde{\lambda}(r, \theta)$ ile gösterilsin. $\lambda(x)$ ve $c(x)$ fonksiyonları küresel anlamda aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(r) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r} \lambda(x) dS = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1} \tilde{\lambda}(r, \theta) d\omega, \\
\bar{c}(r) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S_r} c(x) dS = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_1} \tilde{c}(r, \theta) d\omega,
\end{aligned}$$

burada $S_r = \{x \in R^n : |x| = r\}$ $(n-1)$ boyutlu küre ve ω_n da S_1 birim küresinin yüzey alanıdır (Yoshida, 2008).

$n = 2$ ve $n = 3$ özel durumlarında sırasıyla aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(r) &= \frac{1}{\omega_2} \int_{S_r} \lambda(x) dS = \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \tilde{\lambda}(r, \theta) d\omega, \\ \bar{c}(r) &= \frac{1}{\omega_2} \int_{S_r} c(x) dS = \frac{1}{\pi} \int_{S_1} \tilde{c}(r, \theta) d\omega,\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}(r) &= \frac{1}{\omega_3 r^2} \int_{S_r} \lambda(x) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \tilde{\lambda}(r, \theta) d\omega, \\ \bar{c}(r) &= \frac{1}{\omega_3 r^2} \int_{S_r} c(x) dS = \frac{1}{4\pi} \int_{S_1} \tilde{c}(r, \theta) d\omega.\end{aligned}$$

Teorem 2.13

$$(r^{n-1} \bar{\lambda}(r) y')' + r^{n-1} \bar{c}(r) y = 0 \quad (26)$$

diferensiyel denklemi salınımlı ise (25) denklemi R^n de nodal salınımlıdır denir.

Teoremin ispatı (Yoshida, 2008b) de ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Not.

Burada $n = 2$ durumu göz önünde bulunduralım. $y(r)$, (26) denkleminin bir çözümü olmak üzere, $u(x) = y(|x|)$,

$$\Delta u + \bar{c}(|x|)u = 0$$

denkleminin bir radial simetrik çözümüdür. Bu durumda (26) denklemi salınımlı ise (25) denklemi R^n de *nodal salınımlıdır* denir.

Sonuç 2.3

$$\int_{R^2} c(x) dx = \infty$$

olsun. Bu durumda

$$\Delta u + c(x)u = 0$$

denklemini R^2 de nodal salınımlıdır denir.

(R^2 de teoremin ispatı için (Yoshida, 2008b), R^n de ispatı için (Glazman, 1965) çalışmalarına bakılabilir.)

Tanım 2.5

Eğer (25) denklemini Ω da nodal salınımlı değilse, (25) denklemini *nodal salınımsız* denklem denir.

(25) denkleminin ve yüksek mertebeden eliptik denklemlerin nodal salınımlılığı ya da salınımsızlığına ilişkin pek sonuç ile literatürde karşılaşmak mümkündür. Başlıca karşılaşılabilecek çalışmalara örnek olarak için gerek ve yeter şart ile ilgili çalışmalar Kuks (Kuks, 1962) tarafından verilmiştir. Ayrıca yüksek mertebeden eliptik denklemlerin nodal salınımlılığı ile ilgili diğer çalışmalara (Headly, 1969; Noussair, 1971; Noussair, 1975) ve yüksek mertebeden eliptik denklemlerin nodal salınımsızlığı ile ilgili çalışmalara da (Allegretto, 1976; Allegretto, 1977a; Allegretto 1977b, Headly, 1986; Headly, 1989; Noussair and Yoshida, 1975; Yoshida, 1976) çalışmaları örnek olarak verilebilir.

Half-lineer denklemler için de salınımlılık ile ilgili benzer tanımlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Ω , $r_0 > 0$ için $\Omega \supset \{x \in R^n : |x| \geq r_0\}$ özelliğine sahip R^n de bir dış bölge olsun. $A(x) \in C(\Omega, (0, \infty))$ ve $C(x) \in C(\Omega, R)$ olmak üzere

$$P_\alpha(u) = \nabla \cdot (A(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u) + C(x)|u|^{\alpha-1}u = 0 \quad (27)$$

denklemini göz önünde bulundursun. P_α nın $D_{P_\alpha}(\Omega)$ bölgesi, $A(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u \in C^1(\Omega, R^n)$ özelliğine sahip tüm $u \in C^1(\Omega, R)$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlıdır.

$$\Omega_r = \Omega \cap \{x \in R^n : |x| > r\}$$

olmak üzere, keyfi bir $r > 0$ için, (27) denkleminin bir $u \in C^1(\Omega, R)$ çözümü Ω_r de bir sifıra sahipse, o zaman $u \in C^1(\Omega, R)$ çözümü *salınımlı*dır denir.

$$(r^{n-1}\bar{A}(r)|y'|^{\alpha-1}y')' + r^{n-1}\bar{C}(r)|y|^{\alpha-1}y = 0 \quad (28)$$

half-lineer diferensiyel denkleminin bir çözümü $y(r)$ olsun. Bu durumda $r = |x|$ olmak üzere $u(x) = y(|x|)$ ile tanımlı simetrik dairesel (radyal) fonksiyon aşağıdaki denklemin bir çözümüdür:

$$\nabla \cdot (\bar{A}(|x|)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u) + \bar{C}(|x|)|u|^{\alpha-1}u = 0.$$

$\bar{A}(|x|)$ ve $\bar{C}(|x|)$ fonksiyonları daha önce tanımlandığı gibi $A(x)$ ve $C(x)$ fonksiyonlarının küresel anlamdaki ifadeleridir (Yoshida, 2008b).

Teorem 2.14 (Yoshida, 2008b) *Eğer (28) half-lineer denklemi salınımlı ise (27) half-lineer eliptik denklemin her $u \in D_{P_\alpha}$ çözümü de Ω da salınımlıdır.*

Tanım 2.6

$\Omega \subset R^n$ açık bir küme olsun. $1 \leq p < \infty$ ve f Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar olmak üzere

$$L^p(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow R : \int_{\Omega} |f|^p dx < \infty\}$$

olarak tanımlı uzaya L^p **Uzayı** denir ve bu uzay

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır (Lebedev et. al., 2003).

2.6 Zayıf Türev Kavramı ve Sobolev Uzayı

Analizden bilinen aşağıdaki türev tanımı;

$$u'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

türevin "lokal" tanımı olarak bilinir ve $u'(x)$ sürekli olduğunda u lokal integrallenebilirdir denir.

$$\partial_j u = \frac{\partial u}{\partial x_j}, \text{ ve}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \partial^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

özelliklerine sahip çoklu indeks (multi-indeks) olsun. $\Omega \subset R^n$ açık bağlantılı bölge, $\bar{\Omega}$ ve $\partial\Omega$, sırasıyla Ω nın kapanışı ve sınırı olsun.

Tanım 2.7

u , Ω da lokal integrallenebilir olsun. Her $\phi \in C_0^{|\alpha|(\Omega)}$ fonksiyonu için,

$$\int_{\Omega} v \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u (\partial^\alpha \phi) dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, v lokal integrallenebilir fonksiyonuna u nun α – inci zayıf türevi denir ve $v = D^\alpha u$ ile gösterilir (Evans, 1998).

Tanım 2.8

Her $|\alpha| < k$ için $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ olmak üzere k defa zayıf türevelere sahip u fonksiyonlarını içeren uzaya Sobolev uzayı denir ve genellikle k türevlenebilme, p de integrallenebilme sayısı olmak üzere Sobolev uzayı $W^{k,p}(\Omega)$ ile gösterilir.

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev uzayları,

$$\|u\|_{p,k;\Omega} := \left(\int_{\Omega} \sum_{|\alpha| < k} |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

normu ile tanımlı Banach uzaylarıdır. $W^{0,p}(\Omega)$ uzayının $L^p(\Omega)$ uzayı olduğu görülebilir. $p = 2$ durumunda da $H^{k,2}(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ notasyonu kullanılır (Evans, 1998).

2.7 Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümün bu kısmında ileride birer araç olarak kullanılacak önemli bazı eşitsizlikler hatırlatılacaktır (Kreyszig, 1978).

Young Eşitsizliği

$p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. α ve β lar pozitif reel sayılar olmak üzere

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

dir.

Hölder eşitsizliği

$1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\forall f, g \in L_p$ fonksiyonları olsun,

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

Minkowski eşitsizliği

$1 \leq p < \infty$ ve $\forall f, g \in L_p$ fonksiyonları olsun, bu durumda

$$\left(\int_a^b |f(x) + g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Lemma 2.1

$$|\xi|^{\alpha+1} + \alpha|\eta|^{\alpha+1} - (\alpha+1)|\eta|^{\alpha-1}\xi \cdot \eta \geq 0$$

eşitsizliği herhangi $\xi \in R^n$ ve $\eta \in R^n$ için geçerlidir, eşitlik $\xi = \eta$ durumunda elde edilir (Hardy, 1988; Kusano et al., 2000).

3 BAZI KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLER İÇİN LİTERATÜRDE VERİLEN STURM- TİPİ TEOREMLER

Literatüre bakıldığında diferensiyel denklemler için verilmiş Sturm teoremlerinin bazı özel tipten kısmi türevli denklemlere genişletildiği görülür. Örneğin eliptik tipten kısmi türevli denklemler için Sturm karşılaştırma teoremleri ile ilgili bir çok çalışma vardır (Allegretto and Huang, 1998, 1999; Allegretto, 2000; Bognár and Došlý, 2003; Dunninger, 1995; Jaroš et al., 2002; Kreith, 1973, 1975; Swanson, 1966, 1968; Yoshida, 2003, 2005, 2008b).

Özellikle Dunninger 'in bu konu ile ilgili ilk çalışma olarak kabul edilen çalışması pek çok çalışmaya bir temel oluşturmuştur (Dunninger, 1995).

1995 de Dunninger aşağıdaki half-lineer operatörleri ele aldı:

$$p_\alpha(u) := \nabla \cdot (a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u) + c(x)|u|^{\alpha-1}u, \quad (29)$$

$$P_\alpha(u) := \nabla \cdot (A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v) + C(x)|v|^{\alpha-1}v, \quad (30)$$

burada $\cdot$ skaler çarpım, $\alpha > 0$ bir sabit ve $|\cdot|$ Öklid uzunluğudur. G , R^n de sınırlı bir bölge ve ∂G sınırı parçalı düzgündür. Ayrıca katsayı fonksiyonları $a(x)$, $A(x) \in C(\bar{G}; (0, \infty))$, $c(x)$, $C(x) \in C(\bar{G}; R)$ sınıflarına ait olarak kabul edilmiştir.

p_α nın $D_{p_\alpha}(G)$ bölgesi $C^1(\bar{G}; R)$ sınıfından ve $a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u \in C^1(G; R^n) \cap C(\bar{G}; R^n)$ özelliğini sağlayan tüm u fonksiyonlarının bir kümesi olarak tanımlıdır. P_α nın $D_{P_\alpha}(G)$ bölgesi de benzer şekilde tanımlıdır.

Diferensiyel denklemlerde olduğu gibi, Picone özdeşliği veya Picone tipli eşitsizlikler, kısmi türevli denklemlerde özellikle karşılaştırma teoremlerinin ifade edilmesinde son derece önemli bir araçtır. Bunun için aşağıda, (29) ve (30) operatörler için Sturm karşılaştırma teoremleri, bir Picone tipli özdeşlik ile birlikte ele alınacaktır.

Teorem 3.1 (Picone Özdeşliği) (Dunninger, 1995) $u \in D_{p_\alpha}(G)$, $v \in D_{P_\alpha}(G)$ ve G de $v \neq 0$ olsun bu durumda literatürde Picone özdeşliği olarak bilinen aşağıdaki özdeşlik sağlanır:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u - \varphi(u)A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v] \right) \\ = (a(x) - A(x))|\nabla u|^{\alpha+1} + (C(x) - c(x))|u|^{\alpha+1} \\ + A(x) \left[|\nabla u|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha-1} (\nabla v) \cdot \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \\ + \frac{u}{\varphi(v)} (\varphi(v)p_\alpha(u) - \varphi(u)P_\alpha(v)), \end{aligned} \quad (31)$$

burada $\varphi(s) = |s|^{\alpha-1}s$ ($s \in R$) olarak tanımlıdır.

Teorem 3.2 (Sturm-tipi Karşılaştırma Teoremi) (Dunninger, 1995) $u \in D_{p_\alpha}(G)$, $p_\alpha(u) = 0$ denkleminin ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşık ar olmayan bir çözümü olsun.

$$V(u) := \int_G [(a(x) - A(x))|\nabla u|^{\alpha+1} + (C(x) - c(x))|u|^{\alpha+1}] dx \geq 0 \quad (32)$$

ise, $P_\alpha(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü $\bar{G}$ de bir sifıra sahiptir.

