



**BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA  
YÖNTEMİ İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL  
DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Aysel KÖKSAL**

**Eskişehir 2025**

**BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİ İLE BAZI KISMİ  
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ**

**Aysel KÖKSAL**

**Yüksek Lisans Tezi**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Uygulamalı Matematik Bilim Dalı**

**Danışman: Doç. Dr. Bahar KARAMAN**

**Eskişehir**

**Eskişehir Teknik Üniversitesi**

**Lisansüstü Eğitim Enstitüsü**

**Mart 2025**

## JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Aysel KÖKSAL'ın BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİ İLE BAZI KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ başlıklı çalışması 26/03/2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek “Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği”nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

### Jüri Üyeleri

### Unvan Adı Soyadı

### İmza

Üye

: Doç Dr. Bahar KARAMAN

Üye

: Prof. Dr. Yılmaz DERELİ

Üye

: Doç. Dr. Elis SOYLU YILMAZ

Prof. Dr. Harun BÖCÜK

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

26/03/2025

### **DANIşMAN ONAYI**

Danişmanlığını yürüttüğüm Yüksek Lisans đrencisi Aysel KÖKSAL, BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİ İLE BAZI KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunma sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı

Doç. Dr. Bahar KARAMAN

## ÖZET

### BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA YÖNTEMİ İLE BAZI KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Aysel KÖKSAL

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Mart 2025

Danışman: Doç. Dr. Bahar KARAMAN

Bu tez çalışmasında bazı kısmi diferansiyel denklemler tanıtılıp, bu denklemlerin Bernoulli dalgacık sıralama metodu kullanılarak nümerik çözümleri bulunmuştur. Bu metodu kullanabilmek için ise ilk önce Bernoulli polinomları tanıtılmış, Bernoulli dalgacık ailesi de tanıtılıp integralleri hesaplanarak bulunan integrallerin fonksiyonel matrisleri elde edilmiştir. Daha sonra ise bulunan matrislerin yardımı ile ele alınan denklemler cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüştür. Elde edilen sistemler ise Maple ve Matlab programlarının yardımıyla çözülmüştür. Bernoulli dalgacık sıralama metodunun ele alınan kısmi diferansiyel denklemlere uygulanması sonucunda elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümler kıyaslanmış, nümerik çözümün kesin çözüm yakınsaması şekiller aracılığı ile gösterilmiştir. Kullanılan yöntem ile nümerik çözümün tam çözüme iyi bir yaklaşım sağladığı görülmüştür.

**Anahtar Sözcükler:** Bernoulli Polinomları, Bernoulli Dalgacıkları, Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodu

## ABSTRACT

### NUMERICAL SOLUTION OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BERNOULLI WAVELET COLLOCATION METHOD

Aysel KÖKSAL

Department of Mathematics

Programme in Applied Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, March 2025

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bahar KARAMAN

In this thesis, some partial differential equations were introduced, and their numerical solutions were obtained using the Bernoulli wavelet collocation method. To employ this method, Bernoulli polynomials were first introduced, and the Bernoulli wavelet family was defined. Subsequently, the integrals of these wavelets were calculated, and the functional matrices of the obtained integrals were derived. Then, with the aid of these matrices, the considered equations were transformed into a system of algebraic equations. The resulting systems were solved using the Maple and Matlab programs. The numerical solutions obtained by applying the Bernoulli wavelet collocation method to the partial differential equations were compared with the exact solutions, and the convergence of the numerical solution to the exact solution was demonstrated through figures. It was observed that the method used provides a good approximation of the numerical solution to the exact solution.

**Keywords:** Bernoulli Polynomials, Bernoulli Wavelets, Bernoulli Wavelet Collocation Method

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisansım boyunca benimle bilgilerini ve vaktini fazlasıyla paylaşan, samimiyetini her daim hissettiğim kıymetli hocam Doç. Dr. Bahar KARAMAN'a, çalışmam boyunca benden bir an olsun yardımını esirgemeyen, her zaman yanımda desteğini hissettiğim değerli eşim Gökhan KÖKSAL'a ve hayatımda en büyük şansım olan çocuklarım Zeynep Yağmur KÖKSAL ve Toprak Uras KÖKSAL'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Aysel KÖKSAL



## **ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ**

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Aysel KÖKSAL



## İÇİNDEKİLER

### Sayfa

|                                                                                       |      |
|---------------------------------------------------------------------------------------|------|
| BAŞLIK SAYFASI .....                                                                  | I    |
| JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....                                                            | II   |
| DANIŞMAN ONAYI .....                                                                  | III  |
| ÖZET .....                                                                            | IV   |
| ABSTRACT.....                                                                         | V    |
| TEŞEKKÜR .....                                                                        | VI   |
| ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....                                      | VII  |
| İÇİNDEKİLER.....                                                                      | VIII |
| TABLolar DİZİNİ.....                                                                  | X    |
| ŞEKİLLER DİZİNİ.....                                                                  | XI   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....                                                   | XII  |
| 1. GİRİŞ .....                                                                        | 1    |
| 1.2. Tezin Amacı .....                                                                | 2    |
| 2. BERNOULLI POLİNOMLARI VE BERNOULLI DALGACIKLARI .....                              | 3    |
| 2.1. Bernoulli Polinomları.....                                                       | 3    |
| 2.2. Dalgacıklar.....                                                                 | 5    |
| 2.2.1. Bernoulli dalgacıkları.....                                                    | 7    |
| 2.2.2. Bernoulli dalgacığı ile fonksiyonel yaklaşım.....                              | 8    |
| 2.2.3. İntegralin fonksiyonel matrisi .....                                           | 9    |
| 2.3. Yakınsaklık Analizi ve Bernoulli Dalgacıkları İle İlgili Bazı Teoremler<br>..... | 15   |
| 3. KDV DENLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU<br>İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....      | 19   |
| 3.1. KdV Denklemi.....                                                                | 19   |
| 3.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun KdV Denkleminde<br>Uygulanması .....       | 20   |

|                                                                                             |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.3. Test Problemi 1.....                                                                   | 21        |
| 3.4. Test Problemi 2.....                                                                   | 24        |
| <b>4. EW DENKLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b>        | <b>26</b> |
| 4.1. EW Denklemi.....                                                                       | 26        |
| 4.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun EW Denkleme Uygulanması .....                    | 26        |
| 4.3. Test Problemi.....                                                                     | 28        |
| <b>5. ADVECTION DENKLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b> | <b>30</b> |
| 5.1. Advection Denklemi.....                                                                | 30        |
| 5.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun Advection Denkleme Uygulanması .....             | 30        |
| 5.3. Test Problemi.....                                                                     | 31        |
| <b>6. BURGER DENKLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ .....</b>    | <b>34</b> |
| 6.1. Burger Denklemi.....                                                                   | 34        |
| 6.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun Burger Denkleme Uygulanması .....                | 35        |
| 6.3. Test Problemi.....                                                                     | 36        |
| <b>7. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>                                                            | <b>38</b> |
| <b>KAYNAKÇA.....</b>                                                                        | <b>39</b> |
| <b>ÖZGEÇMİŞ</b>                                                                             |           |

## TABLÖLAR DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| <b>Tablo 3.1.</b> $t=3$ için KdV Test Problemi 2 Hata Değerleri ..... | 24 |
| <b>Tablo 6.1.</b> $t=1$ için Burger Denklemi Hata Değerleri.....      | 36 |



## ŞEKİLLER DİZİNİ

### Sayfa

|                                                                                                                                    |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Şekil 2.1. İlk Beş Bernoulli Polinomunun Grafikleri .....                                                                          | 5  |
| Şekil 2.2. Bernoulli Dalgacıklarının Grafikleri .....                                                                              | 8  |
| Şekil 3.1. $x \in [0,1]$ , $t \in [0,0.1]$ , $h=0.001$ , $\Delta t= 0.01$ için KdV denkleminin tam<br>çözümü .....                 | 23 |
| Şekil 3.2. $x \in [0,1]$ , $t \in [0,0.1]$ , $h=0.001$ , $\Delta t= 0.01$ için KdV denkleminin sayısal<br>çözümü .....             | 23 |
| Şekil 3.3. $x \in [0,40]$ , $t \in [0,3]$ , $h=0.001$ , $\Delta t= 0.01$ ve $c=0.5$ için KdV denkleminin<br>tam çözümü .....       | 25 |
| Şekil 3.4. $x \in [0,40]$ , $t \in [0,3]$ , $h=0.001$ $\Delta t= 0.01$ ve $c=0.5$ için KdV denkleminin<br>sayısal çözümü .....     | 25 |
| Şekil 4.1. $x \in [0,30]$ , $t \in [0,80]$ , $h=0.03$ $\Delta t= 0.05$ ve $c=0.1$ için EW denkleminin<br>tam çözümü .....          | 29 |
| Şekil 4.2. $x \in [0,30]$ , $t \in [0,80]$ , $h=0.03$ $\Delta t= 0.05$ ve $c=0.1$ için EW denkleminin<br>sayısal çözümü .....      | 29 |
| Şekil 5.1. $x \in [-1,1]$ , $t \in [-1,1]$ , $h=\Delta t= 0.01$ için advection denkleminin tam<br>çözümü .....                     | 33 |
| Şekil 5.2. $x \in [-1,1]$ , $t \in [-1,1]$ , $h=\Delta t= 0.01$ için advection denkleminin sayısal<br>çözümü .....                 | 33 |
| Şekil 6.1. $x \in [0,1]$ , $t \in [0,1]$ , $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.1$ , $v = 1$ için Burger denkleminin<br>tam çözümü .....     | 37 |
| Şekil 6.2. $x \in [0,1]$ , $t \in [0,1]$ , $h = 0.01$ , $\Delta t = 0.1$ , $v = 1$ için Burger denkleminin<br>sayısal çözümü ..... | 37 |

## SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

|                    |                                                            |
|--------------------|------------------------------------------------------------|
| KdV                | : Korteweg de Vries                                        |
| EW                 | : Equal Width                                              |
| BWCM               | : Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodu                       |
| $\theta_{n,m}$     | : Bernoulli Dalgacıkları                                   |
| $b_m$              | : Bernoulli Polinomları                                    |
| $a_i$              | : Bernoulli Sayısı                                         |
| $L^2$              | : Karesi İntegrallenebilen Fonksiyonların Oluşturduğu Uzay |
| $\langle, \rangle$ | : İç Çarpım                                                |

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Literatür Özeti

Dalgacıklar farklı frekanstaki sinyallerin analizinde kullanılan özellikle mühendislik ve matematik alanlarında sıkça karşılaşılan terimlerdir.

Tarihsel olarak bakıldığında dalgacık analizleri Joseph Fourier'in çalışmalarına dayanır. Fourier 1800'lerin başlarında fonksiyonların kosinüs ve sinüs ile ifade edilebileceğini keşfetmiştir. Uzun yıllar süresince bilim insanları Fourier analizinin temelini oluşturan kosinüs ve sinüs fonksiyonlarından daha uygun fonksiyonlara ihtiyaç duymuştur. Çünkü Fourier serileri kullanılarak dalgalı sinyallerdeki frekansların zamanları belirlenememektedir ve dalgacık analizinde verinin ölçeği çok önemlidir. Ayrıca sinüs ve kosinüs fonksiyonları keskin uçlara yaklaşmakta zayıf kalmaktayken dalgacıklar keskin ve sivri uçlara daha iyi yaklaşım sağlamaktadır. Dalgacıklar çeşitli fonksiyon ve operatörlerin hatasız bir şekilde gösterilmesini sağlamaktadır.

Matematiksel fiziğin birçok problemi adi diferansiyel denklemler, integral denklemler, fark denklemler, kısmi diferansiyel denklemler olarak ifade edilebilir. İntegral ve diferansiyel denklemlerin çözümünde dalgacık metodu kullanılmasının avantajları vardır. Bu avantaj cebirsel denklem sistemlerinin katsayılar matrisinin seyrek olması sebebiyle hızlı algoritmalar kullanılması ve hesaplamalar için gereken zamanın daha az olmasıdır.

Birçok dalgacık ailesi vardır. Haar, Chebyshev, Morlet, Biorthogonal, Daubechies, Coiflet, Shannon, Mexican Hat, Bernoulli dalgacık ailesi bunlardan birkaçıdır. Dalgacıklar sinyal işlemede sıkça kullanılırlar dolayısıyla dalgacıkların seçiminde analiz edilecek sinyalin türü oldukça önemlidir. Örneğin keskin geçişler önemli ise Haar dalgacıkları, sıkıştırma uygulamaları için Biorthogonal dalgacıkları tercih edilebilir. Haar dalgacıkları basit olduğu için birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır (Islam, Imran ve Bozidar, 2010; Bujurke, Sihiralashetti ve Salimath , 2009; Bujurke, Sihiralashetti ve Salimath, 2008; Bujurke, Sihiralashetti ve Salimath, 2007; Lepik, 2007; Shiralashetti ve Deshi, 2016). Fakat bu dalgacıkların nümerik yaklaşımının doğruluğunun düşük olması bir dezavantaj olmuştur. Bu tez çalışmasında ise Bernoulli dalgacık ailesi kullanılacaktır.

