

# BESSEL DENKLEMİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
(MATEMATİK)

Saime TURAN

Şubat 1988

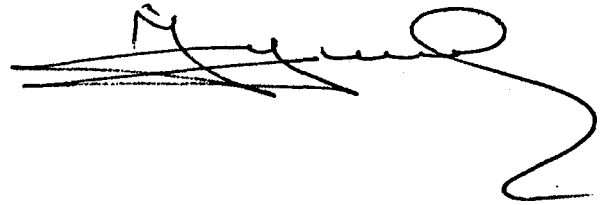
GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**T. C.**  
Yükseköğretim Kurulu  
Dokümantasyon Merkezi

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Danışman

Yrd.Doç.Dr.İrfan Baki Yaşar

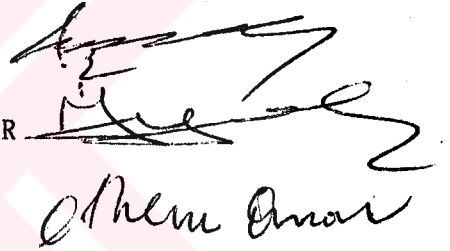


Sınav Jürisi

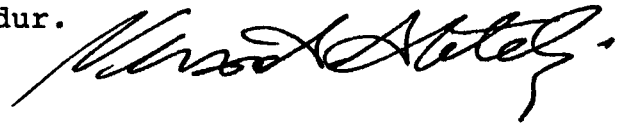
Başkan : Prof.Dr. Muhsin MERT

Üye : Yrd.Doç.Dr. İrfan Baki YAŞAR

Üye : Yrd.Doç.Dr. İ.Ethem ANAR



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü  
Tez Yazım Esaslarına uygundur.



# BESSEL DENKLEMİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Saime TURAN

GAZİ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat 1988

## ÖZ

Bu çalışmada Bessel Problemi, Bessel denklemi, Bessel fonksiyonlarının bazı özellikleri indirgeme formülleri verilmiş, Bessel diferensiyel denklemine dönüştürülebilen bazı denklemler incelenmiş ve Bessel fonksiyonları ile ilgili bir ince düzgün ağırlıklı kolonun dengesinin kendi ağırlığı altında hangi şartlar altında bükülebildiği araştırılmıştır.

ON THE BESSEL EQUATION

(M. Sc. Thesis)

Saime TURAN

GAZİ UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February 1988

ABSTRACT

In the study, we examined Bessel's problem, Bessel's equation, some properties of Bessel functions, reduced formulas, some important equations which can be reduced to Bessel's equation and we consider, as an application, a thin column whose weight is distributed uniformly and examine the conditions under which it buckles under its own weight.

## TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında göstermiş olduğu ilgi ve yardımlarından ötürü sayın Hocam Yrd.Doç.Dr. İrfan Baki Yaşar'a teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

Sayfa

|                                                                                                     |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ÖZ .....                                                                                            | i   |
| ABSTRACT .....                                                                                      | ii  |
| TEŞEKKÜR .....                                                                                      | iii |
| BÖLÜM I                                                                                             |     |
| TANIM, TEOREM VE FORMLAR .....                                                                      | 1   |
| 1.1. Lineer Diferensiyel Operatörler .....                                                          | 1   |
| 1.2. Lineer Diferensiyel Denklem .....                                                              | 3   |
| 1.3. İkinci Mertebeden Lineer Diferensiyel<br>Denklem ve Kanonik ve Normlanmış Biçimle-<br>ri ..... | 3   |
| 1.4. Lineer Bağımlılık, Lineer Bağımsızlık ve<br>Wronskiyen .....                                   | 17  |
| 1.5. Gamma Fonksiyonu .....                                                                         | 20  |
| BÖLÜM II                                                                                            |     |
| BESSEL PROBLEMİ VE BESSEL DENKLEMİNİN İNCELENMESİ. ....                                             | 23  |
| 2.1. Bessel Problemi .....                                                                          | 23  |
| 2.2. Bessel Denkleminin, Laplace Denkleminde<br>Yararlanarak Elde Edilmesi .....                    | 26  |
| 2.3. Bessel Denklemi ve Çözümü .....                                                                | 28  |
| 2.4. Bessel Fonksiyonlarının Özellikleri ve<br>İndirgeme Formülleri .....                           | 35  |
| 2.5. Birinci Çeşit Bessel Fonksiyonları .....                                                       | 41  |
| 2.6. İkinci Çeşit Bessel Fonksiyonları .....                                                        | 45  |
| BÖLÜM III                                                                                           |     |
| BESSEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİNE DÖNÜŞTÜRÜLEBİ-<br>LEN DENKLEMLER .....                            | 49  |

|                                                   |                                                                                                                                         |    |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1.                                              | $y'' - \frac{2\vartheta - 1}{x} y' + k^2 y = 0, x > 0, \vartheta, k (k \neq 0) \in \mathbb{R}$                                          |    |
|                                                   | Denkleminin İncelenmesi .....                                                                                                           | 49 |
| 3.2.                                              | $x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \vartheta^2) y = 0, \lambda$ sabit                                                                    |    |
|                                                   | Denkleminin İncelenmesi .....                                                                                                           | 51 |
| 3.3.                                              | $t^2 y'' + ty' + (\beta^2 - \alpha t^{2s}) y = 0, \alpha, \beta, s$                                                                     |    |
|                                                   | sabit $s \neq 0$ Denkleminin İncelenmesi .....                                                                                          | 52 |
| 3.4.                                              | $y'' + (1 - 2\alpha) \left(\frac{y'}{x}\right) + [(\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{(\alpha^2 - \vartheta^2 \gamma^2)}{x^2}] y = 0$ |    |
|                                                   | $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta$ sabit, Denkleminin İncelenmesi...                                                                    | 54 |
| 3.5.                                              | $x^2 y'' + xy' - (x^2 + \vartheta^2) y = 0$                                                                                             |    |
|                                                   | Denkleminin İncelenmesi .....                                                                                                           | 57 |
| 3.6.                                              | $x^2 y'' + xy' - (ix^2 + \vartheta^2) y = 0$                                                                                            |    |
|                                                   | Denkleminin İncelenmesi .....                                                                                                           | 59 |
| BÖLÜM IV                                          |                                                                                                                                         |    |
| BESSEL FONKSİYONLARI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR ..... |                                                                                                                                         | 60 |
| 4.1.                                              | Basit Sarkaç Problemi .....                                                                                                             | 60 |
| 4.2.                                              | İletken Cisimlerde Sıcaklık Dağılımları..                                                                                               | 63 |
| 4.3.                                              | Bir İnce Düzgün Ağırlıklı Kolonun Denge-                                                                                                |    |
|                                                   | si .....                                                                                                                                | 68 |
| KAYNAKLAR .....                                   |                                                                                                                                         | 72 |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                    |                                                                                                                                         |    |

## BÖLÜM I

### TANIM TEOREM VE FORMLAR

#### 1.1. LİNEER DİFERENSİYEL OPERATÖRLER

D türev veya diferensiyel operatörü, türevlenebilir bir fonksiyonu  $Df = f'$  şeklinde onun türevi üzerine dönüştürür.  $f, [a,b]$  üzerinde bir defa sürekli türevlenebilir bir fonksiyon, yani  $f \in C^1[a,b]$  ise D türev operatörü  $D:C^1[a,b] \rightarrow C[a,b]$  şeklinde bir lineer dönüşümdür. Bu dönüşüm her  $f \in C^1[a,b]$  fonksiyonunu,  $C[a,b]$  üzerinde  $f'$  sürekli fonksiyonu üzerine götürür. Genel olarak  $D^n:C^n[a,b] \rightarrow C[a,b]$  şeklinde  $[a,b]$  üzerinde n defa sürekli türevlenebilir fonksiyonlar uzayını  $C[a,b]$  uzayı içine dönüştüren bir lineer dönüşümdür. Benzer durum  $D'$ 'ye göre polinomlar içinde doğrudur. Örneğin,  $P_2(x)D^2 + P_1(x)D + P_0(x)$  operatörü de  $C^2[a,b]$  uzayını  $C[a,b]$  uzayı içine dönüştüren bir lineer dönüşümdür. D ve onun kuvvetlerini ihtiva eden bu biçimden lineer dönüşümler, lineer diferensiyel operatörler adını alır [1] .

I reel doğru üzerinde keyfi bir aralık olsun. Negatif olmayan her bir n tamsayısı için  $C^n(I)$ , I aralığı üzerinde n yinci mertebeden türeve sahip bütün reel değerli fonksiyon uzayını gösterebilir. Bu uzayda toplam ve skalar ile çarpım, I de her x için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

ile tanımlıdır.

$$C^{\infty}(I) \subset \dots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C(I)$$

ve kabul nedeniyle  $C^0(I) = C(I)$  dır.

TANIM 1.1. Bir  $L: C^n(I) \rightarrow C(I)$  lineer dönüşümüne;  
 $P_0(x), \dots, P_n(x)$  katsayıları  $I$  üzerinde sürekli ve  $I$   
 üzerinde  $P_n(x) \neq 0$  olmak üzere

$$L = P_n(x) \frac{d^n}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{d}{dx} + P_0(x) \quad (1.1)$$

şeklinde ifade edilmesi halinde,  $I$  üzerinde  $n$  inci mer-  
 tebeden lineer diferensiyel operatör denir.

Tanımlanan lineer diferensiyel operatör altında  
 $C^n(I)$  de bir  $f$  fonksiyonunun görüntüsü

$$Lf = P_n(x) \frac{d^n}{dx^n} [f(x)] + \dots + P_1(x) \frac{d}{dx} [f(x)] + P_0(x) f(x) \quad (1.2)$$

veya kısaca  $y = f(x)$  fonksiyonunun ilk  $n$  türevi  
 $y', y'', \dots, y^{(n)}$  olmak üzere

$$L(y) = P_n(x) y^{(n)} + \dots + P_1(x) y' + P_0(x) y \quad (1.3)$$

eşitliği ile tanımlı  $C(I)$  deki fonksiyonudur.  $L(f)$  nin  
 belli bir  $x$  noktasındaki değeride  $L(f)(x)$  ile gösteri-  
 lir.  $L\{f(x)\}$  belli bir  $f(x)$  fonksiyonuna uygulanan  
 $L$  lineer dönüşümü olarak isimlendirilir.

(1.1) lineer dönüşümünde katsayılar  $x$  in fonksi-  
 yonları olduğunda, dönüşüm  $I$  üzerinde  $n$  yinci mertebe-  
 den değişken katsayılı lineer diferensiyel operatör ve  
 katsayılar sabit olması halinde lineer dönüşüm,  $n$  inci  
 mertebeden sabit katsayılı lineer diferensiyel operatör  
 adını alır. Bu durumda tanım 1.1 de sözü edilen  $I$  ara-  
 lığı reel doğrunun tamamıdır [2].

## 1.2. LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM:

I aralığı üzerinde n inci mertebeden lineer diferensiyel denklem

$$Ly = f(x) \quad (1.4)$$

biçiminde bir operatör denklemdir. (1.4) de  $f(x)$ , I üzerinde sürekli ve L de I üzerinde n inci mertebeden bir lineer diferensiyel operatördür. (1.4) denklemini açık olarak

$$P_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = f(x) \quad (1.5)$$

biçimindedir.

$f(x)$ , I üzerinde özdeş olarak sıfır ise (1.4) denklemini homogen lineer,  $f(x) \neq 0$  ise homogen olmayan lineer diferensiyel denklem adını alır. Burada  $P_n(x)$  katsayısına L operatörünün temel katsayısı denir.  $P_n(x)$ , I üzerinde sıfırdan farklı ise denklem, normal lineer denklem adını alır. Bir  $y(x) \in C^n(I)$  fonksiyonunun I üzerinde denklemi özdeş olarak sağlaması,  $y(x)$  fonksiyonunun (1.4) denkleminin çözümü olması ile aynı anlamdadır. Şunu tekrar ifade edelimki: n inci mertebeden (1.5) lineer diferensiyel denkleminde  $P_n(x), P_{n-1}(x), \dots, P_0(x)$  katsayıları ve ikinci yandaki  $f(x)$  fonksiyonu I aralığı üzerinde süreklidir ve  $P_n(x)$ , I üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklıdır.

## 1.3. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM VE KANONİK VE NÖRMLANMIŞ BİÇİMLERİ

Bundan sonraki açıklamalarda ikinci mertebeden

$$L = P_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + P_1(x) \frac{d}{dx} + P_0(x) \quad (1.6)$$

diferensiyel operatörü ve

$$Ly = P_2(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + P_1(x) \frac{dy}{dx} + P_0(x)y = 0 \quad (1.7)$$

biçiminde normal ikinci mertebeden lineer homogen denklemler veya  $P_2(x)$  katsayısı I aralığı üzerinde özdeş olarak sıfırdan farklı olduğundan  $p(x) = \frac{P_1(x)}{P_2(x)}$ ,  $q(x) = \frac{P_0(x)}{P_2(x)}$  olmak üzere

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x) \frac{d}{dx} + q(x) \quad (1.8)$$

veya

$$L = D^2 + p(x)D + q(x)$$

diferensiyel operatörü ve

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1.9)$$

şeklinde normal ikinci mertebeden lineer homogen denklemleri üzerinde durulacaktır [ 3 ][ 4 ].

a) Verilen aralık üzerinde normal ikinci mertebeden lineer (1.7) veya (1.9) denklemini gözönüne alalım. Bu denkleme; I üzerinde tanımlı ve sürekli bir  $z(x)$  fonksiyonu olmak üzere  $y = u(x) \cdot z(x)$  dönüşümü uygulanırsa ve  $y = u \cdot z$

$$\frac{dy}{dx} = z \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dz}{dx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = z \cdot \frac{d^2 u}{dx^2} + 2 \frac{du}{dx} \frac{dz}{dx} + u \frac{d^2 z}{dx^2} \quad \text{denklemden}$$

yerlerine konursa;

$$(p_2 z) \frac{d^2 u}{dx^2} + (2p_2 \frac{dz}{dx} + p_1 z) \frac{du}{dx} + (p_2 \frac{d^2 z}{dx^2} + p_1 \frac{dz}{dx} + p_0 z) u = 0$$

denklemleri elde edilir. Buradan

$$2p_2 \frac{dz}{dx} + p_1 z = 0 \Rightarrow z(x) = e^{-1/2 \int^x p_1/p_2 dx} \quad (1.10)$$

şeklinde aranan  $z(x)$  fonksiyonunun var olduğu ortaya

çıkar. Bu fonksiyon verilen aralıkta  $P_2(x) \neq 0$  olması neden ile I de tanımlı ve süreklidir. Denklemin invariyantı olan  $i(x)$  fonksiyonuda

$$(p_2 z) \frac{d^2 u}{dx^2} + (p_2 \frac{dz}{dx} + p_1 \frac{dz}{dx} + p_0 z) u = 0$$

$$u'' + \left( \frac{z''}{z} + \frac{p_1}{p_2} \frac{z'}{z} + \frac{p_0}{p_2} \right) u = 0$$

denkleminde  $u$  nun katsayısıdır. (1.7) denklemi  $y = u.z$  dönüşümü ile, denklemin  $i(x)$  invaryantını ihtiva eden ve birinci mertebeden türevin bulunmadığı

$$u'' + i(x)u = 0$$

denklemine indirgeneceği görülür

(1.10) dan

$$z' = e^{-1/2 \int p_1/p_2 dx} \left( -\frac{1}{2} \frac{p_1}{p_2} \right) = -\frac{1}{2} \frac{p_1}{p_2} z$$

$$z'' = e^{-1/2 \int p_1/p_2 dx} \left( -\frac{1}{2} \frac{p_1}{p_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{p_1' p_2 - p_2' p_1}{p_2^2} \cdot e^{-1/2 \int p_1/p_2 dx}$$

$$z'' = \frac{1}{4} \frac{p_1^2}{p_2^2} \cdot z - \frac{1}{2} \frac{p_1' p_2 - p_2' p_1}{p_2^2} \cdot z$$

olduğuna göre

$$\begin{aligned} i(x) &= \frac{z''}{z} + \frac{p_1}{p_2} \frac{z'}{z} + \frac{p_0}{p_2} \\ &= \frac{1}{4} \frac{p_1^2}{p_2^2} - \frac{1}{2} \frac{p_1' p_2 - p_2' p_1}{p_2^2} + \frac{p_1}{p_2} \left( -\frac{1}{2} \frac{p_1}{p_2} \right) + \frac{p_0}{p_2} \\ &= \frac{p_0}{p_2} - \frac{1}{4} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{p_1' p_2 - p_2' p_1}{p_2^2} \\ &= \frac{p_0}{p_2} - \frac{1}{4} \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left( \frac{p_1}{p_2} \right) \end{aligned} \quad (1.11)$$

biçimindedir. Buradan  $z(x)$  ve  $i(x)$  sırasıyla (1.10) ve (1.11) ile verilmek üzere normal ikinci mertebeden lineer homogen (1.7) denklemi, denklemin invaryantı cinsinden

$$u'' + i(x)u = 0 \quad (1.12)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece homogen lineer denklemin bir özel çözümünün bilinmemesi halinde  $y = u.z$  dönüşümü ile varılan ve yararlı olan (1.12) denklemi kolay sonuçlara götürür. (1.10) ve (1.11) de verilen  $z(x)$  ve  $i(x)$  fonksiyonları

$$Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

denklemine göre düşünülürse

$$z(x) = e^{-1/2 \int^x p(x) dx} \quad (1.13)$$

ve

$$i(x) = q(x) - \frac{1}{4} [p(x)]^2 - \frac{1}{2} p'(x) \quad (1.14)$$

elde edilir.