Teorem 3.3 (Kusano et. al, 2000) $\partial G \in C^1$ ve ∂G sınırında $u = 0$ özelliğine sahip aşık ar olmayan bir $u \in C^1(\bar{G}; R)$ fonksiyonu olsun.

$$M_\alpha[u] := \int_G [A(x)|\nabla u|^{\alpha+1} - C(x)|u|^{\alpha+1}] dx \leq 0,$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $P_\alpha(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü ya G de bir sifıra sahiptir ya da v, u nin bir katıdır.

Sonuç 3.1 (Sturm-tipi Karşılaştırma Teoremi) (Kusano et. al, 2000) $\partial G \in C^1$ olsun. ∂G de $u = 0$ olacak şekilde $p_\alpha(u) = 0$ denkleminin aşık ar olmayan bir $u \in D_{p_\alpha}(G)$ çözümü varsa ve (32) sağlanıyorsa, $P_\alpha(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü v, u nun sabit bir katı olmadıkça, G de bir sifıra sahiptir.

Uyarı. Teorem 3.3 de $M_\alpha[u] < 0$ durumunda (ya da Sonuç 3.1 deki $V_\alpha[u] > 0$ durumunda) $P_\alpha(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü G de bir sifra sahiptir (Yoshida, 2008).

Bu çalışmanın devamında Kusano et. al., R^n de $r_0 > 0$ olmak üzere $\Omega \supset \{x \in R^n; |x| \geq r_0\}$ özelliğine sahip bir Ω dış bölgesinde $P_\alpha(v) = 0$ denklemi için salınımlılık ile ilgili sonuçlar elde ettiler (Kusano et. al., 2000).

2002 yılında Došlý,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(x)|u|^{\alpha-1}u = 0$$

şeklinde verilen half-linear eliptik-tipi karşılaştırma teoremleri ile salınımlılık ile ilgili sonuçlar verdi (Došlý, 2002).

2003'de Bognár and Došlý, bu çalışmayı

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(x)|u|^{\alpha-1}u = 0$$

formundaki daha genel bir denkleme genişlettiler ve aşağıda tanımlanan half lineer eliptik denklemler için Sturm karşılaştırma teoremlerini verdiler (Bognár and Došlý, 2003):

$$p_\alpha^*(u) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_i(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + c(x)|u|^{\alpha-1}u = 0$$

$$P_\alpha^*(v) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i(x) \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) + C(x)|v|^{\alpha-1}v = 0$$

burada $\alpha > 0$ bir sabittir. G , R^n de sınırlı bir bölge ve sınırı ∂G de parçalı düzgün ve $a_i(x)$, $A_i(x) \in C(\bar{G}; (0, \infty))$, ($i = 1, 2, \dots, n$) ve $c(x)$, $C(x) \in C(\bar{G}; R)$ olsun. p_α^* nın $D_{p_\alpha^*}(G)$ bölgesi $a_i(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^1(G; R) \cap C(\bar{G}; R)$ ($i =$

$1, 2, \dots, n$) özelliğini sağlayan $C^1(\bar{G}; R)$ sınıfından tüm u fonksiyonlarının bir kümesidir. v nin $D_{P_\alpha^*}(G)$ bölgesi de benzer şekilde tanımlıdır.

Teorem 3.4 (*Sturm-tipi Karşılaştırma Teoremi*) (Bognár and Došlý, 2003) $p_\alpha^*(u) = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir $u \in D_{P_\alpha^*}(G)$ çözümü olsun ve ∂G sınırında $u = 0$ olsun.

$$\int_G \left[\sum_{i=1}^n (a_i(x) - A_i(x)) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha+1} + (C(x) - c(x)) |u|^{\alpha+1} \right] dx \geq 0,$$

sağlanıyorsa, $P_\alpha^*(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha^*}(G)$ çözümü $\bar{G}$ de bir sıfıra sahiptir.

Teorem 3.5 (Bognár and Došlý, 2003; Yoshida, 2008b) $\partial G \in C^1$ olsun. ∂G da $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in C^1(\bar{G}; R)$ fonksiyonu varsa ve

$$\int_G \left[\sum_{i=1}^n A_i(x) \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{\alpha+1} - C(x) |u|^{\alpha+1} \right] dx \leq 0,$$

sağlanıyorsa, $P_\alpha^*(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha^*}(G)$ çözümü, v, u nun bir katı olmadıkça G de bir sıfıra sahiptir.

Bilindiği gibi fiziksel problemlerin matematiksel modellerinde geniş yer tutan sönümlü terim içeren half-lineer eliptik denklemler de araştırmacılar tarafından ele alınan önemli problemlerdendir. Örneğin,

$$P_\alpha(u) = \nabla \cdot (A(x) |\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u) + (\alpha + 1) |\nabla u|^{\alpha-1} B(x) \cdot \nabla u + C(x) |u|^{\alpha-1} u$$

half-lineer operatörünü göz önünde bulunduralım. Burada

$(\alpha + 1) |\nabla u|^{\alpha-1} B(x) \cdot \nabla u$ terimi *sönümlü terim* olarak adlandırılır. G, R^n de sınırlı bir bölge, ∂G sınırı da parçalı düzgün olsun. $\alpha > 0$ olmak üzere, $A(x) \in C(\bar{G}, (0, \infty))$, $B(x) \in C(\bar{G}, R^n)$ ve $C(x) \in C(\bar{G}, R)$ dir (Yoshida, 2003, 2008b).

P_α yukarıdaki gibi tanımlı operatör olmak üzere, bu operatör ile ilgili pek çok araştırma vardır. Araştırmacılar, $P_\alpha(u) = 0$ denkleminin ve bu denklemin özel hallerinin salınımlılığını Picone tipli özdeşlikler ya da eşitsizlikler yardımıyla ele aldılar (Jaroš et. al., 2002, Yoshida, 2008b).

Son yıllarda bu çalışmaların yanı sıra zorlanmış (forced) terimli diferensiyel denklemler ve onların salınımlılıkları ile ilgili konular da araştırmacıların oldukça ilgisini çekmektedir. Yoshida, ikinci mertebeden, zorlanmış terimli eliptik denklemlerin salınımlılıkları üzerine bir makale yayımladı (Yoshida, 2010). Salınımlılık ile ilgili sonuçları Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri ile verdi ve bu teoremleri vermek için Picone tipli özdeşlikler ve eşitsizliklerden faydalandı. Zorlanmış terim içeren half-lineer eliptik denklemlerin salınımlılığı ile ilgili (Jaroš et al., 2001; Jaroš et al., 2006; Yoshida, 2010) makaleler ve bu makalelerde referans gösterilmiş çalışmalar incelenebilir.

2002 yılında Jaroš et al.,

$$\nabla \cdot (A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v) + C(x)|v|^{\beta-1}v = f(x), \quad (\beta > \alpha > 0) \quad (33)$$

şeklinde verilen süper lineer zorlanmış terim içeren eliptik denklem için Picone tipli özdeşlikleri genelleştirerek, bu özdeşliğe dayalı salınımlılık sonuçları elde ettiler (Jaroš and Kusano, 1997; Jaroš et al., 2002, Yosahida, 2008b, 2010a, 2010b).

Hem zorlanmış terim içeren hem de sönümlü terim içeren denklemler için de benzer sonuçlar elde edilebilir mi sorusuna cevap bulmak amacıyla Yoshida, $\beta > \alpha > 0$ olmak üzere,

$$\nabla \cdot (A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v) + (\alpha + 1)|\nabla v|^{\alpha-1}B(x) \cdot \nabla v + C(x)|v|^{\beta-1}v = f(x), \quad (34)$$

denklemini ele aldı. Bu denklemi ile ilgili bir Picone tipli eşitsizlik elde ederek, denklemin salınımlılığı ile ilgili sonuçlar elde etti (Yoshida, 2006). Daha sonra bu çalışmasını daha genel tipten denklemler için genişletti (Yoshida, 2007, 2008b). Bu çalışmanın ardından, Yoshida, bu çalışmaları sönümlü terim içeren daha genel denklemleri ele alarak genişletti (Yoshida 2006).

4 BELLİ TIPTEN KİSMİ TÜREVİLİ DENKLEMLER İÇİN STURM-TİPİ KARŞILAŞTIRMA TEOREMLERİ

Bu bölümde, sönümlü terim içeren ya da hem sönümlü hem de zorlanmış terim içeren eliptik tipten özel yapılı denklemler için amaca uygun Picone tipli eşitsizlikler elde edilerek, Sturm-tipi sonuçlar verilecektir. Verilen tüm bu sonuçlar özgündür.

4.1 Sönümlü Terim İçeren Kısmi Türevli Denklemler İçin Sturm-Tipi Karşılaştırma Teoremleri

Üçüncü bölümde de belirtildiği gibi sönümlü terim içeren denklemler ve bu denklemlerin bazı özel halleri için salınımlılıkları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir. Ancak literatüre bakıldığında bu tür çalışmaların oldukça az olduğu sonucu ile karşılaşılır. Ayrıca mevcut literatürde yapılmış olan araştırmalarda sönümlü terim içeren denklemler ile ilgili karşılaştırma teoremlerinin ele alındığı çalışmaların da az olduğu gözlemlenmiştir.

Bu bölümde bu düşünceden hareket ile sönümlü terim içeren denklemler için karşılaştırma teoremleri inşaa edilecektir.

$$p^*(u) := \nabla \cdot (a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u) + (\alpha + 1)|\nabla u|^{\alpha-1}b(x) \cdot \nabla u + c(x)|u|^{\alpha-1}u \quad (35)$$

$$P^*(v) := \nabla \cdot (A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v) + (\alpha + 1)|\nabla v|^{\alpha-1}B(x) \cdot \nabla v + g(x, v) \quad (36)$$

ve

$$g(x, v) = C(x)|v|^{\alpha-1}v + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-1}v + \sum_{j=1}^m E_j(x)|v|^{\gamma_j-1}v, \quad (37)$$

$|\cdot|$ Öklid uzunluğudur, $\alpha > 0$ sabittir, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T$, (burada T transpozdur) ve $\beta_i > \alpha > \gamma_j > 0$, ($i = 1, 2, \dots, \ell$; $j = 1, 2, \dots, m$) olarak kabul edilmiştir.

G , R^n 'de sınırlı bir bölge ve bu bölgede diverjans teoremi geçerli olsun. $a(x) \in C(\bar{G}, R^+)$, $A(x) \in C(\bar{G}, R^+)$, $b(x) \in C(\bar{G}, R^n)$, $B(x) \in C(\bar{G}, R^n)$, $c(x) \in C(\bar{G}, R)$, $C(x) \in C(\bar{G}, R)$, $D_i(x) \in C(\bar{G}, [0, \infty))$, $E_j(x) \in C(\bar{G}, [0, \infty))$, ($i = 1, 2, \dots, \ell$; $j = 1, 2, \dots, m$) olsun.

p^* operatörünün $\mathcal{D}_{p^*}(G)$ bölgesini, $C^1(\bar{G}, R)$ sınıfından, $a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u \in C^1(G, R^n) \cap C(\bar{G}, R^n)$ özelliğine sahip tüm u fonksiyonlarının kümesi ile tanımlayalım. P^* operatörünün $\mathcal{D}_{P^*}(G)$ bölgesi de benzer şekilde tanımlıdır.

$N = \min\{\ell, m\}$ olsun,

$$H(\beta, \alpha, \gamma; D(x), E(x)) := \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \gamma} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}} (D(x))^{\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}} (E(x))^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}}.$$

olacak şekilde,

$$C_1(x) := C(x) + \sum_{i=1}^N H(\beta_i, \alpha, \gamma_i; D_i(x), E_i(x)) \quad (38)$$

tanımlansın.

Lemma 4.1 (*Yoshida, 2008b*). $F(x) \in C(G, R^+)$ ve $F(x) > \alpha > 0$ olsun. Bu durumda, keyfi $u \in C^1(G, R)$ skaler fonksiyonu ve $w \in C(G, R^n)$ vektör fonksiyonu için

$$|\nabla u - uw(x)|^{\alpha+1} \leq \frac{F(x)}{F(x) - \alpha} |\nabla u|^{\alpha+1} + \frac{|F(x)w(x)|^{\alpha+1}}{F(x) - \alpha} |u|^{\alpha+1}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.1.1 Picone tipli eşitsizlikler

Teorem 4.1 (*Picone tipli eşitsizlik*) $F(x) \in C(G, R^+)$ ve $F(x) > \alpha$ olsun. $u \in \mathcal{D}_{p^*}(G)$, $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ ve G 'de $v \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u - \varphi(u)A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v] \right) \\
& \geq \left(a(x) - \alpha|b(x)| - A(x) \frac{F(x)}{F(x) - \alpha} \right) |\nabla u|^{\alpha+1} \\
& + \left(C_1(x) - c(x) - |b(x)| - A(x) \frac{\left| F(x) \frac{B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1}}{F(x) - \alpha} \right) |u|^{\alpha+1} \\
& + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \\
& + \frac{u}{\varphi(v)} (\varphi(v)p^*(u) - \varphi(u)P^*(v)),
\end{aligned} \tag{39}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\varphi(s) = |s|^{\alpha-1}s$, $s \in R$, $\Phi(\xi) = |\xi|^{\alpha-1}\xi$, $\xi \in R^n$ ve C_1 , (38) ile tanımlandığı gibidir.