## 1.2. Tezin Amacı

Bu çalışmanın amacı Korteweg de Vries, Equal Width, Advection ve Burger denklemlerinin nümerik çözümü için Bernoulli dalgacık sıralama metodunun avantajlarını göstermektir. Yöntemin asıl amacı verilen denklemlerin kesin çözümlerine Bernoulli dalgacıkları ile en iyi yaklaşımı sağlamaktır. Bunun için öncelikle Bernoulli polinomları ve Bernoulli dalgacık ailesi tanıtılıp, dalgacıkların integralleri bulunduğundan sonra fonksiyonel matrisleri elde edilecektir. Nihai amaç, KdV, EW, Advection ve Burger denklemlerine sıralama metodu uygulandıktan sonra elde edilen cebirsel denklem sistemini maple programı ile çözüp, uygulanan metodun lineer olmayan kısmi denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmede elverişli olduğunu göstermektir.

## 2. BERNOULLI POLİNOMLARI VE BERNOULLI DALGACIKLARI

### 2.1. Bernoulli Polinomları

Bernoulli polinomları, matematikte özellikle de analiz alanında oldukça önemli bir yere sahip olan özel bir polinom dizisidir. Bu polinomlar, Bernoulli sayıları ile yakından ilişkilidir ve birçok matematiksel problemde kullanılırlar.

Bernoulli polinomlarının tarihi, İsviçreli matematikçi Jakob Bernoulli'nin (1654-1705) çalışmalarına dayanır. Bernoulli, "Ars Conjectandi" adlı eserinde bu polinomları ilk kez detaylı bir şekilde incelemiştir. Ancak, bu eser ölümünden sonra, 1713 yılında yayımlanabilmiştir.

Bernoulli, bu polinomları, ardışık tam sayıların kuvvetlerinin toplamını hesaplama problemi üzerinde çalışırken keşfetmiştir. Özellikle,  $\sum_{k=1}^n k^p$  toplamını, yani ilk  $n$  tam sayının  $p$ -inci kuvvetlerinin toplamını kapalı bir formülle ifade etmek için bu polinomları kullanmıştır. Bernoulli polinomları, o günden bugüne matematik, fizik, istatistik ve bilgisayar bilimi gibi birçok alanda kullanılmaya devam etmektedir.

Bernoulli polinomları, matematik tarihindeki önemli keşiflerden biri olarak kabul edilir ve günümüzde hala aktif olarak kullanılmaktadır. İşte Bernoulli polinomlarının bazı kullanım alanlarını aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

Matematik:

- \* Toplam Sembollerinin Hesaplanması: Ardışık tam sayıların kuvvetlerinin toplamını bulmak için kullanılırlar. Örneğin, ilk  $n$  tam sayının  $p$ -inci kuvvetlerinin toplamı, Bernoulli polinomları ile ifade edilebilir.
- \* Euler-Maclaurin Formülü: Bu formül, toplamı integrallere bağlar ve Bernoulli polinomları, bu formülün kalan terimini ifade etmek için kullanılır.
- \* Taylor Serisi Açılımları: Bazı fonksiyonların Taylor serisi açılımlarında Bernoulli sayıları ve dolayısıyla Bernoulli polinomları ortaya çıkar.
- \* Diferansiyel Denklemler: Bazı diferansiyel denklemlerin çözümünde Bernoulli polinomları kullanılabilir.

Uygulamalı Bilimler:

- \* Olasılık ve İstatistik: Bernoulli dağılımı gibi bazı olasılık dağılımlarının incelenmesinde Bernoulli polinomları kullanılabilir.
- \* Finans Matematiği: Bazı finansal modellerde ve hesaplamalarda Bernoulli polinomlarına rastlanabilir.



\* Bilgisayar Bilimi: Bernoulli polinomları, bazı algoritmaların analizinde ve geliştirilmesinde kullanılabilir.

$m$ . mertebeden Bernoulli polinomları,  $i = 0,1,2,\dots,m$  ve  $m = 0,1,\dots,M-1$  için  $a_i$  ler Bernoulli sayıları olmak üzere

$$b_m(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} a_{m-i} x^i \quad (2.1)$$

ile tanımlıdır. (2.1) eşitliğinde verilen Bernoulli sayıları ise bir üreteç fonksiyonu aracılığı ile tanımlanır. Üreteç fonksiyonu, Bernoulli sayılarını katsayı olarak içeren bir üstel fonksiyondur.

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!} \quad (2.2)$$

eşitliği ile Bernoulli sayıları üstel fonksiyonun seri açılımındaki katsayılar olarak ifade edilir.

İlk birkaç Bernoulli sayısı,

$$a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}, a_2 = \frac{1}{6}, a_4 = -\frac{1}{30}, a_6 = \frac{1}{42}, a_8 = -\frac{1}{30}, a_{10} = \frac{5}{66},$$

$$a_{12} = -\frac{691}{2730}, a_{14} = \frac{7}{6}, a_{16} = -\frac{3617}{510} \dots$$

ile verilir. Öyle ki  $i = 1,2,3,\dots$  için  $a_{2i+1} = 0$  'dır.

Bernoulli polinomlarından ilk birkaç tanesi ise,

$$b_0 = 1,$$

$$b_1 = -\frac{1}{2} + x,$$

$$b_2 = \frac{1}{6} - x + x^2,$$

$$b_3 = \frac{x}{2} - \frac{3x^2}{2} + x^3$$

$$b_4 = -\frac{1}{30} + x - 2x^3 + x^4,$$

$$b_5 = -\frac{x}{6} + \frac{5x^3}{3} - \frac{5x^4}{2} + x^5$$

$$b_6 = \frac{1}{42} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{2} - 3x^5 + x^6$$

$$b_7 = \frac{x}{6} - \frac{7x^3}{6} + \frac{7x^5}{2} - \frac{7x^6}{2} + x^7$$

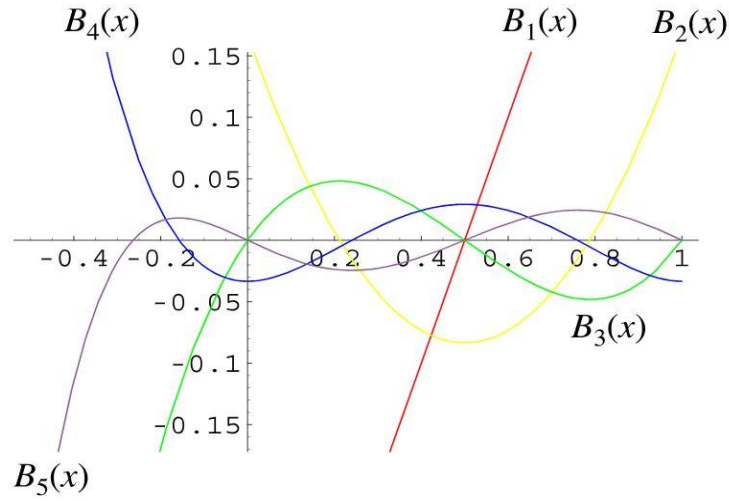
$$b_8 = -\frac{1}{30} + \frac{2x^2}{3} - \frac{7x^4}{3} + \frac{14x^6}{3} - 4x^7 + x^8$$

$$b_9 = -\frac{3x}{10} + 2x^3 - \frac{21x^5}{5} + 6x^7 - \frac{9x^8}{2} + x^9$$

$$b_{10} = \frac{5}{66} - \frac{3x^2}{2} + 5x^4 - 7x^6 + \frac{15x^8}{2} - 5x^9 + x^{10}$$

biçimindedir.

İlk beş Bernoulli polinomunun grafikleri



Şekil 2.1. İlk Beş Bernoulli Polinomunun Grafikleri

ile verilir.

## 2.2. Dalgacıklar

Son yıllarda dalgacık analizinde önemli ilerlemeler katedilmiş ve yeni uygulama alanları ortaya çıkmıştır. Özellikle sinyal işlemede, sinyal gürültüsünü giderme, görüntü sıkıştırma ve çözünürlük iyileştirmede dalgacıklar yaygın olarak kullanılmaktadır. Diferansiyel denklemler ve adi diferansiyel denklemleri çözmede kullanılan önemli uygulama alanlarından biri olmuştur. Dalgacık tekniklerini kullanarak, ele alınan denklemler cebirsel denklemler sistemine indirgenebilir ve bu da denklemleri klasik yöntemlerin yardımıyla kolayca çözülebilir hale getirir. Bu yaklaşım, geleneksel yöntemlere kıyasla doğruluk, esneklik, hesaplama verimliliği gibi avantajlar sunar. Dalgacık tabanlı yöntemler bilim, mühendislik ve matematikteki çeşitli problemler için başarı ile kullanılmış, modelleme, simülasyon ve analizdeki gelişmelere katkıda

bulunmuştur. Dalgacıkların çok sayıda uygulama alanı bulunmaktadır. Bunlardan bazılarını sinyal işleme, bilgisayarlı görme, iletişim mühendisliği, biyoteknoloji, biyomedikal mühendisliği, veri analizi, yönetim, elektrik mühendisliği, kontrol teorisi, ulaşım, inşaat mühendisliği, astronomi, sinirsel ağlar, fraktal analiz, sayısal analiz olarak sıralayabiliriz. (Openheim vd., 2013; Baleanu, 2012)

Sinyal işlemede dalgacıklar sinyallerin verimli bir şekilde temsil edilmesini sağlar. Aynı zamanda dalgacıklar görüntü sıkıştırma ve çözünürlük iyileştirme için etkili olduğu da gözlemlenmiştir. (Rafael ve Wintz, 1987)

Dalgacıklar biyomedikal mühendisliğinde de önemli uygulamalara sahiptir. Dalgacıklar elektrokardiyogramlardaki anormallikleri tespit etmek, beyin dalgası modellerini tespit etmek ve tıbbi görüntülerdeki belirli özellikleri belirlemek için kullanılır. Bu sayede sağlık hizmetlerindeki ilerlemelere katkıda bulunur. (Aldroubi ve Unser, 2017)

Dalgacıklar veri analizi ve yönetimi alanında da kullanılır. Burada zaman serisi analizi, sınıflandırma ve kümeleme gibi görevlerde kullanılırlar. Veri madenciliği ve görüntü tanımda önemli bir rol oynar. (Morettin , Pinheiro ve Vidakovic, 2017)

Elektrik mühendisliğinde dalgacıklar sistemlerin kararlılığını ve performansını arttırarak kontrol sistemlerine katkıda bulunur. (Sarkar, Salazar-Palma ve Michael, 2002)

İnşaat mühendisliğinde dalgacıklar yapısal analiz ve hasar tespiti için kullanılmaktadır. (Stepinski, Uhl ve Staszewski, 2013)

Dalgacıklar aynı zamanda astronomide de yerini bulmuş, geçici sinyallerin tespitine ve spektral verilerin analizine yardımcı olmuştur. (Starck ve Murtagh, 2013)

Literatürde farklı özelliklerde birden çok dalgacık vardır. Bunlardan birkaçını, Haar, Chebyshev, Morlet, Daubechies, Coiflet, Shannon, Mexican Hat, Bernoulli dalgacık ailesi olarak sıralayabiliriz.

Bu tez çalışmasında Bernoulli dalgacıkları ele alınacaktır. Bernoulli dalgacıklarının diğer dalgacık ailelerine göre avantajlarından bahsedecek olursak; dalgacıklarda zaman ve frekans çözünürlüğü oldukça önemlidir, bazı dalgacıklarda yüksek frekans çözünürlüğü mevcutken bazılarında ise yüksek zaman çözünürlüğü mevcuttur. Bernoulli dalgacıklarında ise zaman ve frekans çözünürlükleri dengeli bir haldedir. Haar dalgacıkları çok daha keskin geçişlere sahipken Bernoulli dalgacıkları düzgün bir yapıya sahiptir. Bernoulli dalgacıkları genellikle görüntü sıkıştırma ve gürültü gidermede sıkça kullanılır.

### 2.2.1. Bernoulli dalgacıkları

$k$  herhangi bir pozitif tamsayı,  $m = 0, 1, 2, \dots, M - 1, n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$  ve  $\hat{n} = n - 1$  olmak üzere, Bernoulli dalgacıkları  $\theta(k, n, m, x) = \theta_{n,m}$  şeklinde dört argümana bağlı olarak ifade edilir. Bernoulli dalgacıkları,  $b_m(x)$ 'ler  $m$ . mertebeden Bernoulli polinomları ve  $a_{2m}$ 'ler Bernoulli sayıları olmak üzere  $[0, 1)$  aralığında,

$$\tilde{b}_m(t) = \begin{cases} 1, & m = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m}}} b_m(t), & m > 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

için,

$$\theta_{n,m}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{k-1}{2}} \tilde{b}_m(2^{k-1}x - \hat{n}), & \frac{\hat{n}}{2^{k-1}} \leq x < \frac{\hat{n} + 1}{2^{k-1}} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (2.4)$$

ile verilir (Keshavarz, 2014).

