



BERNSTEIN TİPLİ OPERATÖRLERİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Seval ŞENOCAK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2021

ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Seval ŞENOCAK

26.01.2021

BERNSTEIN TİPLİ OPERATÖRLERİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Seval ŞENOCAK

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2021

ÖZET

Bu tez 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde yaklaşımlar teorisindeki bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde Bernstein-Stancu-Kantorovich operatörlerinin yaklaşım hızı süreklilik modülü, Lipschitz sınıfından fonksiyonlar ve Peetre-K fonksiyoneli yardımıyla yaklaşım hızları incelenmiştir. Dördüncü bölüm sonuç kısmına ayrılmıştır.

Bilim Kodu : 20406
Anahtar Kelimeler : Lineer ve pozitif operatör, Bernstein polinomları, yaklaşım hızı
Sayfa Adedi : 41
Danışman : Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ

SOME APPROXIMATION PROPERTIES OF BERNSTEIN TYPE OPERATORS

(M. Sc. Thesis)

Seval ŞENOCAK

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2021

ABSTRACT

This thesis contains 4 chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some basic definitions and theorems in analysis and approximation theory are given. In the third chapter, the rate of convergence of Bernstein-Stancu-Kantorovich operators is studied with the help of the modulus of continuity, Lipschitz class functions and Peetre's K-functional. In the fourth chapter is devoted to the conclusion.

Science Code : 20406
Keywords : Linear and positive operators, Bernstein polynomials, rate of convergences
Number of pages : 41
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Gürhan İÇÖZ

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim esnasında tez konumun belirlenmesi, çalışmalarımın planlanıp yürütülmesi ve bu tezin hazırlanmasında benden desteğini esirgemeyen ve değerli vaktini bana ayıran saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Gürhan İÇÖZ 'e, her türlü bilgi birikimini benimle paylaşıp yüksek lisans eğitimimde hep desteğini hissettiğim ve emeği çok büyük olan arkadaşım Hatice ERYİĞİT 'e, tezimle ilgili değerlendirmeleri ile tezime büyük katkı sunan tez jüri üyeleri Doç. Dr. Bayram ÇEKİM ve Doç. Dr. Serhan VARMA 'ya, tezimin yazımı sırasında teknik desteğiyle her zaman yanımda olan sayın Arş. Gör. Atacan ERDİŞ 'e, eğitim hayatım ve tüm yaşantım boyunca bu noktaya gelmemi sağlayan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen ve bu süreçte yaşadığım tüm zorluklarda yanımda olan varlıklarıyla gurur duyduğum kıymetli aileme sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TANIMLAR ve TEOREMLER	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Pozitif ve Lineer Operatör Dizileri	5
2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi	9
2.4. Süreklilik Modülü	14
3. BERNSTEIN-STANCU-KANTOROVICH OPERATÖRÜ	19
3.1. Operatörün Oluşturulması	19
3.2. Yaklaşımın Hızının Hesabı	23
3.3. $S_{n,\alpha,\beta}^*$ Operatörünün r —inci Basamaktan Bir Genellemesi	32
4. SONUÇ VE ÖNERİLER	37
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ	41

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 3.1. $f(x) = \cos 2\pi x$ fonksiyonunun Stancu-Kantorovich polinomu ile yaklaşımı	26
Şekil 3.2. $f(x) = \cos 2\pi x$ fonksiyonunun Bernstein-Stancu-Kantorovich polinomu ile yaklaşımı	26



SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
$S_n(u; x)$	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir operatör dizisi
$B_n(u; x)$	Bernstein polinom dizisi
$C[0, 1]$	$[0, 1]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm reel değerli fonksiyon uzayı
$C^2[0, 1]$	$\tau, \tau', \tau'' \in C[0, 1]$ olan fonksiyon uzayı
$C^r[0, 1]$	$[0, 1]$ aralığında tanımlı $f^{(r)}$ türevlerinin sürekli olduğu fonksiyon uzayı
(u_n)	$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere bir fonksiyon dizisi
$u_n \rightarrow u$	(u_n) fonksiyon dizisinin u fonksiyonuna noktasal yakınsaması
$u_n \Rightarrow u$	(u_n) fonksiyon dizisinin u fonksiyonuna düzgün yakınsaması
$\omega(u, \rho)$	u fonksiyonunun süreklilik modülü
$\ u\ _{C[0,1]}$	$x \in [0, 1]$ için $\ u\ _{C[0,1]} = \max_{0 \leq x \leq 1} u(x) $ ile tanımlanan norm
$\ v\ _{C^2[0,1]}$	$\ v\ _{C^2[0,1]} = \ v\ _{C[0,1]} + \ v'\ _{C[0,1]} + \ v''\ _{C[0,1]}$ ile tanımlanan norm
$K(u, \rho)$	u fonksiyonunun Peetre K-fonksiyoneli
$Lip_N(\zeta)$	Lipschitz sınıfı
$B(\mu, \xi)$	Beta fonksiyonu

Kısaltmalar

Kısaltmalar	Açıklamalar
Eş.	Eşitlik/Eşitsizlik

1. GİRİŞ

Yaklaşımlar teorisinde Bernstein polinomları önemli bir rol oynamaktadır. Bu tezde bu önemli operatörün bir genellemesi üzerinde durulacaktır. Daha önce bir çok defa Bernstein operatörlerinin genellemesi yapılmıştır ve bu genellemeler, yeni özellikler elde etmeye fırsat vermiştir. Burada da başka bir bakış açısı ile Bernstein operatörleri için başka özelliklere ulaşmak hedeflenmiştir.

Bu tez, dört kısımdan oluşmaktadır.

Birinci bölüm girişe ayrılmıştır.

İkinci bölüm, daha sonra kullanılacak olan tanımlara, teoremlere ve ispatlar sırasında her defasında aynı işlemlerle okuyucuyu sıkmamak adına bazı özelliklerin ispatlarına yer verilmiştir.

Üçüncü kısımda, Bernstein operatörlerinin öncelikle Stancu tipli genellemesini sonrasında ise Kantorovich tipli integral genellemesini bir arada barındıran bir genellemesi tanımlanacaktır. Bu tanımlama daha önce verilen genellemelerden esinlenilerek tanımlanmıştır ve daha sonra yapılacak olan genellemelere esin kaynağı olmayı hedeflemiştir. Öncelikle $S_{n,\alpha,\beta}^*$ ile gösterilen bu operatörün Korovkin teoreminin koşullarını sağladığı gösterilmiştir. Sonra yaklaşım hızı hesaplaması yapılmıştır. Bu hesaplama sırasında modül olarak süreklilik modülü, Peetre K-fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfından fonksiyonlar tercih edilmiştir. Burada elde edilen yaklaşım hızı için iki grafik ile kıyaslama yapılmıştır. Daha sonra ise, $S_{n,\alpha,\beta}^*$ operatörünü de daha da genelleyip r -inci genellemesi yapılarak daha geniş bir operatör ailesi tanıtılmıştır. Hatta, en sonda üç sonuç verilerek $S_{n,\alpha,\beta}^*$ operatörü için yaklaşım hızı yardımıyla r -inci genellemesi için yaklaşım hızı hesaplanmıştır.

Dördüncü ve son kısımda ise sonuç verilmiştir.

2. TANIMLAR VE TEOREMLER

Burada, ihtiyaç duyulan bilgiler ve teoremler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

2.1.1 Tanım

$A \subseteq \mathbb{R}$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, (φ_n) bir fonksiyon dizisi ve $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her bir $x \in A$ için (φ_n) dizisi φ noktasına yakınsıyorsa (φ_n) dizisine φ ye noktasal yakınsıyor denir. Yani, her bir $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$$

ise (φ_n) dizisine φ fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir. Diğer bir deyişle, her bir $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$ olmak üzere, bir $N(x) \in \mathbb{N}$ sayısının $n \geq N(x)$ özelliğindeki her n doğal sayısı için

$$|\varphi_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε varsa (φ_n) dizisine φ fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir.