(1.12) denklemine (1.7) ve (1.9) denkleminin KANONİK BİÇİMİ denir.

Eğer denklem ikinci mertebeden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \quad (1.15)$$

homogen olmayan lineer denklem olarak düşünülürse

$$a(x) = q(x) - \frac{1}{4} [p(x)]^2 - \frac{1}{2} p'(x) \quad (1.16)$$

$$b(x) = r(x)e^{1/2 \int^x p(x)dx}$$

olmak üzere

$$y = u \cdot e^{-1/2 \int^x p(x)dx} \quad (1.17)$$

konum yapılırsa

$$u'' + a(x)u = b(x) \quad (1.18)$$

kanonik biçimine indirgenir.

b) Karşıt olarak kanonik biçimdeki bir denklemde, birinci türevi içinde bulunduran bir denkleme dönüştürebildiği görülebilir. Gerçekten

$$u'' + a^2(x)u = 0 \quad (1.19)$$

denklemini düşünelim. (1.19) denkleminde

$$v = \int^x a(t)dt \quad (1.20)$$

LIIOUVILLE dönüşümü denilen, değişken değişimine geçirilirse ve

$$\frac{du}{dx} = a(x) \frac{du}{dv}, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = a'(x) \frac{du}{dv} + a^2(x) \frac{d^2u}{dv^2}$$

türevi (1.19) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{a'(x)}{a^2(x)} \frac{du}{dv} + u = 0 \quad (1.21)$$

denklemini elde edilir. (1.21) denkleminde

$$u = z \cdot e^{-1/2 \int^x \frac{a'(x)}{a^2(x)} dv} \quad (1.22)$$

konumu yapılır ve

$$\begin{aligned}\frac{du}{dv} &= \frac{dz}{dv} e^{-1/2 \int^x \frac{a'}{a^2} dv} - \frac{1}{2} \frac{a'}{a^2} e^{-1/2 \int^x \frac{a'}{a^2} dv} \cdot z \\ \frac{d^2u}{dv^2} &= \frac{d^2z}{dv^2} e^{-1/2 \int^x \frac{a'}{a^2} dv} - \frac{a'}{a^2} \frac{dz}{dv} e^{-1/2 \int^x \frac{a'}{a^2} dv} - \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \left( \frac{a'}{a^2} \right) e^{-1/2 \int^x \frac{a'}{a^2} dv} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left( \frac{a'}{a^2} \right)^2 e^{-1/2 \int^x \frac{a'}{a^2} dv} \cdot z\end{aligned}$$

türevleri (1.21) denkleminde yerlerine konursa bu defa da

$$\frac{d^2z}{dv^2} + \left[ \mp 1 - \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \left( \frac{a'}{a^2} \right) - \frac{1}{4} \left( \frac{a'}{a^2} \right) \right] z = 0 \quad (1.23)$$

biçiminde (1.21) denkleminin kanonik şekli bulunur.

(1.19) denkleminde u nun katsayısı herhangi bir fonksiyonun karesi olmadan, bir aralıkta sürekli herhangi bir fonksiyon alınmak suretiyle (1.19) denklemini yine liouville dönüşümü ile u nun katsayısı  $\mp 1$  olmadan (1.21) denklemine benzer bir denkleme dönüştür.

$$c) \quad Ly = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0 \quad (1.24)$$

diferensiyel denkleminde

$$\frac{d}{dx} [p_2(x)] = p_1(x) \quad (1.25)$$

ise yani (1.6) Lineer diferensiyel operatörü

$$L = \frac{d}{dx} [p_2(x) \frac{d}{dx}] + p_0$$

şeklinde ise (1.6) lineer diferensiyel operatörü SELF ADJOINT Lineer diferensiyel operatör adını alır. Bu durumda (1.24) denklemini

$$\frac{d}{dx} [p_2(x) \frac{dy}{dx}] + p_0(x)y = 0 \quad (1.26)$$

self adjoint biçimde yazılabilir. Eğer

$$L = p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_1(x) \frac{d}{dx} + p_0(x) \quad (1.27)$$

Lineer operatör self-adjoint değil ise bulunabilecek bir  $\lambda$  çarpanı ile çarpılmak suretiyle self-adjoint duruma getirebilir. Bu durumda

$$\lambda L = \lambda p_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + \lambda p_1(x) \frac{d}{dx} + \lambda p_0(x)$$

operatörünün self adjoint olması için  $\lambda$  çarpanı

$$\frac{d}{dx} (\lambda p_2(x)) = \lambda p_1(x)$$

olacak biçimde hesaplanabilir. Buradan

$$\frac{d}{dx} (\lambda p_2(x)) = \lambda p_1(x)$$

$$\frac{\frac{d}{dx} (\lambda p_2(x))}{\lambda p_2(x)} = \frac{\lambda p_1(x)}{\lambda p_2(x)} = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$$

$$\ln(\lambda p_2(x)) = \int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx$$

$$\lambda = \frac{1}{p_2(x)} e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx}$$

$$= \frac{1}{p_2(x)} \exp \left\{ \int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \right\} \quad (1.28)$$

biçiminde olması lazım geldiği ortaya çıkar. Buradan (1.24) denklemi, (1.28) ile ifade edilen  $\lambda$  çarpanı ile çarpılırsa

$$e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} y'' + \frac{p_1(x)}{p_2(x)} e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} y' + \frac{p_0(x)}{p_2(x)} e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} y = 0$$

veya

$$\frac{d}{dx} \left[ e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} \frac{dy}{dx} \right] + \frac{p_0(x)}{p_2(x)} e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx} y = 0 \quad (1.29)$$

ya da

$$\frac{d}{dx} \left[ \left( \exp \int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \right) \frac{dy}{dx} \right] + \frac{p_0(x)}{p_2(x)} \left( \exp \int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \right) y = 0 \quad (1.30)$$

self adjoint şeklinde yazılabilir. Denklemin,  $p_2(x) \neq 0$  olduğu noktalarda geçerli olduğu açıktır (1.30) denklemi

$$h(x) = \exp \int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \quad (1.31)$$

$$k(x) = \frac{p_0(x)}{p_2(x)} \left( \exp \int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \right) \quad (1.32)$$

olmak üzere

$$\frac{d}{dx} \left[ h(x) \frac{dy}{dx} \right] + k(x)y = 0 \quad (1.33)$$

biçimde yazılabilir.

(1.7) denklemi (1.28) çarpanı ile çarpılıp self adjoint biçime getirilebileceği hemen görülür. Ayrıca (1.7) denklemi verilen aralık üzerinde normal olmak üzere, (1.31) ile çarpılırsa self adjoint biçime dönüştüğü görülür. Şöyle ki I üzerinde  $p_2(x) \neq 0$  olduğundan (1.7) denklemi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{p_0(x)}{p_2(x)} y = 0$$

biçiminde yazılabilir. Diğer taraftan

$$\frac{d}{dx} \left[ h(x) \frac{dy}{dx} \right] = h(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{p_1(x)}{p_2(x)} h(x) \frac{dy}{dx}$$

olduğundan (1.7) denklemi  $h(x)$  ile çarpılarak

$$\frac{d}{dx} \left[ h(x) \frac{dy}{dx} \right] + k(x)y = 0$$

şeklinde self adjoint biçimde yazılır. Buradan (1.9)

denkleminin de,  $p(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$  olması nedeniyle

$$h(x) = \exp \int^x p(x) dx \quad (1.34)$$

ile çarpılarak self adjoint forma getirilebileceği açıktır.

Self-adjoint formlar, bütün normal ikinci mertebeden lineer diferensiyel denklemlerin incelenmesi sırasında standart form temin etmesi bakımından yarar sağlar.

Bir başka açıdan,  $h(x)$ ,  $h'(x)$ ,  $k(x)$  ve  $\ell(x)$  fonksiyonları  $I: \{x | a \leq x \leq b\}$  de sürekli, ayrıca  $\mu$  keyfi bir parametre ve  $h(x)$ ,  $\ell(x)$  fonksiyonlarının her ikisi  $I$  de pozitif olmak üzere

$$\frac{d}{dx} \left\{ h(x) \frac{dy}{dx} \right\} + k(x)y + \mu \ell(x)y = 0 \quad (1.35)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) &= 0 \\ \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) &= 0 \end{aligned} \quad (1.36)$$

şeklinde bir homogen sınır değer problemi, ikinci mertebeden STURM-LIOUVILLE problemidir. Bu problem de (1.35) denklemi self adjoint formdadır.

d) Ayrıca

$$\frac{d}{dx} \left\{ h(x) \frac{dy}{dx} \right\} + k(x)y = 0$$

denkleminde

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{h(x)} \quad (1.37)$$

değişken değişimi ile

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h(x)} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d}{dx} \left[ h(x) \frac{dy}{dx} \right] = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{1}{h(x)} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2}$$

türevleri (1.33) denkleminde yerlerine konulursa (1.33) denkleminin

$$\frac{1}{h(x)} \frac{d^2 y}{dt^2} + k(x)y = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + h(x)k(x)y = 0$$

veya  $A(t) = h(x)k(x)$  olmak üzere

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + A(t)y = 0$$

şeklinde NÖRMLANMIŞ GÖSTERİMİ elde edilir. Örneğin 3 yinci mertebeden

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \lambda^2)y = 0$$

Bessel denklemine

$$\lambda = \frac{1}{p_2(x)} e^{\int^x \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx}$$

dönüşümünden

$$\lambda = \frac{1}{x^2} e^{\int^x \frac{1}{x} dx} = \frac{1}{x^2} e^{\ln x} = \frac{1}{x} \quad x \neq 0$$

çarpanı yardımıyla

$$\frac{d}{dx} \left\{ x \frac{dy}{dx} \right\} + \frac{x^2 - \vartheta^2}{x} y = 0$$

self adjoint biçiminde yazılabilir.

$$t = \int_{x_0}^x \frac{dx}{h(x)} = \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \ln x \Rightarrow x = e^t$$

dönüşümü ile

$$A(t) = h(x) \cdot k(x) = x \cdot \frac{x^2 - \vartheta^2}{x} = x^2 - \vartheta^2 = e^{2t} - \vartheta^2$$

olacağından Bessel denkleminin

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (e^{2t} - \vartheta^2) y = 0$$

modelinde normlanmış gösterimi bulunur. Bundan başka

$$z(x) = e^{-1/2 \int^x \frac{p_1}{p_2} dx} = e^{-1/2 \int^x \frac{1}{x} dx} = e^{-1/2 \ln x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

dönüşümü yardımıyla ve  $y = u \cdot z = \frac{u}{\sqrt{x}}$  konumu ile

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \left(1 + \frac{1 - 4\vartheta^2}{4x^2}\right) u = 0$$

şeklinde Bessel diferensiyel denkleminin KANONİK BİÇİMİ elde edilir.

TANIM 1.2. Bir  $f(x)$  fonksiyonuna; onun  $x_0$  komşuluğundaki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n}{n!} \quad (1.38)$$

Taylor serisi,  $x_0$  in herhangi bir komşuluğunda  $f(x)$  e yakınsaması halinde analitiktir denir. Bu nedenle  $f(x)$

fonksiyonunun  $x_0$  noktasında her mertebeden türe ve sahip ve  $n$  yinci mertebeden

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \quad x_0 < \xi < x \quad (1.39)$$

kalanının  $n \rightarrow \infty$  için sıfıra eşit olması gerekir. Yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

ise ancak bu durumda (1.38) serisi  $x$  noktasında  $f(x)$  e yakınsıyabileceğinden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad (1.40)$$

biçiminde yazılabilir [5].

**TANIM 1.3.** (1.9) diferensiyel denkleminde  $p(x)$  ve  $q(x)$  fonksiyonlarının her ikisi  $x_0$  noktasında analitik ise  $x_0$  noktası (1.9) denkleminin bir adi noktası, bu fonksiyonlardan en az biri  $x_0$  noktasında analitik değilse  $x_0$  noktası (1.9) denkleminin bir aykırı noktasıdır.

**TANIM 1.4.** Eğer  $x_0$  noktası (1.9) diferensiyel denkleminin bir aykırı noktası ve ayrıca  $(x-x_0)p(x)$  ve  $(x-x_0)^2q(x)$  fonksiyonlarının her ikisi  $x_0$  noktasında analitik iseler bu durumda  $x_0$  noktası (1.9) denkleminin bir düzgün aykırı noktasıdır denir. Bu özelliği sağlamayan aykırı noktalarda düzgün olmayan aykırı noktalar olarak adlandırılır.

**TEOREM 1.1.**  $x_0$  noktası (1.9) diferensiyel denkleminin bir adi noktası ise  $x_0$  noktasını kapsayan bir aralıkta (1.9) denkleminin genel çözümü  $a_0, a_1$  keyfi sabitler ve  $y_1(x), y_2(x)$  fonksiyonları lineer bağımsız analitik

fonksiyonlar olmak üzere

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \quad (1.41)$$

formundadır.

TEOREM 1.2.  $x_0 = 0$  noktası (1.9) diferensiyel denkleminin bir düzgün aykırı noktası ise  $k$  ve  $a_n$  ( $n=0,1,2,\dots$ ) ler sabit olmak üzere (1.9) denklemi

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n} \quad (1.42)$$

biçiminde en az bir çözüme sahiptir.

(1.42) çözümünü herhangi bir  $R$  reel sayısı için  $0 < x < R$  aralığında geçerlidir. Eğer  $x$  kompleks ise çözümün yakınsaklık bölgesi,  $x$  merkezli ve  $R$  yarıçapı serinin yakınsaklık yarıçapı olan bir çemberin sınır-  
ladığı dairesel bölgedir.

Teorem de belirtilen ve sözü edilen  $x_0$  düzgün aykırı noktası sıfırdan farklı ise  $t = x - x_0$  değişken değişimi ile  $x_0$  noktası koordinat merkezine kaydırılır.

Bu teoremde ifade edilen en az bir çözümün (1.42) biçiminde olması; başka bir değişle  $x_0 = 0$  noktası (1.9) denkleminin bir düzgün aykırı noktası olması halinde, denklemin iki bağımsız çözümünden en az birinin Taylor serisi biçiminde olmaması demektir.

(1.42) serisi F.G. Frobenius serisi ve bu seriyi kullanarak çözüm işlemi yapılmasına da Frobenius yöntemi adı verilir. Bu yöntemle göre;  $k$  sabiti indisel denklem ile hesaplanır. Indisel denklemin kökleri reel veya kompleks olabilir. Kompleks olması halinde, Euler bağıntıları ve

$$x^{a \mp ib} = x^a \cdot x^{\mp ib} = x^a \cdot e^{\mp ib \ln x}$$

Özdeşliği uygulanarak kompleks çözümlerden reel çözümler elde edilir. Burada indisel denklemin her iki kökünün reel olması düşünülecektir.

$k$  ( $k = k_1 > k_2$ ) indisel denklemin büyük kökü ise Frobenius yöntemi daima

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k_1) x^{k_1 + n} \quad (1.43)$$

şeklinde bir çözümü verir.