(2.4) eşitliğinde  $k=1$  için birkaç tane Bernoulli dalgacığı,

$$\theta_{1,0}(x) = 1,$$

$$\theta_{1,1}(x) = \sqrt{3}(2x - 1),$$

$$\theta_{1,2}(x) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1),$$

$$\theta_{1,3}(x) = \sqrt{210}(x - 3x^2 + 2x^3),$$

$$\theta_{1,4}(x) = 10\sqrt{21} \left( -\frac{1}{30} + x^2 - 2x^3 + x^4 \right),$$

$$\theta_{1,5}(x) = \sqrt{\frac{462}{5}} (-x + 10x^3 - 15x^4 - 126x^5 + 42x^6),$$

$$\theta_{1,6}(x) = \sqrt{\frac{1430}{691}} (1 - 21x^2 + 105x^4 - 126x^5 + 42x^6),$$

$$\theta_{1,7}(x) = 2\sqrt{\frac{143}{7}} (x - 7x^3 + 21x^5 - 21x^6 + 6x^7),$$

$$\theta_{1,8}(x) = \sqrt{\frac{7293}{3617}} (-1 + 20x^2 - 70x^4 + 140x^6 - 120x^7 + 30x^8),$$

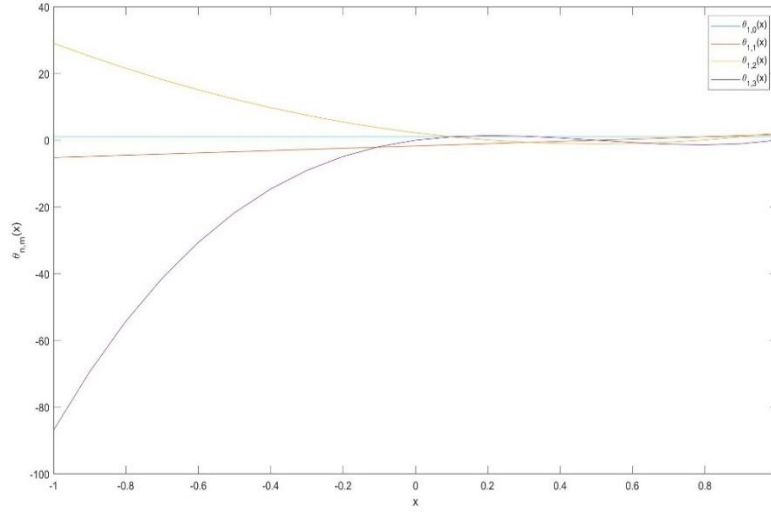
$$\theta_{1,9}(x) = \sqrt{\frac{1939938}{219335}} (-3x + 20x^3 - 42x^5 + 60x^7 - 45x^8 + 10x^9),$$

$$\theta_{1,10}(x) = 22 \sqrt{\frac{125970}{174611}} \left( \frac{5}{66} - \frac{3x^2}{2} + 5x^4 - 7x^6 + \frac{15x^8}{2} - 5x^9 + x^{10} \right),$$

$$\theta_{1,11}(x) = 2 \sqrt{\frac{676039}{854513}} (5x - 33x^3 + 66x^5 - 66x^7 + 55x^9 - 33x^{10} + 6x^{11})$$
(2.5)

şeklindedir.

Bernoulli dalgacıklarının grafikleri,



**Şekil 2.2.** Bernoulli Dalgacıklarının Grafikleri

ile verilir.

### 2.2.2. Bernoulli dalgacı ile fonksiyonel yaklaşım

Doğrusal olmayan  $u(x, t)$  kısmi diferansiyel denkleminin çözümünü Bernoulli dalgacık tabanlı ifade edebilmek için,

$$u(x, t) = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (2.6)$$

yaklaşımını kullanacağız.

(2.6) eşitliğinde,

$$\theta^T(x) = [\theta_{1,0}(x), \dots, \theta_{1,M-1}(x), \theta_{2,0}(x), \dots, \theta_{2,M-1}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},0}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},M-1}(x)]$$
(2.7)

$$\theta(t) = [\theta_{1,0}(t), \dots, \theta_{1,M-1}(t), \theta_{2,0}(t), \dots, \theta_{2,M-1}(t), \dots, \theta_{2^{k-1},0}(t), \dots, \theta_{2^{k-1},M-1}(t)]^T$$
(2.8)

ve  $K = [k_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, j = 0, 1, \dots, M - 1$  için  $2^{k-1}M \times 2^{k-1}M$  boyutunda matristir.

### 2.2.3. İntegralin fonksiyonel matrisi

$$\theta_{10}(x) = [\theta_{1,0}(x), \theta_{1,1}(x), \theta_{1,2}(x), \theta_{1,3}(x), \theta_{1,4}(x), \theta_{1,5}(x), \theta_{1,6}(x), \theta_{1,7}(x), \theta_{1,8}(x), \theta_{1,9}(x)]^T \quad (2.9)$$

ile belirtelim. (2.5) de bulduğumuz Bernoulli dalgacıklarından ilk on eşitliğin 0'dan  $x$ 'ye integralini alınıp Bernoulli taban fonksiyonlarının lineer birleşimi şeklinde ifade edilirse,

$$\begin{aligned} \int_0^x \theta_{1,0}(x) dx &= \left[ \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2\sqrt{3}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,1}(x) dx &= \left[ -\frac{1}{2\sqrt{3}} \quad 0 \quad \frac{1}{2\sqrt{15}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,2}(x) dx &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{42}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,3}(x) dx &= \left[ \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{30}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{2\sqrt{10}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,4}(x) dx &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{22}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,5}(x) dx &= \left[ -\sqrt{\frac{11}{210}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{691}}{10\sqrt{273}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,6}(x) dx &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sqrt{\frac{35}{1382}} \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,7}(x) dx &= \left[ \frac{\sqrt{143}}{20\sqrt{7}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{3617}{20\sqrt{357}} \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,8}(x) dx &= \left[ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{219335}}{3\sqrt{962122}} \right] \theta_{10}(x), \\ \int_0^x \theta_{1,9}(x) dx &= \left[ -\frac{\sqrt{146965}}{\sqrt{2895222}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{1222277}}{10\sqrt{482537}}\theta_{1,10}(x),$$

eşitliklerini buluruz. Burada

$P_{10 \times 10}$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{42}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{30}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{\frac{11}{210}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{691}}{10\sqrt{273}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{35}{1382}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{143}}{20\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3617}{20\sqrt{357}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{219335}}{3\sqrt{962122}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{146965}}{\sqrt{2895222}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.10)

ve

$$\bar{\theta}_{10}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{1222277}}{10\sqrt{482537}}\theta_{1,10}(x) \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

olmak üzere,

$$\int_0^x \theta(x) dx = P_{10 \times 10} \theta_{10}(x) + \bar{\theta}_{10}(x) \quad (2.12)$$

ile tanımlanır.

Bernoulli dalgacığının iki kere integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,0}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,1}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6\sqrt{70}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,2}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} \frac{1}{12\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\sqrt{105}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,3}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{7}}{4\sqrt{30}} & \frac{\sqrt{7}}{12\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12\sqrt{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,4}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{6\sqrt{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{691}}{6\sqrt{30030}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,5}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{210}} & \frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{70}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{390}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,6}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{143}}{4\sqrt{6910}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3617}}{4\sqrt{352410}} & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,7}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{143}}{40\sqrt{70}} & \frac{\sqrt{143}}{40\sqrt{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{43867}}{84\sqrt{9690}} \end{bmatrix} \theta_{10}(x), \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,8}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} -\frac{5\sqrt{221}}{6\sqrt{119361}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x) \\
&\quad + \frac{\sqrt{174611}}{6\sqrt{7559530}} \theta_{1,10}(x) \\
\int_0^x \int_0^x \theta_{1,9}(x) dx dx &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{146365}}{2\sqrt{2895222}} & \frac{\sqrt{146365}}{6\sqrt{965074}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x) \\
&\quad + \frac{\sqrt{77683}}{2\sqrt{30268230}} \theta_{1,11}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.



Burada

$$P'_{10 \times 10}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4\sqrt{3}} & \frac{1}{12\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4\sqrt{3}} & -\frac{1}{12} & 0 & \frac{1}{6\sqrt{70}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{12\sqrt{5}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4\sqrt{105}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{30}} & \frac{\sqrt{7}}{12\sqrt{10}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{22\sqrt{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6\sqrt{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{691}}{6\sqrt{30030}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{210}} & \frac{\sqrt{11}}{6\sqrt{70}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{390}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{143}}{4\sqrt{6910}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3617}}{4\sqrt{352410}} & 0 \\ \frac{\sqrt{143}}{40\sqrt{7}} & \frac{\sqrt{143}}{40\sqrt{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{143867}}{84\sqrt{9690}} \\ -\frac{5\sqrt{221}}{6\sqrt{119361}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{146965}}{2\sqrt{2895222}} & -\frac{\sqrt{146965}}{6\sqrt{965074}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2.13)

ve

$$\bar{\theta}_{10}(x)' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{174611}}{6\sqrt{7559530}} \theta_{1,10}(x) \\ \frac{\sqrt{77683}}{2\sqrt{30268230}} \theta_{1,11}(x) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

olmak üzere,

$$\int_0^x \int_0^x \theta(x) dx dx = P'_{10 \times 10} \theta_{10}(x) + \bar{\theta}_{10}'(x) \quad (2.15)$$

ile tanımlanır.

Bernoulli dalgacığının üç kere integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,0}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{1}{24} \quad \frac{1}{12\sqrt{13}} \quad \frac{1}{24\sqrt{5}} \quad \frac{1}{12\sqrt{210}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x), \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,1}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{-\sqrt{3}}{40} \quad \frac{-1}{24} \quad \frac{1}{24\sqrt{15}} \quad 0 \quad \frac{1}{120\sqrt{7}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x) \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,2}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{1}{24\sqrt{5}} \quad \frac{1}{24\sqrt{15}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{12\sqrt{462}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x) \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,3}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{1}{2\sqrt{210}} \quad \frac{\sqrt{7}}{24\sqrt{10}} \quad \frac{\sqrt{7}}{120\sqrt{6}} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{691}}{120\sqrt{3003}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x) \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,4}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{-1}{12\sqrt{21}} \quad \frac{-1}{36\sqrt{7}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{12\sqrt{429}} \quad 0 \quad 0 \right] \theta_{10}(x) \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,5}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{-17\sqrt{11}}{120\sqrt{210}} \quad \frac{-\sqrt{11}}{12\sqrt{70}} \quad \frac{-\sqrt{11}}{60\sqrt{42}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{3617}}{120\sqrt{15470}} \quad 0 \right] \theta_{10}(x) \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,6}(x) dx dx dx \\
&= \left[ \frac{\sqrt{143}}{8\sqrt{6910}} \quad \frac{\sqrt{143}}{8\sqrt{20730}} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{\sqrt{43867}}{24\sqrt{4687053}} \right] \theta_{10}(x) \\
& \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,7}(x) dx dx dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{91}}{90\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{143}}{80\sqrt{21}} & \frac{\sqrt{143}}{20\sqrt{35}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x) \\
&\quad + \frac{\sqrt{174611}}{120\sqrt{746130}} \theta_{1,10}(x) \\
&\quad \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,8}(x) dx dx dx \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-5\sqrt{221}}{12\sqrt{119361}} & \frac{-5\sqrt{221}}{36\sqrt{39787}} & \frac{\sqrt{143}}{20\sqrt{35}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x) \\
&\quad + \frac{\sqrt{77683}}{12\sqrt{33193203}} \theta_{1,11}(x) \\
&\quad \int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta_{1,8}(x) dx dx dx \\
&= \begin{bmatrix} \frac{-3859\sqrt{323}}{60\sqrt{1317326010}} & \frac{\sqrt{146965}}{12\sqrt{965074}} & \frac{-\sqrt{26393}}{12\sqrt{2895222}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \theta_{10}(x) \\
&\quad + \frac{\sqrt{236364091}}{120\sqrt{1009949941}} \theta_{1,12}(x)
\end{aligned}$$

elde ederiz.

Burada

$$\begin{aligned}
&P''_{10 \times 10} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{24} & \frac{1}{12\sqrt{13}} & \frac{1}{24\sqrt{5}} & \frac{1}{12\sqrt{210}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\sqrt{3}}{40} & \frac{-1}{24} & \frac{-1}{24\sqrt{15}} & 0 & \frac{1}{12\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{24\sqrt{5}} & \frac{1}{24\sqrt{15}} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12\sqrt{462}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{210}} & \frac{\sqrt{7}}{24\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{7}}{120\sqrt{6}} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{691}}{120\sqrt{3003}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{12\sqrt{21}} & \frac{-1}{36\sqrt{7}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12\sqrt{429}} & 0 & 0 \\ \frac{-17\sqrt{11}}{120\sqrt{210}} & \frac{-\sqrt{11}}{12\sqrt{70}} & \frac{-\sqrt{11}}{60\sqrt{42}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3617}}{120\sqrt{15470}} & 0 \\ \frac{\sqrt{143}}{8\sqrt{6910}} & \frac{\sqrt{143}}{8\sqrt{20730}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{43867}}{24\sqrt{4687053}} \\ \frac{\sqrt{91}}{90\sqrt{11}} & \frac{\sqrt{143}}{80\sqrt{21}} & \frac{\sqrt{143}}{240\sqrt{35}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-5\sqrt{221}}{12\sqrt{119361}} & \frac{-5\sqrt{221}}{36\sqrt{39787}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-3859\sqrt{323}}{60\sqrt{1317326010}} & \frac{-\sqrt{146965}}{12\sqrt{965074}} & \frac{-\sqrt{29393}}{12\sqrt{2895222}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(2.16)

ve

$$\begin{aligned}
& \bar{\theta}_{10}(x)'' \\
& = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{174611}}{120\sqrt{746130}}\theta_{1,10}(x) \\ \frac{\sqrt{77683}}{12\sqrt{33193203}}\theta_{1,11}(x) \\ \frac{\sqrt{236364091}}{120\sqrt{1009949941}}\theta_{1,12}(x) \end{bmatrix} \quad (2.17)
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\int_0^x \int_0^x \int_0^x \theta(x) dx dx dx = P''_{10 \times 10} \theta_{10}(x) + \bar{\theta}_{10}''(x) \quad (2.18)$$

ile tanımlanır.