2.1.2 Tanım

A bir aralık ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere (φ_n) dizisi bir $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsasın. Bu durumda f süreklidir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi_n(x) \right)$$

olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varsigma_n(x) = \varsigma_1(x) + \varsigma_2(x) + \varsigma_3(x) + \dots$$

bir fonksiyon serisi ve $\varsigma : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

- (i). $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ζ fonksiyonuna noktasal yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x)$ serisine ζ fonksiyonuna noktasal yakınsıyor denir.
- (ii). $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi ζ fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x)$ serisine ζ fonksiyonuna düzgün yakınsıyor denir.
- (iii). $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x)$ serinin kısmi toplamlar dizisi $s_n(x) = \sum_{i=1}^n \zeta_i(x)$ olsun. $R_n(x) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \zeta_i(x)$ ifadesine bu serinin n -inci kalanı denir. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n(x) = s_n(x) + R_n(x)$ olur.

2.1.3 Tanım

$A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $\tau : A \rightarrow \mathbb{R}$ bu aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon iken bu A aralığındaki her x için $|\tau(x)| < \eta$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa τ fonksiyonu sınırlı fonksiyondur.

2.1.4 Tanım

(i) $A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $\tau : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere τ fonksiyonu $x_0 \in A$ noktasında süreklidir. $\iff \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ vardır ki $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta$ iken $|\tau(\zeta_1) - \tau(\zeta_2)| < \varepsilon$ dur.

(ii) $A \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $\tau : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere τ düzgün süreklidir. $\iff \forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ vardır ki $\forall \zeta_1 \in A$ ve $\forall \zeta_2 \in A$ için $|\zeta_1 - \zeta_2| < \delta$ iken $|\tau(\zeta_1) - \tau(\zeta_2)| < \varepsilon$ dur.

2.1.1. Teorem

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ serisinin noktasal yakınsak olması ancak ve ancak her bir $x \in A$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $N(x) \in \mathbb{N}$ sayısının $n \geq N(x)$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ için $|R_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilmesidir. Diğer bir deyişle, her bir $x \in A$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ olmasıdır.

(ii) Benzer şekilde $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ serisinin düzgün yakınsak olması ancak ve ancak her $\varepsilon > 0$ için bir $N(x) \in \mathbb{N}$ sayısının $n \geq N(x)$ özelliğindeki her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in A$ iken $|R_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bulunabilmesidir. Yani $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$ serisinin düzgün yakınsak olması için ancak ve ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{|R_n(x)| : x \in A\} = 0$$

olmasıdır.

2.1.1 Sonuç

A gerçel sayıların bir alt aralığı ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\phi_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ bir fonksiyon serisi ve $\phi : A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da A üzerinde tanımlı olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \phi_n$ serisi ϕ fonksiyonuna düzgün yakınsıyorsa ϕ süreklidir.

2.2. Pozitif ve Lineer Operatör Dizileri

F ve Y reel değerli iki fonksiyon uzayı olsun. Eğer F den alınmış herhangi f fonksiyonuna Y de bir κf fonksiyonu karşılık getiren κ kuralına operatör denir ve κf nin x deki değeri için $\kappa(f)(x) = \kappa(f;x)$ gösterimi kullanılır.

Her $\vartheta, \varpi \in F$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\kappa(\alpha\vartheta + \beta\varpi) = \alpha\kappa(\vartheta) + \beta\kappa(\varpi)$ koşulu sağlanıyor ise κ operatörüne lineer operatör denir.

2.2.5 Tanım

X ile Y vektör uzayları ve $\kappa : X \rightarrow Y$ lineer operatör olsun. κ operatörünün x noktasındaki değeri $\kappa_n(f;x)$ olarak gösterilir.

X uzayından alınan $\forall f \geq 0$ fonksiyonu için $\kappa_n(f) \geq 0$ ise κ operatörüne pozitif operatör denir.

Lineer pozitif operatörler monotondur.

2.2.2. Teorem (Korovkin Teoremi)

$f \in C[a, b]$ ve gerçel eksenin tamamında sınırlı $|f(x)| < M_f$ olsun. Eğer $\kappa_n(f; x)$ pozitif ve lineer bir operatör dizisi $[a, b]$ aralığındaki her x için

$$(i) \quad \kappa_n(1; x) \Rightarrow 1$$

$$(ii) \quad \kappa_n(k; x) \Rightarrow x$$

$$(iii) \quad \kappa_n(k^2; x) \Rightarrow x^2$$

koşullarını sağlıyorsa, $[a, b]$ de $\kappa_n(f; x)$, f e düzgün yakınsaktır.

İspat

$f \in C[a, b]$ olsun. Fonksiyonların süreklilik tanımı gereğince

$$|k - x| \leq \delta \implies |f(k) - f(x)| < \varepsilon$$

gerçeklenir. $|k - x| \leq \delta$ olduğunda ve üçgen eşitsizliğinden dolayı

$$|f(k) - f(x)| \leq |f(k)| + |f(x)| \leq 2M_f$$

gerçeklenir. Öteki taraftan

$$|k - x| > \delta \implies \frac{|k - x|}{\delta} > 1$$

olacağından $\frac{(k-x)^2}{\delta^2} > 1$ sağlanır.

$$|f(k) - f(x)| \leq 2M_f \leq 2M_f \frac{(k-x)^2}{\delta^2}$$

yazılabilir. O halde

$$|k - x| \leq \delta \Rightarrow |f(k) - f(x)| < \varepsilon$$

ve

$$|k - x| > \delta \Rightarrow |f(k) - f(x)| \leq 2M_f \frac{(k - x)^2}{\delta^2}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\forall k \in \mathbb{R}$ ve $[a, b]$ aralığındaki her x için

$$|f(k) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M_f \frac{(k - x)^2}{\delta^2}$$

dir. Eğer (i), (ii) ve (iii) koşullarını sağlayan (κ_n) operatör dizisinin

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\kappa_n(f(k); x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

eşitliğini de sağladığı gösterilirse ispat tamamlanır.

Lineerlikten

$$\begin{aligned} |\kappa_n(f(k); x) - f(x)| &= |\kappa_n(f(k); x) - f(x) + \kappa_n(f(x); x) - \kappa_n(f(x); x)| \\ &= |\kappa_n((f(k) - f(x)); x) + f(x)(\kappa_n(1; x) - 1)| \end{aligned}$$

dir. Üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$|\kappa_n(f(k); x) - f(x)| \leq |\kappa_n((f(k) - f(x)); x)| + |f(x)| |\kappa_n(1; x) - 1|$$

olur. Diğer yandan lineer pozitif operatörlerin monoton artanlığından

$$f(k) - f(x) \leq |f(k) - f(x)| \text{ olmasından dolayı}$$

$$|\kappa_n((f(k) - f(x)); x)| \leq |\kappa_n(|f(k) - f(x)|; x)|$$

elde edilir. Operatörün pozitif olmasından ve $|f(k) - f(x)| \geq 0$ olduğundan

$$|\kappa_n(|f(k) - f(x)|; x)| = \kappa_n(|f(k) - f(x)|; x)$$

dir. Bu durumda

$$|\kappa_n(f(k); x) - f(x)| \leq \kappa_n(|f(k) - f(x)|; x) + |f(x)| |\kappa_n(1; x) - 1|$$

olduğu gösterilebilir.

$$|\kappa_n(f(k); x) - f(x)| \leq \kappa_n(|f(k) - f(x)|; x) + M_f |\kappa_n(1; x) - 1|$$

yazılabilir. (κ_n) operatörünün monoton artanlığından

$$|\kappa_n(f(k); x) - f(x)| \leq \kappa_n\left(\varepsilon + 2M_f \frac{(k-x)^2}{\delta^2}; x\right) + M_f |\kappa_n(1; x) - 1|$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \kappa_n\left(\varepsilon + \frac{2M_f}{\delta^2} (k-x)^2; x\right) &= \kappa_n(\varepsilon; x) + \kappa_n\left(\frac{2M_f}{\delta^2} (k-x)^2; x\right) \\ &= \varepsilon \kappa_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} \kappa_n(k^2 - 2xk + x^2; x) \\ &= \varepsilon \kappa_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [\kappa_n(k^2; x) - x^2 + 2x^2 - 2x\kappa_n(k; x) \\ &\quad + x_n^2 \kappa(1; x) - x^2] \\ &= \varepsilon \kappa_n(1; x) + \frac{2M_f}{\delta^2} [\kappa_n(k^2; x) - x^2 + 2x(x - \kappa_n(k; x)) \\ &\quad + x^2(\kappa_n(1; x) - 1)] \end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} |\kappa_n(f(k); x) - f(x)| &\leq \varepsilon \kappa_n(1; x) + M_f |(\kappa_n(1; x) - 1)| \\ &\quad + \frac{2M_f}{\delta^2} [\kappa_n(k^2; x) - x^2 + 2x(x - \kappa_n(k; x)) + x^2(\kappa_n(1; x) - 1)] \end{aligned}$$

elde edilir. (i), (ii) ve (iii) koşullarının kullanılmasıyla $|\kappa_n(f(k);x) - f(x)| \leq \varepsilon$ bulunur.