Bundan sonra (39) eşitsizliği Picone tipli eşitsizlik olarak adlandırılacaktır.

İspat.

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot (ua(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u) = a(x)|\nabla u|^{\alpha+1} - c(x)|u|^{\alpha+1} \\
& + up^*(u) - (\alpha+1)ub(x) \cdot \Phi(\nabla u)
\end{aligned} \tag{40}$$

dir. Amaca uygun cebirsel işlemler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& -\nabla \cdot \left(u\varphi(u) \frac{A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v}{\varphi(v)} \right) \\
& = -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \\
& + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \\
& + \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} g(x, v) - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} P^*(v)
\end{aligned} \tag{41}$$

elde edilir. (40) ile (41) birlikte değerlendirilirse:

$$\begin{aligned}
& \nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u - \varphi(u)A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v] \right) \\
&= a(x)|\nabla u|^{\alpha+1} - c(x)|u|^{\alpha+1} \\
&\quad - (\alpha+1)ub(x) \cdot \Phi(\nabla u) - A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \\
&\quad + \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)}g(x,v) + \frac{u}{\varphi(v)}[\varphi(v)p^*(u) - \varphi(u)P^*(v)] \\
&\quad + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v}\nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi\left(\frac{u}{v}\nabla v\right) \right]
\end{aligned} \tag{42}$$

sonucuna varılır. Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)}g(x,v) &\geq C(x)|u|^{\alpha+1} + \left(\sum_{i=1}^N H(\beta_i, \alpha, \gamma_i; D_i(x), E_i(x)) \right) |u|^{\alpha+1} \\
&= C_1(x)|u|^{\alpha+1}
\end{aligned} \tag{43}$$

ve

$$(\alpha+1)ub(x) \cdot \Phi(\nabla u) \leq |b(x)| (|u|^{\alpha+1} + \alpha|\nabla u|^{\alpha+1}) \tag{44}$$

elde edilir. Burada Lemma 4.1 göz önünde bulundurulursa,

$$\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \leq \frac{F(x)}{F(x) - \alpha} |\nabla u|^{\alpha+1} + \frac{\left| F(x) \frac{B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1}}{F(x) - \alpha} |u|^{\alpha+1} \tag{45}$$

bulunur. (43)-(45) ile (42) birlikte değerlendirilirse, gösterilmek istenen Picone tipli (39) eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2 $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ olsun ve G 'de $v \neq 0$ koşulu sağlansın, bu durumda keyfi bir $u \in C^1(G, R)$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \left(\frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} A(x) |\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v \right) &\geq -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \\
&+ C_1(x) |u|^{\alpha+1} - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} P^*(v) \\
&+ A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\
&- (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \left. \right]
\end{aligned} \tag{46}$$

burada $\varphi(s)$, $\Phi(\xi)$ ve $C_1(x)$ daha önce Teorem 4.1de tanımlandığı gibidir.

İspat. (41) ile (43) birlikte değerlendirilirse (46) eşitsizliği doğrudan elde edilir.

4.1.2 Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri

Teorem 4.3 (*Sturm-tipi karşılaştırma teoremi*) $F(x) \in C(G, R^+)$ ve $F(x) > \alpha$ koşulu sağlansın. Eğer, ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde $p^*(u) = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir $u \in \mathcal{D}_{p^*}(G)$ çözümü varsa ve

$$\begin{aligned}
V^*(u) &:= \int_G \left(a(x) - \alpha |b(x)| - A(x) \frac{F(x)}{F(x) - \alpha} \right) |\nabla u|^{\alpha+1} \\
&+ \left(C_1(x) - c(x) - |b(x)| - A(x) \frac{\left| F(x) \frac{B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1}}{F(x) - \alpha} \right) |u|^{\alpha+1} dx \geq 0
\end{aligned} \tag{47}$$

koşulu sağlanıyorsa, $P_*(v) = 0$ denkleminin her $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sıfıra sahiptir.

İspat. Olmayana ergi yöntemi kullanılarak $P^*(v) = 0$ 'ın $\bar{G}$ 'de $v \neq 0$ koşulunu sağlayan bir $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ fonksiyonu olsun. (39) eşitsizliğinin G üzerinde her iki tarafının integrali alınrsa ve ardından diverjans teoremi

uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
0 \geq V^*(u) + \int_G A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\
\left. - (\alpha + 1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] dx \\
\geq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. (47) ve Lemma 2.1 göz önünde bulundurulduğunda

$$\begin{aligned}
0 \geq \int_G A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\
\left. - (\alpha + 1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] dx \geq 0
\end{aligned} \tag{48}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_G A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\
\left. - (\alpha + 1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] dx = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

sonucuna varılır. $A, \bar{G}$ de pozitif olduğundan bu eşitsizliği sağlayan integrand sifıra eşit olmalıdır. Lemma 2.1 göz önünde bulundurulursa, G de

$$\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \equiv \frac{u}{v} \nabla v$$

veya

$$\nabla \left(\frac{u}{v} \right) - \frac{B(x)}{A(x)} \frac{u}{v} \equiv 0 \tag{50}$$

olduğu görülür. C_0 bir sabit ve $\nabla \alpha(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ olmak üzere $\bar{G}$ 'de

$$\frac{u}{v} = C_0 e^{\alpha(x)} \tag{51}$$

elde edilir (Jaroš et. al., 2006). ∂G 'de $u = 0$ olduğu için $C_0 = 0$ 'dır, bu da u 'nın aşikar olmasıyla çelişir, böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1 $F(x) \in C(G, R^+)$ olsun ve $F(x) > \alpha$ koşulu sağlansın ve G 'de

$$a(x) \geq \alpha|b(x)| + A(x) \frac{F(x)}{F(x) - \alpha} \quad (52)$$

ve

$$C_1(x) \geq c(x) + |b(x)| + A(x) \frac{\left| F(x) \frac{B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1}}{F(x) - \alpha} \quad (53)$$

olsun. Eğer, ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde $p^*(u) = 0$ denkleminin aşikar olmayan bir $u \in \mathcal{D}_{p^*}(G)$ çözümü varsa, $P^*(v) = 0$ denkleminin her $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir.

Teorem 4.4 G bölgesinin ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in C^1(\bar{G}, R)$ fonksiyonu olsun. Eğer

$$M^*(u) := \int_G \left\{ A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - C_1(x)|u|^{\alpha+1} \right\} dx \leq 0 \quad (54)$$

koşulu sağlanıyorsa, $P^*(v) = 0$ denkleminin her $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ çözümü aşağıdaki özelliklerden birine sahiptir:

i) v , G de bir sifıra sahiptir,

ii) $C_0 \neq 0$ bir sabit ve $\nabla \alpha(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ olmak üzere, $u = C_0 e^{\alpha(x)} v$ dir.

İspat. $P^*(v) = 0$ denkleminin $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ çözümü G 'de $v \neq 0$ olsun. $\partial G \in C^1$, $u \in C^1(\bar{G}, R)$ ve ∂G 'de $u = 0$ olduğundan u , $W_0^{1, \alpha+1}(G)$ Sobolev uzayının bir elemanıdır. Bu Sobolev uzayı kompakt destekleri G de olan her mertebeden türevlenebilir $C_0^\infty(G)$ sınıfının

$$\|w\| := \left(\int_G [|w|^{\alpha+1} + |\nabla w|^{\alpha+1}] dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \quad (55)$$

normuna göre kapanışıdır (Adams, 2003; Evans, 1998). Bu durumda (55) ile tanımlı norma göre u 'ya yakınsayan bir $u_k \in C_0^\infty(G)$ dizisi vardır. Diverjans teoremini uygulayarak

$$\begin{aligned}
M^*(u_k) &\geq \\
&\int_G A(x) \left[\left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u_k}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\
&\quad \left. - (\alpha+1) \left(\nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u_k}{v} \nabla v \right) \right] dx \\
&\geq 0.
\end{aligned} \tag{56}$$

olur. A , C , D ve E fonksiyonları $\bar{G}$ 'de sınırlı olduklarından,

$$A(x) \leq K_1 \text{ ve } |C_1(x)| \leq K_1 \tag{57}$$

olacak şekilde bir $K_1 > 0$ sabiti vardır. Bu durum göz önünde bulundurularak

$$\begin{aligned}
|M^*(u_k) - M^*(u)| &\leq K_1 \int_G \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| dx \\
&\quad + K_1 \int_G ||u_k|^{\alpha+1} - |u|^{\alpha+1}| dx. \tag{58}
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Ortalama değer teoreminden

$$\begin{aligned}
&\left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| \\
&\leq (\alpha+1) \left(\left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right| + \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right| \right)^\alpha \\
&\quad \times \left| \nabla(u_k - u) + \frac{B(x)}{A(x)}(u_k - u) \right| \\
&\leq (\alpha+1) \left(|\nabla u_k| + |\nabla u| + \frac{|B(x)|}{A(x)}|u_k| + \frac{|B(x)|}{A(x)}|u| \right)^\alpha \\
&\quad \times \left(|\nabla(u_k - u)| + \frac{|B(x)|}{A(x)}|u_k - u| \right). \tag{59}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\bar{G}$ 'de $B(x)$ sınırlı olduğundan, $\bar{G}$ 'de $\frac{|B(x)|}{A(x)} \leq K_2$ olacak şekilde bir K_2 sabiti vardır. $K_3 = \max\{1, K_2\}$ olsun. (59) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| \\ & \leq (\alpha + 1) K_3^{\alpha+1} (|\nabla u_k| + |\nabla u| + |u_k| + |u|)^\alpha \\ & \quad \times (|\nabla(u_k - u)| + |u_k - u|). \end{aligned} \quad (60)$$

bulunur. (60) eşitsizliğe Hölder eşitsizliği uygulanılarak

$$\begin{aligned} & \int_G \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| dx \\ & \leq (\alpha + 1) K_3^{\alpha+1} \left(\int_G (|\nabla u_k| + |\nabla u| + |u_k| + |u|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \\ & \quad \times \left(\int_G (|\nabla(u_k - u)| + |u_k - u|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\ & \leq (\alpha + 1) K_3^{\alpha+1} \|u_k - u\| (\|u_k\| + \|u\|)^\alpha \end{aligned} \quad (61)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\int_G ||u_k|^{\alpha+1} - |u|^{\alpha+1}| dx \leq (\alpha + 1) (\|u_k\| + \|u\|)^\alpha \|u_k - u\| \quad (62)$$

olduğu görülür. $K_4 = K_4(K_1, K_2, K_3)$ olmak üzere (58), (61) ve (62) birlikte değerlendirilir ise,

$$|M^*(u_k) - M^*(u)| \leq K_4 (\|u_k\| + \|u\|)^\alpha \|u_k - u\| \quad (63)$$

yazılabilir. (63) ifadesine limit işlemi uygulandığında $\lim_{k \rightarrow +\infty} M^*(u_k) = M^*(u)$ elde edilir. (54) ve (56) birlikte değerlendirildiğinde $M^*(u) = 0$ olarak bulunur.

$\bar{\mathcal{B}} \subset G$ olacak şekilde $\mathcal{B}$ keyfi bir küre olsun ve $w \in C^1(G, R)$ olmak üzere,

$$Q_{\mathcal{B}}(w) := \int_{\mathcal{B}} A(x) \left[\left| \nabla w - \frac{wB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{w}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left(\nabla w - \frac{wB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{w}{v} \nabla v \right) \right] dx \quad (64)$$

olarak tanımlansın. $Q_G(u_k)$, (64) integralinde $\mathcal{B}$ yerine G ve $w = u_k$ alınarak elde edilebileceğinden,

$$0 \leq Q_{\mathcal{B}}(u_k) \leq Q_G(u_k) \leq M^*(u_k), \quad (65)$$

olduğu görülür. Burada $Q_G(u_k)$, (64) integralinde $\mathcal{B}$ yerine G ve $w = u_k$ alınarak elde edilen sağ taraftır.