Aynı şekilde farklı  $n$  değerleri için farklı boyutlarda fonksiyonel matrisler tanımlanır.

### 2.3. Yakınsaklık Analizi ve Bernoulli Dalgacıkları İle İlgili Bazı Teoremler

**$L^2(\mathbb{R})$  Fonksiyon Uzayı:** Gerçel sayılarda karesi integrallenebilen tüm fonksiyonların oluşturduğu uzaydır.

**$L^2(\mathbb{R})$ 'de Sürekli Fonksiyonlar:**  $u(x, t)$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  uzayında  $[m, n]$  aralığında tanımlı olsun. Bu durumda  $u(x, t)$  fonksiyonu  $t \in [m, n]$  değişkenine göre  $L^2(\mathbb{R})$  de sürekli ancak ve ancak  $\forall t \in [m, n]$  için  $t' \rightarrow t$  iken  $u(x, t') \rightarrow u(x, t)$  dir.

Bu tanıma göre eğer  $u(x, t)$  fonksiyonu  $t \in [m, n]$  değişkenine göre  $[m, n]$  aralığında sürekli ise o zaman  $\|u(x, t)\|$  normu da  $t$  değişkenine göre  $[m, n]$  aralığında sürekli dir.

**Riesz Fischer Teoremi:**  $L^2$  uzayında  $\{r_s\}_{s=1}^{\infty}$  dizisi yine  $L^2$  uzayında bir fonksiyona yakınsar. Yani  $L^2$  uzayında bir  $\{r_s\}_{s=1}^{\infty}$  dizisi tanımlarsak bu dizinin limiti de her zaman  $L^2$  uzayında yer alır.

**Teorem 1** (Kumbinarasaiah ve Mulimani, 2023):  $u(x, t)$ ,  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  uzayında sürekli, sınırlı ve  $[0,1) \times [0,1)$  aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. O halde  $u(x, t)$ 'nin Bernoulli dalgacık açılımı  $u(x, t)$ 'ye düzgün yakınsar.

**İspat:**  $u(x, t)$ ,  $[0,1) \times [0,1)$  aralığında tanımlı, sürekli ve  $L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  uzayına ait bir fonksiyon olsun. Ayrıca  $u(x, t)$  fonksiyonu  $\mu$  reel sayısı ile sınırlı olsun. O zaman  $u(x, t)$ 'nin yaklaşımı,

$c_{i,j} = \langle u(x, t), \theta_{i,j}(x), \theta_{i,j}(t) \rangle$  ve  $\langle, \rangle$  iç çarpım olmak üzere,

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j} \theta_{i,j}(x) \theta_{i,j}(t)$$

olur.  $\theta_{i,j}(x)$  ve  $\theta_{i,j}(t)$   $[0,1)$  aralığında ortogonal fonksiyonlardır. Dolayısıyla,

$$c_{i,j} = \int_0^1 \int_0^1 u(x, t) \theta_{i,j}(x) \theta_{i,j}(t) dx dt$$

$$c_{i,j} = \int_0^1 \int_I u(x, t) \frac{2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!}} a_{2m}} b_m(2^{k-1}x - n + 1) \theta_{i,j}(t) dx dt$$

olur. Öyleki  $I = \left[\frac{n-1}{2^{k-1}}, \frac{n}{2^{k-1}}\right]$ .  $2^{k-1}x - n + 1$  ifadesinin yerine  $r$  yazarsak,

$$c_{i,j} = \frac{2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!}} a_{2m}} \int_0^1 \int_0^1 u\left(\frac{r-1+n}{2^{k-1}}, t\right) b_m(r) \frac{dr}{2^{k-1}} \theta_{i,j}(t) dt$$

elde ederiz.

$$c_{i,j} = \frac{2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!}} a_{2m}} \int_0^1 \left[ \int_0^1 u\left(\frac{r-1+n}{2^{k-1}}, t\right) b_m(r) \frac{dr}{2^{k-1}} \right] \theta_{i,j}(t) dt.$$

İntegral için genelleştirilmiş ortalama değer teoreminden,

$$c_{i,j} = \frac{2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!}} a_{2m}} \int_0^1 u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, t\right) \theta_{i,j}(t) dt \left[ \int_0^1 b_m(r) dr \right]$$

elde edilir.  $\xi \in (0,1)$  için,  $\int_0^1 b_m(r) dr = A$  dersek,

$$c_{i,j} = \frac{A 2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!}} a_{2m}} \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, t\right) \frac{2^{\left(\frac{k-1}{2}\right)}}{\sqrt{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!}} a_{2m}} b_m(2^{k-1}t - n + 1) dt$$

$$c_{i,j} = \frac{A}{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m} \frac{n-1}{2^{k-1}}} \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, t\right) b_m(2^{k-1}t - n + 1) dt$$

$2^{k-1}x - n + 1 = s$  kabul edersek,

$$c_{i,j} = \frac{A}{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m}} \int_0^1 u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, \frac{s-1+n}{2^{k-1}}\right) b_m(s) \frac{ds}{2^{k-1}}$$

$$c_{i,j} = \frac{A2^{-k+1}}{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m}} \int_0^1 u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, \frac{s-1+n}{2^{k-1}}\right) b_m(s) ds.$$

İntegral için genelleştirilmiş ortalama değer teoreminden,

$$c_{i,j} = \frac{A2^{-k+1}}{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m}} u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, \frac{s-1+n}{2^{k-1}}\right) \int_0^1 b_m(s) ds,$$

$\xi_1 \in (0,1)$  için,  $\int_0^1 b_m(r) dr = B$  dersek,

$$c_{i,j} = \frac{AB2^{-k+1}}{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m}} u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, \frac{\xi_1-1+n}{2^{k-1}}\right), \forall \xi, \xi_1 \in (0,1).$$

Dolayısıyla,

$$|c_{i,j}| = \left| \frac{AB2^{-k+1}}{\frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m}} \right| \left| u\left(\frac{\xi-1+n}{2^{k-1}}, \frac{\xi_1-1+n}{2^{k-1}}\right) \right|$$

olur.  $u, \mu$  ile sınırlı olduğundan,

$$|c_{i,j}| = \frac{|A||B||2^{-k+1}|\mu|}{\left| \frac{(-1)^{m-1}(m!)^2}{(2m)!} a_{2m} \right|}$$

olur. Dolayısıyla,  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{i,j}$  yakınsaktır. Bu sebeple  $u(x, t)$ 'nin Bernoulli dalgacık açılımı düzgün yakınsaktır.

**Teorem 2** (Kumbinarasaiah ve Mulimani, 2023):  $[m, n]$  aralığında  $L^2(\mathbb{R})$  de

sürekliliği olan  $\{b_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$  olarak tanımlanan Bernoulli dalgacık dizisi  $\{\theta_{i,j}\}_{i=1}^{\infty}, [m, n]$  aralığında  $t$  değişkenine göre  $L^2(\mathbb{R})$  de düzgün olarak  $u(x, t)$  fonksiyonuna yakınsıyorsa, o zaman  $u(x, t)$  fonksiyonu da  $[m, n]$  aralığında  $t$  değişkenine göre  $L^2(\mathbb{R})$  de süreklidir.

**İspat:** Bernoulli dalgacık dizisi  $\{\theta_{i,j}^s(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  de  $u(x,t)$ 'ye düzgün yakınsadığından,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \|\theta_{i,j}^s(x,t) - u(x,t)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall t \in [m,n] \quad (2.19)$$

olacak şekilde  $s = s_\varepsilon$  vardır.

Ayrıca,  $\{\theta_{i,j}^s(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$  dizisi  $L^2(\mathbb{R})$  de  $t$  üzerinde  $[m,n]$  aralığında sürekli olduğundan,

$\forall \varepsilon > 0$  için bir  $\delta = \delta_\varepsilon$  sayısı vardır ki,

$$\|t' \rightarrow t\| < \delta, \forall t \in [m,n] \text{ için } \|\theta_{i,j}^s(x,t') - \theta_{i,j}^s(x,t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (2.20)$$

olur. Şimdi  $\|u(x,t') - u(x,t)\|$  üç parçaya ayırıp (2.19) ve (2.20) numaralı eşitsizlikleri de kullanırsak,

$$\begin{aligned} \|u(x,t') - u(x,t)\| &= \|u(x,t') - \theta_{i,j}^s(x,t') + \theta_{i,j}^s(x,t') - \theta_{i,j}^s(x,t) + \theta_{i,j}^s(x,t) - u(x,t)\| \\ &\leq \|u(x,t') - \theta_{i,j}^s(x,t')\| + \|\theta_{i,j}^s(x,t') - \theta_{i,j}^s(x,t)\| + \|\theta_{i,j}^s(x,t) - u(x,t)\| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da'nin  $[a,b]$  aralığında  $t$  değişkenine göre  $L^2(\mathbb{R})$  de sürekli olduğunu gösterir.

**Teorem 3** (Kumbinarasaiah ve Mulimani, 2023): Bernoulli dalgacık dizisi  $\{\theta_{i,j}^s(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  de  $t$  üzerinde  $[m,n]$  aralığında kendisine düzgün yakınsıyorsa, o zaman,  $L^2(\mathbb{R})$  de  $t$  üzerinde  $[m,n]$  aralığında sürekli bir  $u(x,t)$  fonksiyonu vardır ve  $\forall t \in [m,n]$  için  $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{i,j}^s(x,t) = u(x,t)$  olur.

**İspat:** Riesz Fischer teoremi gereği,

$$\forall t \in [m,n] \text{ için } \lim_{k \rightarrow \infty} \theta_{i,j}^s(x,t) = u(x,t) \quad (2.21)$$

olacak şekilde bir  $u(x,t) \in L^2(\mathbb{R})$  fonksiyonu vardır. Şimdi,

$$\|\theta_{i,j}^{s_{i+1}}(x,t') - \theta_{i,j}^{s_i}(x,t)\| < \frac{1}{2^i}, \forall t \in [a,b] \quad (2.22)$$

olacak şekilde,  $\{\theta_{i,j}^{s_i}(x,t)\}_{s=1}^{\infty}$  bir alt dizisi düşünelim. Bu alt diziyi kullanarak  $u(x,t)$  fonksiyonunu,

$$u(x,t)$$

$$= \lim_{p \rightarrow \infty} \theta_{i,j}^{s_p}(x,t) = \theta_{i,j}^{s_i}(x,t) + \left( \theta_{i,j}^{s_{i+1}}(x,t) - \theta_{i,j}^{s_i}(x,t) \right) + \left( \theta_{i,j}^{s_{i+2}}(x,t) - \theta_{i,j}^{s_{i+1}}(x,t) \right) + \dots,$$

şeklinde yazarız. (2.22) numaralı eşitsizliği kullanırsak,

$$\begin{aligned} \|u(x, t) - \theta_{i,j}^{s_i}(x, t)\| &\leq \|\theta_{i,j}^{s_i+1}(x, t) - \theta_{i,j}^{s_i}(x, t)\| + \|\theta_{i,j}^{s_i+2}(x, t) - \theta_{i,j}^{s_i+1}(x, t)\| + \dots \\ &\leq \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^{i+1}} + \dots = \frac{1}{2^{i-1}}, i = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

olur. Bu da  $\{\theta_{i,j}^{s_i}(x, t)\}_{s=1}^{\infty}$  alt dizisinin,  $L^2(\mathbb{R})$  de  $t$  üzerinde  $[m, n]$  aralığında  $u(x, t)$  fonksiyonuna düzgün yakınsadığını gösterir. Teorem 2 gereği  $u(x, t)$  fonksiyonu  $L^2(\mathbb{R})$  de  $t$  üzerinde  $[m, n]$  aralığında süreklidir.

### 3. KDV DENLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

#### 3.1. KdV Denklemleri

Dalga davranışlarının dinamiğini açıklamak için birden fazla matematiksel model kullanılmıştır (Peregrine, 1996; Peregrine, 1967; Bahadır, 2005; Özer ve Kutluay, 2005; Khalfallah, 2007). KdV denklemleri de bunlardan biridir. Korteweg-de Vries (KdV) denklemleri, Diederik Johannes Korteweg ve Gustav De Vries tarafından sığ ve dar kanallardaki düşük genlikli su dalgalarını modellemek için 1895'te ilk kez tanıtılan doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir (Korteweg ve De Vries, 1985).

