



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

BETA-STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

BÜŞRA TELLİ

BURDUR, 2022

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BETA-STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

BÜŞRA TELLİ

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2022

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Beta-Sturm-Liouville Problemi**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

23/06/2022

Büşra TELLİ

TEŞEKKÜR

Çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan, bilgi birikimleriyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan ve her zaman öğrencisi olmaktan gurur duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca beni destekleyen eşime ve aileme sonsuz şükranlarımı sunar, teşekkür ederim.

Haziran, 2022

Büşra TELLİ

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	iv
İÇİNDEKİLER	v
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	1
2.1. Temel Kavramlar	1
2.2. Beta-Fark Operatörü ve Özellikleri	4
2.3. Beta İntegral	13
2.4. $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ Uzayı ve $L_\beta^p[a, b]$ Uzayı	20
2.4.1. $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ Uzayı	20
2.4.2. $L_\beta^p[a, b]$ Uzayı	20
2.5. β -Üstel ve β -Trigonometrik Fonksiyonlar	21
3. MATERYAL VE YÖNTEM	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	29
5. SONUÇ	34
KAYNAKLAR	35

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

H : Hilbert Uzayı

$D_{\beta}f(t)$: Genel Kuantum Fark Operatörü

$D_{q,\omega}f(t)$: Hahn Fark Operatörü

$E_{q,\omega}(t, z)$: $q - \omega$ Üstel fonksiyon

$W_{q,\omega}[f, g]$: f ile g fonksiyonlarının $q - \omega$ Wronskian'ı

$\mathfrak{I}$: Birim Operatör

$\mathbb{C}$: Kompleks Sayılar Kümesi

$(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$: Sınır değer uzayı

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$\int$: İntegral

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Beta-Sturm-Liouville Problemi
Büşra TELLİ

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Haziran, 2022

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, regüler Beta-Sturm-Liouville problemleri çalışıldı.

Son olarak, Beta Sturm Liouville operatörünün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Beta kalkülüs, Sturm-Liouville operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, genişleme, sınır değer uzayı, sınır koşulları.

SUMMARY

**M. Sc. Thesis
Beta-Sturm Liouville Problem**

BÜŞRA TELLİ

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

June, 2022

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned, some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, regular Beta-Sturm-Liouville problems are studied.

Finally, a description of all maximal dissipative, accretive, self-adjoint and other extensions of Beta-Sturm-Liouville operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: Beta calculus, Sturm-Liouville operator, symmetric operators, self-adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value, boundary conditions.

1.GİRİŞ

Simetrik operatörlerin genişlemesi problemi operatörler teorisinde uzun zamandır çalışılan konulardan birisidir. Bu problem şöyle ifade edilebilir: simetrik bir operatör kendisi de simetrik olan genişlemeye hangi koşullarda sahiptir ve bu genişleme nasıl elde edilir? 1929 yılında J. Von Neumann (Von Neumann, 1929) bu problem ile ilgili temel sonuçları elde etmiştir. Rellich (Rellich, 1951), Krein (Krein, 1947, 1952), Vishik (Vishik, 1952), Birman (Birman, 1956), bu problem üzerinde çalışan matematikçilerden bazılarıdır. 1969 yılına gelindiğinde Rofe-Beketov (Rofe-Beketov, 1969) lineer bağıntıları kullanarak simetrik operatörlerin genişlemesini elde etmiştir. Disipatif lineer bağıntılar kullanılarak operatör katsayılı simetrik diferansiyel operatörlerin disipatif ve kendine eş genişlemeleri Gorbachuk, Kochubei ve Rybak (Gorbachuk vd., 1972) tarafından elde edilmiştir. Daha sonraki yıllarda birbirinden bağımsız olarak Bruk (Bruk, 1976) ve Kochubei (Kochubei, 1975) tarafından sınır değer uzayı kavramı yardımıyla simetrik operatörlerin disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri yapıldı. Simetrik operatörlerin genişlemesi ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Gorbachuk, Gorbachuk ve Kochubei (Gorbachuk vd., 1989) çalışmasına bakılabilir. Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk vd., 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1984), Maksudov ve Allahverdiev (Maksudov ve Allahverdiev, 1993), Allahverdiev (Allahverdiev, 1995, 2013, 2014, 2016), ve Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018) simetrik operatörlerin kendine eş genişlemelerini sınır koşulları cinsinden elde eden matematikçilerdir.

Kuantum kalkülüs, limit kullanılmayan hesap olarak bilinir. Türevlenemeyen fonksiyonlar üzerinde işlem yapabilmeyi sağlar. Kuantum fark operatörleri, ortogonal polinomlar, temel hipergeometrik fonksiyonlar, kombinatorik, varyasyon hesabı ve görelilik teorisi gibi çeşitli matematiksel alanlarda uygulamalarından dolayı ilginç bir role sahiptir.

2015 yılında Hamza vd. (Hamza vd., 2015) tarafından genel kuantum fark operatörü D_β , genelleştirilmiş Hahn kuantum operatörü (belirli β fonksiyonları için) ve onların ters operatörü, β -integral tanımlandı. Yapılan bu tanımla

$$D_{q,\omega}[f](x) := \frac{f(qx+\omega)-f(x)}{(q-1)x+\omega} \quad (1.1)$$

ile tanımlanan Hahn kuantum türevi ve

$$D_q[f](x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x} \quad (1.2)$$

ile tanımlanan Jackson q-türevi genelleştirilmiştir. 2015'te (Hamza ve Shehata, 2015), β -Hölder, β -Minkowski, β -Gronwall, β -Bernoulli ve β -Lyapunov eşitsizliklerini ispatladı. 2016'da genel kuantum fark denklemlerinin varlık ve teklik çözümleri kanıtlandı. (Hamza ve Shehata, 2016). Faried vd. (Faried vd., 2017) genel kuantum fark denklemlerinde bazı yeni sonuçlar vermiştir. Hamza vd. (Hamza vd., 2017)'de üstel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar tanıtıldı. (Cruz ve Martins, 2018)'de genel quantum varyasyonel hesaplama kurulurken (Faried vd., 2018)'de n.ci merteye lineer genel quantum fark denklemleri araştırıldı. β -Lebesgue uzaylarının özellikleri (Cardoso, 2020)'de verildi ve Shehata vd. (Shehata vd., 2020)'de, genel kuantum Laplace dönüşümünü araştırmışlardır. 2021 yılında Cardoso (Cardoso, 2021) β -Sturm Liouville probleminin kendine eş formülasyonunu elde ederek, karşılık gelen özdeğerler ve özfonksiyonlar için özelliklerini araştırmıştır.