Bazı cebirsel işlemler uygulanırsa, $q = \frac{\alpha+1}{\alpha}$, k dan bağımsız K_5 , K_6 ve K_7 sabitler ve $\mathcal{B}$ alt indisli norm, (55) normunda integralin G yerine $\mathcal{B}$ üzerinde alınması ile elde edilmiş norm olmak üzere ve $\varphi : L^{\alpha+1}(G) \rightarrow L^q(G)$ sürekli operatörü için (Ambrosetti and Malchiodi, 2007),

$$\begin{aligned} |Q_{\mathcal{B}}(u_k) - Q_{\mathcal{B}}(u)| &\leq K_5 (\|u_k\|_{\mathcal{B}} + \|u\|_{\mathcal{B}})^{\alpha} \|u_k - u\|_{\mathcal{B}} \\ &+ K_6 (\|u_k\|_{\mathcal{B}})^{\alpha} \|u_k - u\|_{\mathcal{B}} + K_7 \|\varphi(u_k) - \varphi(u)\|_{L^q(\mathcal{B})} \|u\|_{\mathcal{B}}, \end{aligned} \quad (66)$$

elde edilir. Burada $\|u_k - u\|_G \rightarrow 0$ iken $\|u_k - u\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ dir. Böylece, (65)'de $k \rightarrow \infty$ limitine geçilirse, $Q_{\mathcal{B}}(u) = 0$ olarak bulunur. $\mathcal{B}$ de $A(x) > 0$ sınırlı olduğundan, $\mathcal{B}$ de

$$\begin{aligned} &\left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ &\left. - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \equiv 0 \end{aligned} \quad (67)$$

olduğu görülür. Lemma 2.1 göz önünde bulundurularak $\mathcal{B}$ de

$$\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \equiv \frac{u}{v} \nabla v \text{ veya } \nabla \left(\frac{u}{v} \right) - \frac{B(x)}{A(x)} \frac{u}{v} \equiv 0$$

elde edilir. Buradan Teorem 4.3 de olduğu gibi C_0 keyfi bir sabit ve $\alpha(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\mathcal{B}$ 'de $\frac{u}{v} = C_0 e^{\alpha(x)}$ olarak bulunur. $\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}} \subset G$ olacak şekilde keyfi bir küre olduğundan bu eşitlik G de de sağlanmış olur. u aşikar olmayan bir fonksiyon olduğundan, $ve^{\alpha(x)}$ in bir katıdır.

Sonuç 4.2 (*Sturm-tipi karşılaştırma teoremi*) $F(x) \in C(G, R^+)$ olsun ve $F(x) > \alpha$ koşulu sağlansın. ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde $p^*(u) = 0$ denkleminin nontrivial bir $u \in \mathcal{D}_{p^*}(G)$ çözümü varsa ve (47) sağlanıyorsa, bu durumda, $u = C_0 e^{\alpha(x)} v$ olmadıkça, $P^*(v) = 0$ denkleminin her $v \in D_{P^*}(G)$ çözümü G 'de bir sifıra sahiptir. Burada G 'de $C_0 \neq 0$ bir sabit ve $\nabla \alpha(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ 'dir.

İspat.

(40), (44), (45), (54) ve Sonuç 4.1 kullanılarak

$$M^*(u) \leq \int_G [\nabla \cdot (ua(x)|\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u)] - up(u) dx = 0.$$

eşitsizliğine varılır. Teorem 4.4 ün hipotezi sağlandığından ispat Teorem 4.4 ile tamamlanır.

4.1.3 Uygulamalar

$\Omega, r_0 > 0$ olmak üzere $\Omega \supset \{x \in R^n : |x| \geq r_0\}$ olacak şekilde R^n 'de bir dış bölge olsun. Ω bölgesinde tanımlı,

$$p^*(u) = 0 \quad (68)$$

$$P^*(v) = 0 \quad (69)$$

denklemlerini göz önünde bulundururalım. p^* ve P^* sırasıyla (35) ve (36) ile tanımlı olup, $a, A \in C(\Omega, R^+)$, $b, B \in C(\Omega, R^n)$, $c, C \in C(\Omega, R)$, $D_i, E_j \in C(\Omega, [0, \infty))$, ($i = 1, 2, \dots, \ell; j = 1, 2, \dots, m$) dir.

$\mathcal{D}_{p^*}(\Omega)$ bölgesi, p^* 'nin $C^1(\Omega, R)$ sınıfından $a(x)|\nabla u|^{\alpha-1}\nabla u \in C^1(\Omega, R^n)$ özelliğini sağlayan tüm u fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlıdır. P^* 'nin $\mathcal{D}_{P^*}(\Omega)$ bölgesi de benzer şekilde tanımlanır.

(68) denkleminin $u \in \mathcal{D}_{p^*}(\Omega)$ çözümü (veya (69) denkleminin $v \in \mathcal{D}_{P^*}(\Omega)$ çözümü) keyfi bir $r > 0$ için

$$\Omega_r = \Omega \cap \{x \in R^n : |x| > r\}$$

olacak şekilde Ω_r 'de bir sıfıra sahipse, Ω 'da *salınımlıdır* denir.

∂G 'de $u = 0$ olmak üzere G 'de $p^*(u) = 0$ olacak şekilde aşıkâr olmayan bir $u \in \mathcal{D}_{p^*}(G)$ fonksiyonu varsa, $\bar{G} \subset \Omega$ olmak üzere G sınırlı bölgesi (68) denklemi için bir nodal bölgedir. Keyfi bir $r > 0$ için (68) denklemi Ω_r 'de bir nodal bölge içeriyorsa, (68) denkleminde *nodal salınımlıdır* denir.

Teorem 4.5 $F(x) > \alpha$ olmak üzere $F(x) \in C(G, R^+)$ olsun. Ω 'da

$$a(x) \geq \alpha|b(x)| + A(x) \frac{F(x)}{F(x) - \alpha} \quad (70)$$

ve

$$C_1(x) \geq c(x) + |b(x)| + A(x) \frac{\left| F(x) \frac{B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1}}{F(x) - \alpha} \quad (71)$$

koşulları sağlansın. (68) denklemi Ω 'da nodal salınımlı ise (69) denkleminin her $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ çözümü Ω 'da salınımlıdır.

İspat. (68) denklemi Ω 'da nodal salınımlı olduğundan, herhangi bir $r > 0$ için $G \subset \Omega_r$ olacak şekilde bir nodal bölgeye sahiptir. Öyleyse $p^*(u) = 0$ denkleminin ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşık olmaya bir $u \in D_{p^*}(G)$ çözümü vardır. (70) ve (71) ile verilen eşitsizlikler göz önüne alınsın, bu durumda $V^*(u) \geq 0$ olduğu görülür. Sonuç 4.1'den (69) denkleminin her $v \in \mathcal{D}_{P^*}(\Omega)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$F(x) = \alpha + 1$, $b(x) \equiv B(x) \equiv 0$ ve $m = 1$ durumunda Teorem 4.5'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3 $\nabla \cdot \left(a(x) |\nabla u|^{\alpha-1} \nabla u \right)$

$$+ \left\{ C(x) + \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \gamma} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}} (D(x))^{\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}} (E(x))^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}} \right\} |u|^{\alpha-1} u = 0 \quad (72)$$

denklemi Ω 'da nodal salınımlı ise, $D_1(x) \equiv D(x)$, $E_1(x) \equiv E(x)$, $\alpha_1 \equiv \alpha$, $\gamma_1 \equiv \gamma$ olmak üzere

$$\nabla \cdot \left(a(x) |\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v \right) + \frac{1}{\alpha + 1} g(x, v) = 0$$

denkleminin her $v \in \mathcal{D}_{P^*}(\Omega)$ çözümü Ω 'da salınımlıdır.

Nodal salınımlılığın ikinci bölümde de verilen sonuçlarından biri kullanılarak (68) denkleminin bir özel durumu için aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.

Sonuç 4.4 *Kabul edelim ki,*

$$i) \int_{R^2} C(x) dx = \infty,$$

$$ii) \int_{R^2} C(x) dx < \infty \text{ ve } \int_{R^2} (D(x))^{\frac{1-\gamma}{\beta-\gamma}} (E(x))^{\frac{\beta-1}{\beta-\gamma}} dx = \infty$$

koşullarından biri sağlansın, $\alpha = 1$, $a(x) \equiv 1$ olmak üzere (68) denklemi Ω 'da nodal salınımlıdır.

Uyarı. $\alpha = 1$, $m = 1$, $a(x) \equiv 1$, $C(x) \equiv 0$ alındığında Sonuç 4.3 ve Sonuç 4.4 ün sırasıyla Sonuç 3 ve Sonuç 4 e (Jaroš et. al, 2001) indirgendiği görülür.

(46) eşitsizliğinden faydalanılarak, $P^*(v) = 0$ lineer olmayan eliptik denklemi için bir eşitsizlik elde edelim. Literatürde bu tip denklemler Wirtinger tipli eşitsizlikler olarak adlandırılır (Hardy, 1988).

Teorem 4.6 $P^*(v) = 0$ denkleminin bir $v \in \mathcal{D}_{P^*}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de $v \neq 0$ ve $\partial G \in C^1$ olsun. Ayrıca ∂G 'de $u = 0$ olacak şekilde $u \in C^1(\bar{G}, R)$ özelliğine sahip bir fonksiyon olsun. Bu durumda denklemin katsayıları ile u fonksiyonu arasında

$$\int_G A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} dx \geq \int_G C_1(x) |u|^{\alpha+1} dx. \quad (73)$$

şeklinde tanımlı Wirtinger tipli eşitsizlik geçerlidir.

Uyarı. $B(x) \equiv 0$ alındığında, $0 \leq M^*(u) = M^*(c_0 v) = 0$ elde edilir, buradan da $M^*(u) = 0$ sonucuna varılır. $B(x) \equiv 0$, $D_i(x) \equiv E_j(x) \equiv 0$, ($i = 1, 2, \dots, \ell$; $j = 1, 2, \dots, m$) alındığında Teorem 4.6 nın (Yoshida, 2009)'daki Sonuç 4.2'yi verdiği görülür.

4.2 Sönümlü Terim ve Zorlanmış Terim İçeren Kısmi Türevli Denklemler İçin Sturm-Tipi Karşılaştırma Teoremleri

İkinci bölümde kısmi türevli lineer denklemlere ilişkin konu ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Lineer denklemler ile ilgili bu konuda yapılan mevcut literatürde pek çok çalışma olmasına rağmen lineer olmayan denklemler için konu ile ilgili yapılan çalışmaların yeterli olmadığı görülmektedir. Ancak

lineer durumda çözümlerin konumu ve davranışlarına ilişkin bilinen sonuçlar göz önüne alınarak lineer olmayan denklemlerin çözümlerinin davranışlarını araştırmak oldukça önemlidir. Bu bağlamda, 2006 yılında Jaroš et. al., özel yapılı bir denklem sınıfı için bu konu ile ilgili sonuçlar elde etmiştir. (Jaroš et. al., 2006). Bu kesimde bu çalışmadan hareketle Jaroš et. al. ın ele aldığı denklem modellerini de kısmen içeren özel yapılı denklemler için karşılaştırma teoremleri üzerinde durulacaktır (Şahiner et. al., 2015).

Eliptik tipten sönümlü terim içeren

$$\ell(u) := \nabla \cdot (a(x)\nabla u) + 2b(x) \cdot \nabla u + c(x)u \quad (74)$$

lineer operatörü ile,

$$P_\alpha(v) := \nabla \cdot (A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v) + (\alpha + 1)|\nabla v|^{\alpha-1}B(x) \cdot \nabla v + g(x, v) \quad (75)$$

$$g(x, v) = C(x)|v|^{\alpha-1}v + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-1}v + \sum_{j=1}^m E_j(x)|v|^{\gamma_j-1}v$$

şeklinde tanımlı lineer olmayan operatörü göz önüne alalım. Burada daha önce verildiği gibi $|\cdot|$, Öklid uzunluğu, $\cdot$ de iç çarpımdır. $\alpha, \beta_i, \gamma_j$ ler $0 < \gamma_j < \alpha < \beta_i$, ($i = 1, 2, \dots, \ell; j = 1, 2, \dots, m$) özelliğine sahip reel sabitlerdir. Bu bölümde

$$\ell(u) = 0$$

$$P_\alpha(v) = f(x)$$

denklemleri için Picone tipli eşitsizlikler yardımıyla Sturm-tipli karşılaştırma teoremleri elde edilecektir.

4.2.1 Picone tipli eşitsizlikler

G, R^n 'de sınırlı bir bölge ∂G sınırı düzgün sınır olsun, yani diverjans teoremi uygulanacak şekilde bir G bölgesi yeterince düzgün olsun. $a(x) \in C(\bar{G}, R^+)$, $A(x) \in C(\bar{G}, R^+)$, $b(x) \in C(\bar{G}, R^n)$, $B(x) \in C(\bar{G}, R^n)$, $c(x) \in C(\bar{G}, R)$, $C(x) \in C(\bar{G}, R)$, $D_i(x) \in C(\bar{G}, R^+ \cup \{0\})$, $E_j(x) \in C(\bar{G}, R^+ \cup \{0\})$, ($i = 1, 2, \dots, \ell; j = 1, 2, \dots, m$) ve $f(x) \in C(\bar{G}, R)$ olsun.

ℓ 'nin $D_\ell(G)$ bölgesi, $C^1(\bar{G}, R)$ sınıfından olan ve $a(x)\nabla u \in C^1(\bar{G}, R^n) \cap C(G, R^n)$ özelliğine sahip tüm u fonksiyonlarının kümesi ve P_α 'nın $D_{P_\alpha}(G)$ bölgesi de $A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v \in C^1(\bar{G}, R^n) \cap C(G, R^n)$ özelliğine sahip tüm v fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlıdır.