KdV denklemleri, soliton çözümlere sahiptir. Solitonlar, hızlarını ve şekillerini koruyan, doğrusal olmayan dalgalardır. Bu sayede uzun mesafeler boyunca bozulmadan hareket edebilirler. KdV denklemleri matematik, fizik ve mühendislikte birçok uygulama alanında kullanılır. Su dalgaları, plazma fiziği, optik bu uygulama alanlarından bazılarıdır.

KdV denklemleri,  $\beta, \alpha$  gerçekte sayılar, başlangıç koşulları,

$$u(x, 0) = u_0, a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

sınır koşulları,

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, 0 \leq t \leq T \quad (3.2)$$

olmak üzere

$$u_t + \alpha u u_x + \beta u_{xxx} = 0 \quad (3.3)$$

ile ifade edilir.



### 3.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun KdV Denkleminin Uygulanması

Bu kısımda ele alınan yöntemin (3.3) denkleminin uygulanışını ele alacağız. (3.3) denkleminin  $\beta = 1, \alpha = 1$  olmak üzere

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \quad (3.4)$$

şeklinde dir.

Bernoulli dalgacıkları,

$$\theta^T(x) = [\theta_{1,0}(x), \dots, \theta_{1,M-1}(x), \theta_{2,0}(x), \dots, \theta_{2,M-1}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},0}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},M-1}(x)]$$

ve,  $K = [k_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, j = 0, 1, \dots, M - 1$  olmak üzere,

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^3 \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (3.5)$$

eşitliğini kabul edelim. Şimdi (3.5) eşitliğinin  $t$ 'ye göre integralini alalım,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^3} + \int_0^t \theta^T(x) K \theta(t) dt \\ \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} &= \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^3} + \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (3.6)$$

elde edilir. (3.6) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alalım,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x^2} + \int_0^x \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] dx \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x^2} + [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (3.7)$$

olur. (3.7) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alalım,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + x \left[ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \\ &\quad + \int_0^x [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + x \left[ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x^2} \right] + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \\ &\quad + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (3.8)$$

elde edilir. Şimdi de (3.8) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$u(x, t) = u(0, t) + x \left[ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \right] + \frac{x^2}{2} \left[ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x^2} \right] + u(x, 0) - u(0, 0) + [P''\theta(x) + \bar{\theta}''(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \quad (3.9)$$

olur. (3.9) eşitliğinde  $t$ 'ye göre türev alalım,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + x \left[ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x \partial t} \right] + \frac{x^2}{2} \left[ \frac{\partial^3 u(0, t)}{\partial x^2 \partial t} \right] \\ &+ [P''\theta(x) + \bar{\theta}''(x)]^T K \frac{d}{dt} [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (3.10)$$

elde edilir. (3.6)-(3.10) eşitliklerini (3.4) eşitliğinde yerine koyup, fiziksel koşulları kullanalım.  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu denklem sistemini çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerini buluruz. Bu katsayı değerlerini (3.9) da yerine yazarsak (3.4) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz.

### 3.3. Test Problemi 1

(3.3) eşitliğinde,  $\alpha = -6, \beta = 1$  için fiziksel koşulları,

$$u(0, t) = -\frac{1}{6(1-t)}, \quad u(x, 0) = \frac{x-1}{6}$$

ve kesin çözümü,

$$u(x, t) = \frac{1}{6} \left( \frac{x-1}{1-t} \right)$$

olan,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \quad (3.11)$$

KdV denklemini ele alalım ve denklemin  $k = 1, M = 2$  için nümerik çözümünü bulalım.

$$\theta(x) = [\theta_{1,0}(x), \theta_{1,1}(x)]^T \text{ Bernoulli dalgacıkları } K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

Bölüm 3.2. de uyguladığımız Bernoulli dalgacık sıralama metodunu kullanalım.

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^3 \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (3.12)$$

kabul edelim. Şimdi (3.12) eşitliğinin  $t$ 'ye göre integralini alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} &= \int_0^t \theta^T(x) K \theta(t) dt \\ \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} &= \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)]\end{aligned}\quad (3.13)$$

elde edilir. (3.13) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \int_0^x \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] dx \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)]\end{aligned}\quad (3.14)$$

olur. (3.14) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{6(1-t)} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \int_0^x [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{1}{6(1-t)} + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)]\end{aligned}\quad (3.15)$$

elde edilir. Şimdi de (3.15) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \frac{-1}{6(1-t)} + x \left[ \frac{1}{6(1-t)} - \frac{1}{6} \right] + \frac{x-1}{6} + \frac{1}{6} \\ &\quad + [P''\theta(x) + \bar{\theta}''(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)]\end{aligned}\quad (3.16)$$

olur. (3.16) eşitliğinde  $t$ 'ye göre türev alalım,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{6(1-t)} + [P''\theta(x) + \bar{\theta}''(x)]^T K \frac{d}{dt} [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \quad (3.17)$$

elde edilir. (3.13)-(3.17) eşitliklerini (3.11) eşitliğinde yerine koyup, fiziksel koşulları

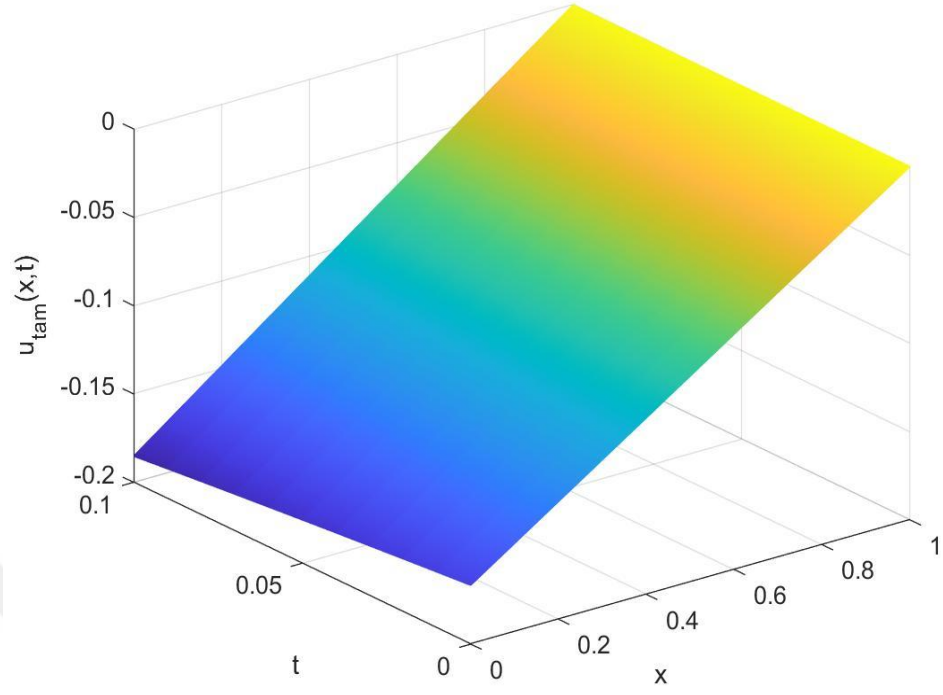
kullanalım.  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını

kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

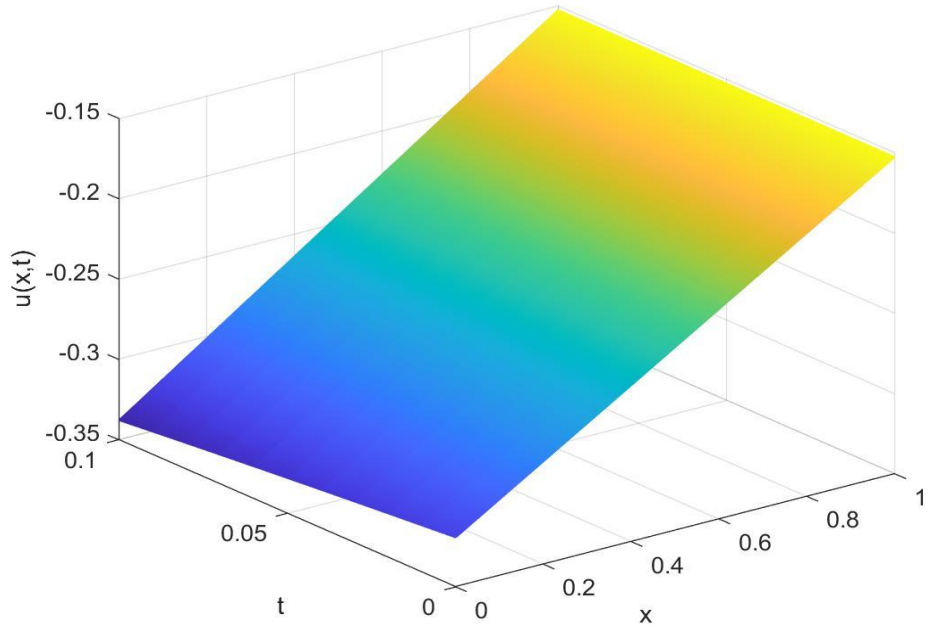
Bu denklem sistemini çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerini

$$K = \begin{bmatrix} 0.335391378 & 0.09916333 \\ 0.372983532 & 0.91211620254 \end{bmatrix}$$

şeklinde buluruz. Bu katsayı değerlerini (3.16) de yerine yazarsak (3.11) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz. Elde ettiğimiz çözümler sonucunda hata değerleri  $L_2=0.0531$ ,  $L_\infty = 0.1527$  şeklinde bulunmuştur.



**Şekil 3.1.**  $x \in [0,1]$  ,  $t \in [0,0.1]$  ,  $h=0.001$  ,  $\Delta t=0.01$  için KdV denkleminin tam çözümü



**Şekil 3.2.**  $x \in [0,1]$  ,  $t \in [0,0.1]$  ,  $h=0.001$  ,  $\Delta t=0.01$  için KdV denkleminin sayısal çözümü

### 3.4. Test Problemi 2

(3.3) eşitliğinde,  $\alpha = 6, \beta = 1$  için fiziksel koşulları,

$$u(0, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (-ct) - x_0 \right), u(x, 0) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} x - x_0 \right)$$

ve kesin çözümü,

$$u(x, t) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct) - x_0 \right)$$

olan,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 6u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} = 0 \quad (3.18)$$

KdV denklemini ele alalım ve denklemin  $k = 1, M = 2$  için nümerik çözümünü bulalım.

$$\theta(x) = [\theta_{1,0}(x), \theta_{1,1}(x)]^T \text{ Bernoulli dalgacıkları } K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^3 \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (3.19)$$

kabul edelim. Bölüm 3.2. de uyguladığımız Bernoulli dalgacık sıralama metodunu kullanarak Test Problemi 1’de yapılan işlemlere benzer şekilde,  $t$  ve  $x$  e bağlı integrelleri

sırası ile aldığımızda,  $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, u(x, t)$  değerleri buluruz.

$x_0 = 7, c = 0.5$  için bulunan değerleri (3.18) eşitliğinde yerine koyarak fiziksel koşulları kullanalım. Böylece  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

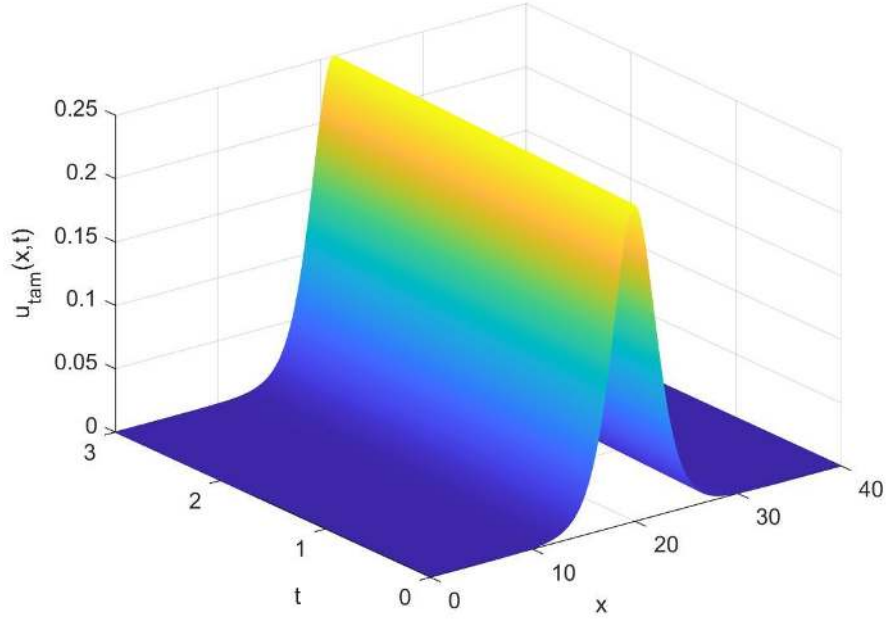
Bu denklem sistemi maple yardımıyla çözüldüğünde Bernoulli dalgacık katsayı değeri

$$K = \begin{bmatrix} 5.16616662 \times 10^{-7} & -1.78989756 \times 10^{-7} \\ 1.652568240 \times 10^{-6} & 6.551024138 \times 10^{-7} \end{bmatrix}$$