Dolayısı ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{a \leq x \leq b} |\kappa_n(f(k);x) - f(x)| = 0$$

dır.

Korovkin, bu konudaki çalışmalara büyük katkılarda bulunmuştur. Verilen operatörün sadece 1 , k ve k^2 ifadelerinin 1 , x ve x^2 ye düzgün yakınsaması, sonlu aralıkta sürekli olan bütün fonksiyonların bu operatör yardımıyla yakınsamasını söylememiz için yeterlidir.

2.3. Lineer Pozitif Operatörlerin Önemi

Alman Matematikçi Weierstrass, sonlu aralıkta tanımlanmış her fonksiyon sürekli ise, bu sonlu aralıktaki fonksiyona polinomsal olarak düzgün yakınsayan bir polinom fonksiyonunu 1895 te ispatlamıştır. 1912 yılında Rus Matematikçi S. N. Bernstein bu polinomu $x \in [0, 1]$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$$

şeklinde ispatlamıştır.

Bernstein'in bu ispatından önce kullanacağımız bazı ifadeleri ve ispatlarını verelim.

2.3.1 Lemma

Tanımlanan Bernstein operatörleri için

$$B_n(1;x) = 1$$

$$B_n(t;x) = x$$

$$B_n(t^2;x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

dir.

İspat

Binom açılımından dolayı

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

dır. Bu açılımda $a = x$ ve $b = 1 - x$ alınırsa $B_n(1; x) = 1$ bulunur.

$$\begin{aligned} B_n(t; x) &= \sum_{p=0}^n \frac{p}{n} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{p}{n} \frac{n!}{(n-p)!p!} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= x \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-p-1)!p!} x^p (1-x)^{n-p-1} \\ &= x \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^p (1-x)^{n-p-1} \end{aligned}$$

olduğundan ve Binom açılımından dolayı $B_n(t; x) = x$ bulunur. Son olarak $f(t) = t^2$ alınırsa

$$\begin{aligned} B_n(t^2; x) &= \sum_{p=0}^n \frac{p^2}{n^2} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \sum_{p=0}^n \frac{p^2}{n^2} \frac{n!}{(n-p)!p!} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{p}{n} \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} x^p (1-x)^{n-p} \end{aligned}$$

bulunur. $\frac{p}{n} = \frac{p-1+1}{n} = \frac{p-1}{n} + \frac{1}{n}$ olduğundan son eşitlikte

$$B_n(t^2; x) = \sum_{p=1}^n \left(\frac{p-1}{n} + \frac{1}{n} \right) \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} x^p (1-x)^{n-p}$$

yazılabilir. Bu ise

$$\begin{aligned}
B_n(t^2; x) &= \sum_{p=1}^n \frac{p-1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} x^p (1-x)^{n-p} \\
&\quad + \sum_{p=1}^n \frac{1}{n} \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} x^p (1-x)^{n-p} \\
&= \frac{x^2(n-1)}{n} \sum_{p=2}^n \frac{(n-2)!}{(n-p)!(p-2)!} x^{p-2} (1-x)^{n-p} \\
&\quad + \frac{x}{n} \sum_{p=1}^n \frac{(n-1)!}{(n-p)!(p-1)!} x^{p-1} (1-x)^{n-p} \\
&= \frac{x^2(n-1)}{n} \sum_{p=0}^{n-2} \binom{n-2}{p} x^p (1-x)^{n-p-2} \\
&\quad + \frac{x}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} x^p (1-x)^{n-p-1}
\end{aligned}$$

olur ve Binom açılımından

$$B_n(t^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

elde edilir.

2.3.3. Teorem (S. N. Bernstein)

Bernstein operatörleri, $[0, 1]$ de sürekli olan her f fonksiyonuna aynı kapalı aralıkta düzgün yakınsaktır.

İspat

$$\begin{aligned}
|B_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} - f(x) \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \right| \\
&= \left| \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} - \sum_{p=0}^n f(x) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \right|
\end{aligned}$$

$$= \left| \sum_{p=0}^n \left(f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \right|$$

elde edilir. $x \in [0, 1]$ olmasından dolayı $\binom{n}{p} x^p \geq 0$ ve $(1-x)^{n-p} \geq 0$ dir. Üçgen eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{p=0}^n \left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| \leq \delta} \left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &\quad + \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| > \delta} \left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \end{aligned}$$

yazılabilir. f fonksiyonunun sürekliliğinden $\left|\frac{p}{n}-x\right| \leq \delta$ iken $\left|f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x)\right| \leq \varepsilon$ dur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| \leq \delta} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &\quad + \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| > \delta} \left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \end{aligned}$$

elde edilir. f fonksiyonu sınırlı olduğundan $\forall x \in [0, 1]$ için $\exists M > 0$ vardır ki $|f(x)| < M$ olur. Böylece

$$\left| f\left(\frac{p}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left| f\left(\frac{p}{n}\right) \right| + |f(x)| < 2M$$

dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \varepsilon \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| \leq \delta} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} + 2M \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| > \delta} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &\leq \varepsilon \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} + 2M \sum_{\left|\frac{p}{n}-x\right| > \delta} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \end{aligned}$$

bulunur.

$$|B_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{p}{n} - x\right| > \delta} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$$

dır. Diğer yandan

$$\left|\frac{p}{n} - x\right| > \delta \Rightarrow \left(\frac{p}{n} - x\right)^2 > \delta^2 \Rightarrow \frac{\left(\frac{p}{n} - x\right)^2}{\delta^2} > 1$$

olup

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &\leq \varepsilon + 2M \sum_{\left|\frac{p}{n} - x\right| > \delta} \frac{\left(\frac{p}{n} - x\right)^2}{\delta^2} \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{\left|\frac{p}{n} - x\right| > \delta} \left(\frac{p}{n} - x\right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \end{aligned}$$

bulunur. Burada ise

$$\begin{aligned} \left|\frac{p}{n} - x\right| &\geq \delta \\ \Rightarrow -\delta &\geq \frac{p}{n} - x \geq \delta \\ \Rightarrow x - \delta &\geq \frac{p}{n} \geq x + \delta \\ \Rightarrow n(x - \delta) &\geq p \geq n(x + \delta) \\ \Rightarrow n(x + \delta) &\leq p \leq n(x - \delta) \\ \Rightarrow 0 &\leq p \leq n \end{aligned}$$

$(x \in [0, 1]$ ve δ)'nin yeterince küçük olduğundan dolayı $|B_n(f;x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \sum_{p=0}^n \left(\frac{p}{n} - x\right)^2 \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p}$ dir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} |B_n(f;x) - f(x)| &\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2 \right] \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \left[\frac{x}{n} - \frac{x^2}{n} \right] \\ &= \varepsilon + \frac{2M}{n\delta^2} [x - x^2] \end{aligned}$$

elde edilir. $x \in [0, 1]$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x - x^2 \\
 \Rightarrow f'(x) &= 1 - 2x = 0 \\
 \Rightarrow x &= \frac{1}{2} \\
 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{4} \\
 \Rightarrow \max \{x - x^2\} &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

tür. Burada $x \in [0, 1]$ aralığı için maksimum alınırsa

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \varepsilon + \frac{1}{n} \frac{M}{2\delta^2}$$

bulunur. Buradan

$$\|B_n(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olması demektir.

2.4. Süreklilik Modülü

$f \in C[a, b]$ olsun. Her pozitif δ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{x, k \in [a, b] \\ |k-x| < \delta}} |f(k) - f(x)|$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir.

2.4.2 Lemma

Süreklilik modülü aşağıdaki özellikleri sağlamaktadır.

$$(1) \omega(f; \delta) \geq 0$$

$$(2) \delta_1 \leq \delta_2 \text{ ise } \omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$$

$$(3) s \in \mathbb{N} \text{ için } \omega(f; s\delta) \leq s\omega(f; \delta)$$

$$(4) \gamma \in \mathbb{R}^+ \text{ için } \omega(f; \gamma\delta) \leq (1 + \gamma)\omega(f; \delta)$$

$$(5) \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

$$(6) |f(k) - f(x)| \leq \omega(f; |k - x|)$$

$$(7) |f(k) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{|k-x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$$

İspat

(1) Süreklilik modülü, mutlak değerin supremumu olduğundan $\omega(f; \delta) \geq 0$ olduğu açıktır.