$N = \min\{\ell, m\}$ olmak üzere

$$\mathcal{G}_1(\beta, \alpha, D(x), f(x)) = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha - \beta}{\beta}} (D(x))^{\frac{\alpha}{\beta}} |f(x)|^{\frac{\beta - \alpha}{\beta}}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 4.7 (*Picone tipli eşitsizlik*) $u \in D_\ell(G)$ fonksiyonu $\ell(u) = 0$ denkleminin çözümü olsun. $v \in D_{P_\alpha}(G)$ olmak üzere G 'de $v \neq 0$ ve $vf(x) \leq 0$ koşulu sağlansın. Bu durumda bir $u \in C^1(G, R)$ için aşağıdaki Picone tipli eşitsizlik

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)\nabla u - \varphi(u)A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v] \right) \\ & \geq -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + C_1(x)|u|^{\alpha+1} - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [P_\alpha(v) - f(x)] \\ & \quad + (\nabla u)^T (a(x) - |b(x)|)(\nabla u) - (|b(x)| + c(x))(u)^2 \\ & \quad + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ & \quad \left. - (\alpha + 1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \end{aligned} \quad (76)$$

sağlanır. Burada $\varphi(s) = |s|^{\alpha-1}s$, $s \in R$, $\Phi(\xi) = |\xi|^{\alpha-1}\xi$, $\xi \in R^n$ ve

$$C_2(x) = C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_1(\beta_i, \alpha, D_i(x), f(x))$$

dir.

İspat. $\ell(u) = 0$ denkleminden kolaylıkla

$$\nabla \cdot (ua(x)\nabla u) = (\nabla u)^T a(x)(\nabla u) - 2b(x)u \cdot \nabla u - c(x)u^2 \quad (77)$$

olduğu görülür. $p = 2$ için Young eşitsizliği kullanılarak,

$$2ub(x) \cdot \nabla u \leq |b(x)|(u^2 + (\nabla u)^2) \quad (78)$$

yazılabilir. (77) ve (78) ifadeleri birlikte değerlendirilirse,

$$\nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)\nabla u] \right) \geq (\nabla u)^T (a(x) - |b(x)|)(\nabla u) - (|b(x)| + c(x))u^2. \quad (79)$$

bulunur. Diğer yandan aşağıdaki özdeşliğin sağlandığı görülebilir:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left(u\varphi(u) \frac{A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v}{\varphi(v)} \right) &= -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \\ &+ \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} (g(x, v) - f(x)) - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [P_\alpha(v) - f(x)] \\ &+ A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right]. \end{aligned} \quad (80)$$

$E_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} (g(x, v) - f(x)) \\ &= \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} \left(C(x)|v|^{\alpha-1}v + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-1}v + \sum_{j=1}^m E_j(x)|v|^{\gamma_j-1}v - f(x) \right) \\ &\geq \left(C(x) + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-\alpha} - \frac{f(x)}{|v|^{\alpha-1}v} \right) |u|^{\alpha+1} \end{aligned}$$

yazılır. $vf(x) \leq 0$ koşulu ve Young eşitsizliği kullanılarak

$$C(x) + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-\alpha}v - \frac{f(x)}{|v|^{\alpha-1}v} = C(x) + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-\alpha}v + \frac{|f(x)|}{|v|^{\alpha}}$$

$$\geq C_2(x)$$

elde edilir. Son iki eşitsizlik birlikte değerlendirilirse,

$$\frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)}(g(x, v) - f(x)) \geq C_2(x)|u|^{\alpha+1} \quad (81)$$

sonucuna varılır. (79), (80) ve (81) ifadeleri birlikte değerlendirilirse, gösterilmek istenilen eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.7 de (74) ve (75) operatörleri için verilen Picone tipli eşitsizlikten hareket ile keyfi bir $u \in C^1(G, R)$ fonksiyonu için (75) operatörü göz önünde bulundurularak aşağıdaki eşitsizlik kolayca elde edilebilir.

Teorem 4.8 *Eğer, $v \in D_{P_\alpha}(G)$ ise, G 'de $v \neq 0$ ve $vf(x) \leq 0$ ise, bir $u \in C^1(G, R)$ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:*

$$\begin{aligned} & -\nabla \cdot \left(\frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} A(x) |\nabla v|^{\alpha-1} \nabla v \right) \\ & \geq -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + C_1(x)|u|^{\alpha+1} \\ & \quad - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [P_\alpha(v) - f(x)] \\ & \quad + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ & \quad \left. - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right]. \end{aligned} \quad (82)$$

Yoshida'nın (Yoshida, 2010a) çalışmasındaki düşünce kullanılarak, zorlanmış terim $f(x)$ üzerindeki koşul kaldırılıp fakat v üzerinde $|v| \geq k_0$ gibi yeni bir koşul konulursa benzer şekilde aşağıdaki gibi Picone tipli eşitsizlikler elde edilebilir.

Teorem 4.9 $\ell(u) = 0$ denkleminin $u \in D_\ell(G)$ çözümü ve $v \in D_{P_\alpha}(G)$ olsun ve $|v| \geq k_0$ koşulu sağlansın. Bu durumda $u \in C^1(G, R)$ için aşağıdaki Picone tipli eşitsizlik,

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)\nabla u - \varphi(u)A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v] \right) \\ & \geq -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \\ & \quad + (\nabla u)^T (a(x) - |b(x)|)(\nabla u) - (|b(x)| + c(x))(u)^2 \\ & \quad + (C_2(x) - k_0^{-\alpha}|f(x)|)|u|^{\alpha+1} - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [P_\alpha(v) - f(x)] \\ & \quad + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ & \quad \left. - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \end{aligned} \quad (83)$$

sağlanır. Burada $\varphi(s) = |s|^{\alpha-1}s$, $s \in R$, $\Phi(\xi) = |\xi|^{\alpha-1}\xi$, $\xi \in R^n$,

$$C_3(x) = C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_2(\beta_i, \alpha, \gamma_i, D_i(x), E_i(x)),$$

ve

$$\mathcal{G}_2(\beta, \alpha, \gamma, D(x), E(x)) = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma} \left(\frac{\beta - \alpha}{\alpha - \gamma} \right)^{\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma}} (C(x))^{\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma}} (D(x))^{\frac{\beta - \alpha}{\beta - \gamma}}$$

olarak tanımlıdır.

Teorem 4.10 $v \in D_{P_\alpha}(G)$ ve $|v| \geq k_0$ olsun, bu durumda herhangi bir $u \in C^1(G, R)$ için, Picone tipli eşitsizlik

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [A(x)|\nabla v|^{\alpha-1}\nabla v] \right) \\ & \geq -A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + (C_3(x) - k_0^{-\alpha}|f(x)|)|u|^{\alpha+1} \\ & \quad + A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ & \quad \left. - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \\ & \quad - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [P_\alpha(v) - f(x)] \end{aligned} \quad (84)$$

sağlanır. Burada $\varphi(s) = |s|^{\alpha-1}s$, $s \in R$, $\Phi(\xi) = |\xi|^{\alpha-1}\xi$, $\xi \in R^n$ dir ve $C_3(x)$ daha önce Teorem 4.9 de tanımlandığı gibidir.

4.2.2 Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri

Bu kesimde 4.2.1 kesiminde verilen Picone tipli eşitsizlikler kullanılarak Sturm-tipi karşılaştırma teoremleri verilecektir.

Teorem 4.11 *Sınırlı G bölgesinin ∂G sınırında $u = 0$ özelliğine sahip aşikar olmayan bir $u \in C^1(\bar{G}, R)$ fonksiyonu mevcut olsun. Aynı bu u fonksiyonu için $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin katsayıları arasındaki*

$$M[u] := \int_G \left\{ A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - C_1(x)|u|^{\alpha+1} \right\} dx \leq 0 \quad (85)$$

eşitsizliği sağlasın. Bu durumda G 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir. Yukarıdaki koşullara ek olarak $\partial G \in C^1$ ise $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü aşağıdaki özelliklerden birini sağlar:

- (1) v , G 'de bir sifıra sahiptir,
- (2) $\nabla \alpha(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ olmak üzere u , $e^{\alpha(x)}v$ in bir katıdır.

İspat. Olmayana ergi yöntemini kullanalım. Buna göre $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin G 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan ve $\bar{G}$ 'de $v \neq 0$ olan bir $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü olsun. Teorem 4.8'deki (83) eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğinin her iki yanının G 'de integrali alınır ve diverjans teoremi uygulanırsa:

$$M[u] \geq \int_G A(x) \left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} - (\alpha+1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \Phi\left(\frac{u}{v} \nabla v\right) \right] \quad (86)$$

elde edilir. $A(x) > 0$ ve Lemma 2.2 den integralin içi negatif olamayacağından $>$ (büyüktür) durumunda çelişki olduğu açıktır. Eşitlik durumu için G 'de $\frac{u}{v} =$

$c_0 e^{\alpha(x)} v$ dir. u fonksiyonu sürekli olduğundan $\bar{G}$ de $\frac{u}{v} = c_0 e^{\alpha(x)}$ eşitliği geçerlidir. ∂G de $u = 0$ olduğundan $c_0 = 0$ elde edilir. Bu da u nun aşıkâr olmayan bir fonksiyon olması ile çelişir. Böylece teoremin ilk kısmının ispatı tamamlanmış olur.

Hipotezlere ek olarak $\partial G \in C^1$ olsun. $P_\alpha(x) = f(x)$ denkleminin G 'de $v f(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan ve $\bar{G}$ de $v \neq 0$ olan bir $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümünü göz önüne alalım. $u \in C^1(\bar{G}, R)$ ve ∂G sınırında $u = 0$ olduğundan, $u \in W_0^{1, \alpha+1}(G)$ dir. u aynı zamanda (55) normuna göre $C_0^\infty(G)$ in kapanışının bir elemanıdır. (Adams, 2003; Evans, 1998) Bu durumda (55) normuna göre u 'ya yakınsayan bir $u_k \in C_0^\infty(G)$ dizisi vardır. $u = u_k$ alıp (83) eşitsizliğinin her iki yanının G 'de integrali alınıp diverjans teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} M[u_k] \geq \int_G A(x) \left[\left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u_k}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ \left. - (\alpha + 1) \left(\nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{u_k}{v} \nabla v \right) \right] dx \geq 0 \end{aligned} \quad (87)$$

olur. $A(x)$, $C(x)$, $D_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$), ve $f(x)$ fonksiyonları $\bar{G}$ 'de sınırlı olduğundan, bir $K_1 > 0$ sabiti için,

$$A(x) \leq K_1 \text{ and } |C_1(x)| \leq K_1.$$

yazılabilir, buradan,

$$\begin{aligned} |M[u_k] - M[u]| \leq K_1 \int_G \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| dx \\ + K_1 \int_G \left| |u_k|^{\alpha+1} - |u|^{\alpha+1} \right| dx. \end{aligned} \quad (88)$$

dir. (88) eşitsizliğinin ikinci yanının ilk integraline ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| \\
& \leq (\alpha+1) \left(\left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right| + \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right| \right)^\alpha \\
& \quad \times \left| \nabla(u_k - u) + \frac{B(x)}{A(x)}(u_k - u) \right| \\
& \leq (\alpha+1) \left(|\nabla u_k| + |\nabla u| + \frac{|B(x)|}{A(x)}|u_k| + \frac{|B(x)|}{A(x)}|u| \right)^\alpha \\
& \quad \times \left(|\nabla(u_k - u)| + \frac{|B(x)|}{A(x)}|u_k - u| \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. $B(x)$ de $\bar{G}$ de sınırlı olduğundan $\frac{|B(x)|}{A(x)} \leq K_2$ olacak şekilde K_2 sabiti vardır. $K_3, K_3 := \max\{1, K_2\}$ sayısı olarak tanımlansın yukarıdaki son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
& \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| \\
& \leq (\alpha+1) K_3^{\alpha+1} (|\nabla u_k| + |\nabla u| + |u_k| + |u|)^\alpha (|\nabla(u_k - u)| + |u_k - u|) \quad (89)
\end{aligned}$$

bulunur. (89) eşitsizliğine sırasıyla Hölder ve Minkowski eşitsizlikleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_G \left| \left| \nabla u_k - \frac{u_k B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - \left| \nabla u - \frac{u B(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \right| dx \\
& \leq (\alpha+1) K_3^{\alpha+1} \left(\int_G (|\nabla u_k| + |\nabla u| + |u_k| + |u|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \\
& \quad \times \left(\int_G (|\nabla(u_k - u)| + |u_k - u|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
& \leq (\alpha+1) K_3^{\alpha+1} \left[\left(\int_G (|\nabla u_k| + |u_k|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} + \left(\int_G (|\nabla u| + |u|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \right]^\alpha \\
& \quad \times \left(\int_G (|\nabla(u_k - u)| + |u_k - u|)^{\alpha+1} dx \right)^{\frac{1}{\alpha+1}} \\
& \leq (\alpha+1) K_3^{\alpha+1} (\|u_k\| + \|u\|)^\alpha \|u_k - u\|. \quad (90)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (88) eşitsizliğinin ikinci yanının ikinci integrali için

$$\int_G |u_k|^{\alpha+1} - |u|^{\alpha+1}| dx \leq (\alpha+1) (\|u_k\| + \|u\|)^\alpha \|u_k - u\| \quad (91)$$

yazılabilir. (88), (90) ve (91) ifadeleri birlikte değerlendirilirse, pozitif bir K_4 sabiti için

$$|M[u_k] - M[u]| \leq K_4 (\|u_k\| + \|u\|)^\alpha \|u_k - u\|$$

dir. Bu pozitif K_4 sabiti, sadece K_1, K_2, K_3 ve α sayılarına bağlıdır. Buradan $\lim_{k \rightarrow \infty} M[u_k] = M[u]$ elde edilir. Bu limit işlemi (86) ve (87) ile birlikte göz önünde bulundurulursa

$$0 \geq M[u] \geq 0$$

olur. Buradan da $M[u] = 0$ elde edilir.