İkinci bağımsız çözüm, indisel denklemin  $k_1$  ve  $k_2$  köklerinin durumlarına göre aşağıdaki şekilde oluşacaktır.

a) indisel denklemin kökleri farklı ve  $k_1 - k_2 \neq \mathbb{Z}$  (tam sayı) bu durumda ikinci bağımsız çözüm;

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(k_2) x^{k_2 + n} \quad (1.44)$$

biçimindedir.

b) indisel denklemin kökleri  $k_1 = k_2$  ise ikinci bağımsız çözüm değiştirilmiş Frobenius yöntemine göre

$$y_2(x) = \frac{\partial}{\partial k} y(k_1 x) \Big|_{k=k_1} = y_1(x) \cdot \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(k) x^{k_1 + n} \quad (1.45)$$

biçiminde elde edilir.

c) indisel denklemin kökleri farklı ve  $k_1 - k_2 = \mathbb{Z}$  (tam sayı) ise ikinci bağımsız çözüm değiştirilmiş Frobenius yöntemine göre

$$\begin{aligned}
y_2(x) &= \frac{\partial}{\partial k} [(k_1 - k_2)y(k_1x)] \Big|_{k=k_2} \\
&= d_{-1}y_1(x) \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} d_n(k)x^{k_2+n} \quad (1.46)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Burada  $a_n(k_1), a_n(k_2), b_n(k_1), d_n(k)$  ve  $d_{-1}$  katsayılarının hepsi sabittir yerine görede sıfır olabilir. Bütün bu durumlarda çözüm  $0 < x < R$  aralığında mümkün olacaktır.

**TEOREM 1.3.**  $x_0 = 0$  noktası (1.9) diferensiyel denklemin bir düzgün aykırı noktası ve  $k_1, k_2 \leq k_1$  lerde indisel denklemin kökleri olsun. Bu durumda  $c_1$  ve  $c_2$  keyfi sabitler olmak üzere  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  çözümleride  $k_1, k_2$  nin durumlarına göre yukarıda ifade edilen durumlardan birini sağlamak şartıyla (1.9) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

biçimindedir.

#### 1.4. LİNEER BAĞIMLILIK, LİNEER BAĞIMSIZLIK VE WRONSKİYEN

**TANIM 1.5.** Bir  $I: |x - x_0| \leq a$  aralığında tanımlanan  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  fonksiyonları ile  $c_1, c_2, \dots, c_n$  gibi hepsi birden sıfır olmayan sabitler olmak üzere,  $I$  aralığı üzerinde  $\forall x \in I$  için

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0 \quad (1.46)$$

oluyorsa;  $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$  fonksiyonları  $I$  aralığı üzerinde lineer bağımlıdır denir [7]. (1.46) Özdeşliği ancak ve ancak  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  için

mümkün oluyorsa bu durumda  $y_1(x), \dots, y_n(x)$  fonksiyonları verilen aralıkta lineer bağımsızdır denir.

Bu tanımı iki fonksiyon için şöyle ifade ederiz. Bir  $I: |x - x_0| \leq a$  aralığı üzerinde tanımlanan  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  fonksiyonları olmak üzere, bu fonksiyonların  $I$  üzerinde lineer bağımlı olmaları;  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerin her ikisi birden sıfır olmamak şartı ile  $\forall x \in I$  için

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0 \quad (1.47)$$

olması ile eş anlamlıdır. (1.47) özdeşliği ancak  $c_1 = c_2 = 0$  için mümkün oluyorsa, bu durumda  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  fonksiyonları  $I$  üzerinde lineer bağımsızdır denir.

**TANIM 1.6.**  $y_1(x), y_2(x)$  fonksiyonları bir  $I: |x - x_0| \leq a$  aralığında birinci mertebeden türevlere sahip olsunlar. Bu iki fonksiyonun Wronskiyeni diye ikinci mertebeden

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

determinantına denir.

**TEOREM 1.4.** Eğer  $y_1(x), y_2(x)$  fonksiyonları  $x$  in  $I: |x - x_0| \leq a$  aralığı üzerinde lineer bağımlı iseler, bu fonksiyonların Wronskiyeni  $I$  aralığı üzerinde özdeş olarak sıfırdır.

**TEOREM 1.5.** Eğer (1.9) homogen denkleminin iki çözümünün Wronskiyeni  $I$  aralığının bir noktasında ( $x = x_0$ ) sıfır değerini alıyorsa, bu iki çözüm lineer bağımlıdır ve Wronskiyeni  $I$  aralığı üzerinde özdeş olarak sıfırdır.

**TEOREM 1.6.** (1.9) homogen denkleminin her çözümü iki lineer bağımsız çözümünün bir lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

TEOREM 1.7. Bir I aralığı üzerinde (1.9) diferensiyel denkleminin  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  çözümlerinin lineer bağımsız olmaları için gerek ve yeter şart  $\forall x \in I$  için

$$W[y_1(x), y_2(x)] \neq 0 \quad \text{dır.}$$

İspat: İlk olarak,  $\forall x \in I$  için  $W(y_1(x), y_2(x)) \neq 0$  olduğunu farz edelim.  $c_1, c_2$  ler sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) &= 0 \\ c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

yazılır. Bu ise  $c_1, c_2$  için lineer homogen bir denklem sistemidir. Bu sistemin katsayılar determinantı

$$W(y_1(x), y_2(x)) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

olduğundan

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ 0 & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W} = 0, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & 0 \end{vmatrix}}{W} = 0$$

olur. Buradan  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  ler I üzerinde lineer bağımsız olduğu sonucuna varılır.

Karşıt olarak  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  in I üzerinde lineer bağımsız olduklarını düşünelim. Bu durumda, I aralığı üzerinde  $x_0$  noktasının  $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$  olacak biçimde bir nokta olduğunu farz edelim. Bu durumda (1.49) sistemi

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) &= 0 \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) &= 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

şeklini alır. Bu sistemde en az biri sıfırdan farklı olmak üzere  $c_1$  ve  $c_2$  sabitlerinin bulunması gerekir. Böylece  $c_1$  ve  $c_2$  sabitleri için  $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$  olacak şekilde bir  $y(x)$  fonksiyonunun varlığını düşün-

lim.  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  her biri (1.9) nin bir çözümü olduğuna göre,  $c_1$  ve  $c_2$  sabitler olmak üzere  $y(x)$  de bir çözümdür. Ayrıca (1.50) sistemi nedeniyle  $y(x_0) = 0$ ,  $y'(x_0) = 0$  dır. Varlık ve Teklik teoreminden dolayı  $I$  aralığı üzerinde ki  $\forall x$  için  $y(x) = 0$  dır. Böylece

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$$

bulunur. Bu ise  $y_1(x)$  ve  $y_2(x)$  in  $I$  üzerinde lineer bağımsız olmaları ile ters düşer. Bu nedenle  $I$  aralığı üzerinde

$$W(y_1, y_2)(x_0) = 0$$

olacak biçimde bir  $x_0$  noktasının varlığı imkansızdır. Yani  $I$  aralığı üzerinde  $\forall x$  için  $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$  dır.

## 1.5. GAMMA FONKSİYONU

TANIM 1.7. Gamma fonksiyonu,  $n > 0$  için

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \quad (1.51)$$

ile tanımlanan yakınsak bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun bazı önemli özelliklerini şöyle sıralayabiliriz.

i) Bu fonksiyon,  $n > 0$  için

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) \quad (1.52)$$

biçiminde fonksiyonel denklemi veya indirgeme formülünü gerçekler

ii)  $n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (1.53)$$

dir. Bu neden ile bazı hallerde faktöriyel fonksiyon ismini de alır. Bütün pozitif reel sayılar için tanımlı

olan Gamma fonksiyonu yalnız negatif olmayan tamsayılar için tanımlı olan faktöriyel fonksiyonunun bir devamıdır. Bu nedenle Gamma fonksiyonu, genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyon olarak da adlandırılabilir [6].

iii)  $n$  nin tam olmayan negatif değerleri için

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n} \quad (1.54)$$

şeklinde Gamma fonksiyonu genelleştirilebilmektedir.

iv)  $n \in \mathbb{Z}^+$  olmak üzere ve  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$  olduğu bilindiğine göre

$$\Gamma(\frac{3}{2}+n) = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}.n!} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(\frac{1}{2}+n) = \frac{(2n)!}{2^{2n}.n!} \sqrt{\pi} \text{ dir.} \quad (1.55)$$

v)  $n$  nin sıfır ve bütün negatif tamsayı değerleri için  $\Gamma(n)$  nin tanımsız olduğu açık olup,

$$\lim_{n \rightarrow 0^+} \Gamma(n) = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\Gamma(n+1)}{n} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow 0^-} \Gamma(n) = \lim_{n \rightarrow 0^-} \frac{\Gamma(n+1)}{n} = -\infty \text{ dir.}$$

$$\text{vi) } \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin x\pi} = \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} dx, \quad 0 < x < 1$$

vii)  $n$  nin büyük değerleri için  $\Gamma(n)$ 'i hesaplamak gerekiyorsa bunu ilk bakışta hesaplamak zordur. Ancak

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n} \cdot e^{\theta/12(n+1)}, \quad 0 < \theta < 1$$

bağıntısının sonucu kullanılır. Eğer  $n \in \mathbb{Z}$  ise

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

alınabilir. Bu formüle STİRLİNG FAKTÖRİYEL formülü adı verilir.

$$\text{vii)} \quad \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} \ln x dx = -\gamma \quad (1.56)$$

dır. Burada  $\gamma$ , ya EULER sabiti denir. Bu sabit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = 0,5772156\dots \quad (1.57)$$

ile tanımlıdır.

$$\text{ix)} \quad \frac{\Gamma'(p+1)}{\Gamma(p+1)} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - \gamma$$

$$\text{x)} \quad \Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x} \cdot x^x \cdot e^{-x} \cdot \left\{1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51.840x^3} + \dots\right\}$$

ifadesine Gamma fonksiyonun STİRLİNG ASİMTOTİK serisi denir.

## BÖLÜM II

### BESSEL PROBLEMİNİN VE BESSEL DENKLEMİNİN İNCELENMESİ

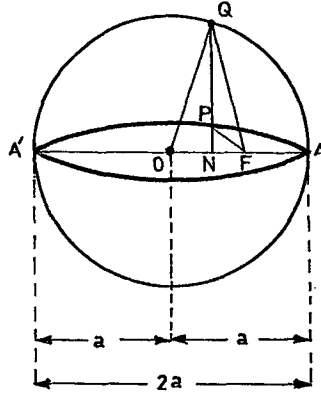
Bu bölümde Bessel problemi, Bessel diferensiyel denkleminin elde edilişi, Bessel diferensiyel denkleminin çözümü, Bessel fonksiyonlarının özellikleri indirgeme formülleri üzerinde durulacaktır.

#### 2.1. BESSEL PROBLEMİ

Bessel fonksiyonları üzerindeki çalışmalar 19. yüzyılda Alman matematikçisi Freidrich Wilhelm Bessel (1785-1849) tarafından yapılmıştır. Bu astronom ve matematikçi, dinamik astronomideki bir problem üzerinde uğraşırken kendi ismini taşıyan bu fonksiyonları elde etmiştir. Ancak Bessel'den önce bu fonksiyonların özel durumları ile D. Bernoulli ilgilenmiş olup, bazı fiziksel problemlere uygulamıştır. Bu fonksiyonların Euler ve Fourier tarafındanda kullanılmış olduğunu görmekteyiz [ 8 ].

Şimdi Bessel'in üzerinde çalışırken, Bessel fonksiyonlarını elde ettiği problemi verelim :

O merkezli, F odaklı ve büyük eksen uzunluğu  $AA'$  olan elips üzerinde bir nokta P olsun. Şekil 2.1 deki gibi A ve A' noktalarından geçen ve çemberi Q da kesen NPQ ordinatını çizerek OQ, FP ve FQ doğrularını çizelim.



Şekil 2-I

Astronomide P nin eksantrik anomalisi AOQ açısının radyan olarak değeri veya aynı anlamda

$$\phi = \pi \frac{\text{AOQ kestinin alanı}}{\text{AQQA' yarım dairesinin alanı}} \quad (2.1)$$

Ortalama anomali de

$$\mu = \pi \frac{\text{AFP elips kesitinin alanı}}{\text{APA' yarı elipsin alanı}} \quad (2.2)$$

ile tanımlanır. Kepler'in ikinci kanununa göre  $\mu, F$  çekim merkezi olduğundan A dan P ye zamanla orantılıdır. Dik izdüşümden,

$$\frac{\text{AFP nin alanı}}{\text{APA'nin alanı}} = \frac{\text{AFQ nün alanı}}{\text{AQQA' ninalanı}} = \frac{\text{AOQ-OFQ}}{\text{AQQA'}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}a^2\phi - \frac{1}{2}ea^2\sin\phi}{\frac{1}{2}\pi a^2} = \frac{\phi - e\sin\phi}{\pi} \quad (2.3)$$

bulunur. Burada a, dairenin yarıçapı ve e de elipsin dış merkezliğidir. Bu durumda

$$\mu = \pi \frac{\phi - e\sin\phi}{\pi} = \phi - e\sin\phi \quad (2.4)$$

bağıntısı elde edilir. e sabit iken  $\mu$  ve  $\phi$  ler değışti-

ğinden  $\phi - \mu$ ,  $\mu$  nün periyodik bir fonksiyonu olacaktır.  $\mu$ ,  $\pi$  nin bir katı olduğunda A ve A' de sıfır değerini alır. Bu durumda  $A_r$  katsayıları belirtilmesi gereken e nin fonksiyonları olmak üzere

$$\phi - \mu = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \sin r\mu \quad (2.5)$$

farzedilebilir. Bu ise yukarıda ifade edilen problemdir.

(2.5) nin  $\mu$  ye göre türevi alınır ve her iki yanını  $\cos r\mu$  ile çarpılıp 0 dan  $\pi$  ye kadar integrali alınır-  
sa

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi r A_r &= \int_0^{\pi} \left( \frac{d\phi}{d\mu} - 1 \right) \cos r\mu d\mu \\ &= \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{d\mu} \cos r\mu d\mu \end{aligned} \quad (2.6)$$

bulunur. Bu ifade

$$\begin{aligned} \mu &= 0 & \text{iken } \phi &= 0 \\ \mu &= \pi & \phi &= \pi \end{aligned}$$

olacak şekilde  $\mu$  bağımsız değişkeni  $\phi$  ile değiştirilirse

$$A_r = \frac{2}{\pi r} \int_0^{\pi} \cos r(\phi - e \sin \phi) d\phi \quad (2.7)$$

biçiminde  $A_r$  ler için Bessel ifadesi elde edilir.

(2.7) den  $A_r$  fonksiyonu, e nin pozitif kuvvetleri serisi cinsinden ifadesi ile integralden doğrudan elde edilebilir. Biz burada bununla ilgilenmiyeceğiz.  $A_r$  nin bir lineer diferensiyel denklemi sağladığını göstereceğiz. Burada e yerine x ve  $\frac{\pi r}{2} A_r$  yerine de y konursa (2.7) ifadesi

$$y = \int_0^{\pi} \cos r(\phi - x \sin \phi) d\phi \quad (2.8)$$

şeklinde yazılabilir. y nin x'e göre birinci ve ikinci türevleri alınır;

$$\frac{dy}{dx} = r^2 \int_0^\pi \cos \phi \cos r(\phi - x \sin \phi) d\phi - r^2 x \int_0^\pi \cos^2 \phi \cos r(\phi - x \sin \phi) d\phi$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = - r^2 \int_0^\pi \cos r(\phi - x \sin \phi) \sin^2 \phi d\phi$$

olur. Buradan  $A_r$  nin sağladığı

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 r^2 - r^2)y = 0 \quad (2.9)$$

diferensiyel denkleme varılır.

Bu denklemde  $rx = z$  dönüşümü yapılırsa

$$z^2 \frac{d^2y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - r^2)y = 0 \quad (2.10)$$

denkleme indirgenir. Bu ifade Bessel diferensiyel denkleminin standart biçimidir.