(2) $\delta_1 \leq \delta_2$ için $|t - x| \leq \delta_1$ kümesi $|t - x| \leq \delta_2$ tarafından kapsanır. Bundan dolayı supremum özelliğinden $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$ gerçekleşir.

(3) Süreklilik modülünün tanımından dolayı

$$\omega(f; s\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |t-x| \leq s\delta}} |f(t) - f(x)|$$

yazılabilir.

$$|t - x| \leq s\delta \Rightarrow x - s\delta \leq t \leq x + s\delta$$

ve $t = x + sh$ seçilirse

$$x - s\delta \leq x + sh \leq x + s\delta$$

$$\Rightarrow -s\delta \leq sh \leq s\delta$$

$$\Rightarrow -\delta \leq h \leq \delta$$

$$\Rightarrow |h| \leq \delta$$

$$\omega(f; s\delta) = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + sh) - f(x)|$$

şeklinde olur. Diğer taraftan

$$\sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + sh) - f(x)| = \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} \left| \sum_{k=0}^{s-1} [f(x + (k+1)h) - f(x + kh)] \right|$$

olup, sağdan üçgen eşitsizliği uygulandığında

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + sh) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{s-1} \sup_{\substack{x, t \in [a, b] \\ |h| \leq \delta}} |f(x + (k+1)h) - f(x + kh)| \\ &\leq \omega(f; \delta) + \dots + \omega(f; \delta) \\ &= s\omega(f; \delta) \end{aligned}$$

olur. (4) $\gamma \in \mathbb{R}^+$ için $[\gamma]$ tam değer fonksiyonu olup $[\gamma] < \gamma < [\gamma] + 1$ eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikten dolayı ve özellik (2) de ispatlanan $\omega(f; \delta)$ nın azalmayan fonksiyon olmasından dolayı

$$\omega(f; \gamma\delta) \leq \omega(f; ([\gamma] + 1)\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. $[\gamma]$ pozitif bir tamsayı olduğundan dolayı üstteki eşitsizliğe (3) özelliği uygulanabilir. Dolayısıyla

$$\omega(f; ([\gamma] + 1)\delta) \leq ([\gamma] + 1) \omega(f; \delta)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca $\forall \gamma \in \mathbb{R}^+$ için $[\gamma] + 1 \leq \gamma + 1$ olduğu bilindiğine göre

$$\omega(f; ([\gamma] + 1)\delta) \leq (\gamma + 1) \omega(f; \delta)$$

olur. Sonuç olarak $\omega(f; \gamma\delta) \leq (\gamma + 1) \omega(f; \delta)$ elde edilir ki böylece ispat tamamlanır.

(5) $|k - x| \leq \delta$ eşitsizliğinde $\delta \rightarrow 0$ demek $k \rightarrow x$ olması demektir. f fonksiyonunun sürekli olmasından ve süreklilik tanımına göre $k \rightarrow x$ olduğundan dolayı $|f(k) - f(x)| \rightarrow 0$ olduğundan ispat açıktır.

(6) $\omega(f; \delta)$ da $\delta = |k - x|$ seçilirse

$$\omega(f; |k - x|) = \sup_{x \in [a, b]} |f(k) - f(x)|$$

olduğu görülür. O halde $|f(k) - f(x)|$ lerin supremumu $\omega(f; |k - x|)$ olacağından $|f(k) - f(x)|$, $\omega(f; |k - x|)$ den küçük kalır. İspat tamamlanır.

(7) Özellik (6) dan

$$|f(k) - f(x)| \leq \omega(f; |k - x|) = \omega\left(f; \frac{|k - x|}{\delta} \delta\right)$$

elde edilebilir. Bu eşitsizlikte özellik (4) dikkate alınırsa

$$|f(k) - f(x)| \leq \left(\frac{1 + |k - x|}{\delta}\right) \omega(f; \delta)$$

bulunur. İspat tamamlanır.

3. BERNSTEIN-STANCU-KANTOROVICH OPERATÖRÜ

3.1. Operatörün Oluşturulması

Bernstein [1] çok iyi bilinen lineer pozitif operatörü olan Bernstein polinomunu

$$B_n(f; x) = \sum_{p=0}^n f\left(\frac{p}{n}\right) \binom{n}{p} x^p (1-x)^{n-p} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımladığını ve $f \in C[0, 1]$ için $B_n(f; x) \Rightarrow f(x)$ olduğunu göstermiştik. Burada " $\Rightarrow$ " düzgün yakınsaklığı gösterdiğini biliyoruz. Bernstein polinomları ile ilgili detaylara [2] referansından ulaşabilirsiniz. Philips tarafından tanıtılan Bernstein polinomlarının q-genellemesine [3] referansından ulaşılabilir. 1968 de Stancu [4]

$$\left(P_m^{(\alpha, \beta)} f\right)(x) = \sum_{k=0}^m f\left(\frac{k+\alpha}{m+\beta}\right) \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \quad (3.2)$$

operatörünü göstermiş ve her α, β reel sayıları ve $0 \leq \alpha \leq \beta$ için f sürekli fonksiyonuna $[0, 1]$ de yakınsaklığın düzgün olduğunu ispat etmiştir. Eş. (3.2) ile verilen operatöre Bernstein-Stancu polinomları denir.

Bernstein operatörlerinin Kantorovich tipli integral genellemesi, 1930 yılında Kantorovich [5] tarafından verilmiştir. $f \in L_1([0, 1])$ için bu genelleme

$$(K_m f)(x) = (m+1) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_{\frac{k}{m+1}}^{\frac{k+1}{m+1}} f(t) dt \quad (3.3)$$

$x \in [0, 1], m \geq m_0$ ve $m, m_0 \in \mathbb{N}$ için tanımlanmıştır.

Ayrıca, 2004 yılında Barbosu [6] aşağıdaki Stancu-Kantorovich operatörünü tanımlamıştır.

$$\left(K_m^{(\alpha, \beta)} f\right)(x) = (m+\beta+1) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} \int_{\frac{k+\alpha}{m+\beta+1}}^{\frac{k+\alpha+1}{m+\beta+1}} f(s) ds. \quad (3.4)$$

Barbosu, [7] ve [8] de bazı önemli yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Daha sonra, 2006 yılında Pop [9] Stancu operatörünün Kantorovich tipli integral genellemesini çalışmıştır.

Gadjiev ve Ghorbanalizadeh [10] ise 2010 yılında Bernstein-Stancu operatörlerinin yeni bir inşası ile referans noktaları ile oynayarak

$$S_{n,\alpha,\beta}(f;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^n f\left(\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1}\right) \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r} \quad (3.5)$$

operatörünü tanımlamıştır. Burada $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_1 \leq \beta_2$ olmak üzere $\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}$ ve α_k ile β_k ($k = 1, 2$) pozitif gerçel sayılardır. $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ alındığında, Eş. (3.5) ile verilen operatörün Eş. (3.2) ile verilen Bernstein-Stancu polinomuna dönüşeceği ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ seçilmesi durumunda ise polinomun klasik Bernstein polinomuna döneceği çok açıktır. [10] dan Bernstein-Stancu tipli polinomun

$$S_{n,\alpha,\beta}(e_0;x) = 1,$$

$$S_{n,\alpha,\beta}(e_1;x) = \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)x - \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{n+\beta_1},$$

$$S_{n,\alpha,\beta}(e_2;x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1}\right)^2 \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^2 + \frac{n+\beta_2}{(n+\beta_1)^2} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + \frac{2\alpha_1(n+\beta_2)}{(n+\beta_1)^2} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right) + \left(\frac{\alpha_1}{n+\beta_1}\right)^2$$

eşitliklerini sağlayacağı elde edilebilir.

Bu tezde İçöz [11] tarafından 2012 yılında yayımlanan çalışmasından faydalanılarak, Bernstein-Stancu polinomlarının bir Kantorovich tipli genellemesi tanıtılacaktır ve özellikleri incelenecektir. Burada $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \beta_1 \leq \beta_2$ olmak şartıyla $\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}$ ve α_k ile β_k ($k = 1, 2$) pozitif gerçel sayılardır.

$$S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) = (n+\beta_1+1) \left(\frac{n+\beta_2}{n}\right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2}\right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x\right)^{n-r} \times \int_{\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{r+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} f(s) ds \quad (3.6)$$

$\alpha_2 = \beta_2 = 0$ için açıktır ki Eş. (3.6) ile verilen polinomlar Eş. (3.4) ile verilen polinomlara ve $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ için bu polinomlar Eş.(3.3) ile verilen Bernstein Kantorovich operatörüne dönmektedir.