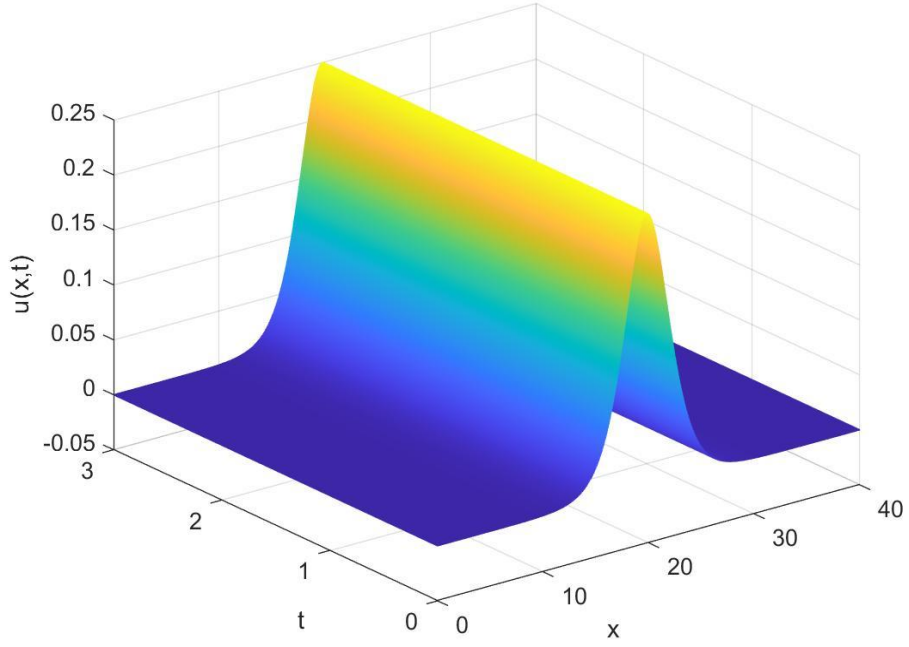
şeklinde bulunur. Bu katsayı değerlerini  $u(x, t)$  de yerine yazarsak (3.18) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz.

**Tablo 3.1.**  $t=3$  için KdV Test Problemi 2 Hata Değerleri

| $\Delta t$ |                             | $L_2$       | $L_\infty$ |
|------------|-----------------------------|-------------|------------|
| 0.02       | (Oruç, Bulut, & Esen, 2016) | 3.89100e-04 | 852346e-05 |
| 0.02       |                             | 8.5228e-07  | 8.9540e-08 |



Şekil 3.3.  $x \in [0,40]$  ,  $t \in [0,3]$ ,  $h=0.001$ ,  $\Delta t= 0.01$  ve  $c=0.5$  için KdV denkleminin tam çözümü



Şekil 3.4.  $x \in [0,40]$  ,  $t \in [0,3]$ ,  $h=0.001$   $\Delta t= 0.01$  ve  $c=0.5$  için KdV denkleminin sayısal çözümü

## 4. EW DENKLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

### 4.1. EW Denklemi

EW denklemi doğrusal olmayan dağıtıcı dalga denklemlerinden birisidir, özellikle plazma dalgalarının ve sıg su dalgalarının modellenmesini kullanılır. Denklemin terimleri bağımlı değişkenin doğrusal olmayan fonksiyonlarını içerir ve soliton çözümlere sahiptir. EW denkleminin genel formu  $\mu$  reel sabit, başlangıç koşulları,

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (4.1)$$

sınır koşulları,

$$u(a, t) = \alpha_1, u(b, t) = \alpha_2, u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0 \quad (4.2)$$

olmak üzere,

$$u_t + uu_x - \mu u_{xxt} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t > 0 \quad (4.3)$$

şeklindedir.

EW denklemi analitik olarak çözülmesi zor bir denklemdir bu sebeple genellikle sayısal yöntemlerle çözülür. Sonlu farklar, sonlu elemanlar ve spektral yöntemler bu sayısal yöntemlerinden bazılarıdır. Bu tez çalışmasında Bernoulli dalgacık sıralama metodu kullanılarak sayısal çözümü hesaplanacaktır.

### 4.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun EW Denklemine Uygulanması

Bu kısımda ele alınan yöntemin (4.3) denklemine uygulanışını ele alacağız. (4.3) eşitliği  $\mu = 1$  olmak üzere,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (4.4)$$

şeklindedir.

Bernoulli dalgacıkları,

$$\theta^T(x) = [\theta_{1,0}(x), \dots, \theta_{1,M-1}(x), \theta_{2,0}(x), \dots, \theta_{2,M-1}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},0}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},M-1}(x)]$$

ve,  $K = [k_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, j = 0, 1, \dots, M - 1$  olmak üzere,

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (4.5)$$

eşitliğini kabul edelim. Şimdi (4.5) eşitliğinin  $t$ 'ye göre integralini alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} &= \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^2 \partial t} + \int_0^t \theta^T(x) K \theta(t) dt \\ \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} &= \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^2 \partial t} + \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)]\end{aligned}\quad (4.6)$$

elde edilir. (4.6) eşitliğinin tekrar  $t$ 'e göre integralini alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x^2} + t \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^2 \partial t} + \int_0^x \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] dx \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + t \frac{\partial^3 u(x, 0)}{\partial x^2 \partial t} + \theta^T(x) K [P'\theta(t) + \bar{\theta}'(t)]\end{aligned}\quad (4.7)$$

olur. (4.7) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + t \left[ \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x \partial t} \right] \\ &\quad + \int_0^x \theta^T(x) K [P'\theta(t) + \bar{\theta}'(t)] \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + t \left[ \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x \partial t} \right] \\ &\quad + [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T [P'\theta(t) + \bar{\theta}'(t)]\end{aligned}\quad (4.8)$$

elde edilir. Şimdi de (4.8) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned}u(x, t) &= u(0, t) + x \left[ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \right] + u(x, 0) - u(0, 0) \\ &\quad + t \left[ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} - x \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x \partial t} \right] + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K [P'\theta(t) + \bar{\theta}'(t)]\end{aligned}\quad (4.9)$$

olur. (4.9) eşitliğinde  $t$ 'ye göre türev alalım,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + x \left[ \frac{\partial^2 u(0, t)}{\partial x \partial t} \right] + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial t} - x \frac{\partial^2 u(0, 0)}{\partial x \partial t} \\ &\quad + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)]\end{aligned}\quad (4.10)$$

elde edilir. (4.6)-(4.10) eşitliklerini (4.4) eşitliğinde yerine koyup, fiziksel koşulları

kullanalım.  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını

kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu denklem sistemini maple yardımıyla çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerlerini buluruz. Bu katsayı



değerlerini (4.9) de yerine yazarsak (4.4) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz.

### 4.3. Test Problemi

(4.3) eşitliğinde,  $\mu = 1$  için fiziksel koşulu,

$$u(x, 0) = 3c \operatorname{sech}^2(s(x - x_0))$$

ve kesin çözümü,

$$u(x, t) = 3c \operatorname{sech}^2(s(x - x_0 - vt)) \quad (4.11)$$

olan,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = 0 \quad (4.12)$$

EW denklemini ele alalım ve denklemin  $k = 1, M = 2$  için nümerik çözümünü bulalım. (4.11) eşitliğinde verilen başlangıç koşulunda  $s = \frac{1}{2}, v = c = 0.1, x_0 = 10$  kabul edelim.

$$\theta(x) = [\theta_{1,0}(x), \theta_{1,1}(x)]^T \text{ Bernoulli dalgacıkları } K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

bölüm 3.2. de uyguladığımız Bernoulli dalgacık sıralama metodunu kullanalım.

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t^2} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (4.13)$$

kabul edelim. Bölüm 4.2'de yapılan işlemlere benzer şekilde,  $t$  ve  $x$  e bağlı integrellari

sırası ile aldığımızda,  $\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t}, \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u(x, t)$  değerleri buluruz.

Bulunan değerleri (4.12) eşitliğinde yerine koyarak fiziksel koşulları kullanalım. Bu

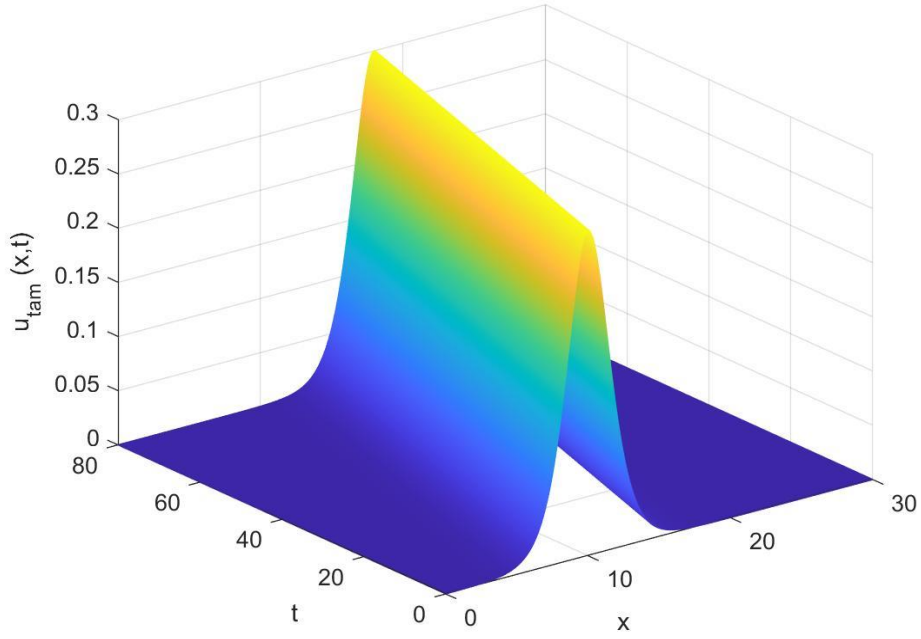
durumda  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını

kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

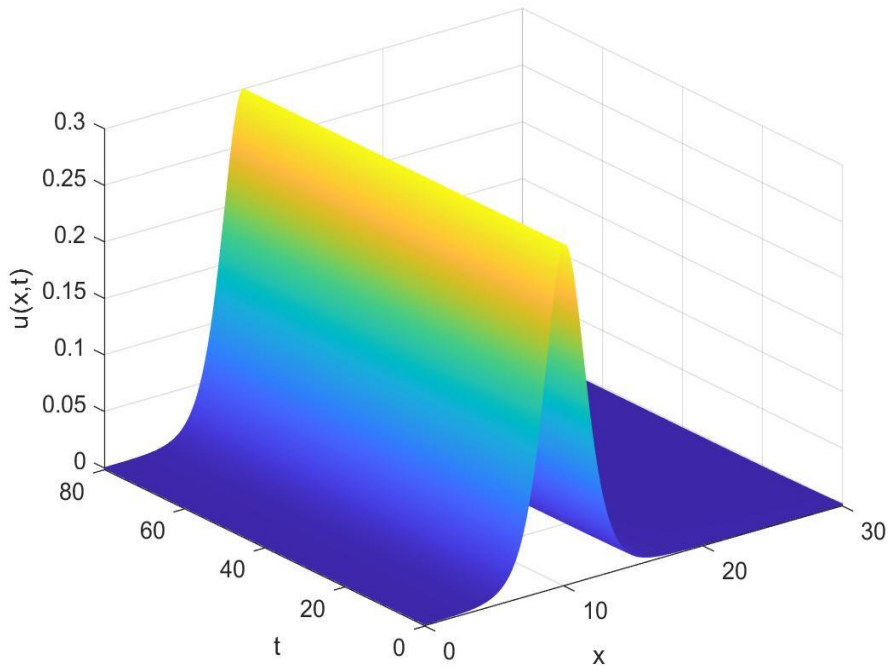
Bu denklem sistemini çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerini

$$K = \begin{bmatrix} 2.91859750 \times 10^{-6} & -0.00006396332006 \\ 0.00007457854633 & 3.301837974 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Bu katsayı değerlerini  $u(x, t)$  de yerine yazarsak (4.12) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz. . Elde ettiğimi çözümler sonucunda hata değerleri  $L_2=0.0034, L_\infty = 1.2239e - 05$  şeklinde bulunmuştur.



**Şekil 4.1.**  $x \in [0,30]$  ,  $t \in [0,80]$  ,  $h=0.03$   $\Delta t= 0.05$  ve  $c=0.1$  için EW denkleminin tam çözümü



**Şekil 4.2.**  $x \in [0,30]$  ,  $t \in [0,80]$  ,  $h=0.03$   $\Delta t= 0.05$  ve  $c=0.1$  için EW denkleminin sayısal çözümü

## 5. ADVECTION DENKLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

### 5.1. Advection Denklemi

Advection denklemi akışkanlar mekaniği, çevre mühendisliği, meteoroloji gibi alanlarda çok önemli bir yere sahip olan kısmi diferansiyel denklemdir. Temel olarak bir akışkanın (gaz veya sıvı) içindeki bir özelliğin (ısı, kirlilik, yoğunluk,...) akışkanın hareketi ile nasıl taşındığını açıklar. Advection denklemi bu taşıma sürecinin matematiksel olarak ifade edilmesini sağlar. Advection eklemenin uygulama alanları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz,

Okyanus bilim: Okyanus akıntılarındaki tuzluluk, kirlilik, sıcaklık taşınımı.