## 2.2. BESSEL DENKLEMİNİN, LAPLACE DENKLEMİNDEN YARARLANARAK ELDE EDİLMESİ

Bessel diferensiyel denklemini,  $\nabla^2 u = 0$  Laplace denkleminde  $(\rho, \phi, z)$  silindirik koordinatlarını kullanmak suretiyle de elde edilebildiğini görebilmekteyiz. Laplace denkleminin  $(\rho, \phi, z)$  silindirik koordinatları ile ifadesinin

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.11)$$

şeklinde olduğunu biliyoruz. Bu türlü denklemlerin çözüm yollarından biri, değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanırsa, yani çözümün  $u = P(\rho)\Phi(\phi)Z(z)$  biçiminde olduğu farzedilirse ve gerekli türevler alınarak (2.11) de yerlerine götürülürse,

$$P''\phi Z + \frac{1}{\rho} P'\phi Z + \frac{1}{\rho^2} P\phi''Z + P\phi Z'' = 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho} \frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\phi''}{\phi} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho} \frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\phi''}{\phi} = - \frac{Z''}{Z} \quad (2.13)$$

elde edilir. (2.13) ün sağ tarafı yalnız Z ve sol tarafında yalnız  $\rho$  ve  $\phi$  bağlı olması nedeniyle  $-\lambda^2$  ye eşit kılınabilir. Buradan

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho} \frac{P'}{P} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\phi''}{\phi} = -\lambda^2 \quad (2.14)$$

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \quad (2.15)$$

elde edilir. (2.14) nin her iki tarafı  $\rho^2$  ile çarpılırsa

$$\rho^2 \frac{P''}{P} + \rho \frac{P'}{P} + \frac{\phi''}{\phi} = -\lambda^2 \rho^2$$

bulunur. Buradan

$$\rho^2 \frac{P''}{P} + \rho \frac{P'}{P} + \lambda^2 \rho^2 = - \frac{\phi''}{\phi} \quad (2.16)$$

yazılır. (2.16) denkleminin sağ tarafı yalnız  $\phi$  ye, sol tarafı yalnız  $\rho$  ya bağlı olduğundan bir  $\nu^2$  sabiti-ne eşit kılınabilir. Bu durumda

$$\rho^2 \frac{P''}{P} + \rho \frac{P'}{P} + \lambda^2 \rho^2 = \nu^2 \quad (2.17)$$

$$\phi'' + \nu^2 \phi = 0 \quad (2.18)$$

elde edilir. Böylece (2.17) denklemi

$$\rho^2 P'' + \rho P' + (\lambda^2 \rho^2 - \nu^2) P = 0 \quad (2.19)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\lambda \rho = x$  dönüşümü düşünülürse

$\rho = \frac{x}{\lambda}$  olması nedeniyle,  $P(\rho)$  de  $y(x)$  şeklinde alınabilir. Böylece

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{d\rho} = \frac{dp}{dx} \lambda = \lambda \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2p}{d\rho^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dp}{d\rho} \right) = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dy}{dx} \right) \frac{dx}{d\rho} = \lambda^2 \frac{d^2y}{dx^2}$$

türevleri (2.19) da yerlerine konursa

$$\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 \lambda^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{x}{\rho}\right) \lambda \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2.20)$$

bulunur. Bu (2.20) denkleminde

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

şeklinde Bessel denklemi ortaya çıkar [ 9 ].

### 2.3. BESSEL DENKLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

$\nu$  sabit olmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0 \quad (2.21)$$

denklemine  $\nu$  yinci mertebeden Bessel denklemi denir. Matematiksel fizikte çok önemli bir yeri olan bu denklemin,  $\nu$  nin durumlarına göre ilginç özelliklere sahip olduğu görülür.  $\nu$  kompleks olması durumunda daha önce sözü edilen indisel denklemin kökleri kompleks olacaktır. Bu denklemin fiziksel yorumu, kısmi türevli denklemlerin gelişmesinden sonra daha tatmin edici bir açıklamaya kavuşmuştur [ 10 ].

Bessel denkleminin biri  $x = 0$  diğeri  $x = \infty$  da olmak üzere iki aykırı noktası mevcuttur.  $x = 0$  noktası denklemin düzgün aykırı noktasıdır, ancak  $x = \infty$  noktası denklemin düzgün aykırı noktası değildir. Bu neden-

le Bessel diferensiyel denklemi Fuchs tipi denklemi de-  
ğildir. Teorem 1.2 ye göre  $k$  ve  $a_n (n = 0, 1, 2, \dots)$  ler  
hesaplanması gereken sabitler olmak üzere (2.21) dife-  
rensiyel denkleminin

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n} \quad (2.22)$$

biçiminde en az bir çözümü vardır.

Bununla birlikte Bessel denkleminin Frobeniüs yön-  
temi ile seri çözümlerinin ve Bessel fonksiyonları ola-  
rak bilinen özel fonksiyonlarının önemli özelliklere sa-  
hip olduğu görülmektedir. Bunları şöyle inceleyebiliriz.

$$y = x^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n} \quad (2.23)$$

çözümünü düşünürsek, buradan

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n) x^{k+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n)(k+n-1) x^{k+n-2}$$

türevleri alınarak, (2.21) de yerlerine konulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (k+n+1)(k+n) x^{k+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n+2} = 0$$

denklemini elde edilir. Burada indisel denklem ( $n = 0$ )

$$a_0 (k+1)(k) = 0 \quad (2.24)$$

olarak elde edilir. Denklemin  $x^{k+1}$  nin katsayısı  
( $n = 1$ ) ise

$$a_1 (k+2)(k+1) = 0 \quad (2.25)$$

ile verilir.  $n \geq 2$  için indirgeme bağıntısı

$$a_n (k + n + \vartheta) (k + n - \vartheta) + a_{n-2} = 0$$

veya

$$a_n = - \frac{a_{n-2}}{(k + n + \vartheta) (k + n - \vartheta)} \quad (2.26)$$

bulunur. (2.24) den dolayı,  $k = \mp \vartheta$  ve (2.25) den dolayı  $k$  nın her iki değeri için, eğer  $\vartheta \neq \mp \frac{1}{2}$  ise  $a_1 = 0$  dir. Böylece (2.26) kullanılarak,

$$a_1 = a_3 = a_5 = \dots = 0 \quad \text{ve}$$

$$a_2 = - \frac{1}{[(k + 2 + \vartheta) (k + 2 - \vartheta)]} a_0$$

$$a_4 = - \frac{1}{[(k+4+\vartheta) (k+4-\vartheta)]} a_2 = \frac{1}{[(k+2+\vartheta) (k+4+\vartheta) (k+2-\vartheta) (k+4-\vartheta)]} a_0$$

$$a_6 = - \frac{1}{(k+2+\vartheta) (k+4+\vartheta) (k+6+\vartheta) (k+2-\vartheta) (k+4-\vartheta) (k+6-\vartheta)} a_0$$

Böylece denklemin bir çözümü :

$$y = a_0 x^k \left[ 1 - \frac{x^2}{(k+2+\vartheta) (k+2-\vartheta)} + \frac{x^4}{(k+2+\vartheta) (k+4+\vartheta) (k+2-\vartheta) (k+4-\vartheta)} - \frac{x^6}{(k+2+\vartheta) (k+4+\vartheta) (k+6+\vartheta) (k+2-\vartheta) (k+4-\vartheta) (k+6-\vartheta)} + \dots \right] \quad (2.27)$$

bulunur.

1. HAL:  $\vartheta$  tam (sayı) değil,  $k = +\vartheta$  veya  $k = -\vartheta$

$k = +\vartheta$  olduğunda, (2.27) çözümü:

$$y = a_0 x^\vartheta \left[ 1 - \frac{x^2}{(2\vartheta+2)2} + \frac{x^4}{(2\vartheta+2)(2\vartheta+4).4} - \frac{x^6}{(2\vartheta+2)(2\vartheta+4)(2\vartheta+6)2.4.6} + \dots \right]$$

$$y = a_0 2^\vartheta \left[ \left(\frac{x}{2}\right)^\vartheta - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2+\vartheta}}{(\vartheta+1)1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4+\vartheta}}{(\vartheta+1)(\vartheta+2)2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{6+\vartheta}}{(\vartheta+1)(\vartheta+2)(\vartheta+3)3!} + \dots \right]$$

(2.28)

ile verilir.

Bu çözümü daha kompakt ve geleneksel (conventional) forma geliştirmek için  $\Gamma(\vartheta)$  gamma fonksiyonunun

$$\Gamma(\vartheta + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\vartheta} dt \quad (2.29)$$

tanımı kullanılırsa, bu durumda kısmi integrasyonla

$$\Gamma(\vartheta + 1) = [-e^{-t} t^{\vartheta}]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (\vartheta t^{\vartheta-1}) (-e^{-t}) dt$$

elde edilir. Bütün  $\vartheta$  ler için  $\lim_{t \rightarrow \infty} (e^{-t} t^{\vartheta}) = 0$  ve  $\vartheta > 0$  iken  $\lim_{t \rightarrow 0} (e^{-t} t^{\vartheta}) = 0$  dır. Böylece  $\vartheta > 0$  için

$$\Gamma(\vartheta + 1) = \vartheta \Gamma(\vartheta) \quad (2.30)$$

bulunur. (2.30) dan dolayı

$$(\vartheta + 1) \Gamma(\vartheta + 1) = \Gamma(\vartheta + 2)$$

$$(\vartheta + 2) (\vartheta + 1) \Gamma(\vartheta + 1) = (\vartheta + 2) \Gamma(\vartheta + 2) = \Gamma(\vartheta + 3)$$

$$(\vartheta + 3) (\vartheta + 2) (\vartheta + 1) \Gamma(\vartheta + 1) = (\vartheta + 3) \Gamma(\vartheta + 3) = \Gamma(\vartheta + 4)$$

.....

olduğu görülür. Böylece, eğer (2.28) de

$$a_0 = \frac{A 2^{-\vartheta}}{\Gamma(\vartheta + 1)}$$

alınırsa,  $k = + \vartheta$  için

$$y = A \left[ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta}}{\Gamma(\vartheta + 1)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+2}}{\Gamma(\vartheta + 2) 1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+4}}{\Gamma(\vartheta + 3) 2!} - \dots \right]$$

$$= A \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+2s}}{\Gamma(\vartheta + s + 1) s!}$$

formunda çözüm elde edilir. Burada

$$J_{\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+2s}}{\Gamma(\vartheta + s + 1) s!} \quad (2.31)$$

fonksiyonu  $\vartheta$  mertebeden bir çeşit Bessel fonksiyonu olarak bilinir.

Eğer (2.27) de  $k = -\vartheta$  konulursa, bu durumda (2.28) yerine

$$y = a_0 2^{-\vartheta} \left[ \left(\frac{x}{2}\right)^{-\vartheta} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\vartheta}}{(1-\vartheta)1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4-\vartheta}}{(1-\vartheta)(2-\vartheta)2!} - \dots \right] \quad (2.32)$$

elde edilir. Böylece

$$y = B \left[ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\vartheta}}{\Gamma(1-\vartheta)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2-\vartheta}}{\Gamma(2-\vartheta)1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{4-\vartheta}}{\Gamma(3-\vartheta)2!} - \dots \right]$$

yazılır. Buradan (2.31) den dolayı

$$J_{-\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta}}{\Gamma(s+1-\vartheta)s!} \quad (2.33)$$

olduğundan

$$y = BJ_{-\vartheta}(x)$$

formuna indirgenir.

Burada  $\vartheta$  tam sayı olmadığında (2.28), (2.32) daki paydaların sonlu kalması incelenen iki çözümün farklı olduğunu verir. Böylece bu halde genel çözüm

$$y = A J_{\vartheta}(x) + B J_{-\vartheta}(x) \quad (2.34)$$

yazılır.

II. HAL :  $\vartheta = 0$  ise,

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s! \Gamma(s+1)} \quad (2.35)$$

olmak üzere

$$y = AJ_0(x) \quad (2.36)$$

çözümüne sahiptir.

$$\begin{aligned} \Gamma(2) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t dt = [-e^{-t} t]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-e^{-t}) \cdot 1 dt \\ &= 0 + [-e^{-t}]_0^{\infty} = 1 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) = s \cdot (s-1) \Gamma(s-1) = s \cdot (s-1) \dots 2\Gamma(2)$$

dir. Böylece  $s \in \mathbb{Z}^+$  olduğu zaman

$$\Gamma(s+1) = s!$$

elde edilir. Bundan dolayı

$$J_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{(s!)^2} \quad (2.37)$$

bulunur. Buna Bessel denklemi için sıfırıncı mertebeden ikinci çözüm denir. Yani

$$x^2 y'' + xy' + x^2 y = 0 \text{ denkleminin çözümü}$$

$$\begin{aligned} y &= B \log x \left\{ 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right\} \\ &+ B \left\{ \frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots \right) \right\} \\ &= B \left\{ J_0(x) \log x + \left[ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} - \dots \right] \right\} \end{aligned}$$

formundadır.

$$X(x) = J_0(x) \log x + \left[ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(1!)^2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{(2!)^2} + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{(3!)^2} - \dots \right]$$

yazalım. Burada  $Y_0(x)$  fonksiyonunu

$$Y_0(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right) \left\{ \left[ \log\left(\frac{1}{2}\right) + \gamma \right] J_0(x) + X(x) \right\} \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlarsak, bu takdirde  $Y_0(x)$  Bessel denklemi-  
nin sıfırcı mertebeden bir çözümüdür. Bu sıfırcı mer-  
tebeden ikinci çeşit, Feber'in Bessel fonksiyonu olarak  
bilinir.

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \log_e m \right] \cong 0.5772...$$

şeklinde tanımlı Euler sabitidir. Böylece sıfırcı mer-  
tebeden Bessel denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_0(x) + BY_0(x) \quad (2.39)$$

dir.

III. HAL :  $\vartheta$  sıfırdan farklı bir tamsayı ise;

$n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $\vartheta = n$  aldığımızı  
farzedelim. Bu durumda (2.32) den dolayı  $\Gamma(n+s+1) = (n+s)!$   
nedeniyle ve  $(n+s)$  in pozitif bir tamsayı olması,  $n$  in-  
ci mertebeden Bessel denkleminin bir çözümünün

$$y = AJ_n(x) = A \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}}{(n+s)!s!} \quad (2.40)$$

olduğu görülür.

British Association Mathematical Tables Vol. VI  
(Cambridge University Press, 1937) göre  $Y_n(x)$ 'i

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\vartheta \rightarrow n} \left\{ \frac{\cos \vartheta \pi J_{\vartheta}(x) - J_{-\vartheta}(x)}{\sin \vartheta \pi} \right\} \\ &= \lim_{\vartheta \rightarrow n} \left\{ \frac{\frac{\partial}{\partial \vartheta} [\cos \vartheta \pi J_{\vartheta}(x) - J_{-\vartheta}(x)]}{\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \pi)} \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{\vartheta \rightarrow n} \left\{ \frac{-\pi \sin \vartheta \pi J_{\vartheta}(x) + \cos \vartheta \pi J_{-\vartheta}(x)}{\pi \cos \vartheta \pi} \right\}$$

$$= \left( \frac{1}{\pi} \right) \left[ \frac{\partial J_{\vartheta}(x)}{\partial \vartheta} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\vartheta}(x)}{\partial \vartheta} \right]_{\vartheta = n}$$

anlamında tanımlayalım.

Bu limitlerin tam değerlendirilmesi şu andaki çalışmanın ötesindedir. Sonuç olarak;

$$Y_n(x) = \left( \frac{2}{\pi} \right) J_n(x) \left\{ \log \left( \frac{1}{2}x \right) + \gamma \right\} - \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(n-s-1)!}{s!} \left( \frac{1}{2}x \right)^{2s-n} \\ - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! (n+s)} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{s} + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n+s} \right) \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2s} \quad (2.41)$$

yazılır.

Görüyoruzki  $Y_n(x)$ ,  $x = 0$  da bir logaritmik singüleriteye sahiptir.

Böylece  $n$  yinci mertebeli Bessel denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_n(x) + BY_n(x) \quad (2.42)$$

dir.

#### 2.4. BESSEL FONKSİYONLARININ ÖZELLİKLERİ VE İNDİRGE ME FORMÜLLERİ

i)  $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  dir.

$$\text{İspatı : } J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left( \frac{x}{2} \right)^{n+2s}}{s! \Gamma(n+s+1)} \quad (2.43)$$

de  $n$  yerine  $-n$  konulursa ( $n$  tamsayı)

$$J_{-n}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}}{s! \Gamma(-n+s+1)} = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}}{s! \Gamma(-n+s+1)} + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2s}}{s! \Gamma(-n+s+1)} \quad (2.44)$$

bulunur.

$\Gamma(-n + s + 1)$  in  $s = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$  sonsuz olduğundan (2.44) in sağ yanındaki birinci toplam sifıra gider. İkinci toplamda  $s = n + r$  alınırsa;

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+r} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{(n+r)! \Gamma(r+1)} = (-1)^n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{\Gamma(n+r+1) r!} = (-1)^n J_n(x)$$

elde edilir.

(ii) Her  $n$  için,

$$\frac{d}{dx} \{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

ve

$$\frac{d}{dx} \{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

dir.