Bu tezin amacı, sürekli fonksiyon uzaylarında $S_{n,\alpha,\beta}^*$ polinomunun f fonksiyonuna yaklaşımını ve yaklaşımın derecesini araştırmaktır. Ayrıca, bu operatörün yaklaşım özellikleri ve r -inci genellemesi verilecektir.

İlk olarak, $S_{n,\alpha,\beta}^*$ operatörünün f fonksiyonuna yaklaşımını veren aşağıdaki teorem verilecektir.

3.1.1. Teorem

f sürekli fonksiyonu $[0, 1]$ de tanımlansın. Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f; x) - f(x) \right| = 0$$

elde edilir.

İspat

Binom katsayılarının özellikleri operatörde değerlendirilirse, $f(t) = 1$ için

$$\begin{aligned} S_{n,\alpha,\beta}^*(1; x) &= (n + \beta_1 + 1) \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right)^r \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^{n-r} \int_{\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{r+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} ds \\ &= \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right)^r \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^{n-r} \\ &= \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} + \frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^n \\ &= 1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

bulunur. $f(t) = t$ için ise

$$S_{n,\alpha,\beta}^*(t; x) = (n + \beta_1 + 1) \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right)^r \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^{n-r} \int_{\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{r+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} s ds$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(n+\beta_1+1)} \left(\frac{n+\beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x \right)^{n-r} [2(r+\alpha_1)+1] \\
&= \frac{n+\beta_1}{n+\beta_1+1} S_{n,\alpha,\beta}(t;x) + \frac{1}{2(n+\beta_1+1)} \\
&= \frac{n+\beta_1}{n+\beta_1+1} \left(\frac{n+\beta_2}{n+\beta_1} x - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{n+\beta_1} \right) + \frac{1}{2(n+\beta_1+1)} \\
&= \frac{n+\beta_2}{n+\beta_1+1} x - \frac{\alpha_2-\alpha_1}{n+\beta_1+1} + \frac{1}{2(n+\beta_1+1)} \tag{3.8}
\end{aligned}$$

olacaktır. Benzer bir durum $f(t) = t^2$ için denenirse

$$\begin{aligned}
S_{n,\alpha,\beta}^*(t^2;x) &= (n+\beta_1+1) \left(\frac{n+\beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x \right)^{n-r} \int_{\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{r+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} s^2 ds \\
&= \frac{1}{3(n+\beta_1+1)^2} \left(\frac{n+\beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right)^r \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x \right)^{n-r} \\
&\quad \times [3(r+\alpha_1)^2 + 3(r+\alpha_1) + 1] \\
&= \left(\frac{n+\beta_1}{n+\beta_1+1} \right)^2 S_{n,\alpha,\beta}(t^2;x) + \frac{n+\beta_1}{(n+\beta_1+1)^2} S_{n,\alpha,\beta}(t;x) + \frac{1}{3(n+\beta_1+1)^2} \\
&\quad + \frac{n+\beta_2}{(n+\beta_1+1)^2} x + \frac{\alpha_1^2-\alpha_2+\alpha_1}{(n+\beta_1+1)^2} + \frac{1}{3(n+\beta_1+1)^2} \tag{3.9}
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılabacaktır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(t^v;x) - x^v \right| = 0, \quad v = 0, 1, 2 \tag{3.10}$$

eşitliği elde edilecektir. Burada

$$S_n^*(f;x) = \begin{cases} S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) & , \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} \\ f(x) & , x \in \left[0, \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right) \cup \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}, 1 \right] \end{cases}$$

şeklinde bir tanım yapılırsa, açıkça

$$\|S_n^*f - f\| = \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| \tag{3.11}$$

olacaktır ve Eş. (3.10) eşitliğinin göz önünde bulundurulması ile

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(t^v; x) - x^v\|_{C[0,1]} = 0, \quad v = 0, 1, 2$$

elde edilecektir. Korovkin teoremi [12, 13, 14], S_n^* lineer pozitif operatör dizisine uygulanacak olursa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^*(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

her sürekli f fonksiyonu için yukarıdaki eşitlik elde edilecektir. Yani, Eş. (3.11)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \leq x \leq \frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2}} |S_{n,\alpha,\beta}^*(f; x) - f(x)| = 0$$

olduğunu gösterir ki bu ise ispatı tamamlar.

3.2. Yaklaşımın Hızının Hesabı

Şimdi, burada yaklaşımın hızının hesabı süreklilik modülü, Peetre K-fonksiyoneli ve Lipschitz sınıfı fonksiyonları ile yapılacaktır.

$f \in C[0, 1]$ olsun. $\omega(f; \delta)$ ile gösterilen f fonksiyonuna ait süreklilik modülü ve δ keyfi pozitif sayı olmak üzere

$$\omega(f; \delta) = \sup_{s, x \in [0, 1]} \{|f(s) - f(x)|, |s - x| \leq \delta\}$$

şeklindedir. f nin $C[0, 1]$ sürekli fonksiyon uzayında olması için gerek ve yeter şart çok iyi bilinmektedir ki

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f; \delta) = 0$$

olmasıdır ve keyfi $\delta > 0$ ile her $s \in [0, 1]$ için

$$|f(s) - f(x)| \leq \omega(f; \delta) \left(1 + \frac{|s - x|}{\delta}\right) \quad (3.12)$$

sağlanmaktadır.

Sıradaki teorem ile $\left\{S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x)\right\}$ operatör dizisinin tüm $f \in C[0,1]$ şeklindeki f fonksiyonuna süreklilik modülü ile yaklaşım hızının hesabı elde edilecektir.

3.2.2. Teorem

$[0,1]$ de tanımlı f fonksiyonu sürekli olsun. $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise,

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x)\right| \leq \begin{cases} \frac{3}{2} \omega \left(f; \sqrt{\frac{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8}{(n + \beta_1 + 1)^2}} \right) & , \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ \frac{3}{2} \omega \left(f; \sqrt{\frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8}{(n + \beta_1 + 1)^2}} \right) & , \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanacaktır.

İspat

Eş. (3.6) ile tanımlanan operatörün lineerlik ve pozitiflik özellikleri ile çok iyi bilinen Eş. (3.12) dikkate alınır,

$$\left|S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x)\right| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{S_{n,\alpha,\beta}^*((t-x)^2; x)} \right] \quad (3.13)$$

eşitsizliği elde edilecektir. Eş. (3.7) - Eş. (3.9) eşitliklerine başvurulacak olunursa

$$\begin{aligned} S_{n,\alpha,\beta}^*((t-x)^2; x) &= (n + \beta_1 + 1) \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right)^r \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^{n-r} \\ &\quad \times \int_{\frac{r + \alpha_1}{n + \beta_1 + 1}}^{\frac{r + \alpha_1 + 1}{n + \beta_1 + 1}} (s - x)^2 ds \\ &= \frac{1}{(n + \beta_1 + 1)^2} \left\{ [x(\beta_2 - \beta_1 - 1) - (\alpha_2 - \alpha_1 - 1)]^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n + \beta_2)^2}{n} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right) \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right) - (\beta_2 - \beta_1 - 1)x - \left(\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{2}{3} \right) \right\} \end{aligned}$$

bulunacaktır. $\beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1$ ve $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ eşitsizliklerinden

$$S_{n,\alpha,\beta}^* \left((t-x)^2; x \right) \leq \frac{1}{(n+\beta_1+1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \quad (3.14)$$

olacaktır. Eş. (3.14), Eş. (3.13) de yerine konulacak olursa

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^* (f; x) - f(x) \right| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{2\delta_n(n+\beta_1+1)} \sqrt{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8} \right]$$

eşitsizliği elde edilecektir. Burada $\delta_n = \frac{\sqrt{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8}}{(n+\beta_1+1)}$ seçilecek olursa