Teorem 4.4 ün ispatında olduğu gibi $\bar{\mathcal{B}} \subset G$ olacak şekilde bir keyfi $\mathcal{B}$ küresi olsun ve $w \in C^1(G; R)$ için

$$\begin{aligned} Q_{\mathcal{B}}[w] &:= \int_{\mathcal{B}} A(x) \left[\left| \nabla w - \frac{wB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{w}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\ &\quad \left. - (\alpha+1) \left(\nabla w - \frac{wB(x)}{A(x)} \right) \Phi \left(\frac{w}{v} \nabla v \right) \right] \end{aligned} \quad (92)$$

tanımlansın. $Q_G[u_k]$, (92) ifadesinin sağ yanının $w = u_k$ ve $\mathcal{B}$ yerine G olarak alınmasıyla elde edilir ve böylece,

$$0 \leq Q_{\mathcal{B}}[u_k] \leq Q_G[u_k] \leq M[u_k], \quad (93)$$

olduğu gösterilebilir.

Burada amaca uygun cebirsel işlemler yapılırsa, $\varphi : L^{\alpha+1}(G) \rightarrow L^q(G)$ sürekli operatörü için (Ambrosetti, 2007),

$$\begin{aligned}
|Q_{\mathcal{B}}[u_k] - Q_{\mathcal{B}}[u]| &\leq K_5 (\|u_k\|_{\mathcal{B}} + \|u\|_{\mathcal{B}})^\alpha \|u_k - u\|_{\mathcal{B}} + K_6 (\|u_k\|_{\mathcal{B}})^\alpha \|u_k - u\|_{\mathcal{B}} \\
&\quad + K_7 \|\varphi[u_k] - \varphi[u]\|_{L^q_{(\mathcal{B})}} \|u\|_{\mathcal{B}},
\end{aligned} \tag{94}$$

elde edilir. Burada $\|u_k - u\|_G \rightarrow 0$ iken $\|u_k - u\|_{\mathcal{B}} \rightarrow 0$ dir. Böylece, (65)'de $k \rightarrow \infty$ limitine geçilirse, $Q_{\mathcal{B}}(u) = 0$ olarak bulunur. $\mathcal{B}$ de $A(x) > 0$ sınırlı olduğundan, $\mathcal{B}$ de

$$\begin{aligned}
&\left[\left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + \alpha \left| \frac{u}{v} \nabla v \right|^{\alpha+1} \right. \\
&\quad \left. - (\alpha + 1) \left(\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right) \cdot \Phi \left(\frac{u}{v} \nabla v \right) \right] \equiv 0
\end{aligned} \tag{95}$$

olduğu görülür.

Lemma 2.1'den $\mathcal{B}'$ de

$$\nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \equiv \frac{u}{v} \nabla v \text{ veya } \nabla \left(\frac{u}{v} \right) - \frac{B(x)u}{A(x)v} \equiv 0$$

yazılabilir. Buradan, bir c_0 sabiti ve sürekli $\alpha(x)$ fonksiyonu için $\mathcal{B}'$ de $\frac{u}{v} = c_0 e^{\alpha(x)}$ yazılabilir. $\bar{\mathcal{B}} \subset G$ olacak şekilde $\mathcal{B}$ keyfi bir küre olduğundan G' de $c_0 \neq 0$ olmak üzere $\frac{u}{v} = c_0 e^{\alpha(x)}$ sonucu elde edilir.

Sonuç 4.5 G de $f(x) \geq 0$ (veya $f(x) \leq 0$) olsun. Eğer ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in C^1(\bar{G}, R)$ fonksiyonu varsa ve $M[u] \leq 0$ koşulu sağlanıyorsa, o zaman $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin $\bar{G}'$ de negatif (veya pozitif) çözümü yoktur.

İspat. $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin $\bar{G}$ de negatif bir çözümü olsun. G' de $vf(x) \leq 0$ olduğundan ve böylece Teorem 4.11 in hipotezleri sağlandığından Teorem 4.11 den $\bar{G}$ de $v = 0$ elde edilir ki bu da $v < 0$ kabulüyle çelişir. Böylece v , $\bar{G}$ de bir sıfıra sahiptir denir. Pozitif çözümünün olmadığı da benzer şekilde gösterilir.

Teorem 4.12 (*Sturm-tipi Karşılaştırma Teoremi*) $u \in D_\ell(G)$, $\ell(u) = 0$ denkleminin ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekildeki aşikar olmayan bir çözümü olsun. Eğer

$$V[u] := \int_G (\nabla u)^T (a(x) - |b(x)|) (\nabla u) - A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} + C_2(x)|u|^{\alpha+1} - (|b(x)| + c(x))u^2 \geq 0 \quad (96)$$

koşulu sağlanıyorsa, $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin G 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü için aşağıdaki özelliklerden birini sağlar;

(1) v , G 'de bir sifıra sahiptir

(2) $c_0 \neq 0$ bir sabit ve $\nabla \alpha(x) = \frac{B(x)}{A(x)}$ olmak üzere $u = c_0 e^{\alpha(x)} v$ dir.

İspat. Teoremin ispatı, bir önceki teoremin ispatında olduğu gibi, (77) eşitsizliğinin integrali alınarak verilebilir. Ancak burada $M[u]$ ve $V[u]$ tanımlarından faydalanılarak alternatif bir ispat verilecektir. Bu durumda,

$$M[u] = -V[u] + \int_G \{(\nabla u)^T (a(x) - |b(x)|) (\nabla u) - (c(x) + |b(x)|)u^2\} dx$$

(85) eşitsizliğine G üzerinde diverjans teoremi uygulanarak ve $V[u]$ ifadesinin işareti gözönünde bulundurularak $M[u] \leq 0$ elde edilir. Böylece Teorem 4.11 in şartları sağlanmış olur. Buradan ispat tamamlanmış olur.

Ayrıca $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin

$$P_1(v) = \nabla \cdot (A(x)\nabla v) + C(x)v + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-1}v + \sum_{j=1}^m E_j(x)|v|^{\gamma_j-1}v = f(x) \quad (97)$$

şeklindeki bir özel durumunu gözönüne alalım. Buna göre aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 4.6 (*Picone tipli özdeşlik*) $u \in D_\ell(G)$, $\ell(u) = 0$ denkleminin çözümü ise ve G 'de $v \in D_{P_1}(G)$, $v \neq 0$ ve $vf(x) \leq 0$ koşulları sağlanıyorsa, bu durumda her hangi bir $u \in C^1(G, R)$ için aşağıdaki Picone tipli eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \nabla \cdot \left(\frac{u}{\varphi(v)} [\varphi(v)a(x)\nabla u - \varphi(u)A(x)\nabla v] \right) \\ & \geq (\nabla u)^T (a(x) - |b(x)| - A(x))(\nabla u) - \frac{u\varphi(u)}{\varphi(v)} [P_1(v) - f(x)] \quad (98) \\ & \quad + \left(C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_\infty(\beta_i, 1, D_i(x), f(x)) - |b(x)| - c(x) \right) (u)^2 \\ & \quad + A(x) \left(\nabla u - \frac{u}{v} \nabla v \right)^2 \end{aligned}$$

burada β_i, γ_j 'ler $\gamma_j < 1 < \beta_i$, ($i = 1, 2, \dots, \ell; j = 1, 2, \dots, m$) olacak şekilde gerçel sabitlerdir.

Sonuç 4.7 Eğer ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in C^1(\bar{G}, R)$ fonksiyonu varsa ve

$$M_G[u] := \int_G \{ (\nabla u)^T A(x)(\nabla u) - (C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_1(\beta_i, 1, D_i(x), f(x))) u^2 \} dx \leq 0 \quad (99)$$

koşulu sağlanıyorsa, (97) denkleminin G 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan her $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir. Ayrıca eğer $\partial G \in C^1$ özelliğine sahipse bu durumda G 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan her $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü aşağıdaki özelliklerden birine sahiptir:

(1) v , G 'de bir sifıra sahiptir,

(2) u, v nin sabit bir katıdır.

İspat, Teorem 4.11'in ispatında olduğu gibi verilebilir.

Teorem 4.13 $\ell(u) = 0$ denkleminin ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in D_\ell(G)$ çözümü olsun ve

$$V_G[u] := \int_G \{(\nabla u)^T(a(x) - |b(x)| - A(x))(\nabla u) + (C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_1(\beta_i, 1, D_i(x), f(x)) - |b(x)| - c(x))(x)(u)^2\} dx \geq 0 \quad (100)$$

koşulu sağlansın, bu durumda G 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan her $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir.

İspat. (97) denkleminin $\bar{G}$ 'de $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü olsun ve $v \neq 0$ olsun. (99) eşitsizliğinin her iki yanının G üzerinde integrali alınarak diverjans teoremi uygulanırsa,

$$0 \geq V_G[u] + \int_G A(x) \left(\nabla u - \frac{u}{v} \nabla v \right)^2 dx \geq 0$$

elde edilir buradan da G de

$$\nabla u - \frac{u}{v} \nabla v \equiv 0 \text{ veya } \nabla \left(\frac{u}{v} \right) \equiv 0$$

bulunur, bu eşitlikler süreklilikten $\bar{G}$ de geçerlidir. Keyfi bir c_0 sabiti için $u/v = c_0$ yazılır. ∂G sınırında $u = 0$ olduğundan $c_0 = 0$ elde edilir, bu da u nun aşikar olmayan bir fonksiyon olması ile çelişir böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.8 G 'de

$$a(x) \geq |b(x)| + A(x) \quad (101)$$

ve

$$C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_1(\beta_i, 1, D_i(x), f(x)) \geq |b(x)| + c(x) \quad (102)$$

koşulları sağlansın. $\ell(u) = 0$ denkleminin, ∂G 'de $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in D_\ell(G)$ çözümü varsa, (97) denkleminin $vf(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan her $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir.

Özel halde $\ell(u) = 0$ denkleminde $b(x) \equiv 0$ ve $P_1(v) = f(x)$ denkleminde $f(x) \equiv 0$ alındığında yani,

$$\nabla \cdot (a(x)\nabla u) + c(x)u = 0 \quad (103)$$

ve

$$\nabla \cdot (A(x)\nabla v) + C(x)v + \sum_{i=1}^{\ell} D_i(x)|v|^{\beta_i-1}v + \sum_j^m E_j(x)|v|^{\gamma_j-1}v = 0 \quad (104)$$

denklemleri ele alındığında, aşağıdaki sonuç, Teorem 4.13 ün bir özel hali olarak verilebilir:

Sonuç 4.9 *G 'de*

$$a(x) \geq A(x)$$

ve

$$C(x) \geq c(x).$$

olsun. (103) denkleminin ∂G de $u = 0$ olan aşikar olmayan bir u çözümü varsa, bu durumda (104) denkleminin her v çözümü $\bar{G}$ 'de bir sifıra sahiptir.

Burada, $\alpha = 1$ ve $b(x) \equiv B(x) \equiv 0$ alındığında lineer ve lineer olmayan bu iki denklem için ilginç sonuçlar elde edilir. Bu durumda bu sonuçlar literatürde iyi bilinen diğer sonuçlarla örtüşür. Örneğin, $b(x) \equiv B(x) \equiv 0$ ile sönümlü terimler yok edilirse ve $C(x) \equiv 0$, $D_1(x) \equiv C(x)$, $\beta_1 = \beta$, $E_1(x) \equiv D(x)$, $\gamma_1 = \gamma$ and $D_i(x) \equiv E_j(x) \equiv 0$ ($i = 2, 3, \dots, \ell$; $j = 2, 3, \dots, m$) alınırsa elde edilen bu sonuçların, (Jaroš et al., 2001)'da verilen $a_{ij}(x) \equiv a(x)$ ve $A_{ij}(x) \equiv A(x)$ durumlarındaki sonuçlara indirgenmiş olduğu görülür.