Bu tez çalışmasında, regüler durumda Beta-Sturm-Liouville denklemi ele alınmıştır. Bu tip operatörler için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan temel kavram ve teoriler verilecektir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. Lineer uzaylarda tanımlanmış olan dönüşümlere operatör denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.2. U , bir kompleks lineer uzay olsun. Her $u, v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ için

- i. $(u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- ii. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
- iii. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$
- iv. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$

Şartlarını sağlayan ve (u, v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının iç çarpımı denir ve U lineer uzayına da iç çarpım uzayı denir.

Ayrıca verilen bu özellikleri dikkate aldığımızda $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$ ve $(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özellikleri de yazılabilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.3. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}$$

normuna göre tam ise yani $(U, (.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi U ' nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.4. H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin. Her $u \in H$ için,

$$\|Tu\| \leq k\|u\| \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir k sayısı varsa T ye *sınırlı lineer operatör* denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün *normu* denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \quad (2.2)$$

ile verilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.5. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olsun. T nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \quad (2.3)$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektörlerinden oluşan kümeye T^* operatörünün tanım kümesi denir ve $\mathcal{D}(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

- i. $(T^*)^* = T$
- ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
- iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$
- iv. $(T)^* = L^* T^*$
- v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken)

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.6. $T^* = T$ ise, T' ye kendine eş operatör adı verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.7. A lineer operatörünün tanım kümesi $\mathcal{D}(A)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $f \in \mathcal{D}(A)$ için

$$\forall f \in \mathcal{D}(A), \operatorname{Im}(Af, f) \geq 0 \quad (2.4)$$

ise, A operatörüne disipatif operatör denir.

Her $f \in \mathcal{D}(A)$ için

$$\operatorname{Im}(Af, f) \leq 0 \quad (2.5)$$

ise A operatörüne akretif operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Eğer A disipatif (akretif) operatörü kendinden farklı disipatif (akretif) genişlemeye sahip değilse A operatörüne maksimal disipatif (akretif) operatör denir.

Tanım 2.1.8. Tanım kümesin $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için,

$f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa, A operatörüne Hermitian denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.9. $A: D(A) \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = H$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise, yani $A \subset A^*$ ise, A ya simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.10. $D(U)$, U operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise U ya izometrik operatör denir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.11. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise U operatörüne üniter operatör denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$U^*U = UU^* = I \text{ olmasıdır (Akhiezer ve Glazman, 1963).}$$

Tanım 2.1.12. $f \in D(A)$ için,

$$\tilde{A}f = Af$$

ve $D(\tilde{A}) \subset D(A)$ oluyorsa, A operatörüne $\tilde{A}$ operatörünün genişlemesidir denir.

$\tilde{A}$ operatörüne ise A operatörünün kısıtlamasıdır denir. Eğer A operatörü, simetrik $\tilde{A}$ operatörünün bir simetrik genişlemesi ise $A \subset \tilde{A}^*$ dır. Yani $\tilde{A}$ operatörünün her simetrik genişlemesi, $\tilde{A}^*$ operatörünün bir kısıtlamasıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.13. Simetrik bir A operatörünün uygun bir simetrik genişlemesi yoksa A operatörü maksimaldir denir (Naimark, 1968).

Kendine eş (self-adjoint) her A operatörü, maksimal simetrik bir operatördür.

2.2. Beta-Fark Operatörü ve Özellikleri

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir aralık ve $\beta: I \rightarrow I$ kesin artan, sürekli fonksiyon olsun. Ayrıca β fonksiyonu her $t \in I$ için

$$(t - s_0)(\beta(t) - t) \leq 0 \quad (2.6)$$

koşulunu sağlayan tek bir $s_0 \in I$ sabit noktasına sahip olsun.

Burada yalnızca $t = s_0$ olduğunda (2.6) denkleminde eşitlik olur.

$f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu için $f'(s_0)$ türevinin mevcut olması şartıyla genel kuantum fark operatörü

$$D_\beta f(t) = \begin{cases} \frac{f(\beta(t)) - f(t)}{\beta(t) - t}, & t \neq s_0 \\ f'(s_0), & t = s_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

ile tanımlanır (Hamza vd., 2015).

$D_\beta f(t)$ ifadesine $t \in I$ noktasında f fonksiyonunun β -türevi denir. $f'(s_0)$ türevi varsa f fonksiyonuna I aralığı üzerinde β -türevlenebilir denir.

Aşağıda β -fark operatörünün bazı özellikleri verilmiştir.

(i) D_β lineer bir operatördür.

(ii) f, t 'de β -türevlenebilir ise, o zaman

$$f(\beta(t)) = f(t) + (\beta(t) - t)D_\beta f(t) \text{ 'dir.}$$

(iii) f, β -türevlenebilir ise, o zaman f, s_0 noktasında süreklidir (Hamza vd., 2015).

Lemma 2.2.1. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(i) s_0 noktasını içeren her $J \subseteq I$ kompakt aralığı üzerinde $\{\beta^k(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ fonksiyonlarının dizisi, sabit $\hat{\beta}(t) := s_0$ fonksiyonuna düzgün yakınsar.

(ii) s_0 noktasını içeren her $J \subseteq I$ kompakt aralığı üzerinde $\sum_{k=0}^{\infty} |\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t)|$ serisi $|t - s_0|$ 'a düzgün yakınsar.

Kanıt. (i) $J = [a, b]$, $s_0 \in J$ olsun. Eğer $t \in [s_0, b]$ ise, (2.6) koşulundan, her $k \in \mathbb{N}_0$ için

$$\beta^{k+1}(t) \leq \beta^k(t)$$

elde edilir. Böylece $\{\beta^k(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ dizisi $\hat{\beta}(t) = s_0$ sabit fonksiyonuna doğru azalır. Dini'nin teoremiyle $\{\beta^k(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$, $[s_0, b]$ aralığı üzerinde $\hat{\beta}(t)$ sabit fonksiyonuna düzgün yakınsar. Benzer şekilde $[a, s_0]$ aralığı üzerinde de düzgün yakınsaklığı ispatlanabilir. Sonuç olarak,

$\{\beta^k(t)\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ dizisi $J=[a, b]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

(ii) İstenen sonucu elde etmek için $[s_0, b]$ ve $[a, s_0]$ aralıklarının üzerinde Dini'nin teoremini

$S_n(t) = \sum_{k=0}^n (\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))$, $n = 1, 2, \dots$ serisine uygulanarak istenen sonuç elde edilir (Hamza, vd., 2015).