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^* (f; x) - f(x) \right| \leq \frac{3}{2} \omega \left(f; \frac{\sqrt{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8}}{(n+\beta_1+1)} \right)$$

bulunacaktır. $\beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1$ ve $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ olması durumunda ise

$$S_{n,\alpha,\beta}^* \left((t-x)^2; x \right) \leq \frac{1}{(n+\beta_1+1)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \quad (3.15)$$

olacaktır. Bu durumda Eş. (3.15), Eş. (3.13) de değerlendirilecek olunursa

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^* (f; x) - f(x) \right| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{2\delta_n(n+\beta_1+1)} \sqrt{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8} \right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu durumda $\delta_n = \frac{\sqrt{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8}}{(n+\beta_1+1)}$ seçilecek olursa

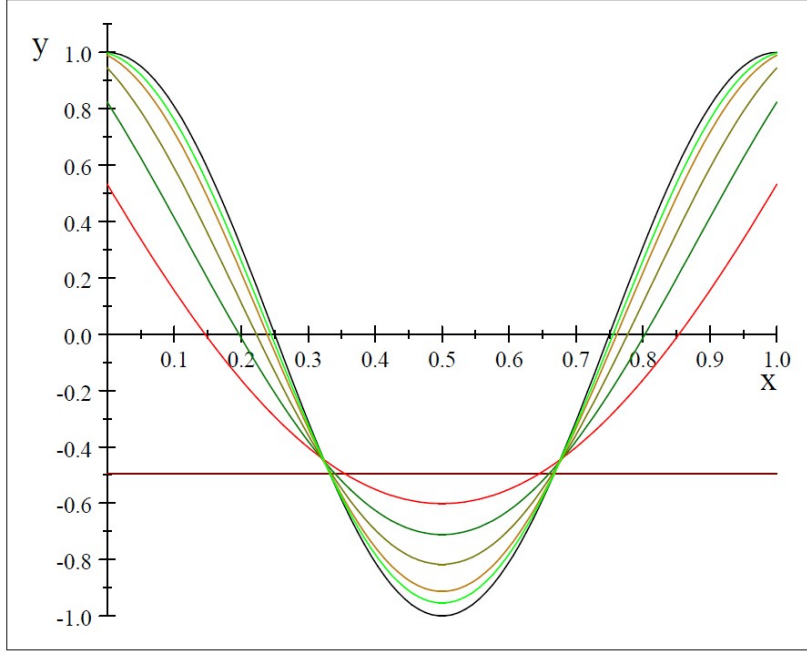
$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^* (f; x) - f(x) \right| \leq \frac{3}{2} \omega \left(f; \frac{\sqrt{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8}}{(n+\beta_1+1)} \right)$$

elde edilecektir.

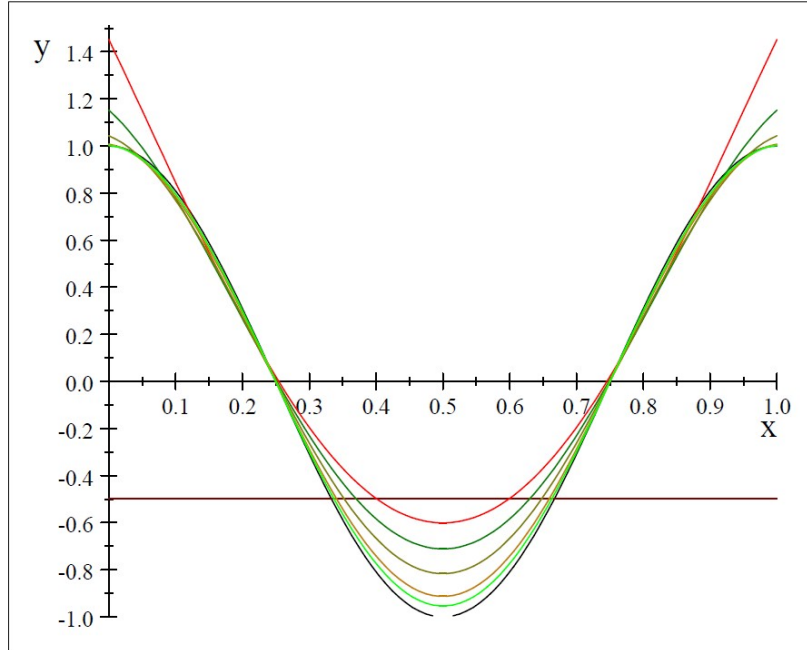
Her iki durum da ayrı ayrı gösterilip istenilen sonuca ulaşıldığı için teorem ispatı tamamlanmıştır.

$f(x) = \cos 2\pi x$ fonksiyonunun yaklaşımının Bernstein, Stancu ve Eş. (3.5) ile verilen operatör için grafikleri Gadjev ve Ghorbanalizadeh [10] tarafından verilmiştir.

Burada ise iki tane grafik, $f(x) = \cos 2\pi x$ fonksiyonun yaklaşımı için sırasıyla Eş. (3.4) ve Eş. (6) ile tanımlanan operatörler yardımıyla verilecektir.



Şekil 3.1. $f(x) = \cos 2\pi x$ fonksiyonunun Stancu-Kantorovich polinomu ile yaklaşımı



Şekil 3.2. $f(x) = \cos 2\pi x$ fonksiyonunun Bernstein-Stancu-Kantorovich polinomu ile yaklaşımı

Şimdi, sıradaki teoremden, yaklaşım hızı smooth fonksiyonlar yardımıyla hesaplanacaktır.

3.2.3. Teorem

f fonksiyonu $[0, 1]$ de tanımlanmış sürekli fonksiyon olsun. $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| \leq |f'(x)| \left| \frac{\beta_2 - \beta_1 - 1}{n + \beta_1 + 1}x + \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1}{2(n + \beta_1 + 1)} \right| + \frac{3}{4} \begin{cases} \delta_{n_1} \omega(f'; \delta_{n_1}), & \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ \delta_{n_2} \omega(f'; \delta_{n_2}), & \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

$$\delta_{n_1} = \sqrt{\frac{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8}{(n + \beta_1 + 1)^2}} \text{ ve } \delta_{n_2} = \sqrt{\frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8}{(n + \beta_1 + 1)^2}} \text{ olmak üzere sağlanır.}$$

İspat

O. Shisha ve B. Mond [15] tarafından verilen sonuç kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| &\leq |f(x)| \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(1;x) - 1 \right| \\ &+ |f'(x)| \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(t;x) - x S_{n,\alpha,\beta}^*(1;x) \right| + \sqrt{S_{n,\alpha,\beta}^*((t-x)^2;x)} \\ &\times \left[\sqrt{S_{n,\alpha,\beta}^*(1;x)} + \frac{1}{\delta_n} \sqrt{S_{n,\alpha,\beta}^*((t-x)^2;x)} \right] \omega(f'; \delta_n) \end{aligned} \quad (3.16)$$

sonucuna ulaşılır. $\beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1$ ve $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ için, Eş. (3.14) Eş. (3.16) de kullanılır ve $\delta_{n_1} = \frac{\sqrt{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8}}{(n + \beta_1 + 1)}$ seçilirse,

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| \leq |f'(x)| \left| \frac{\beta_2 - \beta_1 - 1}{n + \beta_1 + 1}x + \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1}{2(n + \beta_1 + 1)} \right| + \frac{3}{4} \delta_{n_1} \omega(f'; \delta_{n_1})$$

elde edilir.

$\beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1$ ve $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ için, Eş. (3.15) Eş. (3.16) de kullanılır ve

$$\delta_{n_2} = \frac{\sqrt{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8}}{(n + \beta_1 + 1)} \text{ seçilirse,}$$

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f; x) - f(x) \right| \leq |f'(x)| \left| \frac{\beta_2 - \beta_1 - 1}{n + \beta_1 + 1} x + \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1}{2(n + \beta_1 + 1)} \right| + \frac{3}{4} \delta_{n_2} \omega(f'; \delta_{n_2})$$

elde edilir.

Sonuç olarak her iki durum neticesinde ispat gerçekleşmiş olacaktır.

$C^2[0, 1]$ göstermektedir ki, f fonksiyonu için f, f' ve $f'' \in C[0, 1]$ özelliklerini sağlayan bir fonksiyon uzayıdır. Benzer olarak $C^2[0, 1]$ uzayında norm

$$\|f\|_{C^2[0,1]} = \|f\|_{C[0,1]} + \|f'\|_{C[0,1]} + \|f''\|_{C[0,1]}$$

ile tanımlanmaktadır.

Peetre K-fonksiyoneli

$$K(f, \delta) = \inf_{g \in C^2[0,1]} \left\{ \|f - g\|_{C[0,1]} + \delta \|g\|_{C^2[0,1]} \right\}$$

ile tanımlanmaktadır.