İspatı :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \{x^n J_n(x)\} &= \frac{d}{dx} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2n+2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)} \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2n+2s-1}}{2^{n+2s-1} s! \Gamma(n+s)} = x^n \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{(n-1)+2s}}{2^{n-1+2s} s! \Gamma[(n-1)+s+1]} = x^n J_{n-1}(x) \end{aligned}$$

ve

$$\frac{d}{dx} \{x^{-n} J_n(x)\} = \frac{d}{dx} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{n+2s} s! \Gamma(n+s+1)} = x^{-n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s-1}}{2^{n+2s-1} (s-1)! \Gamma(n+s+1)}$$

$$= x^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{n+2s+1}}{2^{n+2s+1} s! \Gamma(n+s+2)} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

elde edilir.

$$iii) J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)] \text{ ve } J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

olduğunu gösteriniz.

$$\text{İspatı : } \frac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$$

den

$$x^n J'_n(x) + nx^{n-1} J_n(x) = x^n J_{n-1}(x)$$

$$x J'_n(x) + n J_n(x) = x J_{n-1}(x) \quad (1)'$$

ve

$$\frac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

den

$$x^{-n} J'_n(x) - nx^{-n-1} J_n(x) = -x^{-n} J_{n+1}(x)$$

$$x J'_n(x) - n J_n(x) = -x J_{n+1}(x) \quad (2)'$$

bulunur. (1)' ve (2)' taraf tarafa toplanır ve  $2x$  ile bölünürse;

$$J'_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$$

elde edilir. Aynı şekilde (2)' den (1)' çıkarılır ve  $x$  ile bölünürse;

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x} J_n(x)$$

bulunur.

$$iv) \quad J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x) = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

olduğunu gösteriniz?

İspatı :

$J_n(x)$  ve  $J_{-n}(x)$  Bessel fonksiyonları olduğundan Bessel denklemlerini gerçekliyeceklerinden

$$x^2 J''_n(x) + x J'_n(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) = 0$$

$$x^2 J''_{-n}(x) + x J'_{-n}(x) + (x^2 - n^2) J_{-n}(x) = 0$$

dir. Burada birinci denklemi  $J_{-n}(x)$  ile, ikinci denklemde  $J_n(x)$  ile çarpılıp ve taraf tarafa çıkarılırsa, bu durumda

$$x^2 [J''_n(x)J_{-n}(x) - J''_{-n}(x)J_n(x)] + x [J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x)] = 0$$

yazılır. Bunuda

$$x \frac{d}{dx} [J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x)] + [J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x)] = 0$$

şeklinde yazabiliriz, veya

$$\frac{d}{dx} \{x [J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x)]\} = 0$$

yazılabilir. Her iki taraf integre edilirse

$$J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x) = \frac{C}{x} \quad (1)''$$

bulunur.

$J_n(x)$  ve  $J_{-n}(x)$  için seri açılımları kullanılarak C hesap edilebilir. Buradan

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)} - \dots, \quad J'_n(x) = \frac{x^{n-1}}{2^n \Gamma(n)} - \dots,$$

$$J_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(-n+1)} - \dots, J'_{-n}(x) = \frac{x^{-n-1}}{2^{-n}\Gamma(-n)} - \dots,$$

yazılır ve (1)" de yerine konulursa,

$$C = \frac{1}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)} - \frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(-n)} = \frac{2}{\Gamma(n)\Gamma(1-n)} = \frac{2\sin n\pi}{\pi}$$

bulunur. Böylece

$$J'_n(x)J_{-n}(x) - J'_{-n}(x)J_n(x) = \frac{C}{x} = \frac{2\sin n\pi}{\pi x}$$

elde edilir.

$$v) e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

olduğunu gösteriniz? Buna ÜRETEN FONKSİYON denir.

İspatı :

$$\begin{aligned} e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} &= e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2t}} = \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{xt}{2})^r}{r!} \right\} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\frac{x}{2t})^s}{s!} \right\} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{r+s} t^{r-s}}{r!s!} \end{aligned} \quad (2.45)$$

yazılır.

$r-s = n$  alınır, böylece  $n$ ,  $-\infty$  dan  $+\infty$  kadar değişir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{n+2s} t^n}{(n+s)!s!} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{n+2s}}{s!(n+s)!} \right\} t^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \end{aligned}$$

$$vi) \quad \frac{x}{2}J_n(x) + \frac{x}{2}J_{n+2}(x) = (n+1)J_{n+1}(x)$$

olduğunu gösteriniz.

İspatı :

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

üreten fonksiyonunun her iki tarafının t ye göre türevi alınır,

$$e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} \cdot \frac{x}{2}(1 + \frac{1}{t^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) t^{n-1}$$

veya

$$\frac{x}{2}(1 + \frac{1}{t^2}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) t^{n-1}$$

yazılır. Burada

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}(1 + \frac{1}{t^2}) J_n(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) t^{n-1}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_n(x) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_n(x) t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x) t^{n-1}$$

veya

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_n(x) t^n + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{x}{2}J_{n+2}(x) t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)J_{n+1}(x) t^n$$

yazılabilir. Buradan,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} [\frac{x}{2}J_n(x) + \frac{x}{2}J_{n+2}(x)] \cdot t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+1)J_{n+1}(x) t^n$$

elde edilir. Her iki tarafın  $t^n$  katsayıları eşitlenirse

$$\frac{x}{2}J_n(x) + \frac{x}{2}J_{n+2}(x) = (n+1)J_{n+1}(x)$$

bulunur. Ayrıca n yerine (n-1) yazılarak

$$\frac{x}{2} J_{n-1}(x) + \frac{x}{2} J_{n+1}(x) = n J_n(x)$$

olduğu görülebilir.

## 2.5. BİRİNCİ ÇEŞİT BESSEL FONKSİYONLARI

$\vartheta$  bir tamsayı olmamak üzere

$$Y_1(x) = a_0 2^{\vartheta} \Gamma(\vartheta+1) \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s! \Gamma(s+\vartheta+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta} \quad (2.46)$$

çözümü  $\frac{1}{2^{\vartheta} \Gamma(\vartheta+1)}$  ile çarpılırsa (veya  $a_0$  katsayısı bu biçimde seçilirse)  $J_{\vartheta}$  ile gösterilen

$$J_{\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s! \Gamma(s+\vartheta+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+2s} \quad x \geq 0 \quad (2.47)$$

fonksiyonları elde edilir. Bu fonksiyonlar  $\vartheta$  yüncü mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonları ismini alır. (2.47) serisi  $\vartheta \geq 0$  olmak üzere  $x$ 'in her değeri için yakınsaktır.

Eğer  $x$  negatif ve  $\vartheta$  tam sayı değilse genel olarak  $J_{\vartheta}(x)$  kompleks değerler alacaktır. Bundan kurtulmak için  $\vartheta$  tamsayı olmadığında  $J_{\vartheta}(x)$  fonksiyonunu incelerken  $x \geq 0$  alınmıştır.  $\vartheta$  negatif olmayan  $k$  tamsayısı olduğunda (1.53) den (2.47) ifadesi

$$J_k(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}}{\Gamma(s+k+1)s!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}}{(s+k)!s!} \quad (2.48)$$

biçimindedir. Buna göre  $\vartheta$  sıfır veya çift bir tamsayı ise  $J_{\vartheta}(x)$ ,  $x$ 'in çift kuvvetlerini ihtiva ettiğinden çift fonksiyon olur.  $\vartheta$  tek tamsayı ise  $J_{\vartheta}(x)$ ,  $x$ 'in tek kuvvetlerini ihtiva ettiğinden tek fonksiyondur.

Benzer şekilde  $\vartheta$  tamsayı olmamak üzere

$$y_2(x) = a_0 2^{-\vartheta} \Gamma(1-\vartheta) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta}}{\Gamma(s-\vartheta+1)s!} \quad (2.48)$$

çözümü  $\frac{1}{2^{-\vartheta} \Gamma(1-\vartheta)}$  ile çarpılırsa (veya  $a_0$  katsayısı bu şekilde seçilirse)  $J_{-\vartheta}(x)$  ile gösterilen

$$J_{-\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta}}{\Gamma(s-\vartheta+1)s!} \quad (2.49)$$

$-\vartheta$  yüncü mertebeden birinci çeşit Bessel fonksiyonları elde edilir (2.49) toplam serisi  $x \neq 0$  olmak üzere her  $x$  için yakınsaktır.

$\vartheta$ , negatif olmayan  $k$  tamsayısı olduğunda  $n = 0, 1, 2, \dots, (k-1)$  için  $\Gamma(s-k+1)$  sonsuza gittiğinden (2.49) ifadesi

$$J_{-k}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-k}}{\Gamma(s-k+1)s!} \quad (2.50)$$

şeklını alır.

$\vartheta$  tamsayı olmamak üzere  $J_{\vartheta}(x)$  ve  $J_{-\vartheta}(x)$  fonksiyonları Bessel diferensiyel denkleminin Lineer bağımsız çözümleridir. Bu nedenle bunların Wronskiyeni

$$W(J_{\vartheta}, J_{-\vartheta})(x) = \begin{vmatrix} J_{\vartheta}(x) & J_{-\vartheta}(x) \\ J'_{\vartheta}(x) & J'_{-\vartheta}(x) \end{vmatrix}$$

sıfırdan farklıdır. Gerçekten gerek  $J_{\vartheta}(x)$  ve gerekse  $J_{-\vartheta}(x)$  fonksiyonları  $\vartheta$  yüncü mertebeden Bessel denkleminin çözümleri olduklarından

$$x^2 J_{\vartheta}''(x) + x J_{\vartheta}'(x) + (x^2 - \vartheta^2) J_{\vartheta}(x) = 0$$

$$x^2 J_{-\vartheta}''(x) + x J_{-\vartheta}'(x) + (x^2 - \vartheta^2) J_{-\vartheta}(x) = 0$$

yazılabilir. Bu denklemlerin birincisi  $J_{-\vartheta}(x)$ , ikincisi  $J_{\vartheta}(x)$  ile çarpılıp farkları alınır

$$\frac{d}{dx} \{x [J_{\vartheta}'(x) J_{-\vartheta}(x) - J_{\vartheta}(x) \cdot J_{-\vartheta}'(x)]\} = 0$$

elde edilir. C belirtilmesi gereken bir sabit olmak üzere her iki yanın integrali alınır

$$W(J_{\vartheta}, J_{-\vartheta})(x) = \frac{C}{x} \quad (2.51)$$

bulunur. C yi belirtmek için

$$J_{\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta}}{\Gamma(\vartheta+s+1)s!} \quad \text{ve} \quad J_{-\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta}}{\Gamma(s-\vartheta+1)s!}$$

den

$$J_{\vartheta}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta}}{\Gamma(\vartheta+1)} [1 + O(x^2)]$$

$$J_{\vartheta}'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta-1}}{2\Gamma(\vartheta)} [1 + O(x^2)]$$

$$J_{-\vartheta}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\vartheta}}{\Gamma(1-\vartheta)} [1 + O(x^2)]$$

$$J_{-\vartheta}'(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{-\vartheta-1}}{2\Gamma(-\vartheta)} [1 + O(x^2)]$$

elde edilen serisel açılımları (2.51) de kullanılırsa ve

$$J_{\vartheta}'(x) J_{-\vartheta}(x) - J_{-\vartheta}'(x) J_{\vartheta}(x) = \frac{2\sin\vartheta\pi}{\pi x} \text{ den yararlanarak}$$

$$W(J_{\vartheta}(x), J_{-\vartheta}(x)) = -\frac{2\sin\vartheta\pi}{\pi x} + O(x)$$

dır. Buradan (2.51) ile karşılaştırıldığında  $O(x)$  in sıfır olması gerekir. Böylece  $C = \frac{-2\sin\vartheta\pi}{\pi}$  ve bu nedenle

$$W(J_{\vartheta}(x), J_{-\vartheta}(x)) = \frac{-2\sin\vartheta\pi}{\pi x} \quad (2.52)$$

bulunur.  $\vartheta$  tamsayı olmamak üzere  $\sin\vartheta\pi \neq 0$  olduğundan

$$W(J_{\vartheta}(x), J_{-\vartheta}(x)) \neq 0,$$

dır.

Netice olarak  $\vartheta$  nün tamsayı olmaması halinde A ve B keyfi sabitler olmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \vartheta^2) y = 0$$

denkleminin genel çözümü;

$$y(x) = AJ_{\vartheta}(x) + BJ_{-\vartheta}(x) \quad (2.53)$$

şeklinde yazılabilir.

k tamsayı olmak üzere  $\vartheta = k$  alınırda daha önce özellik olarak vermiş olduğumuz

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x) \quad (2.54)$$

varılır. Bu sonuca göre k nıncı mertebeden Bessel diferensiyel denkleminin çözümleri  $J_k(x)$  ve  $J_{-k}(x)$  fonksiyonları lineer bağımlıdırlar.

Kesim 2.2 de belirtildiği gibi  $\vartheta = k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z})$  için (2.53) genel çözümü geçerlidir. Gerçekten (2.46) da  $\vartheta = k + \frac{1}{2}$  alınırda

$$y_1(x) = a_0 2^{k + \frac{1}{2}} \Gamma(k + \frac{3}{2}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(s+k+\frac{3}{2}) s!} \quad (2.55)$$

elde edilir. Burada  $a_0$  katsayısı  $2^{-(k+\frac{1}{2})} \frac{1}{\Gamma(k+\frac{3}{2})}$

şeklinde alınırda

$$J_{k+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+k+\frac{1}{2}}}{\Gamma(s+k+\frac{3}{2}) s!} \quad (2.56)$$

ve

(2.48)' de  $\vartheta = -k - \frac{1}{2}$  alınırda

$$y_2(x) = a_0 2^{-k - \frac{1}{2}} \Gamma(-k + \frac{1}{2}) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{2s-k - \frac{1}{2}}}{\Gamma(s-k + \frac{3}{2}) s!} \quad (2.57)$$

elde edilir. Burada da  $a_0$  katsayısı  $2^{k + \frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(-k + \frac{1}{2})}$

şeklinde seçilirse

$$J_{-k - \frac{1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{2s-k - \frac{1}{2}}}{\Gamma(s-k + \frac{1}{2}) s!} \quad (2.58)$$

fonksiyonları elde edilir. Bu çeşit fonksiyonlar birinci çeşit yarı tam mertebeden Bessel fonksiyonları olarak isimlendirilir. Bunların Wronskiye

$$W(J_{k + \frac{1}{2}}, J_{-k - \frac{1}{2}})(x) = - \frac{2 \sin(k + \frac{1}{2}) \pi}{\pi x} \quad (2.59)$$

bulunur. Bu durumda bu fonksiyonlar linear bağımsızdır. Bu çeşit fonksiyonların küresel dalga problemlerinde karşımıza çıkması nedeniyle küresel Bessel fonksiyonları denildiğininde görmekteyiz [11].

Bunların  $k = 0$  olması durumunda

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{2s + \frac{1}{2}}}{\Gamma(s + \frac{3}{2}) s!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \quad (2.60)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (\frac{x}{2})^{2s - \frac{1}{2}}}{\Gamma(s + \frac{1}{2}) s!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{2s}}{(2s)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

bulunur.

## 2.6. İKİNCİ ÇEŞİT BESSEL FONKSİYONLARI

$\vartheta$  tamsayı olmak üzere

$$y_2(x) = y_1(x) \cdot \ln x + a_0 \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+1} \frac{1}{(s!)^2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) (\frac{x}{2})^{2s} \quad (2.61)$$

ile ifade edilen  $y_2(x)$  çözümü  $-2^{\vartheta-1}\Gamma(\vartheta-1)$  ile çarpılırsa çözüm

$$y_2(x) = J_{\vartheta}(x) \ln x - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\vartheta-1} \frac{(\vartheta-s-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta} - \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\vartheta!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta} \frac{1}{\vartheta} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!(s+\vartheta)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta} \left( \sum_{r=1}^s \frac{1}{r} + \sum_{r=0}^s \frac{1}{r+\vartheta} \right) \right] \quad (2.62)$$

biçimini alır. Bu çözümden

$$\frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\vartheta-1} \right) J_{\vartheta}(x)$$

çıkarılırsa

$$\phi(s) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{\vartheta} \quad \phi(0) = 0$$

olmak üzere  $N_{\vartheta}(x)$  ile gösterilen

$$N_{\vartheta}(x) = J_{\vartheta}(x) \ln x - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\vartheta-1} \frac{(s-\vartheta-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta} - \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!(s+\vartheta)!} [\phi(s) + \phi(s+\vartheta)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta} \quad (2.63)$$

Neumann fonksiyonları elde edilir.