Lemma 2.2.2. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu ve s_0 noktasında sürekli ise, $\{f(\beta^k(t))\}_{k \in \mathbb{N}_0}$ dizisi s_0 noktasını içeren her $J \subseteq I$ kompakt aralığında $f(s_0)$ 'a düzgün yakınsar (Hamza vd., 2015).

Teorem 2.2.3. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu ve s_0 noktasında sürekli ise

$\sum_{k=0}^{\infty} \|\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t)\| f(\beta^k(t))$ serisi s_0 noktasını içeren her $J \subseteq I$ kompakt aralığında düzgün yakınsar (Hamza vd., 2015).

Kanıt. $J \subseteq I$ s_0 noktasını içeren kompakt bir aralık olsun. Lemma 2.2.2 den

$$\|f(\beta^k(t)) - f(s_0)\| < 1 \quad \forall t \in J, k \geq k_0$$

olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

O zaman, $k \geq k_0$ ve $t \in J$ için

$$\|f(\beta^k(t))\| < 1 + \|f(s_0)\|$$

olur. Buradan

$$|(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))| \|f(\beta^k(t))\| < |(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))| (1 + \|f(s_0)\|) \quad \forall t \in J, k \geq k_0 \quad (2.8)$$

elde edilir (Hamza vd., 2015). Şimdi

$$D_n(t) = \sum_{k=0}^n \|(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t)) f(\beta^k(t))\| \quad (2.9)$$

ve

$$C_n(t) = \sum_{k=0}^n |(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))|(1+\|f(s_0)\|) \quad (2.10)$$

dizilerini göz önüne alalım.

Lemma 2.2.1 (ii) ile, $C_n(t)$, J aralığı üzerinde $|t - s_0| (1+\|f(s_0)\|)$ düzgün yakınsar.

Cauchy kriteriyle, $\epsilon > 0$ verildiğinde $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki

$$\|C_n(t) - C_m(t)\| < \epsilon \quad \forall t \in J, n \geq m \geq n_0. \quad (2.11)$$

(2.8) ve (2.11) koşullarını kullanarak,

$$\|D_n(t) - D_m(t)\| \leq \|C_n(t) - C_m(t)\| < \epsilon \quad \forall n \geq m \geq \max\{n_0, k_0\}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))f(\beta^k(t))\|$$

serisi J aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır (Hamza vd., 2015).

Örnek 2.2.4. Sabit $\omega \geq 0$ ve $q \in (0, 1)$ için, $\beta(t) := qt \mp \omega$ formülü ile $I = \mathbb{R}$ üzerinde

tanımlansın. Bu durumda $s_0 = \frac{\mp \omega}{1-q}$ ve

$$[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q} \text{ olmak üzere}$$

$$\beta^k(t) = q^k t \mp \omega[k]_q$$

ve

$$\beta^{-k}(t) = \frac{t \mp \omega[k]_q}{q^k}$$

elde edilir. O zaman

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^k(t) = s_0$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^{-k}(t) = \begin{cases} \infty, & t > s_0, \\ -\infty, & t < s_0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu durum, hem ileri hem de geri Hahn fark operatörlerini, ayrıca, $\omega=0$ olduğunda Jackson q -fark operatörünü de temsil eder (Annaby vd., 2012; Annaby ve Mansour, 2012; Hamza ve Ahmed, 2013; Bangerezako, 2008; Kac, 2002).

Örnek 2.2.5. Sabit $q \in (0,1)$ ve sabit $n \in 2\mathbb{N}+1$ ve β için $\beta(t) := qt^n$ fonksiyonu

$I = (-q^{\frac{1}{1-n}}, q^{\frac{1}{1-n}})$ üzerinde tanımlansın. O zaman β , I 'dan I 'ya kesinlikle artan bir fonksiyon ve $s_0=0$ tek bir sabit noktası olan bir fonksiyondur.

$$\beta^{-1}(t) = \sqrt[n]{\frac{t}{q}} \text{ dir. Ayrıca}$$

$$\beta^k(t) = q^{[k]_n} t^{n^k}, \quad \beta^{-k}(t) = q^{-n-k[k]_n} t^{n^{-k}}$$

ve $t \in I$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^k(t) = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta^{-k}(t) = \begin{cases} q^{\frac{1}{1-n}}, & 0 < t \\ 0, & t = 0 \\ -q^{\frac{1}{1-n}}, & t < 0 \end{cases}$$

$$D_{n,q}f(t) := \begin{cases} \frac{f(qt^n) - f(t)}{qt^n - t}, & t \neq 0 \\ f'(0), & t = 0 \end{cases}$$

(Aldwoah vd.,2012).

Teorem 2.2.6. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in I$ noktasında β -diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun.

O zaman

(i) $fg: I \rightarrow \mathbb{X}$ çarpımı t noktasında β -diferansiyellenebilirdir ve

$$\begin{aligned} D_\beta(fg)(t) &= (D_\beta f(t))g(t) + f(\beta(t))D_\beta g(t) \\ &= (D_\beta f(t))g(\beta(t)) + f(t)D_\beta g(t) \end{aligned}$$

dir.

(ii) $f/g, t$ noktasında β -diferansiyellenebilirdir ve

$$D_\beta(f/g)(t) = \frac{(D_\beta f(t))g(t) - f(t)D_\beta g(t)}{g(t)g(\beta(t))}, \quad g(t)g(\beta(t)) \neq 0$$

(Hamza vd., 2015).

Örnekler 2.2.7.

$$1. D_\beta t^n = \sum_{k=0}^{n-1} (\beta(t))^{n-k-1} t^k, t \in I, n \geq 1.$$

$$2. t \neq 0 \text{ için, } D_\beta \frac{1}{t} = -\frac{1}{t\beta(t)}, t \in I, \beta(t) \neq 0.$$

3. $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ tanımlanan $f(t)=(t^2, 2t)$ ve $\beta(t)=\frac{1}{2}t+1$, öyleyse

$$D_{\beta}f(t) = \frac{(-\frac{3}{4}t^2+t+1, 2-t)}{1-\frac{1}{2}t} \text{ olur.}$$

$$4. \beta(t)=\frac{1}{4}t \quad f: I \rightarrow \mathbb{M}_{2 \times 2} \quad f(t) = \begin{bmatrix} t^3 & 1 \\ t & t^2 \end{bmatrix}, \quad D_{\beta}f(t) = \begin{bmatrix} \frac{21}{16}t^2 & 0 \\ 1 & \frac{5}{4}t \end{bmatrix} \mathbb{M}_{2 \times 2} \text{ her } 2 \times 2$$

metriklerin uzayıdır (Hamza vd., 2015).