Meteoroloji: Atmosferdeki sıcaklık ve nem gibi özelliklerinin taşınımı.

Çevre mühendisliği: Kirliliğe sebep olan maddelerin taşınımı. Örneğin, fabrika dumanının rüzgarla taşınması.

Kimya mühendisliği: Kimyasal reaksiyonlarda maddelerin taşınımı.

Akışkanlar mekaniği: Akışkanlar içindeki çeşitli özelliklerini taşınması. Örneğin, bir borudaki sıvının içinde bir kimyasal madde taşınması.

Advection denklemi  $\alpha, \mu$  sabit reel sayılar, başlangıç ve sınır koşulları,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), a \leq x \leq b \\ u(a, t) &= u(b, t) = 0, \quad u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0, \quad t \in [0, T] \end{aligned} \quad (5.1)$$

olmak üzere,

$$u_t + \alpha u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (5.2)$$

şeklindedir.

### 5.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun Advection Denklemine Uygulanması

Bu kısımda ele alınan yöntemin (5.2) denklemine uygulanışını ele alacağız. (5.2) eşitliği  $\alpha = \mu = 1$  olmak üzere,

$$u_t + u_x - u_{xx} = 0 \quad (5.3)$$

şeklindedir.

Bernoulli dalgacıkları,

$$\theta^T(x) = [\theta_{1,0}(x), \dots, \theta_{1,M-1}(x), \theta_{2,0}(x), \dots, \theta_{2,M-1}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},0}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},M-1}(x)]$$

ve,  $K = [k_{i,j}] \quad i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, j = 0, 1, \dots, M-1$  olmak üzere,

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (5.4)$$

eşitliğini kabul edelim. Şimdi (5.4) eşitliğinin  $t$ 'ye göre integralini alalım,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + \int_0^t \theta^T(x) K \theta(t) dt \\ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (5.5)$$

elde edilir. Şimdi de (5.5) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \quad (5.6)$$

Şimdi de (5.6) eşitliğinin tekrar  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(0, t) + u(x, 0) - u(0, 0) + x \left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \right) \\ &\quad + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

olur. (5.7) eşitliğinde  $t$ 'ye göre türev alalım,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + x \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K \theta(t) \quad (5.8)$$

elde edilir. (5.5)-(5.8) eşitliklerini (5.3) eşitliğinde yerine koyup, fiziksel koşulları kullanalım.  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını

kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu denklem sistemini çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerlerini buluruz. Bu katsayı değerlerini (5.7) de yerine yazarsak (5.3) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz.

### 5.3. Test Problemi

(5.2) eşitliğinde,  $\alpha = 1$  ve  $\mu=0$  için fiziksel koşulu,

$$u(x, 0) = 10 \exp \left( -\frac{(x - x_0)^2}{2\gamma^2} \right)$$

ve kesin çözümü,

$$u(x, t) = 10 \exp \left( -\frac{(x - x_0 - at)^2}{2\gamma^2} \right) \quad (5.9)$$

olan,

$$u_t + u_x = 0 \quad (5.10)$$

Advection denklemini ele alalım.

$k = 1, M = 2$  için nümerik çözümünü bulalım. (5.9) eşitliğinde verilen başlangıç koşulunda  $\alpha = 0.5, \gamma = 264, x_0 = 2$  kabul edelim.

$$\theta(x) = [\theta_{1,0}(x), \theta_{1,1}(x)]^T \text{ Bernoulli dalgacıkları } K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

bölüm 5.2. de uyguladığımız Bernoulli dalgacık sıralama metodunu kullanalım.

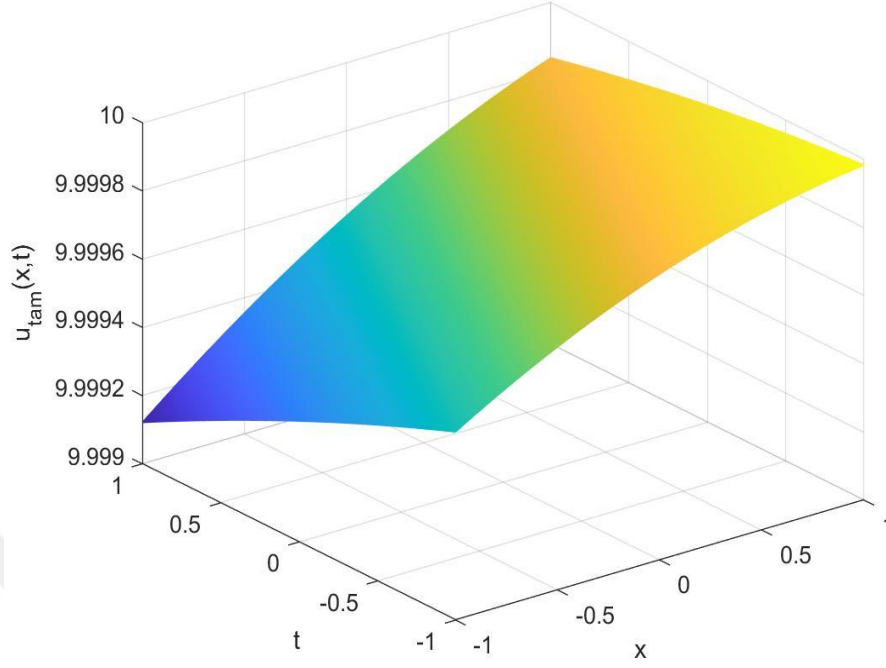
$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (5.11)$$

eşitliğini kabul edelim. Bölüm 5.2’de yapılan işlemlere benzer şekilde,  $t$  ve  $x$  e bağlı integrelleri sırası ile aldığımızda,  $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u(x, t)$  değerleri buluruz. Bulunan değerleri (5.10) eşitliğinde yerine koyarak fiziksel koşulları kullanalım. Bu durumda  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

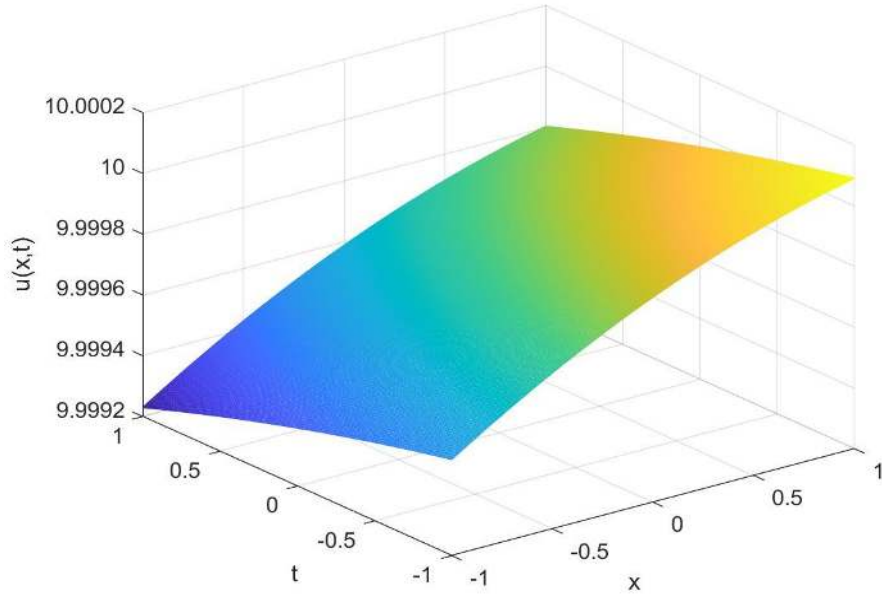
Bu denklem sistemini çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerini

$$K = \begin{bmatrix} 2.91859750 \times 10^{-6} & -0.00006396332006 \\ 0.00007457854633 & 3.301837974 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

olarak buluruz. Bu katsayı değerlerini  $u(x, t)$  de yerine yazarsak (5.10) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz. Elde ettiğimi çözümler sonucunda hata değerleri  $L_2=9.1131e-04, L_\infty=1.0834e-04$  şeklinde bulunmuştur.



Şekil 5.1.  $x \in [-1,1]$ ,  $t \in [-1,1]$ ,  $h=\Delta t= 0.01$  için advection denkleminin tam çözümü



Şekil 5.2.  $x \in [-1,1]$ ,  $t \in [-1,1]$ ,  $h=\Delta t= 0.01$  için advection denkleminin sayısal çözümü

## 6. BURGER DENKLEMİNİN BERNOULLİ DALGACIK SIRALAMA METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMÜ

### 6.1. Burger Denklemi

Burger denklemi akışkanlar mekaniğinde oldukça sık kullanılan bir kısmi türevli diferansiyel denklemdir. Bu denklem hem iç sürtünmeli (viskoz) hem de sürtünmesiz (viskoz olmayan) akışkanların davranışlarını modellemede kullanılır. Burger denklemi, adını Johannes Martinus Burgers'den alır. (Burgers, 1948)

Burger denklemi türbülans adındaki karmaşık akış davranışlarını basitleştirilmiş modellerle açıklar ve bu sayede su akışı, hava akımı gibi doğal olaylarda ve mühendislik uygulamalarında kullanılan simülasyonlar yapılabilir.

Burger denklemi şok dalgaları gibi ani değişimlerin olduğu durumları modelleme de kullanılır. Bu durum patlamalar ve ses hızını aşan hareketlerin anlaşılması için oldukça önemlidir.

Burger denkleminin analitik çözümü vardır fakat doğrusal olmayan yapısı nedeniyle analitik olarak çözülmesi çok zordur. Farklı dalgacık yaklaşımları yardımıyla denklemin çözümü ile ilgili birden fazla çalışma mevcuttur. (Qian ve Weiss, 1993; Avudainayagam ve Vani, 1999; Chiavassa , Guichaoua ve Liandrat, 2002)

Denklemin bazı uygulama alanlarını,

- Akışkanlar mekaniği
- Plazma fiziği
- Trafik akışı
- Opsiyon fiyatlandırması
- Popülasyon dinamikleri

şekilde sıralayabiliriz.

Kısaca Burger denklemi akışkanların davranışların anlamak için fazlasıyla güçlüdür çünkü karmaşık fiziksel olayları nispeten daha basit matematiksel yapı ile ifade eder ve birçok farklı alanda uygulanabilirliği mevcuttur.

Başlangıç koşulları,

$$u(x, 0) = f(x), a < x < b \quad (6.1)$$

sınır koşulları,

$$u(a, t) = g_1(t), u(b, t) = g_2(t), t > 0 \quad (6.2)$$

olmak üzere,

$$u_t + uu_x = vu_{xx} \quad (6.3)$$

ile verilen denkleme Burger denklemi denir. (6.1), (6.2) eşitliklerindeki  $f(x), g_1(t), g_2(t)$  değerleri bilinen değerler olup,  $v > 0$  değeri ise akışkanın kinematik viskozitesidir. (Çelikten, 2020)

## 6.2. Bernoulli Dalgacık Sıralama Metodunun Burger Denklemine Uygulanması

Bu kısımda ele alınan yöntemin (6.3) denklemine uygulanışını ele alacağız. (6.3) eşitliği  $v = 1$  olmak üzere,

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (6.4)$$

şeklindedir.

Bernoulli dalgacıkları,

$$\theta^T(x) = [\theta_{1,0}(x), \dots, \theta_{1,M-1}(x), \theta_{2,0}(x), \dots, \theta_{2,M-1}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},0}(x), \dots, \theta_{2^{k-1},M-1}(x)]$$

ve,  $K = [k_{i,j}]$   $i = 1, 2, \dots, 2^{k-1}, j = 0, 1, \dots, M-1$  olmak üzere,

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (6.5)$$

eşitliğini kabul edelim. Şimdi (6.5) eşitliğinin  $t$ 'ye göre integralini alalım,

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + \int_0^t \theta^T(x) K \theta(t) dt$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial x^2} + \theta^T(x) K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \quad (6.6)$$

elde edilir. Şimdi de (6.6) eşitliğinin  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} + [P\theta(x) + \bar{\theta}(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \quad (6.7)$$

Şimdi de (6.7) eşitliğinin tekrar  $x$ 'e göre integralini alırsak,

$$u(x, t) = u(0, t) + u(x, 0) - u(0, 0) + x \left( \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} - \frac{\partial u(0, 0)}{\partial x} \right) + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K [P\theta(t) + \bar{\theta}(t)] \quad (6.8)$$

olur. (6.8) eşitliğinde  $t$ 'ye göre türev alalım,

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(0, t)}{\partial t} + x \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} + [P'\theta(x) + \bar{\theta}'(x)]^T K \theta(t) \quad (6.9)$$

elde edilir. (6.6)-(6.9) eşitliklerini (6.4) eşitliğinde yerine koyup, fiziksel koşulları

kullanalım.  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını

kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz. Bu denklem sistemini çözersek



Bernoulli dalgacık katsayılarının değerlerini buluruz. Bu katsayı değerlerini (6.8) de yerine yazarsak (6.4) denkleminin sayısal çözümünü elde etmiş oluruz.