Teorem 4.14 *G bölgesi $(n-1)$ -boyutlu parçalı düzgün hiperyüzeyler yardımıyla*

$$G_1 \text{ de } f(x) \geq 0 \quad \text{ve} \quad G_2 \text{ de } f(x) \leq 0 \quad (105)$$

olacak şekilde G_1 ve G_2 gibi iki alt bölgeye ayrılsın. ∂G_k sınırlarında $u_k = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan $u_k \in C^1(\bar{G}_k, R)$ fonksiyonları varsa ve

$$M_{G_k}[u_k] := \int_{G_k} (\nabla u_k)^T \{A(x)(\nabla u_k) - (C(x) + \sum_{i=1}^N \mathcal{G}_1(\beta_i, 1 D_i(x), f(x)))u_k^2\} dx \leq 0, \quad k = 1, 2. \quad (106)$$

koşulu sağlanıyorsa, (97) denkleminin her $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü $\bar{G}$ 'de bir sıfıra sahiptir.

İspat. (97) denkleminin $\bar{G}$ 'de sıfırı olmayan bir $v \in D_{P_1}(G)$ çözümü olsun. Bu durumda $\bar{G}$ 'de ya $v < 0$ ya da $v > 0$ olur. $\bar{G}$ 'de $v < 0$ olsun. Bu durumda $\bar{G}_1$ üzerinde $v < 0$ olur buradan da $\bar{G}_1$ 'de $vf(x) \leq 0$ koşulu sağlandığı görülür. Sonuç 4.5 kullanılırsa, $\bar{G}_1$ 'de $P_1(v) = f(x)$ denkleminin negatif bir çözümü yoktur sonucuna varılır. Bu da $\bar{G}$ de $v < 0$ olması ile çelişir. $\bar{G}$ 'de $v > 0$ durumu da benzer şekilde gösterilebilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Yoshida, benzer bir problem ele alarak Picone tipli özdeşlikler yardımıyla ele aldığı problemin salınımlılığı ile ilgili bazı sonuçlar verdi (Yoshida, 2010). Yoshida'nın bu çalışmasında Picone tipli eşitsizlikleri yazarken kullandığı düşünce ile elde edilen 4.9 ve 4.10 teoremlerindeki Picone tipli eşitsizlikler ile karşılaştırma teoremleri aşağıdaki gibi verilebilir. Bu teoremlerin ispatları Teorem 4.11, 4.12 ve (Yoshida, 2010a) daki Teorem 1'in ispatları ile benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.15 $k_0 > 0$ bir sabit olmak üzere, ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde $u \in C^1(\bar{G}; R)$ fonksiyonu varsa ve

$$\tilde{M}[u] := \int_G \{A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} - (C_3(x) - k_0^{-\alpha}|f(x)|)|u|^{\alpha+1}\} dx \leq 0 \quad (107)$$

koşulu sağlanıyorsa, bu durumda $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin her $v \in D_{P_\alpha}(G)$ için ya $v, \bar{G}$ 'de bir sıfıra sahiptir ya da $x_0 \in G$ olmak üzere, $|v(x_0)| < k_0$ dir.

Teorem 4.16 $\ell(u) = 0$ denkleminin ∂G sınırında $u = 0$ olacak şekilde aşikar olmayan bir $u \in D_\ell(G)$ fonksiyonu olsun ve

$$\begin{aligned} \tilde{V}[u] := \int_G (\nabla u)^T (a(x) - |b(x)|) (\nabla u) - A(x) \left| \nabla u - \frac{uB(x)}{A(x)} \right|^{\alpha+1} \\ + (C_3(x) - k_0^{-\alpha}|f(x)|)|u|^{\alpha+1} - (|b(x)| + c(x))u^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (108)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda $P_\alpha(v) = f(x)$ denkleminin $v \in D_{P_\alpha}(G)$ çözümü ya $\bar{G}$ de bir sıfıra sahiptir ya da $x_0 \in G$ olmak üzere $|v(x_0)| < k_0$ dir.

Yukarıdaki teoremlerde görüleceği gibi Teorem 4.15 ve Teorem 4.16 sırasıyla Teorem 4.11 ve Teorem 4.12 ile kıyaslandığında, Teorem 4.15 ve Teorem 4.16 de $f(x)$ üzerindeki koşulun kalktığı ancak, bu teoremlerin v nin $\bar{G}$ de bir sıfırı olmasını garantilemediği görülür.

4.2.3 Uygulama

$r_0 > 0$ olsun. Ω, R^n de $\Omega \supset \{x \in R : |x| \geq r_0\}$ şeklinde tanımlı dış bölge olmak üzere, bu bölgede

$$\ell(u) = 0 \quad (109)$$

ve

$$P_1(v) = f(x) \quad (110)$$

denklemlerini gözönüne alalım. Burada ℓ ve P_1 operatörleri daha önce tanımlandığı gibidir, $a, A \in C(\Omega, R^+)$, $b, B \in C(\Omega, R^n)$, $c, C \in C(\Omega, R)$, $D_i, E_j \in C(\Omega, R^+ \cup \{0\})$ ($i = 1, 2, \dots, \ell; j = 1, 2, \dots, m$) ve $f \in C(\Omega, R)$ ve β_i, γ_j 'ler $\gamma_j < 1 < \beta_i$ olacak şekilde gerçel sabitlerdir.

ℓ 'nin $D_\ell(\Omega)$ bölgesi $C^1(\Omega, R)$ sınıfından $a(x)\nabla u \in C^1(\Omega, R^n)$ özelliğini sağlayan tüm u fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlıdır. $D_{P_1}(\Omega)$ bölgesi de benzer şekilde tanımlıdır. Bölüm 2 de verilen salınımlılık tanımları göz önüne alınırsa, $\Omega_r = \Omega \cap \{x \in R^n : |x| > r\}$ şeklinde tanımlı Ω_r de (109) (veya (110))

denkleminin çözümlerinin bir sıfırı varsa, (109) (veya (110)) denkleminin Ω 'da salınımlıdır denir.

Teorem 4.17 G , $r > 0$ olmak üzere, Ω_r bölgesinde sınırlı bir bölge olsun. Bu bölge $(n - 1)$ -boyutlu hiperyüzeyler yardımıyla G_1 ve G_2 gibi iki alt bölgeye ayrılsın. Bu alt bölgeler için G_1 'de $f(x) \geq 0$ ve G_2 'de $f(x) \leq 0$ olsun. Ayrıca, G 'de $D_i(x) \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, \ell$), $E_j(x) \geq 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) ve ∂G_k sınırlarında $u_k = 0$ olacak şekilde aşıkâr olmayan $u_k \in C^1(\bar{G}_k, R)$ fonksiyonları için $M_{G_k}[u_k] \leq 0$, ($k = 1, 2$) koşulu sağlansın. Bu durumda (110) denkleminin her $v \in D_{P_1}(\Omega)$ çözümü Ω 'da salınımlıdır.

İspat. Amacımız için önce $\bar{G} \subset \Omega_r$ bölgesinde v 'nin bir sıfıra sahip olduğunu göstermektir. Verilen hipotezlerden kolaylıkla gösterilebilir ki Teorem 4.14 ün koşulları sağlanır. Böylece v , $\bar{G}$ de ve $\bar{G} \subset \Omega_r$ olduğundan Ω_r de bir sıfıra sahiptir sonucuna varılır. Tanımdan v , Ω da salınımlıdır.

Örnek. (110) denkleminin özel bir durumu olan,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + K_1(\sin x_1 \sin x_2)|v|^{\beta-1}v + K_2(\sin x_1 \sin x_2)|v|^{2\beta-1}v \\ = \cos x_1 \sin x_2 \end{aligned} \quad (111)$$

denklemini göz önüne alalım. $\beta > 1$ ve K_1 ve K_2 ler ikisi aynı anda sıfır olmayan negatif olmayan sabitler olsun. Ω bölgesi de R^2 'de

$$[2\pi, \infty) \times [0, \pi] \subset \Omega$$

şeklinde tanımlı yatay şerit bölgeleri içeren sınırsız bir bölge olsun. $j = 1, 2, \dots$ olmak üzere,

$$G^j = (2j\pi, (2j+1)\pi) \times (0, \pi)$$

şeklindeki dikdörtgensel alt bölge üzerinde $x_1 = (2j + (1/2))\pi$ düşey doğruları yardımıyla istenilen özellikleri sağlayan G_1^j ve G_2^j

$$\begin{aligned} G_1^j &= (2j\pi, (2j + (1/2))\pi) \times (0, \pi) \\ G_2^j &= ((2j + (1/2))\pi, (2j + 1)\pi) \times (0, \pi) \end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. G_1^j 'de $f(x) \geq 0$ ve G_2^j 'de $f(x) \leq 0$ olduğunu kolaylıkla görülebilir. $D_1(x) = K_1(\sin x_1 \sin x_2) \geq 0$, $D_2(x) = K_2(\sin x_1 \sin x_2) \geq 0$ dir. $u_k = \sin 2x_1 \sin x_2$ ($k = 1, 2$) seçimi ∂G_k 'de $u_k = 0$ özelliğini sağlar. Bazı basit cebirsel hesaplamalarla,

$$\begin{aligned} &M_{G_k^j}[u_k] \\ &= \int_{G_k^j} \left\{ \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_2} \right)^2 - \left[\beta(\beta - 1)^{\frac{1-\beta}{\beta}} (K_1 \sin x_1 \sin x_2)^{\frac{1}{\beta}} |\cos x_1 \sin x_2|^{\frac{\beta-1}{\beta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2\beta(2\beta - 1)^{\frac{1-2\beta}{2\beta}} (K_2 \sin x_1 \sin x_2)^{\frac{1}{2\beta}} |\cos x_1 \sin x_2|^{\frac{2\beta-1}{2\beta}} \right] u_k^2 \right\} dx \quad (112) \\ &= \frac{5\pi^2}{8} - \frac{8}{3} K_1^{1/\beta} \beta(\beta - 1)^{\frac{1-\beta}{\beta}} B\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\beta}, 2 - \frac{1}{2\beta}\right) \\ &\quad - \frac{16}{3} \beta(2\beta - 1)^{\frac{1-2\beta}{2\beta}} K_2^{1/2\beta} B\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4\beta}, 2 - \frac{1}{4\beta}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $B(s, t)$ beta fonksiyonudur. Eğer K_1 ve K_2 aşağıdaki koşulu sağlayacak şekilde seçilirse:

$$\begin{aligned} \frac{15\pi^2}{64} &\leq K_1^{1/\beta} \beta(\beta - 1)^{\frac{1-\beta}{\beta}} B\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2\beta}, 2 - \frac{1}{2\beta}\right) \\ &\quad + 2\beta(2\beta - 1)^{\frac{1-2\beta}{2\beta}} K_2^{1/2\beta} B\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4\beta}, 2 - \frac{1}{4\beta}\right) \end{aligned}$$

herhangi bir sabit $j \in N$ için $k = 1, 2$ olmak üzere $M_{G_k^j}[u_k] \leq 0$ olur. Böylece Teorem 4.17 ile Ω bölgesinde yeterince büyük K_1 ve K_2 sabitleri için (111) denkleminin her v çözümü salınımlıdır sonucu elde edilir. Örneğin K_1, K_2 ve β yukarıdaki eşitsizliği sağlayacak şekilde $K_1 = 1$, $K_2 = 95$ ve $\beta = 2$ olarak seçilebilir.

5 SONUÇ

Sturm'un 19. Yüzyıldaki çalışmasından bu yana, Sturm teorisi diferansiyel denklemlerin kalitatif incelenmesinde önemli araştırma alanlarından birisi olmuştur.

Newtonyen olmayan sıvıların akışı, yavaş difüzyon problemi, ısı yalıtımı gibi çeşitli fiziksel ve biyolojik olaylardaki uygulamaları nedeniyle p-Laplasyen içeren denklemler ile half-linear denklemler son yıllarda büyük ilgi çekmektedir.

Pek çok uygulama alanında, $A(x)$ birim matris veya skalar bir fonksiyon olmak üzere

$$\operatorname{div} (A(x) \|\nabla u\|^{p-2} \nabla u)$$

şeklinde p-Laplasyen modellerle karşılaşılır. Bu nedenle p-Laplasyen içeren genelleştirilmiş eliptik tipten denklemler için Sturm teorisi ile ilgili sonuçların elde edilmesi oldukça önemlidir.

Bu tezde, amaca yönelik Picone tipli eşitsizlikler inşaa edilmiş, bu eşitsizlikler yardımıyla bazı özel tipten denklemler için Sturm tipi karşılaştırma sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, hem sönümlü, hem de zorlanmış terimi birlikte içeren özel yapıli denklem tipleri için de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen bu özgün sonuçlar iki ayrı çalışma olarak yayınlanmıştır (Tiryaki and Sahiner, 2014; Sahiner et. al., 2015).

Bu tezde ele aldığımız denklem tiplerinin katsayı fonksiyonlarının daha genel biçimde, örneğin matris yapıli olarak seçilmesi durumunda, karşılaştırma sonuçlarının incelenmesi de ilginç bir problem olacaktır. Bu problemlerin katsayı fonksiyonlarının genelleştirilmiş haliyle ilgili karşılaştırma teoremlerinin elde edilmesi literatüre katkı sağlayacaktır.