Lemma 2.2.8. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu β -türevlenebilir ve her $t \in I$ için $D_{\beta}f(t) = 0$ olsun.

O zaman $t \in I$ için $f(t) = f(s_0)$ olur (Hamza vd., 2015).

Kanıt. $D_{\beta}f(t)=0$, $t \in I$ olduğundan, $t \in I$ için $f(t) = f(\beta(t))$ olur. Sonuç olarak, $t \in I$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ için $f(t)=f(\beta^k(t))$ olur. $k \rightarrow \infty$ alarak ve f fonksiyonunun s_0 noktasındaki sürekliliğini kullanarak, $t \in I$ için $f(t) = f(s_0)$ eşitliği sağlanır (Hamza vd., 2015).

Sonuç 2.2.9. Diyelim ki $f, g: I \rightarrow \mathbb{X}$, I üzerinde β -türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

Eğer her $t \in I$ için

$$D_{\beta}f(t) = D_{\beta}g(t) \text{ ise her } t \in I \text{ için}$$

$$f(t) - g(t) = f(s_0) - g(s_0)$$

olur (Hamza vd., 2015).

Tanım 2.2.10. $s_0 \in [a, b] \subseteq I$ olsun. β -aralığını

$$[a, b]_{\beta} = \{\beta^k(a); k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\beta^k(b); k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{s_0\}$$

ile tanımlanır. Keyfi bir $c \in I$ noktası için $[c]_{\beta}$ sınıfı ise

$$[c]_{\beta} = \{\beta^k(c); k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{s_0\}$$

ile tanımlanır. Herhangi bir $A \subset \mathbb{R}$ kümesi için,

$$A^* = A \setminus \{s_0\}$$

olarak tanımlanır (Hamza, vd., 2015).

Lemma 2.2.11. $[a, b]$, I 'nin kompakt bir alt aralığı, $s_0 \in [a, b]$ ve

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu s_0 noktasında sürekli olsun. O zaman:

(i) f fonksiyonu, $[a, b]_{\beta}$ aralığı üzerinde kesin olarak artandır ancak ve ancak her $t \in [a, b]_{\beta}^*$ için

$$D_{\beta}f(t)>0.$$

(ii) f fonksiyonu, $[a, b]_{\beta}$ aralığı üzerinde kesin olarak azalandır ancak ve ancak her $t \in [a, b]_{\beta}^*$ için

$$D_{\beta}f(t)<0 \text{ (Hamza, vd., 2015).}$$

Kanıt.

(i) Her $t \in [a, b]_{\beta}^*$ için $D_{\beta}f(t)>0$ olduğunu varsayalım. $s_0 \notin \{a, b\}$ olsun.

$$a < \beta(a) < \beta^2(a) < \dots < \beta^k(a) < \dots < s_0 < \dots < \beta^m(b) < \dots < \beta(b) < b$$

elde edilir. f fonksiyonunun s_0 noktasındaki sürekliliğini kullanarak,

$$f(a) < f(\beta(a)) < f(\beta^2(a)) < \dots < f(\beta^k(a)) < \dots < f(s_0) \dots < f(\beta^m(b)) < \dots < f(\beta(b)) < f(b)$$

elde edilir. Bu, f fonksiyonunun $[a, b]_{\beta}$ aralığı üzerinde kesin artan olduğunu gösterir.

Tersine, herhangi bir $k \in \mathbb{N}_0$ için f fonksiyonunun $[a, b]_{\beta}$ aralığı üzerinde kesin artan olduğu varsayılır. Eğer

$$\beta^{k+1}(t) > \beta^k(t) \text{ ise o zaman}$$

$$f(\beta^{k+1}(t)) > f(\beta^k(t))$$

olur. Eğer

$$\beta^{k+1}(t) < \beta^k(t) \text{ ise}$$

$$f(\beta^{k+1}(t)) < f(\beta^k(t))$$

olur. Bu nedenle, her $t \in [a, b]_{\beta}^*$ için

$$D_{\beta}f(t)>0$$

olur.

(ii) Benzer şekilde gösterilebilir.

Aşağıdaki örnek önceki Lemma 2.2.10 $[a, b] \setminus [a, b]_{\beta}$ aralığı üzerinde her zaman geçerli olmayabileceğini göstermektedir (Hamza vd., 2015).

Örnek 2.2.12. $f: \left[1, \frac{3}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(t) = 4t^2 - 9t$ ile tanımlansın ve

$$\beta(t) = \frac{1}{2}t + \frac{3}{4} \text{ olsun. } t \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \text{ ve } s_0 = \frac{3}{2} \text{ için } D_{\beta}f(t)<0 \text{ olduğu görülür.}$$

$$t_1 = 1.15 < t_2 = 1.2 \text{ için, } f(t_1) = -5.06 < f(t_2) = -5.04 \text{ olur. Bu, } f \text{ fonksiyonunun } \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

aralığında kesin olarak azalmadığı anlamına gelir; ancak burada $t_1, t_2 \notin \left[1, \frac{3}{2}\right]_{\beta}$ olduğu unutulmamalıdır (Hamza vd., 2015).

Teorem 2.2.13. α bir sabit ve $m \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$(i) f(t) = (t - \alpha)^m \text{ ise } D_\beta f(t) = \sum_{r=0}^{m-1} (\beta(t) - \alpha)^r (t - \alpha)^{m-1-r}. \quad (2.12)$$

$$(ii) (\beta(t) - \alpha)^{m-r} (t - \alpha)^{r+1} \neq 0, r = 0, 1, \dots, m-1 \text{ olmak üzere}$$

$$g(t) = 1/(t - \alpha)^m \text{ ise } D_\beta g(t) = -\sum_{r=0}^{m-1} \frac{1}{(\beta(t) - \alpha)^{m-r} (t - \alpha)^{r+1}} \quad (2.13)$$

elde edilir.

Aşağıdaki örnek türevdeki zincir kuralının β -kalkülüste geçerli olmadığını göstermektedir (Hamza vd., 2015).