3.2.4. Teorem

$[0, 1]$ de tanımlı f , sürekli fonksiyon olsun. $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise, bu durumda aşağıdaki eşitsizlik

$$\left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(f; x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \leq \begin{cases} 2K(f, \delta_{n_1}^*), & \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ 2K(f, \delta_{n_2}^*), & \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

$$\delta_{n_1}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \text{ ve}$$

$$\delta_{n_2}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right]$$

için sağlanır.

İspat

$g \in C^2[0, 1]$ olduğunu kabul edelim. Taylor açılımından, operatörün lineer ve pozitifliğinden ve üçgen eşitsizliğinden

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^*(g;x) - g(x) \right| \leq \left| S_{n,\alpha,\beta}^*((s-x);x) \right| |g'(x)| + \frac{1}{2} \left| S_{n,\alpha,\beta}^*((s-x)^2;x) \right| |g''(x)| \quad (3.17)$$

elde edilir. $\beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1$ ve $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise, Eş. (3.8) ve Eş. (3.14) ler Eş. (3.17) de kullanılması ile

$$\begin{aligned} \left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(g;x) - g(x) \right\|_{C[0,1]} &\leq \left\| \frac{\beta_2 - \beta_1 - 1}{n + \beta_1 + 1} x + \frac{2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1}{2(n + \beta_1 + 1)} \right\|_{C[0,1]} \|g'(x)\|_{C[0,1]} \\ &\quad + \frac{1}{2(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \|g''(x)\|_{C[0,1]} \\ &\leq \left\{ \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{n + \beta_1 + 1} + \frac{1}{2(n + \beta_1 + 1)^2} \right. \\ &\quad \times \left. \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \right\} \|g(x)\|_{C^2[0,1]} \end{aligned} \quad (3.18)$$

eşitsizliği bulunur. Diğer taraftan, $S_{n,\alpha,\beta}^*$ lineer operatör olmasından

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| \leq \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f-g;x) \right| + |f-g| + \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(g;x) - g(x) \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak, Eş. (3.7) kullanılır ve yukarıdaki eşitsizliğin her iki yanının $[0, 1]$ üzerinden maksimumu alınır

$$\left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \leq 2 \|f(x) - g(x)\|_{C[0,1]} + \left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(g;x) - g(x) \right\|_{C[0,1]} \quad (3.19)$$

eşitsizliği elde edilir. Eş. (3.18), Eş. (3.19) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} &\leq 2 \left[\|f(x) - g(x)\|_{C[0,1]} \right. \\ &\quad + \left\{ \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \right. \\ &\quad \times \left. \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \right\} \|g(x)\|_{C^2[0,1]} \end{aligned} \quad (3.20)$$

eşitsizliği bulunur.

Eş. (3.20) eşitsizliğinin her iki tarafının $g \in C^2[0, 1]$ üzerinden infimumu alınır ve

$$\delta_{n_1}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right]$$

seçilirse

$$\left\| S_{n, \alpha, \beta}^*(f; x) - f(x) \right\|_{C[0, 1]} \leq 2K(f, \delta_{n_1}^*)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer olarak, $\beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1$ ve $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ için

$$\delta_{n_2}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right]$$

seçilirse bu sefer

$$\left\| S_{n, \alpha, \beta}^*(f; x) - f(x) \right\|_{C[0, 1]} \leq 2K(f, \delta_{n_2}^*)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu ispatın tamamlandığını gösterir.

Şimdi, $S_{n, \alpha, \beta}^*$ lineer pozitif operatörünün yaklaşım hızı $Lip_M(\alpha)$ ($0 < \alpha \leq 1$) ile hesaplanacaktır.

$f \in C[0, 1]$ fonksiyonunun $Lip_M(\alpha)$ sınıfına ait olması için

$$|f(s) - f(x)| \leq M |s - x|^\alpha, \quad s, x \in [0, 1], 0 < \alpha \leq 1 \quad (3.21)$$

sağlaması gerekmektedir.

3.2.5. Teorem

$f \in Lip_M(\alpha)$ fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & \left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \\ & \leq M \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(n+\beta_1+1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, & \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ \left\{ \frac{1}{(n+\beta_1+1)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, & \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat

$f \in Lip_M(\alpha)$ olsun. Bu durumda Eş. (3.21) eşitsizliği, $S_{n,\alpha,\beta}^*$ operatörünün lineerliği ve monotonluğu ile

$$\begin{aligned} \left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| & \leq S_{n,\alpha,\beta}^*(|f(s) - f(x)|;x) \\ & \leq M(n+\beta_1+1) \left(\frac{n+\beta_2}{n} \right)^n \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \left(x - \frac{\alpha_2}{n+\beta_2} \right)^r \\ & \quad \times \left(\frac{n+\alpha_2}{n+\beta_2} - x \right)^{n-r} \int_{\frac{r+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{r+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} |s-x|^\alpha ds \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. $p = \frac{2}{\alpha}$ ve $q = \frac{2}{2-\alpha}$ seçilmesi durumunda Hölder eşitsizliğine başvurulursa

$$\left| S_{n,\alpha,\beta}^*(f;x) - f(x) \right| \leq M \left[S_{n,\alpha,\beta}^*((s-x)^2;x) \right]^{\frac{\alpha}{2}}$$

eşitsizliği bulunur. Sırasıyla, önce Eş. (3.14) sonra da Eş. (3.15) eşitsizliklerine başvurulursa, böylelikle ispatın bittiği görülebilir.

3.3. $S_{n,\alpha,\beta}^*$ Operatörünün r -inci Basamaktan Bir Genellemesi

$[0, 1]$ de tanımlı $f^{(r)}$ türevlerinin sürekli olduğu küme $C^r[0, 1]$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) gösterimi ile tanımlanmaktadır. Burada $f^{(0)}(x) = f(x)$ dir.

Eş. (3.6) ile tanımlı $S_{n,\alpha,\beta}^*$ lineer pozitif operatörü için $f \in C^r[0, 1]$ ($r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$) ve n doğal sayı iken

$$S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f;x) = (n + \beta_1 + 1) \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right)^k \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^{n-k} \\ \times \int_{\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{k+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} \sum_{j=0}^r f^{(j)}(s) \frac{(x-s)^j}{j!} ds \quad (3.22)$$

operatörünü tanımlayalım. Eş. (3.22) ile verilen operatöre $S_{n,\alpha,\beta}^*$ operatörünün r -inci genellemesi denir [16, 17, 18, 19]. Eş. (3.22) ile verilen operatörde $r = 0$ alınırsa, Eş. (3.6) ile tanımlanan $\{S_{n,\alpha,\beta}^*\}$ operatör dizisi elde edilir.

3.3.6. Teorem

$f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve f fonksiyonları $C^r[0, 1]$ uzayında ise bu durumda

$$\left\| S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \left\| S_{n,\alpha,\beta}^*(|s-x|^{\alpha+r}; x) \right\|_{C[0,1]} \quad (3.23)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $B(\alpha, r)$ ile verilen fonksiyon Beta fonksiyonudur ve $r, n \in \mathbb{N}$ dir.

İspat

Eş. (3.22) ile tanımlanan operatör tanımından

$$f(x) - S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f;x) = (n + \beta_1 + 1) \left(\frac{n + \beta_2}{n} \right)^n \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(x - \frac{\alpha_2}{n + \beta_2} \right)^k \left(\frac{n + \alpha_2}{n + \beta_2} - x \right)^{n-k} \\ \times \int_{\frac{k+\alpha_1}{n+\beta_1+1}}^{\frac{k+\alpha_1+1}{n+\beta_1+1}} \left[f(x) - \sum_{j=0}^r f^{(j)}(s) \frac{(x-s)^j}{j!} \right] ds \quad (3.24)$$

yazılabilir. Taylor formülünden [18]

$$f(x) - \sum_{j=0}^r f^{(j)}(s) \frac{(x-s)^j}{j!} = \frac{(x-s)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-z)^{r-1} \left[f^{(r)}(s+z(x-s)) - f^{(r)}(s) \right] dz \quad (3.25)$$

elde edilir. $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ olmasından dolayı

$$\left| f^{(r)}(s+z(x-s)) - f^{(r)}(s) \right| \leq M z^\alpha |x-s|^\alpha \quad (3.26)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Beta fonksiyonunun tanımından

$$\int_0^1 z^\alpha (1-z)^{r-1} dz = \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \quad (3.27)$$

yazılabilir. Eş. (3.27) eşitliği ve Eş. (3.26) eşitsizliği Eş. (3.25) eşitliğinde kullanılırsa,

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^r f^{(j)}(s) \frac{(x-s)^j}{j!} \right| \leq \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) |x-s|^{\alpha+r} \quad (3.28)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Eş. (3.24) eşitliği ve Eş. (3.28) eşitsizliği birlikte düşünülürse, Eş. (3.23) eşitsizliğine ulaşılır ki ispat böylelikle tamamlanır.