KAYNAKLAR DİZİNİ

- Adams, R.A. and Fournier, J.J.F.** , 2003, Sobolev Spaces, Second Edition, Academic Press.
- Ahmed, N., Sunada, D.K.**, 1969, Nonlinear flow in porous media, J. Hydraulics Division, Proc. Amer. Soc. Civil Eng., 95(1969), 1847-1857pp.
- Allegretto, W.**, 1976, Nonoscillation theory of elliptic equations of order $2n$, *Pacific J. Math.*, 64, 1-16pp.
- Allegretto, W.**, 1977a, A Kneser theorem for higher order elliptic equations, *Canad. Math. Bull.*, 20, 1-8pp.
- Allegretto, W.**, 1977b, Nonoscillation criteria for elliptic equations in conical domains, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 63, 245-250pp.
- Allegretto, W.**, 2000, Sturm type theorems for solutions of elliptic nonlinear problems, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., 7, 309-321pp.
- Allegretto, W.**, 2001, Sturm theorems for degenerate elliptic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129, 3031-3035pp.
- Allegretto, W. and Huang, Y.X.**, 1998, A Picone's identity for the p -Laplacian and applications, *Nonlinear Anal.*, 32, 819-830pp.
- Allegretto, W. and Huang, Y.X.**, 1999, Principal eigenvalues and Sturm Comparison via Picone's identity, *J. Differential Equations*, 156, 427-438pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Ambrosetti, A. and Malchiodi A.**, 2007, Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems, Cambridge University Press, Cambridge.
- Aris, R.**, 1975, The Mathematical Theory of Diffusion and Reaction in Permeable Catalsts, vols. I and II, Clarendon Press, Oxford.
- Astarita, G. and Marruci G.**, 1974, Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics, McGraw-Hill, New York.
- Bognár, G. and Došlý, O.**, 2003, The application of Picone-type identity for some nonlinear elliptic differential equations, Acta Math. Univ. Comenian, 72, 45-57pp.
- Clark, C., and Swanson, C.A**, 1965, Comparison theorems for elliptic differential equations , Proc. Amer. Math. Soc. 16, 886-890pp.
- Diaz, J.I**, 1985, Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries, vol. I, Elliptic Equations, Res. Notes Math., Vol. 106, Pitman, London.
- Dunninger, D.R.**, 1995, A sturm comparison theorem for some degenerate quasilinear elliptic operators, Boll. Un. Mat. Ital., (7)9, 117-121pp.
- Evans, L.C.**, 1998, Partial Differential Equations, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ..
- Fite, W.B.**, 1918, Concerning the zeros of the solutions of certain differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 19, 341-352pp.
- Glazman, I.M**, 1965, Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators (Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem).

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G.**, 1988, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press.
- Hartman, P.**, 1952, On nonoscillatory linear differential equations of second order, *Amer. J. Math.*, 74, 389-400pp.
- Headly, V.B.**, 1969, Elliptic equations of $2m$, *J. Math. Anal. Appl.*, 25, 558-568pp.
- Headly, V.B.**, 1986, Sharp nonoscillation theorems for even-order elliptic equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 120, 709-722pp.
- Headly, V.B.**, 1989, Nonoscillation theorems for nonselfadjoint even-order elliptic equations, *Math. Nachr.*, 141, 289-297pp.
- Jaroš, J. and Kusano, T.**, 1997, Second-order semilinear differential equations with external forcing terms, *Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku*, no. 984, 191-197pp.
- Jaroš, J. and Kusano, T.**, 1999, A Picone type identity for second order half-linear differential equations, *Acta Math. Univ. Comenian.*, 68, 137-151pp.
- Jaroš, J., Kusano, T. and Yoshida, N.**, 2001, Picone-type inequalities for nonlinear elliptic equations and their applications, *J. Inequal. Appl.*, 6, 387-404pp.
- Jaroš, J., Kusano, T. and Yoshida, N.**, 2002, Picone-type inequalities for half-linear elliptic equations and their applications, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 12, No. 2, 709-724pp.
- Jaroš, J., Kusano, T. and Yoshida, N.**, 2006, Picone-type inequalities for elliptic equations with first order terms and their applications, *J. Inequal. Appl.*, 1-17pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Kamenev, I.V.**, 1978, An integral criterion for oscillation of linear differential equations, *Mat. Zametki*, 23, 249-251pp (in Russian).
- Kreith, K.**, 1968, A strong comparison theorem for self adjoint elliptic equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19, 989-990pp.
- Kreith, K. and Travis, C.C.**, 1972, Oscillation criteria for selfadjoint elliptic equations, *Pacific J. Math.*, 41, 743-753pp.
- Kreith, K.**, 1973, Oscillation Theory, Lecture Notes in Mathematics, Vol.324, Springer-Verlag, Berlin.
- Kreith, K.**, 1975, Picone's identity and generalizations, *Rend. Mat. Appl.*, 8, 251-261pp.
- Kreyszig, E.**, 1978, Introductory Functional Analysis With Applications, by Jhon Wiley Sons. Inc.
- Kuks, L.M.**, 1962, Sturm's theorem and oscillation of solutions of strongly elliptic systems, *Soviet Math. Dokl.*, 3, 24-27pp.
- Kusano, T., Jaroš, T. and Yoshida, N.**, 2000, A Picone-type identity and Sturmian comparison and oscillation theorems for a class of half-linear partial differential equations of second order, *Nonlinear Anal., Ser A: Theory Methods*, 40, 381-395pp.
- Lebedev, L.P., Vorovich, I.I., and Gladwell, G.M.L.**, 2003, Functional Analysis, Kluwer Academic Publishing.
- Lindqvist, P.**, Notes on p-Laplace equation, <http://www.math.ntnu.no/lqvist/p-laplace.pdf>.
- Noussair, E.S.**, 1971, Oscillation theory of elliptic equations of order $2m$, *J. Differential Equations*, 10, 100-111pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Noussair, E.S.**, 1975, Oscillation of elliptic equations in general domains, *Canad. J. Math.*, 27, 1239-1245pp.
- Noussair, E.S. and Yoshida, N.**, 1975, Nonoscillation criteria for elliptic equations of order $2m$, *Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, 59, 57-64pp.
- Oden, J.T.**, 1978, Existence Theorems and Approximations In Nonlinear Elasticity, in: E. Lakshmikantham (Ed.), *Nonlinear Equations in Abstract Space*, North-Holland.
- Pelissier, M.C.**, 1975, Sur quelques problèmes non lineaires en glaciologie (in French) [On some nonlinear problems of Glaciology], Thèse, *Publ. Math. d'orsay*, 110.
- Picone, M.**, 1909, Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* 11, 1-141.
- Picone, M.**, 1910, Sui valori eccezionali di un parametro da cui dipende un'equazione differenziale lineare ordinaria del second'ordine (in Italian) [On exceptional values of a parameter which depends on the linear ordinary differential equation of second order], *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, 11, 1-141pp.
- Rao, M.R.M.**, 1980, *Ordinary Differential Equations: Theory and Applications*. Affiliated East-West Press Pvt. Ltd., New Delhi.
- Sahiner, S., Tiryaki, A., Mısırlı, E.**, 2013, Sturm comparison theorems for some elliptic type equations with damped term, 12th International Workshop on Dynamical Systems and Applications, August 12-15, 2013, Atilim University, Ankara, Turkey.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Sahiner, S., Mısırlı, E., Tiryaki, A.**, 2014, Sturm comparison theorems for some elliptic type equations with damping and external forcing terms, International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal at The Auditorium at the Campus of Uludag University, Bursa-TURKEY June 23-26, 2014.
- Sahiner, S., Mısırlı, E., Tiryaki, A.**, 2015, Sturm comparison theorems for some elliptic type equations with damping and external forcing terms, Journal of Inequalities and Applications, 2015:77.
- Schoenauer, M.**, 1983, A monodimensional model for fracturing, in: A. Fasano, M. Primicerio (Eds.), Free Boundary Problems: Theory, Applications, in: Res. Notes Math., vol. 79, Pitman, London, 701-711pp.
- Sturm, C.**, 1836, Sur les équations différentielles linéaires du second ordre (in French) [On second order linear differential equations], J. Math. Pures. Appl., 1, 106-186.
- Swanson, C.A.**, 1966, A comparison theorem for elliptic differential equations, Proc. Amer. Math. Soc., 17, 611-616pp.
- Swanson, C.A.**, 1968, Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations, Academic Press, New York.
- Tiryaki, A. and Şahiner, S.**, 2014, Sturm comparison theorems via Picone-type inequalities for some nonlinear elliptic type equations with damped terms, Electron. J. Qual. Theo., No. 1, 1-12pp.
- Tiryaki, A.**, 2014, Sturm comparison theorems for linear and half-linear equations with damping terms, International Conference on Nonlinear Differential and Difference Equations: Recent Developments and Applications, Turkey.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Tiryaki, A.**, 2013, Picone type inequalities and their applications, 12th International Workshop on Dynamical Systems and Applications, Atılım University, Turkey.
- Wintner, A.**, 1949, A criterion of oscillatory stability, *Quart. Appl. Math.*, 7, 115-117pp.
- Yoshida, N.**, 1976, Nonoscillation and comparison theorems for a class of higher order elliptic systems, *Japan. J. Math. (N. S.)*, 2, 419-434pp.
- Yoshida, N.**, 2003, Oscillation of half-linear partial differential equations with first order terms, *Stud. Univ. Zilina Math. Ser.*, 17, 177-184pp.
- Yoshida, N.**, 2005, Oscillation criteria for half-linear partial differential equations via Picone's Identity, in: *Proceedings of Equadiff-11*, 589-598pp.
- Yoshida, N.**, 2006, Picone-type inequalities for a class of quasilinear elliptic equations and their applications, *Differential & Difference Equations and Applications*, Hindawi Publishing Corporation, New York, NY, USA, pp. 1117-1185pp.
- Yoshida, N.**, 2008a, A Picone identity for half-linear elliptic equations and its applications to oscillation theory, *Nonlin. Anal. TMA* 71, 4935-4951pp.
- Yoshida, N.**, 2008b, *Oscillation Theory of Partial Differential Equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- Yoshida, N.**, 2009, Sturmian comparison and oscillation theorems for a class of half-linear elliptic equations, *Nonlinear Anal.*, 71, e1354-1359pp.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam)

- Yoshida, N.**, 2009, A Picone identity for half-linear elliptic equations and its applications to oscillatory theory, *Nonlinear Anal.*, 71, 4935-4951pp.
- Yoshida, N.**, 2010, Sturmian comparsion and oscillation theorems for quasilinear elliptic equations with mixed nonlinearites via Picone-type inequality, *Toyama Math. J.*, Vol. 33, 21-41pp.
- Yoshida, N.**, 2010a, Forced oscillations of half-linear elliptic equations via Picone-type inequality, Hindawi Publishing Corporation, *International Journal of Differential Equations*, 1-9pp.
- Yoshida, N.**, 2010b, Forced oscillation criteria for superlinear-sublinear elliptic equations via Picone-type inequality, *J. Math. Anal. Appl.* 363, 711-717pp.

ÖZGEÇMİŞ

ADI-SOYADI : Sinem ŞAHİNER

DOĞUM TARİHİ : 16.05.1986

DOĞUM YERİ : Bursa

Sinem Şahiner, 1986 yılında Bursa'da doğdu ve lise öğrenimini 2004 yılında Nilüfer Milli Piyango Anadolu Lisesi'nde tamamladı. Aynı yıl Ege Üniversitesi Matematik Bölümü'nü kazandı. 2008 yılında Ege Üniversitesi Uygulamalı Matematik Ağırlıklı Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2008 yılında Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Uygulamalı Matematik anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2009 yılında İzmir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2011 yılı Ocak ayında yüksek lisansını tamamladı. 2011 yılı bahar döneminde Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde Matematik alanında doktora programına başladı. 2012 yılından bu yana İzmir Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü'nde öğretim görevlisi olarak çalışmaktadır.

YAYINLAR VE KATILDIĞI BİLDİRİLİ TOPLANTILAR

- Sinem Şahiner, Emine Mısırlı and Aydın Tiryaki, Sturm comparison theorems for some elliptic type equations with damping and external forcing terms, *Journal of Inequalities and Applications*, 2015:77, (2015).
- Sinem Sahiner, Emine Misirli, Aydın Tiryaki, Sturm comparison theorems for some elliptic type equations with damping and external forcing terms, *International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal at The Auditorium at the Campus of Uludag University, Bursa-TURKEY June 23-26, 2014*.
- Aydın Tiryaki, Sinem Şahiner, Sturm Comparison Theorems via Picone-type inequalities for some nonlinear Elliptic type equations with damped

terms, *Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, No. 46 (2014), 1-12.

- Sinem Sahiner, Aydin Tiryaki, Emine Misirli, Sturm comparison theorems for some elliptic type equations with damped term, *12th International Workshop on Dynamical Systems and Applications*, August 12-15, 2013. Atılım University, Ankara, Turkey.

BURSLAR ve ÖDÜLLER

- 2013-2015 tarihleri arasında TÜBİTAK-BİDEB 2214 Yurtiçi Doktora Bursu