Örnek 2.2.14. $f(t)=t^2$ ve $g(t)=3t$ fonksiyonları göz önünde bulundurulursa

$$D_\beta f(g(t)) D_\beta g(t) = 3(\beta(3t) + 3t) \quad (2.14)$$

ve

$$D_\beta (f \circ g)(t) = 9(\beta(t) + t)$$

olur. Buradan

$$D_\beta (f \circ g)(t) \neq D_\beta f(g(t)) D_\beta g(t) \quad (2.15)$$

olur (Hamza vd., 2015).

Teorem 2.2.15. $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve β -diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{X}$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. O zaman $\beta(t)$ ile t arasında öyle bir c noktası vardır ki

$$D_\beta (f \circ g)(t) = f'(g(c)) D_\beta g(t) \quad (2.16)$$

eşitliğini sağlar (Hamza vd., 2015).

Kanıt. $t = s_0$ eşitliği bilinen zincir kuralıdır. 2.2.11'in her iki tarafı da sıfır olduğundan

$t \neq s_0$ için $g(\beta(t)) = g(t)$ olduğu açıktır.

$t \neq s_0$ için $g(\beta(t)) \neq g(t)$ ile

$$\begin{aligned}
D_{\beta}(f \circ g)(t) &= \frac{(f \circ g)(\beta(t)) - (f \circ g)(t)}{\beta(t) - t} \\
&= \frac{f(g(\beta(t))) - f(g(t))}{g(\beta(t)) - g(t)} \frac{g(\beta(t)) - g(t)}{\beta(t) - t}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Ortalama değer teoremi ile $g(\beta(t))$ ile $g(t)$ arasında bir reel sayı η vardır öyle ki

$$\frac{f(g(\beta(t))) - f(g(t))}{g(\beta(t)) - g(t)} = f'(\eta)$$

olur. g sürekli bir fonksiyon olduğundan $\beta(t)$ ile t arasında $g(c) = \eta$ olacak şekilde c noktası vardır.

Buradan

$$D_{\beta}(f \circ g)(t) = f'(g(c))D_{\beta}(g(t))$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremden, fg çarpımının n . mertebeden β -türevi için formül oluşturulur. Burada f ve g fonksiyonlarının biri gerçek değerli bir fonksiyon, diğeri vektör değerli bir fonksiyondur.

$n \in \mathbb{N}$ için, $S_k^{(n)}$, k kez β ve $n-k$ kez D_{β} içeren n uzunluğundaki tüm olası dizilerin kümesi olsun.

$$f^{D_{\beta}^n}(t) = (D_{\beta}^n f)(\beta(t))$$

ve

$$f^{\beta D_{\beta}^n}(t) = D_{\beta}(f(\beta(t)))$$

eşitliğini gösteriyoruz.

$\Gamma \in S_k^{(n)}$ için f^{Γ} tanımlanır.

f , I aralığı üzerinde n defa β -diferansiyellenebilir ise, f fonksiyonunun daha yüksek mertebeli türevleri $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$D_{\beta}^0 f = f,$$

$$D_{\beta}^n f = D_{\beta}(D_{\beta}^{n-1} f),$$

ile tanımlanır.

Sonuç olarak şu görülür:

$$(\sum_{\Gamma \in S_k^{(n)}} f^{\Gamma D_{\beta}})(t) + (\sum_{\Gamma \in S_{k-1}^{(n)}} f^{\Gamma \beta})(t) = (\sum_{\Gamma \in S_k^{(n+1)}} f^{\Gamma})(t) \text{ (Hamza vd., 2015).}$$

Teorem 2.2.16. (Leibniz formülü) f ve g , n defa β -diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise

$$D_\beta^n(fg)(t) = \sum_{k=0}^n (\sum_{\Gamma \in S_k^{(n)}} f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t), \quad t \neq s_0 \quad (2.17)$$

elde edilir.

Kanıt. Teorem 2.2.6 (i) ile, ifade $n = 1$ için doğrudur. $n = m$ için (2.17) bağıntısının doğru olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} D_\beta^{m+1}(fg)(t) &= D_\beta \left[\sum_{k=0}^m (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m)}} f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m)}} D_\beta f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t) + \sum_{k=0}^m (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m)}} f^\Gamma)(\beta(t)) D_\beta^{k+1} g(t) \\ &= \sum_{k=0}^m (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m)}} D_\beta f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t) + \sum_{k=1}^{m+1} (\sum_{\Gamma \in S_{k-1}^{(m)}} f^\Gamma)(\beta(t)) D_\beta^k g(t) \\ &= \sum_{\Gamma \in S_0^{(m)}} D_\beta f^\Gamma(t) g(t) + \sum_{k=1}^m (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m)}} D_\beta f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t) \\ &\quad + (\sum_{\Gamma \in S_m^{(m)}} f^\Gamma)(\beta(t)) D_\beta^{m+1} g(t) + \sum_{k=1}^m (\sum_{\Gamma \in S_{k-1}^{(m)}} f^\Gamma)(\beta(t)) D_\beta^k g(t) \\ &= (\sum_{\Gamma \in S_0^{(m)}} D_\beta f^\Gamma)(t) g(t) + (\sum_{\Gamma \in S_m^{(m)}} f^\Gamma)(\beta(t)) D_\beta^{m+1} g(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m \left[(\sum_{\Gamma \in S_k^{(m)}} f^{\Gamma D_\beta})(t) + (\sum_{\Gamma \in S_{k-1}^{(m)}} f^{\Gamma \beta}) \right] D_\beta^k g(t) \\ &= (\sum_{\Gamma \in S_0^{(m+1)}} f^\Gamma)(t) g(t) + (\sum_{\Gamma \in S_{m+1}^{(m+1)}} f^\Gamma)(t) D_\beta^{m+1} g(t) \\ &\quad + \sum_{k=1}^m (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m+1)}} f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t) \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} (\sum_{\Gamma \in S_k^{(m+1)}} f^\Gamma)(t) D_\beta^k g(t). \end{aligned}$$

Buradan (2.17) her $n \in \mathbb{N}$ için sağlar (Hamza vd., 2015).

Aşağıdaki örnek, bir fonksiyonun süreksiz olduğu halde β -diferansiyellenebilir olabileceğini göstermektedir.