Şimdi

$$g(s) = |s - x|^{\alpha+r} \quad (3.29)$$

ile tanımlı $g \in C[0, 1]$ fonksiyonunu dikkate alalım. $g \in C[0, 1]$ olduğundan Teorem 3.1 den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,\alpha,\beta}^*(g; x)\|_{C[0,1]} = 0$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda, Teorem 3.2.1. den, $f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve tüm $f \in C^r[0, 1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} = 0$$

olduğu görülür.

Teorem 3.1.1., Teorem 3.1.3. ve Teorem 3.1.4. de $M = b^r$ şeklinde ele alınır ve $g \in Lip_{b^r}(\alpha)$ olduğu göz önünde bulundurulursa, Teorem 3.2.1. deki aşağıdaki sonuca hemen ulaşılır.

3.3.1 Sonuç

$f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve tüm $f \in C^r[0, 1]$ için $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise

$$\delta_{n_1} = \sqrt{\frac{4(\beta_2 - \beta_1)^2 + n + 8}{(n + \beta_1 + 1)^2}}, \quad \delta_{n_2} = \sqrt{\frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + n + 8}{(n + \beta_1 + 1)^2}}$$

ve g fonksiyonu Eş. (3.29) şeklinde tanımlı iken $r \geq 1$ için

$$\|S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f; x) - f(x)\|_{C[0,1]} \leq \frac{3}{2} \frac{M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \begin{cases} \omega(g; \delta_{n_1}), & \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ \omega(g; \delta_{n_2}), & \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

3.3.2 Sonuç

$f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve tüm $f \in C^r[0, 1]$ fonksiyonları için $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise

$$\delta_{n_1}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right],$$

$$\delta_{n_2}^* = \frac{\beta_2 - \beta_1 + \alpha_2 - \alpha_1 - 1}{2(n + \beta_1 + 1)} + \frac{1}{4(n + \beta_1 + 1)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right]$$

ve g fonksiyonu Eş. (3.29) şeklinde tanımlı iken $r \geq 1$ için

$$\left\| S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \leq \frac{2M}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \begin{cases} K(g, \delta_{n_1}^*), & \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ K(g, \delta_{n_2}^*), & \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir.

3.3.3 Sonuç

$f^{(r)} \in Lip_M(\alpha)$ ve tüm $f \in C^r[0, 1]$ için $\alpha_2 - \alpha_1 \geq 1$ ise

$$\left\| S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f;x) - f(x) \right\|_{C[0,1]} \leq \frac{Mb^r}{(r-1)!} \frac{\alpha}{\alpha+r} B(\alpha, r) \begin{cases} \left\{ \frac{1}{(n+\beta_1+1)^2} \left[(\beta_2 - \beta_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, & \beta_2 - \beta_1 \geq \alpha_2 - \alpha_1 \\ \left\{ \frac{1}{(n+\beta_1+1)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + \frac{n}{4} + 2 \right] \right\}^{\frac{\alpha}{2}}, & \beta_2 - \beta_1 < \alpha_2 - \alpha_1 \end{cases}$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu son üç sonuç bize göstermektedir ki, $\{S_{n,\alpha,\beta,r}^*(f;x)\}$ dizisinin f fonksiyonuna yaklaşım hızı sırasıyla süreklilik modülü, Peetre K-fonksiyoneli ve $Lip_M(\alpha)$ ile hesaplanmaktadır ve yukarıdaki sonuçları vermektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle yaklaşımlar teorisinin en önemli ve ilk operatörü olan Bernstein polinomları ve temel bilgiler verilerek bir alt yapı oluşması hedeflenmiştir. Bu tezi inceleyen kişiler bir operatörün tanımlanması, sürekli fonksiyon uzayı, süreklilik modülü, Lipschitz sınıfı, Peetre K-fonksiyoneli ve Korovkin teoremi gibi temel bilgilere çok rahat ulaşacaktır. Daha sonraki kısımda ise elde edilen bu bilgilerle yeni bir operatör oluşturabileceği, bu oluşturulacak operatörde nelere dikkat etmesi gerektiği, ispat yaparken nasıl bir yöntem izlemesi gerektiği ve sonuçları nasıl yorumlaması gerektiği olacaktır. Bu tezden sonra bir araştırmacı, operatörü başka bir uzayda incelemesi anlamında yeni tanımlama yapabilecektir. Referans noktalarını değiştirerek bu operatörü de kapsayacak şekilde daha genel bir operatör kurabilecektir. Daha genel bir operatör yardımıyla da bulduğu sonuçları kıyaslama şansı doğacaktır. Böylelikle daha etkili ve daha genele hitap eden bir operatör elde edebilecektir. Uzayın değiştirilmesi durumunda ise yaklaşım hızının bu uzayda geçerli kalıp kalmadığı hangi yaklaşımın daha güçlü olduğu gibi yorumlara gidebilecektir. Bu tezden esinlenerek grafik ile çalışmasını destekleyen biri, bulduğu sonuçları grafik ile de yorumlama kabiliyetine sahip olacaktır.

KAYNAKLAR

1. Bernstein, S. N. (1912-1913). Demonstration du theoreme de Weierstrass fondee sur le calcul de probabilities. *Commun. Soc. Math. Kharkow*, 13(2), 1-2.
2. Lorentz, G. G. (1953). *Bernstein Polynomials*. Toronto, Univ. of Toronto Press.
3. Phillips, G. M. (1997). Bernstein polynomials based on the q-integers. *Ann. Numer. Math.*, 4, 511–518.
4. Stancu, D. D. (1968). Approximation of functions by a new class of linear polynomial operators. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 13, 1173-1194.
5. Kantorovich, L. V. (1930). Sur certain développements suivant les polynômes de la forme de S. Bernstein, I, II. *C. R. Acad. URSS*, 563–568, 595–600.
6. Barbosu, D. (2004). Kantorovich-Stancu type operators. *J. Inequal. Pure and Appl. Math.*, 5(3).
7. Barbosu, D. (2004). The Kantorovich form of Shurer-Stancu operators. *Dem. Math.*, 37(2), 383-391.
8. Barbosu, D. (2004). A survey regarding the approximation properties of the Schurer-Stancu operators. *Carpathian J. Math.*, 20(1), 1-5.
9. Pop, O. T. (2006). The Kantorovich form of Stancu Operators. *Miskolc Math. Notes*, 7(2), 161-168.
10. Gadjiev, A. D. and Ghorbanalizadeh, A. M. (2010). Approximation properties of a new type Bernstein-Stancu polynomials of one and two variables. *Appl. Math. and Comput.*, 216(3), 890-901.
11. İçöz, G. (2012). A Kantorovich variant of a new type Bernstein-Stancu polynomials. *Appl. Math. Comp.*, 2012.
12. Altomare, F. and Campiti, M. (1994). *Korovkin-type approximation theory and its applications*. de Gruyter Studies in Mathematics, 17.
13. Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear operators in the space of continuous functions (Russian). *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 90, 961–964.
14. İçöz, G. (2014). *Doğurucu fonksiyonlar içeren lineer pozitif operatörlerin yaklaşım özellikleri*. Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
15. Shisha, O. and Mond, B. (1968). The degree of convergence of sequences of linear positive operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 60, 1196-1200.

16. Doğru, O., Özarslan, M. A. and Taşdelen, F. (2004). On positive operators involving a certain class of generating functions. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 41(4), 415-429.
17. Doğru, O. (1998). Approximation order and asymptotic approximation for generalized Meyer-König and Zeller operators. *Math. Balkanica*, 12(3-4), 359-368.
18. Kirov, G. H. (1992). *Approximation with quasi-splines*. Inst. of Physics, Bristol.
19. Kirov, G. and Popova, L. (1993). A generalization of the linear positive operators. *Math. Balkanica*, 7, 149-162.





GAZİ GELECEKTİR..