Bessel fonksiyonları ile ilgili işlemlerde ikinci bağımsız çözümü  $J_{\vartheta}(x)$  ile  $N_{\vartheta}(x)$  in bir lineer kombinasyonu olarak almak bir tercihtir [12]. Buna göre  $\gamma$  Euler sabiti

$$\gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s} - \ln s \right) = 0,577215\dots$$

olmak üzere  $y_{\vartheta}(x)$  ile gösterilen ikinci bağımsız çözüm

$$y_{\vartheta}(x) = \frac{2}{\pi} \left[ \ln \frac{x}{2} + \gamma \right] J_{\vartheta}(x) - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\vartheta-1} \frac{(\vartheta-s-1)!}{s!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta} - \frac{1}{\pi} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{1}{s!(s+\vartheta)!} [\phi(s) + \phi(s+\vartheta)] \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta}$$

$$= \frac{2}{\pi} [N_{\vartheta}(x) + (\gamma - \ln 2) J_{\vartheta}(x)] \quad (2.64)$$

formundadır. Bu gösterimi Weber gösterimi olarakda isimlendirilir [13].

Böylece (2.63) veya (2.64) ile tanımlanan bu fonksiyonlar  $\vartheta$  yinci mertebeden ikinci çeşit Bessel fonksiyonları veya Neumann fonksiyonları adını alır. Bu fonksiyonları Weber tarafından tanımlanan daha kullanışlı gösterim,

$$y_{\vartheta}(x) = \begin{cases} \frac{J_{\vartheta}(x) \cos \vartheta \pi - J_{-\vartheta}(x)}{\sin \vartheta \pi}, & \vartheta \neq \text{tamsayı} \\ \lim_{k \rightarrow \vartheta} \frac{J_k(x) \cos k \pi - J_{-k}(x)}{\sin k \pi}, & \vartheta = \text{tamsayı} \end{cases} \quad (2.65)$$

formundadır.

$\vartheta$  nün her değeri için tanımlı (2.65), (2.21) Bessel diferensiyel denkleminin bir çözümüdür.  $\vartheta$  nin tam değerleri için (2.64), (2.65) in bir serisel açılımıdır.

Gerçekten  $\vartheta \neq \text{tamsayı}$  durumunda  $y_{\vartheta}$ ,  $J_{\vartheta}(x)$  ve  $J_{-\vartheta}(x)$  in bir lineer kombinasyon olduğundan (2.21) Bessel denkleminin çözümü olduğu açıktır.

$\vartheta = \text{tamsayı}$  olmaması halinde

$$J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$$

den dolayı (2.65) belirsizdir. L' hospital kuralı uygulanarak

$$\begin{aligned} y_p &= \lim_{k \rightarrow \vartheta} [(-\pi \sin k \pi) J_k(x) + \cos k \pi \left( \frac{\partial J_k(x)}{\partial k} \right) - \left( \frac{\partial J_{-k}(x)}{\partial k} \right)] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_k(x)}{\partial k} - (-1)^{\vartheta} \frac{\partial J_{-k}(x)}{\partial k} \right]_{k = \vartheta} \end{aligned} \quad (2.66)$$

ifadesi elde edilir. Burada  $J_k(x)$  ve  $J_{-k}(x)$ ,  $k$  yıncı mertebeden Bessel denkleminin çözümleri olduğundan (2.66) dan dolayı

$$\pi \left( x^2 \frac{d}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + x^2 - k^2 \right) \frac{J_{\pm k}(x)}{\partial k} = 2kJ_{\pm k}(x)$$

yazılabilir. (2.66) dan yararlanarak

$$\pi \left( x^2 \frac{d}{dx^2} + x^2 \frac{d}{dx} + x^2 - \vartheta^2 \right) y_{\vartheta}(x) = [2kJ_k(x) - (-1)^{\vartheta} 2kJ_{-k}(x)]_{k=\vartheta}$$

$$= 2\vartheta [J_{\vartheta}(x) - (-1)^{\vartheta} J_{-\vartheta}(x)] = 0$$

den dolayı  $\vartheta$  nin tamsayı olmaması durumunda  $y_{\vartheta}(x)$ , (2.21) Bessel denkleminin bir çözümüdür.  $\vartheta$  nin tamsayı olması halinde  $y_{\vartheta}$  nin serisel açılımının (2.64) olduğunu görelim.

$$J_{\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta}}{\Gamma(s+\vartheta+1)s!}, \quad x \geq 0 \quad \text{den}$$

$$\frac{\partial J_k(x)}{\partial k} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \frac{\partial}{\partial k} \left[ \frac{1}{\Gamma(s+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+k} \right]$$

türev değerini hesap edelim. Burada

$$\frac{1}{\Gamma(s+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+k} = M$$

denilirse

$$\ln M = (2s+k) \ln \frac{x}{2} - \ln \Gamma(s+k+1)$$

ve bu nedenle

$$\frac{1}{M} \frac{\partial M}{\partial k} = \ln \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{\Gamma'(s+k+1)}{\Gamma(s+k+1)}$$

elde edilir.

### BÖLÜM III

#### BESSEL DİFERENSİYEL DENKLEMLERİNE DÖNÜŞTÜRÜLEBİLEN DENKLEMLER

Bu bölümde mühendislik, fizik, istatistik problemlerinde karşılaşılan ve Bessel diferensiyel denklemine dönüştürülebilen ve çözümü Bessel fonksiyonları ile ifade edilebilen bazı önemli özel denklemlerin incelenmesi üzerinde durulacaktır [3].

3.1.  $x > 0$  ve  $\vartheta, k$  ( $k \neq 0$ ) reel sabitler olmak üzere

$$y'' - \frac{2\vartheta-1}{x} y' + k^2 y = 0 \quad (3.1)$$

denklemini gözönüne alalım.

Bu denklemi;

$$xy'' - (2\vartheta-1)y' + k^2 xy = 0 \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme

$$x_1 = kx \quad (3.3)$$

dönüşümü uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dx_1} \frac{dx_1}{dx} = k \cdot \frac{dy}{dx_1} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( k \frac{dy}{dx_1} \right) = k^2 \frac{d^2y}{dx_1^2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

türevleri elde edilir. Bunlar (3.2) denkleminde yerine konursa

$$x_1 \frac{d^2 y}{dx_1^2} - (2\vartheta - 1) \frac{dy}{dx_1} + x_1 y = 0 \quad (3.5)$$

denklemine varılır. (3.5) denklemine

$$v = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{x_1 a_1}{a_2} dx_1} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{x_1}{x_1} dx_1} = e^{\frac{2\vartheta-1}{2} \ln x_1} = x_1^{\vartheta - \frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

olmak üzere

$$y = u.v = x_1^{\vartheta - \frac{1}{2}} . u \quad (3.7)$$

konumu ile (3.5) denklemi

$$\frac{d^2 u}{dx_1^2} + \left(1 + \frac{1-4\vartheta^2}{4x_1^2}\right) u = 0 \quad (3.8)$$

biçimini alır. Bu denklem

$$x_1^2 \frac{d^2 y}{dx_1^2} + x_1 \frac{dy}{dx_1} + (x_1^2 - \vartheta^2) y = 0 \quad (3.9)$$

şeklinde  $\vartheta$  yıncı mertebeden Bessel denkleminin kanonik biçimidir. (3.9) denklemi

$$v = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{x_1 a_1}{a_2} dx_1} = e^{-\frac{1}{2} \int \frac{x_1 dx_1}{x_1}} = e^{-\frac{1}{2} \ln x_1} = x_1^{-\frac{1}{2}}$$

olmak üzere

$$y = u.v = x_1^{-\frac{1}{2}} . u$$

değişken değişimi ile (3.8) denklemine dönüşür. Buradan (3.9) denkleminin genel çözümü,  $\vartheta$  nın tamsayı olup olmamasına göre

$$y = \begin{cases} AJ_\vartheta(x_1) + BY_\vartheta(x_1) \\ AJ_\vartheta(x_1) + BJ_{-\vartheta}(x_1) \end{cases} \Rightarrow z_\vartheta(x_1) \quad (3.10)$$

biçimindedir. Burada  $J_\vartheta$  ve  $Y_\vartheta$  sırasıyla birinci ve ikinci çeşit  $\vartheta$  yinci mertebeden Bessel fonksiyonlarıdır.  $z_\vartheta(x_1)$  ise  $\vartheta$  yinci mertebeden Bessel denkleminin genel çözümüdür. (A ve B sabitler)

Bu duruma göre (3.8) denkleminin genel çözümü

$$z_\vartheta(x_1) = x_1^{-\frac{1}{2}} u(x_1) \Rightarrow u(x_1) = x_1^{\frac{1}{2}} z_\vartheta(x_1) \quad (3.11)$$

şeklindedir. Buradan (3.5) denkleminin çözümü

$$y = u.v = x_1^{\vartheta-\frac{1}{2}} . u(x_1) = x_1^{\vartheta-\frac{1}{2}} . x_1^{\frac{1}{2}} z_\vartheta(x_1) = x_1^\vartheta . z_\vartheta(x_1) \quad (3.12)$$

ve böylece (3.1) denkleminin genel çözümü

$$y = (kx)^\vartheta z_\vartheta(kx) = x^\vartheta z_\vartheta(kx) \quad (3.13)$$

biçiminde bulunur.

3.2.  $\lambda$  bir sabit olmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \vartheta^2) y = 0 \quad (3.14)$$

diferensiyel denklemini düşünelim.

Bu denklem  $s = \lambda x$  dönüşümü ile  $\vartheta$  yinci mertebeden

$$s^2 \frac{d^2 y}{ds^2} + s \frac{dy}{ds} + (s^2 - \vartheta^2) y = 0$$

şeklinde Bessel diferensiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$y = AJ_\vartheta(s) + BY_\vartheta(s) \quad (3.15)$$

olur. Bu çözüm  $s$  yerine  $\lambda x$  alınırsa, (3.14) denkleminin genel çözümü

$$y = AJ_{\theta}(\lambda x) + BY_{\theta}(\lambda x) \quad (3.16)$$

bulunur.

3.3.  $\alpha, \beta, s$  sabitler olmak üzere ve  $s \neq 0$  için

$$t^2 y'' + ty' + (\beta^2 - \alpha t^{2s})y = 0 \quad (3.17)$$

denklemini gözönüne alalım.

Bu denklem için;

$$u = \frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}$$

biçiminde bir çözüm önerelim. Bu takdirde

$$y = \phi(u) = \phi\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right)$$

düşünerek, zincir kuralını uygulayalım.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\phi}{du} \cdot \frac{du}{dt} = \phi'(u) \sqrt{\alpha} t^{s-1}$$

$$t \frac{dy}{dt} = \phi'(u) \sqrt{\alpha} t^s = s \cdot u \phi'(u)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{dy}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\phi'(u) \cdot \sqrt{\alpha} \cdot t^{s-1}]$$

$$= \phi'(u) \frac{d^2 u}{dt^2} + \phi''(u) \left( \frac{du}{dt} \right)^2$$

$$= \phi'(u) (s-1) \sqrt{\alpha} t^{s-2} + \phi''(u) (\sqrt{\alpha} \cdot t^{s-1})^2$$

$$= \phi'(u) (s-1) \sqrt{\alpha} \cdot t^{s-2} + \phi''(u) \cdot \alpha \cdot t^{2s-2}$$

$$t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} = \phi'(u) (s-1) \sqrt{\alpha} t^s + \phi''(u) \alpha t^{2s}$$

$$= \phi'(u) (s-1) \cdot s \cdot u + \phi''(u) s^2 u^2$$

bu değerler (3.17) denkleminde yerlerine konulursa

$$s^2 u^2 \phi''(u) + s^2 u \phi'(u) + (s^2 u^2 - \beta^2) \phi(u) = 0 \quad (3.18)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde;

$$\vartheta^2 = \frac{\beta^2}{s^2}$$

olarak düşünülürse

$$u^2 \phi''(u) + u \phi'(u) + [u^2 - (\frac{\beta}{s})^2] \phi(u) = 0$$

bulunur. Bu denklemin bir çözümü

$$\phi(u) = J_{\beta/s}(u)$$

dur. Buradan (3.17) denkleminin çözümü

$$y = \phi(u) = J_{\beta/s}\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right)$$

yazılır. Eğer  $\beta/s \neq 0$  veya pozitif tamsayı değilse,  $c_1, c_2$  keyfi sabitler olmak üzere;

$$y = c_1 J_{\beta/s}\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right) + c_2 J_{-\beta/s}\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right) \quad (3.19)$$

genel çözümü elde edilir.

Eğer  $\beta = 0$  ise

$$y = c_1 J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right) + c_2 J_0\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right) \quad (3.20)$$

bulunur. Eğer  $\beta/s$  pozitif tamsayı ise

$$y = c_1 J_{\beta/s}\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right) + c_2 Y_{\beta/s}\left(\frac{\sqrt{\alpha} t^s}{s}\right) \quad (3.21)$$

genel çözümü elde edilir.

3.4.  $\alpha, \beta, \gamma, \vartheta$  sabitler olmak üzere

$$y'' + (1-2\alpha) \left(\frac{y'}{x}\right) + [(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + (\alpha^2 - \vartheta^2 \gamma^2)/x^2] y = 0 \quad (3.22)$$

denkleminin genel çözümü üzerinde duralım. Bu neden ile yeni bir bağımsız değişken  $X$  ve bağımlı değişken  $Y$  olmak üzere

$$Y = \frac{y}{x^\alpha} \quad \text{ve} \quad X = \beta x^\gamma \quad (3.23)$$

seçelim. Buradan

$$y = x^\alpha Y \quad \text{ve} \quad x^\gamma = \frac{X}{\beta} \Rightarrow x = \left(\frac{X}{\beta}\right)^{1/\gamma}$$

olur. Gerekli türevlere geçilirse;

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^\alpha Y) = x^\alpha \cdot \frac{dY}{dx} + \alpha \cdot x^{\alpha-1} Y \\ &= x^\alpha \left(\frac{dY}{dX} \cdot \frac{dX}{dx}\right) + \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot Y \\ &= x^\alpha \frac{dY}{dX} \beta \cdot \gamma \cdot x^{\gamma-1} + \alpha x^{\alpha-1} Y \\ &= \beta \gamma x^{\alpha+\gamma-1} \frac{dY}{dX} + \alpha x^{\alpha-1} Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \beta \gamma x^{\alpha+\gamma-1} \frac{dY}{dX} + \alpha x^{\alpha-1} Y \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( \beta \gamma x^{\alpha+\gamma-1} \frac{dY}{dX} \right) + \frac{d}{dx} (\alpha x^{\alpha-1} Y) \\ &= \beta \gamma (\alpha + \gamma - 1) x^{\alpha+\gamma-2} \frac{dY}{dX} + \beta \gamma x^{\alpha+\gamma-1} \frac{d}{dx} \left( \frac{dY}{dX} \right) \\ &\quad + \frac{d}{dx} (\alpha x^{\alpha-1}) \cdot Y + \alpha x^{\alpha-1} \frac{dY}{dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= \beta \gamma (\alpha + \gamma - 1) x^{\alpha+\gamma-2} \left(\frac{dY}{dX}\right) + \beta \gamma x^{\alpha+\gamma-1} \frac{d^2 Y}{dX^2} (\beta \gamma x^{\gamma-1}) \\ &\quad + \alpha (\alpha - 1) x^{\alpha-2} Y + \alpha x^{\alpha-1} \frac{dY}{dX} (\beta \gamma x^{\gamma-1}) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \beta^2 \gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2} \frac{d^2Y}{dX^2} + \beta \gamma (2\alpha + \gamma - 1)^{\alpha+\gamma-2} \frac{dY}{dX} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}Y$$

elde edilir. Bu türevler (3.22) de yerlerine konursa

$$\beta^2 \gamma^2 x^{\alpha+2\gamma-2} \frac{d^2Y}{dX^2} + \beta \gamma^2 x^{\alpha+\gamma-2} \frac{dY}{dX} + [\beta^2 \gamma^2 x^{\alpha+2(\gamma-1)} - \vartheta^2 \gamma^2 x^{\alpha-2}]Y = 0$$

denklemini bulunur.

$$X = \beta x^\gamma$$

olduğu bilindiğine göre ve ayrıca  $x^{\alpha-2}$ ,  $\gamma^2$  ile bölüm düşünülürse;

$$\begin{aligned} \beta^2 x^{2\gamma} \frac{d^2Y}{dX^2} + \beta x^\gamma \frac{dY}{dX} + [\beta^2 x^{2\gamma-\vartheta^2}]Y &= 0 \\ X^2 \frac{d^2Y}{dX^2} + X \frac{dY}{dX} + [X^2 - \vartheta^2]Y &= 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

bulunur. Bu denklemin genel çözümleri;

$$\begin{aligned} Y &= AJ_\vartheta(X) + BJ_{-\vartheta}(X), \quad \vartheta \text{ tamsayı değil} \\ Y &= AJ_n(X) + BY_n(X), \quad \vartheta = n \text{ tamsayı} \end{aligned} \quad (3.25)$$

olarak elde edilir.

$$X = \beta x^\gamma, \quad Y = \frac{Y}{x^\alpha}$$

dönüşümüne dönülürse:

$$\begin{aligned} \frac{Y}{x^\alpha} &= AJ_\vartheta(\beta x^\gamma) + BJ_{-\vartheta}(\beta x^\gamma) \\ \frac{Y}{x^\alpha} &= AJ_n(\beta x^\gamma) + BY_n(\beta x^\gamma) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da;

$$y = x^{\alpha} \{ A J_{\vartheta}(\beta x^{\gamma}) + B J_{-\vartheta}(\beta x^{\gamma}) \} , \quad \text{tamsayı değil} \quad (3.26)$$

$$y = x^{\alpha} \{ A J_n(\beta x^{\gamma}) + B Y_n(\beta x^{\gamma}) \} , \quad \vartheta = n \text{ tamsayı}$$

ifadeleri ile (3.22) denkleminin çözümleri elde edilir.