Örnek 2.2.17. $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(t) = \begin{cases} t, & t \in (-1, 0) \\ -t, & t \in (0, 1) \\ 1, & t = 0 \\ 0, & t = 1, -1 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \beta(t) = \frac{1}{4}t + \frac{1}{4} \text{ olsun.}$$

f fonksiyonu süreksizdir; ancak β -diferansiyellenebilir olduğu aşağıda görülür.

$$D_\beta f(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-1, 0) \\ -1, & t \in (0, 1) \\ -5, & t = 0 \\ 1, & t = 1, -1 \end{cases}$$

(Hamza vd., 2015).

2.3. Beta İntegral

$t \in I$ için $D_\beta F(t) = f(t)$ ise F fonksiyonuna, $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonunun bir β -ilkeli denir.

Tanım 2.3.1 s_0 noktasında sürekli ve s_0 noktasında sıfır değerini alan $g: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonlarının vektör uzayını Ω ile gösterilir. $T_\beta: \Omega \rightarrow \Omega$ operatörünü

$T_\beta(g)(t) = g(\beta(t))$, $t \in I$ ile tanımlayalım.

$\mathfrak{I}$ birim operatör olmak üzere Y kümesi $\mathfrak{I} - T_\beta$ operatörünün değer kümesi olsun.

$g \in Y$ için $\sum_{k=0}^{\infty} g(\beta^k(t))$

serisi I aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. $\mathfrak{I} - T_\beta$ operatörü birebirdir (Hamza vd., 2015).

Bir sonraki teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır. Kanıtı açıktır.

Lemma 2.3.2. $A: Y \rightarrow \Omega$

$$A(g)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(\beta^k(t)) \quad (2.18)$$

ile tanımlansın. A operatörü, $\mathfrak{I} - T_\beta$ operatörünün tersidir (Hamza vd., 2015).

Teorem 2.3.3. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ operatörü s_0 noktasında sürekli olsun. O zaman

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t)) f(\beta^k(t)), \quad t \in I \quad (2.19)$$

ile tanımlanan F fonksiyonu, $F(s_0) = 0$ ile f 'nin bir β -ilkelidir.

Tersine, s_0 noktasında sıfır değerini alan f fonksiyonunun bir F β -ilkel türevi (2.19) ile verilir (Hamza vd., 2015).

Kanıt. Her $t \in I$ ve $t \neq s_0$ için,

$$\begin{aligned} D_\beta F(t) &= \frac{F(\beta(t)) - F(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{-\sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{k+1}(t) - \beta^{k+2}(t)) f(\beta^{k+1}(t)) - \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t)) f(\beta^k(t))}{\beta(t) - t} \\ &= f(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

$D_\beta F(s_0)=f(s_0)$ olduğunu göstermek için $\epsilon > 0$ olsun. $f(t)$ fonksiyonunun $t = s_0$ noktasındaki sürekliliğinden

$$\|f(\beta^k(s_0 + h)) - f(s_0)\| < \epsilon, \quad k \geq 0, \quad 0 < h < \delta,$$

olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} F(s_0 + h) - f(s_0) \right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h} (\beta^k(s_0 + h) - \beta^{k+1}(s_0 + h)) \\ &\times \|f(\beta^k(s_0 + h)) - f(s_0)\| < \epsilon, \quad 0 < h < \delta, \end{aligned}$$

elde edilir.

Tersine, F fonksiyonu s_0 noktasında sıfır değerini alan f fonksiyonunun bir β -ilkeli olduğunu varsayalım. O zaman

$$\begin{aligned} f(t) &= D_\beta F(t) = \frac{F(\beta(t)) - F(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{T_\beta(F(t)) - F(t)}{\beta(t) - t} \\ &= \frac{(\mathfrak{I} - T_\beta)F(t)}{t - \beta(t)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$f(t)(t - \beta(t)) = (\mathfrak{I} - T_\beta)F(t) \text{ denkleminde}$$

$$F(t) = (\mathfrak{I} - T_\beta)^{-1}(t - \beta(t))f(t)$$

eşitliği bulunur.

$$G(t) = (t - \beta(t))f(t) \text{ fonksiyonu } \Omega \text{ kümesine aittir ve } F(t) = (\mathfrak{I} - T_\beta)^{-1}G(t).$$

Lemma 2.3.2. ile

$$F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G(\beta^k(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))f(\beta^k(t)) \quad (2.20)$$

bulunur (Hamza vd., 2015).

Tanım 2.3.4. $f : I \rightarrow \mathbb{X}$ ve $a, b \in I$ olsun. a noktasından b noktasına f fonksiyonunun β -integrali

$$\int_{s_0}^x f(t) d_\beta t = \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(x) - \beta^{k+1}(x))f(\beta^k(x)), \quad x \in I \quad (2.21)$$

serisinin $x=a$ ve $x=b$ noktasında yakınsaması şartıyla

$$\int_a^b f(t) d_\beta t = \int_{s_0}^b f(t) d_\beta t - \int_{s_0}^a f(t) d_\beta t, \quad (2.22)$$

formülü ile tanımlanır.

Eğer her $a, b \in I$ için seri yakınsak ise, f fonksiyonuna I aralığı üzerinde β -integrallenebilir denir. Eğer $f, s_0 \in I$ üzerinde sürekli ise, o zaman f, I üzerinde β -integrallenebilirdir.

(2.21) ve (2.22) integral formüllerinde, $\beta(t) = qt, q \in (0, 1)$ olduğunda,

$$\int_0^x f(t) d_q t := x(1 - q) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k), \quad x \in I \quad (2.23)$$

iken

$$\int_a^b f(t) d_q t := \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t, \quad (2.24)$$

eşitliği ile tanımlanan Jackson q -integrali elde edilir (Annaby ve Mansour, 2012; Aldwoah, 2009; Bangerezako, 2008; Kac, 2002).

$\beta(t) = qt + \omega, q \in (0, 1), \omega > 0, \omega_0 = \frac{\omega}{1-q}$ ve $[k]_q = \frac{1-q^k}{1-q}$ olsun. Bu durumda (2.21)

ve (2.22) integralleri

$$\int_{\omega_0}^x f(t) d_{q,\omega} t := (x(1 - q) - \omega) \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k + \omega[k]_q), \quad x \in I \quad (2.25)$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(t) d_{q,\omega} t := \int_{\omega_0}^b f(t) d_{q,\omega} t - \int_{\omega_0}^a f(t) d_{q,\omega} t \quad (2.26)$$

ile tanımlanan Hahn integrale dönüşür (Annaby vd., 2012; Annaby ve Mansour, 2012; Hamza ve Ahmed, 2013; Aldwoah, 2009; Bangerezako, 2008; Kac, 2002).