### 6.3. Test Problemi

(6.3) eşitliğinde,  $v = 1$  için sağlanan fiziksel koşulu,

$$u(x, 0) = x, u(0, t) = 0$$

ve kesin çözümü,

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}$$

olan,

$$u_t + uu_x = u_{xx} \quad (6.10)$$

Burger denklemini ele alalım.

$$\theta(x) = [\theta_{1,0}(x), \theta_{1,1}(x)]^T \text{ Bernoulli dalgacıkları } K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix} \text{ olmak üzere,}$$

bölüm 6.2. de uyguladığımız Bernoulli dalgacık sıralama metodunu kullanalım.

$$\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} = \theta^T(x) K \theta(t) \quad (6.11)$$

eşitliğini kabul edelim. Bölüm 6.2’de yapılan işlemlere benzer şekilde,  $t$  ve  $x$  e bağlı

integrellari sırası ile aldığımızda,  $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} u(x, t)$  değerleri buluruz.

Bulunan değerleri (6.10) eşitliğinde yerine koyarak fiziksel koşulları kullanalım. Bu

durumda  $i = 1, 2, \dots, [2^{k-1}M]^2$  için  $x_i = t_i = \frac{2i-1}{[2^{k-1}M]^2}$  kolakasyon noktalarını

kullanarak bir cebirsel denklem sistemi elde ederiz.

Bu denklem sistemini çözersek Bernoulli dalgacık katsayılarının değerini

$$K = \begin{bmatrix} 1.11 \times 10^{-8} & 6.788397111 \times 10^{-9} \\ 1.290238813 \times 10^{-9} & -9.244820013 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

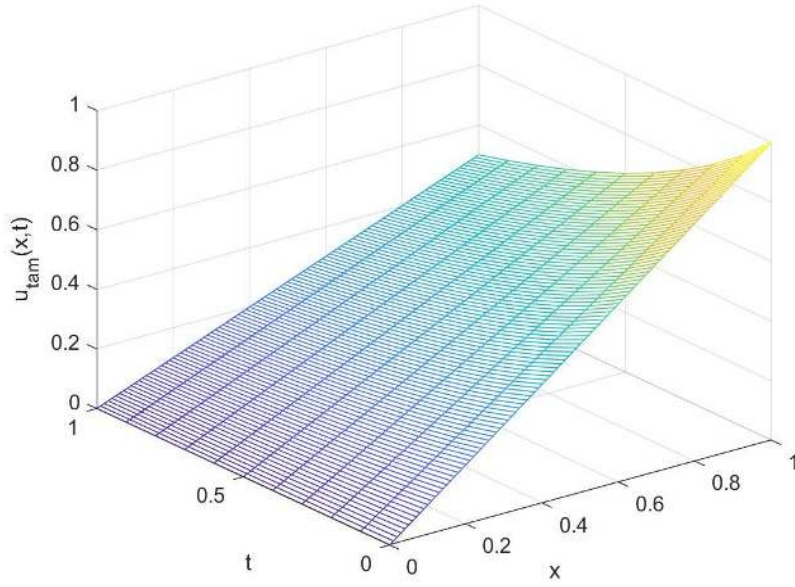
olarak buluruz. Bu katsayı değerlerini  $u(x, t)$  de yerine yazarsak (6.10) denkleminin

sayısal çözümünü elde etmiş oluruz. Elde ettiğimi çözümler sonucunda hata değerleri

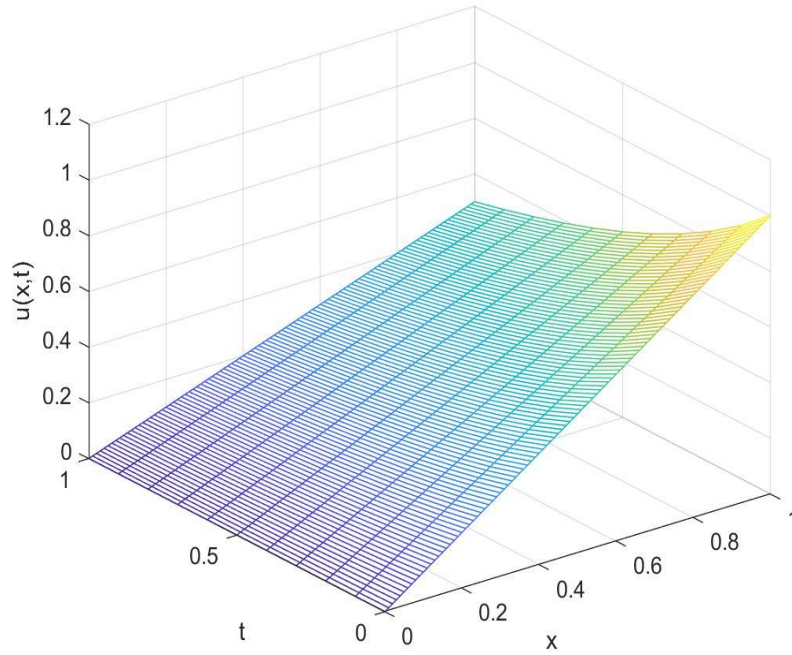
$L_2=1.0752e-07, L_\infty=1.0619e-08$  şeklinde bulunmuştur.

**Tablo 6.1.**  $t=1$  için Burger Denklemi Hata Değerleri

| $\Delta t$ |                         | $L_2$      | $L_\infty$ |
|------------|-------------------------|------------|------------|
| 0.01       | (Palav & Pradhan, 2025) | 8.8797e-08 | 1.2335e-07 |
| 0.01       |                         | 1.0752e-07 | 1.0619e-08 |



**Şekil 6.1.**  $x \in [0,1]$ ,  $t \in [0,1]$ ,  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $v = 1$  için Burger denkleminin tam çözümü



**Şekil 6.2.**  $x \in [0,1]$ ,  $t \in [0,1]$ ,  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.1$ ,  $v = 1$  için Burger denkleminin sayısal çözümü

## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, Bernoulli dalgacık sıralama metoduna dayalı etkili bir sayısal çözüm algoritması sunarak ele aldığımız bazı kısmi diferansiyel denklemleri başarıyla çözdük. Önerilen algoritmayı yürütmek için Maple ve Matlab programlarını kullandık. Her iki yazılımda da ele aldığımız kısmi diferansiyel denklemleri, Bernoulli dalgacık yöntemini kullanarak çözmek ve grafikleri çizmek için gerekli kodlar geliştirdik.

Bernoulli dalgacık sıralama metodunu tanımlayarak sırası ile KdV, EW, Advection ve Burger denklemlerini Bernoulli dalgacık sıralama yöntemi ile çözdük. Bu çalışmada elde edilen çözümlerin kesin çözümlere oldukça iyi yaklaşımlar sağladığını gördük. Yöntemimizi literatürdeki mevcut yöntemlerin çözümleri ile karşılaştırıp,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hatalarını incelediğimizde oldukça iyi sonuçlar elde edildiği gördük. Tüm sonuçları değerlendirdiğimizde ise önerilen algoritmanın Bernoulli dalgacık sıralama yöntemini kullanarak kısmi diferansiyel denklemleri çözmede etkili ve güvenilir bir performans gösterdiği açıktır.

Bu tezde elde edilen sonuçlarının farklı alanlardaki çalışmalara katkıda bulunabileceği öngörülmektedir. Gelecekte, yöntem farklı denklemlere uygulanarak veya farklı  $k$  ve  $M$  değerleri alınarak çalışmalar genişletilebilir.

## KAYNAKÇA

- Aldroubi, A. and Unser, M. (2017). *Wavelets in Medicine and Biology*. Routledge, ISBN 9780203734032.
- Avudainayagam, A. and Vani, C. (1999). Wavelet-Galerkin solutions of quasilinear hyperbolic conservation equations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 15, 589-601.
- Bahadır, A. R. (2005). Exponential Finite-Difference Method Applied to Korteweg–de Vries Equation for Small Times. *Applied Mathematics and Computation*, 160, 675-682.
- Baleanu, D. (2012). *Advances in Wavelet Theory and Their Applications in Engineering, Physics and Technology*. IntechOpen, ISBN: 978535104940.
- Bujurke, N. M., Sihiralashetti, S. and Salimath, C. (2007). Numerical solution of stiff systems from nonlinear dynamics using single-term Haar wavelet series. *Nonlinear Dynamics*, 51, 595-605.
- Bujurke, N. M., Sihiralashetti, S. and Salimath, C. (2008). Computation of eigenvalues and solutions of regular Sturm–Liouville problems using Haar wavelets. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 219, 90-101.
- Bujurke, N., Sihiralashetti, S. and Salimath, C. (2009). An application of single-term Haar wavelet series in the solution of nonlinear oscillator equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 277, 234-244.
- Burgers, J. M. (1948). A Mathematical Model Illustrating the Theory of Turbulence. *Advances in Applied Mechanics*, 1, 171-199.
- Chiavassa, G., Guichaoua, M. and Liandrat, J. (2002). Two adaptive wavelet algorithms for non-linear parabolic partial differential equations. *Computers & Fluids*, 31, 467-480.
- Çelikten, G. (2020). Burger Denkleminin Sayısal Çözümleri İçin Logaritmik Sonlu Fark Yöntemi. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 13(3), 984-994.
- Islam, S., Imran, A. and Bozidar, S. (2010). The numerical solution of second-order boundary-value problems by collocation method with the Haar wavelets. *Mathematical and Computer Modelling*, 52, 1577-1590.
- Keshavarz, E. O. (2014). Bernoulli wavelet operational matrix of fractional order integration and its applications in solving the fractional order differential equations. *Applied Mathematical Modelling*, 38, 6038-6051.

- Khalfallah, M. (2007). New Exact Traveling Wave Solutions of the  $(3 + 1)$  Dimensional Kadomtsev–Petviashvili (KP) Equation. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 37, 17-19.
- Korteweg, D. and De Vries, G. (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 39.240, 422-443.
- Kumbinarasaiah, S. and Mulimani, M. (2023). Bernoulli Wavelets Numerical Approach for the Nonlinear Klein–Gordon and Benjamin–Bona–Mahony Equation. *International Journal of Applied and Computational Mathematics*, Volume 9, article number 108.
- Lepik, Ü. (2007). Application of the Haar wavelet transform to solving integral and differential equations. *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences Physics Mathematics* 56(1), 28-46.
- Morettin, P. A., Pinheiro, A. and Vidakovic, B. (2017). *Wavelets in Functional Data Analysis*. Springer International Publishing, ISBN: 9783319596235.
- Openheim, G., Misiti, M., Misiti, Y. and Poggi, J. M. (2013). *Wavelets and their Applications (ISTE)*. Wiley, ISBN: 9781118613597.
- Oruç, Ö., Bulut, F. and Esen, A. (2016). Numerical solution of the KdV equation by Haar wavelet method. *Pramana-Journal of Physics*, Volume 87, article number 94.
- Özer, S. and Kutluay, S. (2005). An Analytical–Numerical Method for Solving the Korteweg–de Vries Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 164, 789-797.
- Palav, M. and Pradhan, V. (2025). Efficient numerical solution of Burgers' equation using collocation method based on re-defined uniform hyperbolic polynomial B-splines. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, DOI:10.1007/s12190-025-02390-7.
- Peregrine, D. H. (1967). Long Waves on a Beach. *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 815-827.
- Peregrine, D. H. (1996). Calculations of the Development of an Undular Bore. *Journal of Fluid Mechanics*, 25, 321-330.
- Qian, S. and Weiss, J. (1993). Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations. *Journal of Computational Physics*, 106, 155-175.

- Rafael, G. C. and Wintz, P. (1987). *Digital Image Processing*. United States: Addison-Wesley Longman, Addison-Wesley Longman.
- Sarkar, T. K., Salazar-Palma, M. and Michael, C. W. (2002). *Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics*. London: Artech House, ISBN: 97815880538008.
- Shiralashetti, S. C. and Deshi, A. B. (2016). An efficient Haar wavelet collocation method for the numerical solution of multi-term fractional differential equations. *Nonlinear Dynamics* , Volume 83, pages 293–303.
- Starck, J.-L. and Murtagh, F. (2013). *Astronomical Image and Data Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, ISBN: 9783662049068.
- Stepinski, T., Uhl, T. and Staszewski, W. (2013). *Advanced Structural Damage Detection: From Theory to Engineering Applications*. Wiley, ISBN: 978-1-118-53612-4.

## ÖZGEÇMİŞ

**ORCID NO:** 0009-0005-3368-7763

**Ad Soyad** : Aysel Köksal

**Yabancı Dil** : İngilizce

### Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2007-2011, Konya Selçuk Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2012-2013, Matematik Öğretmeni, Çiçekdağı Şehit Bayram Tekin Anadolu Lisesi
- 2013-2019, Matematik Öğretmeni, Çiçekdağı Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi
- 2019-2022, Matematik Öğretmeni, Mihalgazi Şehit Nuri Tavşanlıoğlu Anadolu Lisesi
- 2022-2025 Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Uygulamalı Matematik Bilim Dalı, Yüksek Lisans
- 2022- , Matematik Öğretmeni, Eskişehir Kenan Yalçın Anadolu Lisesi