ÖRNEK 3.4.1.

$$\alpha = -\frac{1}{2}(k-1), \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \vartheta = k-1, \quad k \in \mathbb{Z}$$

olması halinde

$$xy'' + ky' + \frac{1}{4}\beta^2 y = 0$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu denklem boyutlu kirişlerin titreşim problemlerinde karşılaştığımız bir denklemdir (3.26) çözümlerinden yararlanarak bu denklemin genel çözümü

$$y = x^{-\frac{1}{2}(k-1)} \{ A J_{k-1}(\beta x^{\frac{1}{2}}) + B Y_{k-1}(\beta x^{\frac{1}{2}}) \}$$

ÖRNEK 3.4.2.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{2}{3}, \quad \gamma = \frac{3}{2} \quad \text{ve} \quad \vartheta = \frac{1}{3}$$

olması halinde

$$y'' = xy$$

diferensiyel denklemi bulunur. Bu denklemle bir optik probleminde karşılaşmaktayız [8].

$$y = x^{\frac{1}{2}} \left\{ A J_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} ix^{\frac{3}{2}}\right) + B J_{-\frac{1}{3}}\left(\frac{2}{3} ix^{\frac{3}{2}}\right) \right\}$$

şeklindedir.

ÖRNEK 3.4.3.

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{2} \quad \text{ve} \quad \vartheta = 1 \text{ olması halinde}$$

$$xy'' + \frac{1}{4} \beta^2 y = 0$$

diferensiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde değişken boyutlu bir PAYANDA'nın kararlılığının araştırılmasında karşılaşılmaktadır. Denklemin genel çözümü (3.26) dan

$$y = Ax^{\frac{1}{2}} J_1(\beta x^{\frac{1}{2}}) + Bx^{\frac{1}{2}} Y_1(\beta x^{\frac{1}{2}})$$

biçimindedir.

3.5.

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \vartheta^2) y = 0 \quad (3.27)$$

diferensiyel denklemini düşünelim. Modifiye Bessel denklemi adı verilen bu denklem,  $\lambda = i$  alınmak üzere

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda^2 x^2 - \vartheta^2) y = 0$$

biçimindedir. Bu denklemde  $t = ix$  dönüşümü yardımıyla Bessel diferensiyel denklemine dönüşür. Denklemin genel çözümü;

$$y = AJ_{\vartheta}(ix) + BY_{\vartheta}(ix) \quad (3.28)$$

şeklinde yazılır. Burada  $J_{\vartheta}(ix)$  ve  $Y_{\vartheta}(ix)$  çözüm fonksiyonları kompleks fonksiyonlardır. Değiştirilmiş (Modifiye) Bessel fonksiyonları olarak isimlendirilirler.

Diğer taraftan

$$I_{\vartheta}(x) = i^{-\vartheta} J_{\vartheta}(ix) \quad (3.29)$$

biçiminde tanımlı fonksiyonlar  $\vartheta$  yinci mertebeden birinci çeşit değiştirilmiş Bessel fonksiyonları ismini alır.  $I_{\vartheta}(x)$  ve  $I_{-\vartheta}(x)$  fonksiyonları lineer bağımsız olmaları nedeni ile

$$W(I_{\vartheta}, I_{-\vartheta})(x) = -\frac{2\sin\vartheta\pi}{\pi x} \neq 0 \quad \text{dır.} \quad (3.30)$$

$$k \in \mathbb{Z}, \quad \vartheta = k \quad \text{için}$$

$$I_{\vartheta}(x) = i^{-\vartheta} J_{\vartheta}(ix) \quad \text{ve} \quad J_{-\vartheta}(x) = (-1)^{\vartheta} J_{\vartheta}(x)$$

nedeni ile

$$I_{-k}(x) = I_k(x) \quad (3.31)$$

olup,  $I_{-k}(x)$  ve  $I_k(x)$  fonksiyonları lineer bağımlıdır. Böylece  $\vartheta \notin \mathbb{Z}$  olmak üzere (3.27) değiştirilmiş Bessel diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y = AI_{\vartheta}(x) + BI_{-\vartheta}(x)$$

biçimindedir. Burada (2.31) ve (2.33) yardımıyla

$$I_{\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(s+\vartheta+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\vartheta} \quad (3.32)$$

$$I_{-\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! \Gamma(s-\vartheta+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-\vartheta}$$

serisel açılımlarıda yazılabilir.

$$K_{\vartheta}(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\vartheta}(x) - I_{\vartheta}(x)}{\sin\vartheta\pi} & \vartheta \notin \mathbb{Z} \\ \lim_{k \rightarrow \vartheta} \frac{I_{-k}(x) - I_k(x)}{\sin k\pi} & \vartheta \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.33)$$

ile tanımlanan  $K_{\vartheta}(x)$  fonksiyonları ise,  $\vartheta$  yüncü mertebeden ikinci çeşit değiştirilmiş Bessel fonksiyonları ismini alır. Bu fonksiyonlar  $\vartheta$  nün her değeri için tanımlı (3.27) denkleminin bir çözümüdür.  $\vartheta \in \mathbb{Z}$  için;

$$K_{\vartheta}(x) = (-1)^{\vartheta+1} \left( \gamma + \ln \frac{x}{2} \right) I_{\vartheta}(x) + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\vartheta-1} \frac{(-1)^s (\vartheta-s-1)!}{s!} \left( \frac{x}{2} \right)^{2s-\vartheta} \\ + \frac{(-1)^{\vartheta}}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s! (s+\vartheta)!} [\phi(s) + \phi(s+\vartheta)] \left( \frac{x}{2} \right)^{2s+\vartheta} \quad (3.34)$$

serisel açılımına sahiptir.

$I_{\vartheta}(x)$  ve  $K_{\vartheta}(x)$  fonksiyonları için (3.30) dan

$$W(I_{\vartheta}(x), I_{-\vartheta}(x)) = \frac{1}{2} \pi \operatorname{Cosec} \vartheta \pi \cdot W(I_{\vartheta}(x), I_{-\vartheta}(x)) \quad (3.35) \\ = -\frac{1}{x} \neq 0$$

olduğu görülür.  $I_{\vartheta}(x)$  ve  $K_{\vartheta}(x)$  fonksiyonları lineer bağımsızdır.  $\vartheta$  tamsayı olmamak üzere A ve B keyfi sabitler olmak üzere

$$y = AI_{\vartheta}(x) + BK_{\vartheta}(x)$$

biçimindedir.

3.6.

$$x^2 y'' + xy' - (ix^2 + \vartheta^2)y = 0$$

diferensiyel denklemini gözönüne alalım. Elektrik Mühendisliği ile ilgili problemlerde karşımıza çıkan bu denklemde  $t = \sqrt{ix}$  dönüşümü uygulanırsa denklemin

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + \vartheta^2)y = 0$$

denklemine dönüştüğü görülür. Buradan denklemin genel çözümünün

$$y = AI_{\vartheta}(\sqrt{ix}) + BK_{\vartheta}(\sqrt{ix})$$

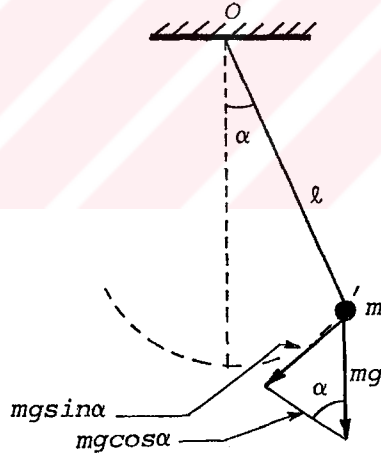
biçiminde olduğu görülmektedir.  $I_{\vartheta}(\sqrt{ix})$  ve  $K_{\vartheta}(\sqrt{ix})$  fonksiyonları kompleksdir.

## BÖLÜM IV

### BESSEL FONKSİYONLARI İLE İLGİLİ UYGULAMALAR

Bu bölümde, bundan önceki bölümlerde özelliklerini incelemiş olduğumuz Bessel fonksiyonlarının Fen Bilimlerinde, özellikle fizik ve mühendislikte geniş alana sahip olduğunu vurgulamak amacıyla uygulamalara yer verilecektir.

#### 4.1. BASİT SARKAÇ PROBLEMİ



Başlangıçta  $l_0$  uzunluğunda ve düşeyle  $\alpha_0$  açısı yapan bir basit sarkaç düşünelim. Bu sarkacı ilk pozisyonundan sabit hızla hareket ettirelim. Eğer  $t$  zamanında uzunluğu  $l = l_0 + \epsilon t$  olup ( $\epsilon$  sabit bir sayı) ve düşeyle  $\alpha$  açısını yapıyorsa, bu basit sarkacın herhangi bir  $t$  zamanındaki küçük salınımlarını inceleyelim.

Sarkacın kütlesi  $m$  ve herhangi bir  $t$  zamanında düşeyle yaptığı açı  $\alpha$  olsun.  $mg$  ağırlığını iki bileşen halinde düşüneceğiz. Teğet durumundaki davranışını  $mgsin\alpha$  ve düşeyle  $\alpha$  açısı yapan kuvveti de  $mgcos\alpha$  ile verilir. Mekanikten bilindiğine göre

$$O \text{ noktasındaki dönme momenti} = \frac{d}{dt} (O \text{ noktasındaki açısal momenti})$$

dir. Buradan  $\alpha' = \frac{d\alpha}{dt}$  olmak üzere

$$(-mgsin\alpha)l = \frac{d}{dt} (ml^2\alpha') \quad (4.1)$$

yazılır. Bu denklem

$$l\alpha'' + 2l'\alpha' + gsin\alpha = 0$$

veya  $l = l_0 + \epsilon t$  olması nedeni ile

$$(l_0 + \epsilon t)\alpha'' + 2\epsilon\alpha' + g\alpha = 0$$

bulunur.  $x = l_0 + \epsilon t$  alınırsa, bu denklem

$$x \frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2 \frac{d\alpha}{dx} + \frac{g}{\epsilon^2} \alpha = 0 \quad (4.2)$$

şeklinde yazılır.  $x$  ile çarpılırsa elde edilen denklemin

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{l_0 + \epsilon t}} [AJ_1(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{l_0 + \epsilon t}) + BY_1(\frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{l_0 + \epsilon t})] \quad (4.3)$$

çözümü bulunur.  $t = 0$  için  $\alpha = \alpha_0$  dan dolayı

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{l_0}} [AJ_1(\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon}) + BY_1(\frac{2\sqrt{gl_0}}{\epsilon})] \quad (4.4)$$

elde edilir.

$t = 0$  da  $\alpha' = 0$  sağlanır. Buradan

$$\alpha' = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{-\epsilon}{2(\ell_0 + \epsilon t)^{3/2}} [AJ_1 \left( \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{\ell_0 + \epsilon t} \right) + BY_1 \left( \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{\ell_0 + \epsilon t} \right)]$$

$$+ \frac{\sqrt{g}}{\ell_0 + \epsilon t} [AJ_1' \left( \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{\ell_0 + \epsilon t} \right) + BY_1' \left( \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{\ell_0 + \epsilon t} \right)]$$

bulunur.

$t = 0$  için  $\alpha' = 0$  olması nedeni ile

$$0 = - \frac{\epsilon}{2\ell_0^{3/2}} [AJ_1 \left( \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon} \right) + BY_1 \left( \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon} \right)]$$

$$+ \frac{\sqrt{g}}{\ell_0} [AJ_1' \left( \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon} \right) + BY_1' \left( \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon} \right)]$$

veya (4.4) kullanılarak

$$AJ_1' \left( \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon} \right) + BY_1' \left( \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon} \right) = \frac{\epsilon\alpha_0}{2\sqrt{g}} \quad (4.5)$$

elde edilir. (4.4) ve (4.5) nin çözümünden

$$A = \frac{\sqrt{\ell_0} Y_1' - \left( \frac{\epsilon}{2\sqrt{g}} \right) Y_1}{J_1 Y_1' - Y_1 J_1'} \alpha_0$$

$$B = \frac{\left( \frac{\epsilon}{2\sqrt{g}} \right) J_1 - \sqrt{\ell_0} J_1'}{J_1 Y_1' - Y_1 J_1'} \alpha_0 \quad (4.6)$$

bulunur.

$$J_n(x) Y_n'(x) - J_n'(x) Y_n(x) = \frac{2}{\pi x}$$

de  $n = 1$  alınarak ve  $x = \frac{2\sqrt{g\ell_0}}{\epsilon}$  alınırsa

$$J_1(x) Y_1'(x) - Y_1(x) J_1'(x) = \frac{2}{\pi x}$$

yazılabilir. Böylece

$$J_1 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) Y_1' \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) - Y_1 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) J_1' \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) = \frac{\epsilon}{\pi \sqrt{g l_0}}$$

bulunur. Burada (4.6) ifadeleri

$$\begin{aligned} A &= \frac{\pi \sqrt{g l_0}}{\epsilon} \alpha_0 Y_1' \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \sqrt{l_0}}{\epsilon} \alpha_0 Y_1 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) \\ B &= \frac{\pi \sqrt{l_0} \alpha_0}{2} J_1 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) - \frac{\pi \sqrt{g l_0} \alpha_0}{\epsilon} J_1' \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

bu formülleride

$$\begin{aligned} A &= - \frac{\pi \sqrt{l_0}}{2} \alpha_0 Y_2 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) \\ B &= \pi \sqrt{l_0} \alpha_0 J_2 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

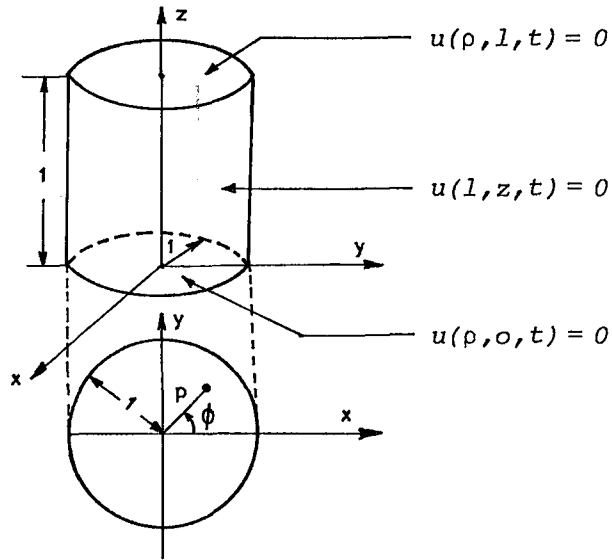
yazabiliriz. (4.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi \sqrt{l_0} \alpha_0}{2\sqrt{l_0 + \epsilon t}} \left[ J_2 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) Y_1 \left( \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{l_0 + \epsilon t} \right) \right. \\ &\quad \left. - Y_2 \left( \frac{2\sqrt{g l_0}}{\epsilon} \right) J_1 \left( \frac{2\sqrt{g}}{\epsilon} \sqrt{l_0 + \epsilon t} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir.

#### 4.2. İLETKEN CİSİMLERDE SICAKLIK DAĞILIMLARI

Birim yarıçaplı ve birim yükseklikteki bir katı iletken silindirinde  $K$ ,  $f(\rho, z)$  nin başlangıçtaki ısı yayılmasını göstermek üzere, silindirin bütün yüzeyinde aniden ısı sıfıra düşmektedir ve bu ısı muhafaza edilmektedir. Silindirin herhangi bir noktasında sonra ki bir zamandaki ısı Bessel fonksiyonları ile yorumlanabilir.