Lemma 2.3.5. $f : I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu, I aralığı üzerinde β -integrallenebilir ve $a, b, c \in I$ olsun. Öyleyse aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- i. β -integrali lineer bir operatördür.
- ii. $\int_a^a f(t) d_\beta t = 0$.

- iii. $\int_a^b f(t) d_\beta t = - \int_b^a f(t) d_\beta t.$
- iv. $\int_a^b f(t) d_\beta t = \int_a^c f(t) d_\beta t + \int_c^b f(t) d_\beta t$

(Hamza vd., 2015).

Teorem 2.3.3 yardımı ile Beta-kalkülüsün birinci temel teoremi aşağıdaki gibi elde edilir.

Teorem 2.3.6. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu s_0 noktasında sürekli olsun.

$$F(x) = \int_{s_0}^x f(t) d_\beta t, \quad x \in I \quad (2.27)$$

olmak üzere F fonksiyonu s_0 noktasında sürekli. Her $x \in I$ için $D_\beta F(x)$ vardır ve $D_\beta F(x) = f(x)$ olur (Hamza vd., 2015).

Sonuç 2.3.7. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu, s_0 noktasında sürekli ise

$$\int_t^{\beta(t)} f(\tau) d_\beta \tau = (\beta(t) - t) f(t) \quad t \in I \quad (2.28)$$

olur (Hamza vd., 2015).

Kanıt. $F(t) = \int_{s_0}^t f(\tau) d_\beta \tau$, $t \in I$ olsun. Teorem 2.3.6 ile, $F(t)$, s_0 noktasında sürekli ve her $t \in I$ için $D_\beta F(t) = f(t)$ olur. Böylece

$$\begin{aligned} \int_t^{\beta(t)} f(\tau) d_\beta \tau &= \int_{s_0}^{\beta(t)} f(\tau) d_\beta \tau - \int_{s_0}^t f(\tau) d_\beta \tau \\ &= F(\beta(t)) - F(t) \end{aligned}$$

elde edilir.

$F(\beta(t)) = F(t) + (\beta(t) - t) D_\beta F(t)$ olduğundan

$$\int_t^{\beta(t)} f(\tau) d_\beta \tau = (\beta(t) - t) f(t), \quad t \in I \text{ olur (Hamza vd., 2015).}$$

β -kalkülüsün ikinci temel teoremi verilecektir.

Teorem 2.3.8. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu I aralığı üzerinde β -diferansiyellenebilir ise, her $a, b \in I$ için

$$\int_a^b D_\beta f(t) d_\beta t = f(b) - f(a) \quad (2.29)$$

olur (Hamza vd., 2015).

$$\begin{aligned}
\textbf{Kanıt.} \int_{s_0}^b D_\beta f(t) d_\beta t &= \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b)) (D_\beta f)(\beta^k(b)) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (f(\beta^k(b)) - f(\beta^{k+1}(b))) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (f(\beta^k(b)) - f(\beta^{k+1}(b))) \\
&= f(b) - f(s_0).
\end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\int_{s_0}^a D_\beta f(t) d_\beta t = f(a) - f(s_0)$$

elde edilir. Öyleyse her $a, b \in I$ için

$$\int_a^b D_\beta f(t) d_\beta t = f(b) - f(a) \quad \text{olur (Hamza vd., 2015).}$$

Teorem 2.3.6'nın doğrudan bir sonucu olarak, aşağıdaki teoremin doğru olduğu görülür.

Teorem 2.3.9. Eğer $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu s_0 noktasında sürekli ve $\Phi: I \rightarrow \mathbb{X}$ fonksiyonu

I üzerinde f fonksiyonunun bir β -ilkeli ise $a, b \in I$ için aşağıdaki integral elde edilir.

$$\int_a^b f(t) d_\beta t = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Aşağıdaki teorem β -integralinin kısmi integrasyon formülünü verir (Hamza vd., 2015).

Teorem 2.3.10. f, g fonksiyonlarının I aralığı üzerinde β -diferansiyellenebilir fonksiyonlar olduğunu varsayalım, $D_\beta g$ ve $D_\beta f$ fonksiyonlarının her ikisi de s_0 noktasında sürekli olsunlar. Öyleyse $a, b \in I$ için

$$\int_a^b f(t) D_\beta g(t) d_\beta t = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b (D_\beta f(t))g(\beta(t)) d_\beta t.$$

Burada f ve g fonksiyonlarından en az biri gerçek değerli bir fonksiyondur.

$c, d \in I$ ve $c < d$ olsun. $[c, d]_\beta$ aralığı üzerinde tanımlanan ve s_0 noktasında sürekli tüm gerçek değerli fonksiyonların kümesini D ile gösterelim.

Lemma 2.3.11. $f \in D$ olsun. O zaman $h(c) = h(d) = 0$ olacak şekilde

her $h \in D$ için $\int_c^d f(t)h(\beta(t)) d_\beta t = 0$ dır ancak ve ancak her $t \in [c, d]_\beta$ için $f(t) = 0$ olur (Hamza vd., 2015).

Kanıt. β -integralinin tanımından her $t \in [c, d]_\beta$ için $f(t) = 0$ ise

$\int_c^d f(t)h(\beta(t)) d_\beta t = 0$ olduğu açıktır. Tersini kanıtlayalım. Aksi varsayılırsa $f(l) \neq 0$ olacak şekilde bir

$l \in [c, d]_\beta$ vardır ve aşağıdaki iki durum oluşur.

Durum1. $l \neq s_0$ ise o zaman $k \in \mathbb{N}_0$ için ya $l = \beta^k(c)$ ya da $l = \beta^k(d)$ olur.

İlk olarak, $k \in \mathbb{N}_0$ için $l = \beta^k(c)$ olduğu varsayılırsa

$$h(t) = \begin{cases} f(l), & t = \beta(l), \\ 0, & \text{bunun dışında} \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

Açıkça $h \in D$ için $h(c)=h(d)=0$ olur. O zaman

$$\begin{aligned} \int_c^d f(t)h(\beta(t))d_\beta t &= \int_{s_0}^d f(t)h(\beta(t))d_\beta t - \int_{s_0}^c f(t)h(\beta(t))d_\beta t \\ &= -(l - \beta(l))f^2(l) \neq 0 \text{ elde edilir.} \end{aligned}$$

$l = \beta^k(d)$ durumu benzer şekilde ele alınabilir.