Silindirik koordinatlarda  $\phi$  kutupsal açısından bağımsız olarak ve simetriden dolayı ısı hareketi denklemi,  $u = u(\rho, z, t)$  olmak üzere

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K \left( \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (4.10)$$

biçimde verilir. Bu denklemin çözümlerinin Bessel fonksiyonları ile ifade edilebileceğini gösterelim [9]. Buna göre

$$\begin{aligned} u(\rho, z, 0) &= f(\rho, z) \\ u(\rho, 0, t) &= 0 \\ u(\rho, 1, t) &= 0 \\ u(1, z, t) &= 0 \\ |u(\rho, z, t)| &< M \\ f(\rho, z) &= u_0 \text{ (sabit)} \end{aligned} \quad (4.11)$$

sınır şartlarına göre (4.10) denkleminin  $0 \leq \rho < 1$ ,  $0 < z < 1$ ,  $t > 0$  olmak üzere çözümü araştırılacaktır. (4.10) denklemine  $u = PZT = P(\rho)Z(z)T(t)$  değişkenlerin ayrılması metodu uygulanırsa, yani gerekli türevler alınıp yerlerine konulursa

$$PZT' = K(P''ZT + \frac{1}{\rho} P'ZT + PZ''T)$$

elde edilir. Her iki taraf KPZT ile bölünürse

$$\frac{T'}{KT} = \frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho} \frac{P'}{P} + \frac{Z''}{Z}$$

bulunur. Buradan

$$T' + K\lambda^2 T = 0$$

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho} \frac{P'}{P} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda^2 \quad (4.12)$$

yazılır. Son denklem

$$\frac{P''}{P} + \frac{1}{\rho} \frac{P'}{P} = -\lambda^2 - \frac{Z''}{Z}$$

biçiminde yazılabildiğinden

$$\begin{aligned} \rho P'' + P' + \mu^2 \rho P &= 0 \\ Z'' - \vartheta^2 Z &= 0 \quad (\vartheta^2 = \mu^2 - \lambda^2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

bulunur. (4.12) ve (4.13) ün çözümleri

$$\begin{aligned} T &= c_1 e^{-K\lambda^2 t} \\ P &= c_2 J_0(\mu \rho) + c_3 Y_0(\mu \rho) \\ Z &= c_4 e^{\vartheta z} + c_5 e^{-\vartheta z} \end{aligned}$$

verilirse (4.10) denkleminin çözümü

$$u(\rho, z, t) = [c_1 e^{-K\lambda^2 t}] [c_2 J_0(\mu \rho) + c_3 Y_0(\mu \rho)] [c_4 e^{\vartheta z} + c_5 e^{-\vartheta z}]$$

elde edilir.  $\rho = 0$  sınırlılık şartından  $c_3 = 0$  alınabilir. Bu durumda

$$u(\rho, z, t) = e^{-K\lambda^2 t} J_0(\mu \rho) [A e^{\vartheta z} + B e^{-\vartheta z}] \quad (4.14)$$

çözümüne varılır. (4.11) sınır şartlarından

$$u(\rho, 0, t) = e^{-K\lambda^2 t} J_0(\mu \rho) (A + B) = 0$$

veya

$$u(\rho, z, t) = Ae^{-K\lambda^2 t} J_0(\mu \rho) [e^{\vartheta z} - e^{-\vartheta z}] \quad (4.15)$$

olduğu görülür. (4.11) sınır şartlarından üçüncüye göre

$$u(\rho, l, t) = Ae^{-K\lambda^2 t} J_0(\mu \rho) [e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}] = 0$$

yazılabilir.  $e^{\vartheta} - e^{-\vartheta} = 0$  dan veya  $e^{2\vartheta} = 1 = e^{2k\pi i}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) den  $2\vartheta = 2k\pi i$  veya  $\vartheta = k\pi i$  olduğu görülerek (4.15) nın

$$u(\rho, z, t) = C e^{-K\lambda^2 t} J_0(\mu \rho) \sin k\pi z \quad (C \text{ yeni katsayı})$$

şekli elde edilir. (4.11) şartının dördüncüsüne göre

$$u(l, z, t) = C e^{-K\lambda^2 t} J_0(\mu) \sin k\pi z = 0 \quad (4.16)$$

çözümü bulunur. Ancak bu yalınız  $J_0(\mu) = 0$  için olacağından

$$\mu = r_1, r_2, \dots \quad (4.17)$$

şeklinde,  $r_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ),  $J_0(x) = 0$  nın  $m$  pozitif kökleri olmak üzere yazılabilir. (4.13) (4.16) (4.17) den

$$\lambda^2 = \mu^2 - \vartheta^2 = r_m^2 + k^2 \pi^2$$

elde edilip

$$u(\rho, z, t) = C e^{-K(r_m^2 + k^2 \pi^2) t} J_0(r_m \rho) \sin k\pi z \quad (4.18)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots)$$

bulunur.  $C$  yi  $C_{km}$  ile ve  $k$  ve  $m$  değerleri için toplamaları süperpozisyon prensibine göre alırsak

$$u(\rho, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} e^{-K(r_m^2 + k^2 \pi^2) t} J_0(r_m \rho) \sin k\pi z \quad (4.19)$$

(4.11) den

$$f(\rho, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} J_0(r_m \rho) \sin k\pi z$$

bunu da

$$\begin{aligned} f(\rho, z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} J_0(r_m \rho) \right\} \sin k\pi z \quad (4.20) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi z \quad (b_k = \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} J_0(r_m \rho)) \end{aligned}$$

yazılır. Burada  $b_k$ ,  $f(\rho, z)$  nin  $z$  için Fourier sin açılımında (Burada  $\rho$  sabit olarak düşünülmektedir) Fourier katsayısı olup,

$$b_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(\rho, z) \sin k\pi z \, dz \quad (4.21)$$

dır.

$$b_k = \sum_{m=1}^{\infty} C_{km} J_0(r_m \rho)$$

açılımından  $C_{km}$  bulunabilir.  $b_k$ ,  $\rho$  nun fonksiyonu olduğundan

$$C_{km} = \frac{2}{J_1^2(r_m)} \int_0^{\ell} \rho b_k J_0(r_m \rho) \, d\rho \quad (4.22)$$

yazılabilir. Burada  $b_k$  yerine yazılırsa

$$C_{km} = \frac{4u}{J_1^2(r_m)} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} \rho f(\rho, z) J_0(r_m \rho) \sin k\pi z \, d\rho \, dz \quad (4.23)$$

bulunur. (4.19) çözümündeki  $C_{km}$  katsayısı (4.23) şeklinde oluşur. (4.11) sınır şartlarından  $f(\rho, z) = u_0$  şartı kullanılırsa

$$C_{km} = \frac{4u_0}{J_1^2(r_m)} \int_0^{\ell} \int_0^{\ell} \rho J_0(r_m \rho) \sin k\pi z \, d\rho \, dz$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4u_0}{J_1^2(r_m)} \left\{ \int_0^{\ell} \rho J_0(r_m \rho) d\rho \right\} \left\{ \int_0^{\ell} \sin k\pi z dz \right\} \\
&= \frac{4u_0}{J_1^2(r_m)} \left\{ \frac{J_1(r_m)}{r_m} \right\} \left\{ \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi} \right\} \\
&= \frac{4u_0 (1 - \cos k\pi)}{k\pi r_m J_1(r_m)}
\end{aligned}$$

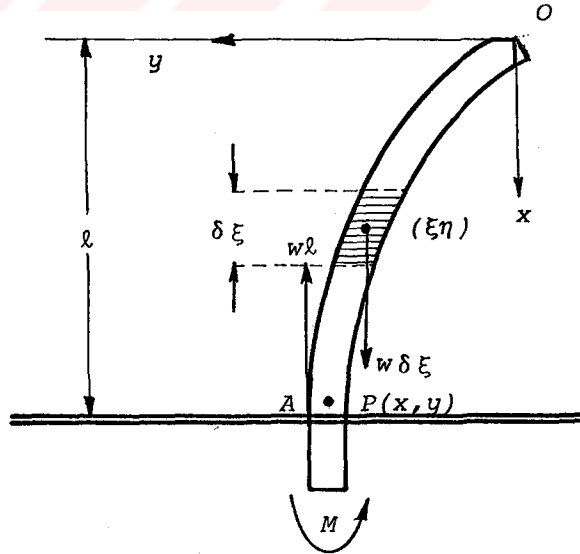
elde edilir. Bunu (4.19) da yerine yazarsak

$$u(\rho, z, t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - \cos k\pi}{k\pi r_m J_1(r_m)} e^{-K(r_m^2 + k^2 \pi^2)t} J_0(r_m \rho) \sin k\pi z$$

ısı fonksiyonunu bulmuş oluruz.

#### 4.3. BİR İNCE DÜZGÜN (DEĞİŞMEZ) AĞIRLIKLIL KOLONUN DENGESİ

$\ell$  uzunluğunda,  $W$  ağırlığında  $A$  ya düşey olarak tutturulmuş (tespit edilmiş) bir birim düzgün ağırlıklı kolonu göstermektedir.



Buradaki problem, kolonun kendi ağırlığı altında hangi şartlar altında bükülebildiğini araştırmaktır.

Burada 0 serbest noktasından 0x eksenini düşey olarak aşağı doğru ve 0y eksenini yatay doğru olarak alalım. P(x,y) kolonda bir Nokta ve  $\delta \xi$  kolonun bir  $(\xi, \eta)$  noktasındaki kolon elemanı olsun. Bu durumda  $W\delta \xi$  elemanının ağırlığı olacaktır. P noktası yakınında kendi ağırlığının saat yelkovanı yönündeki momenti

$$W(y - \eta) \delta \xi$$

dir. Böylece ağırlığının saat yönündeki bükülme momenti

$$\int_0^x W(y - \eta) d\xi$$

dir. Kolonun bükülme eğrisi 0y eksenine doğru konveks olduğu için  $y''$  negatiftir. (Büküm noktasında  $y'' = 0$  dır ve eğrinin çukurluğu 0y nin negatif yönünde ise  $y'' < 0$  dır. mak ve min noktası  $y' = 0$  dır). Böylece uygun bükülme momenti denklemi

$$EIy'' = - \int_0^x W(y - \eta) d\xi = -Wyx + W \int_0^x \eta d\xi \quad (4.24)$$

(4.24) ün x'e göre türevi alınarak ve  $p = y'$  yazılarak,  $y = \eta(x)$  olması nedeni ile

$$EI p'' = -Wy - Wpx + W\eta(x) = -Wpx$$

elde edilir. Böylece  $m = \frac{W}{EI}$  ise, kolonun bükülme eğrisi için diferensiyel denklem

$$p'' + mpx = 0 \quad (4.25)$$

farzedilebilir. Bu denklemin genel çözümü,  $\vartheta$  tamsayı olmamak üzere

$$p = x^\alpha [AJ_\vartheta(\beta x^\gamma) + BJ_{-\vartheta}(\beta x^\gamma)]$$

genel çözümüne sahip olduğunu,

$$p'' + (1 - 2\alpha) \left( \frac{p'}{x} \right) + [(\beta \gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - \vartheta^2 \gamma^2}{x^2}] p = 0$$

kanonik denklemleri ile (4.25) denkleminin mukayesesi sonucu ortaya çıkacaktır. Şöyleki

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{2}{3} m^{1/2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \quad \vartheta = \frac{1}{3}$$

elde edilir. Bu durumda (4.24) ün genel çözümü

$$P(x) = x^{1/2} \left[ A J_{1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) + B J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) \right] \quad (4.26)$$

bulunur.  $p'(0) = 0$ ,  $p(\ell) = 0$  uygun sınır şartlarıdır.

Şimdi  $\vartheta$  tamsayı olmamak üzere

$$J_{\vartheta}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+2s}}{\Gamma(\vartheta+s+1)s!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta}}{\Gamma(\vartheta+1)} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\vartheta+2s}}{\Gamma(\vartheta+s+1)s!}$$

fonksiyonunu düşünelim. Böylece (4.26) dan dolayı  $J_{1/3}$  ve  $J_{-1/3}$  fonksiyonlarını

$$J_{1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) = a_0 x^{1/2} + a_1 x^{7/2} + \dots$$

$$J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) = b_0 x^{-1/2} + b_1 x^{5/2} + \dots$$

formundaki açılımlara sahiptirler. Buradan

$$x^{1/2} J_{1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) = a_0 x + a_1 x^4 + \dots$$

$$x^{1/2} J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) = b_0 + b_1 x^3 + \dots$$

olup

$$p(x) = A(a_0 x + a_1 x^4 + \dots) + B(b_0 + b_1 x^3 + \dots)$$

bulunur.

$a_0 \neq 0$  nedeni ile  $p'(0) = 0$  şartı  $A = 0$  olmasını gerektirir. Böylece (4.26) çözümü

$$p(x) = Bx^{1/2} J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} x^{3/2} \right) \quad (4.26)'$$

biçimine indirgenir.

Fakat  $p(l) = 0$  ve eğer kolon  $B \neq 0$  olacak şekilde büküldü ise

$$J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} m^{1/2} l^{3/2} \right) = 0 \quad (4.27)$$

dır. (4.27) nin yaklaşık değerini tablodan

$$l^3 \cong 7.85 EI/W$$

olarak bulunur.  $E = 3 \times 10^7 \text{ lb/inc}^2$  alınırsa çeliğin yoğunluğu  $480 \text{ lb/ft}^3$  dir. Yarıçapı  $1 \text{ ft}$  olan dairesel ke-site sahip bir düzgün çelik kolonun uzunluğu  $260 \text{ ft}$  aş-tığından bükülecektir.

## KAYNAKLAR

- [1] Kreider, L. Donald, L. Kuller, G. Robert, G. Ostberg, R. Donald, R., Linear Analysis, Addison-Wesley Pub. Co., R. Massachusetts, 1966.
- [2] Murnaghan, D. Francis, D., Introduction to Applide Mathematics, Dover Publications, Inc, New York, 1963.
- [3] Belman, R., Stability theory of Differential Equations, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1953.
- [4] Leighton, W., An Introduction to the Theory of Differential Equations, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1952.
- [5] Richard, R., Modern Introductory Differential Equations, Mc Graw-Hill Book Company New York 1973.
- [6] Condington, E.A. and Levison, N., Theory of Ordinary Differential Equation, Mc Graw-Hill New York, 1955.
- [7] Condington, E.A., An Introduction to Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall of India Private, Ltd., New Delhi, 1968.
- [8] Watson, G.N., A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge University Press, London, 1962.
- [9] Murray, R.S., Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems, Mc Graw-Hill Book Company New York, 1974.
- [10] Mc Lachlan, N.W., Bessel Functions for Engineers, Oxford University Press, London, 1964.
- [11] Tranter, C.J., Bessel Functions with some Physical Applications, Hart Publishing Company, Inc., New York, 1969.

- [12] Ross, S.L., Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1974.
- [13] Relton, F.E., Applied Bessel Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [14] Farrell, O.J., and B. Ross, Solved Problems in Analysis as applied to Gamma, Beta, Legendre, and Bessel Functions, Dover Publications, Inc., New York, 1971.
- [15] Yaşar, İ.B., Diferensiyel Denklemler, Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara, 1987.
- [16] Tolstov, G.P., Fourier Series, Dover Publications, Inc., New York, 1976.
- [17] Spiegel, R.M., Advanced Mathematics for Engineers and Scientists, Schaum's Outline series, New York, 1971.
- [18] Muray, F.H., "On Certain Linear Differential Equations of the Second Order", American Monthly Science 69, 88, 1918.

**T. C.**  
Yükseköğretim Kurulu  
Dokümantasyon Merkezi

ÖZGEÇMİŞ

## ÖZGEÇMİŞ

Saime Turan 1951 yılında Aydın'ın Çine İlçesinde doğdu.

1968 de Denizli İlköğretmen Okulunu ve İzmir Yüksek Öğretmen Okulu Hazırlık sınıfını bitirdi.

1972 de Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik-Fizik bölümünden mezun oldu.

Erzurum, Kayseri, Antalya, Isparta'da Lise Öğretmenliği yaptı. 1979 yılında Isparta Yabancı diller ve Meslek Yüksekokulunda göreve başladı. 1981 de atandığı Hacettepe Üniversitesi Ankara Meslek Yüksekokulunda halen görevini sürdürmektedir.

**T. C.**  
**Yükseköğretim Kurulu**  
**Dokümantasyon Merkezi**



**Bülent Savaşlı**

**Atatürk Bulvarı No:151**

**Kat:9 Daire No:905**

**Bakanlıklar - ANKARA**

**Tel:117 02 17**