Durum 2. $l = s_0$ ve $f(s_0) \neq 0$ olsun. Genelliği bozmadan $f(s_0) > 0$ olduğu varsayılırsa f fonksiyonunun s_0 noktasındaki sürekliliğinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\beta^k(c)) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(\beta^k(d)) = f(s_0)$$

elde edilir. Sonuç olarak, her $k > k_0$ için $f(\beta^k(c)) > 0$ ve $f(\beta^k(d)) > 0$ olacak şekilde $k_0 \in \mathbb{N}$ vardır. $s_0 \notin \{c, d\}$ ise h şu şekilde tanımlanır:

$$h(t) = \begin{cases} f(\beta^k(c)), & t = \beta^{k+1}(c) \text{ her } k > k_0 \text{ için,} \\ f(\beta^k(d)), & t = \beta^{k+1}(d) \text{ her } k > k_0 \text{ için,} \\ 0, & \text{diğerleri için} \end{cases}$$

buradan

$$\begin{aligned} \int_c^d f(t)h(\beta(t))d_\beta t &= \sum_{k=k_0}^{\infty} (\beta^k(d) - \beta^{k+1}(d))f^2(\beta^k(d)) \\ &\quad - \sum_{k=k_0}^{\infty} (\beta^k(c) - \beta^{k+1}(c))f^2(\beta^k(c)) \neq 0 \end{aligned}$$

$s_0 = c$ için h fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$h(t) = \begin{cases} f(\beta^k(d)), & t = \beta^{k+1}(d) \text{ her } k > k_0 \text{ için,} \\ 0, & \text{diğerleri için} \end{cases}$$

öyleyse

$$\int_c^d f(t)h(\beta(t))d_\beta t = \sum_{k=k_0}^{\infty} (\beta^k(d) - \beta^{k+1}(d))f^2(\beta^k(d)) \neq 0$$

$s_0 = d$ durumu benzer şekilde ele alınabilir (Hamza vd., 2015).

Lemma 2.3.12. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$, I üzerinde β -integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

her $t \in [a, b]_\beta$, $a, b \in I$ ve $a \leq b$ için $\|f(t)\| \leq g(t)$ ise,

$x, y \in [a, b]_\beta$, $x < s_0 < y$ için aşağıdakileri elde ederiz.

$$\left\| \int_{s_0}^y f(t) d_{\beta} t \right\| \leq \int_{s_0}^y g(t) d_{\beta} t \quad (2.30)$$

$$\left\| \int_{s_0}^x f(t) d_{\beta} t \right\| \leq - \int_{s_0}^x g(t) d_{\beta} t \quad (2.31)$$

$$\left\| \int_x^y f(t) d_{\beta} t \right\| \leq \int_x^y g(t) d_{\beta} t \quad (2.32)$$

sonuç olarak, her $t \in [a, b]_{\beta}$ için $g(t) \geq 0$ ise, o zaman $\int_{s_0}^y g(t) d_{\beta} t \geq 0$ ve $\int_x^y g(t) d_{\beta} t \geq 0$ eşitsizlikleri her $x, y \in [a, b]_{\beta}$, $x < s_0 < y$ için sağlanır (Hamza vd., 2015).

Kanıt. $y > s_0$ olduğundan $\beta^{k+1}(y) < \beta^k(y)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $y \in [a, b]_{\beta}$ için

$$\begin{aligned} \left\| \int_{s_0}^y f(t) d_{\beta} t \right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(y) - \beta^{k+1}(y)) \|f(\beta^k(y))\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^k(y) - \beta^{k+1}(y)) g(\beta^k(y)) \\ &= \int_{s_0}^y g(t) d_{\beta} t \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde, (2.31) denklemi kanıtlanır. Ayrıca $x, y \in [a, b]_{\beta}$ ve $x < s_0 < y$ ise $x = \beta^{k_2}(a)$ ve $y = \beta^{k_1}(b)$ sağlayan $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman

$$\begin{aligned} \left\| \int_x^y f(t) d_{\beta} t \right\| &= \left\| \sum_{k=k_1}^{\infty} [(\beta^k(y) - \beta^{k+1}(y)) f(\beta^k(y))] \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=k_2}^{\infty} [(\beta^k(x) - \beta^{k+1}(x)) f(\beta^k(x))] \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{k+k_1}(y) - \beta^{k+k_1+1}(y)) \|f(\beta^{k+k_1}(y))\| \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{k+k_2+1}(x) - \beta^{k+k_2}(x)) \|f(\beta^{k+k_2}(x))\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{k+k_1}(y) - \beta^{k+k_1+1}(y)) g(\beta^{k+k_1}(y)) \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} (\beta^{k+k_2}(x) - \beta^{k+k_2+1}(x)) g(\beta^{k+k_2}(x)) \\ &= \int_{s_0}^y g(t) d_{\beta} t - \int_{s_0}^x g(t) d_{\beta} t = \int_x^y g(t) d_{\beta} t \end{aligned}$$

elde edilir.

$f(t) = 0$ fonksiyonunu (2.28) ve (2.30) da yerleştirerek $\int_{s_0}^y g(t) d_\beta t \geq 0$ ve

$\int_x^y g(t) d_\beta t \geq 0$ elde edilir (Hamza vd., 2015).

Lemma 2.3.13. $f: I \rightarrow \mathbb{X}$ ve $g: I \rightarrow \mathbb{R}, I$ aralığı üzerinde β -diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsunlar.

$t \in [a, b]_\beta, a, b \in I$ ve $a \leq b$ için $\|D_\beta f(t)\| \leq D_\beta g(t)$ ise, her $x, y \in [a, b]_\beta,$
 $x < s_0 < y$ için

$$\|f(y) - f(x)\| \leq g(y) - g(x) \quad (2.33)$$

olur (Hamza vd., 2015).

Kanıt. $t \in [a, b]_\beta, a, b \in I$ ve $a \leq b$ olmak üzere $\|D_\beta f(t)\| \leq D_\beta g(t)$ olduğunu varsayalım. Teorem 2.3.8. ve Lemma 2.3.12. ile

$$\left\| \int_x^y D_\beta f(t) d_\beta t \right\| \leq \int_x^y D_\beta g(t) d_\beta t$$

elde edilir. Bu denklem şu eşitliği sağlar:

$$\|f(y) - f(x)\| \leq g(y) - g(x)$$

(Hamza vd., 2015).

2.4. $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ Uzayı ve $L_\beta^p[a, b]$ Uzayı

2.4.1. $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ Uzayı

$a, b \in I$ olsun, $f: I \rightarrow \mathbb{C}$ fonksiyon olmak üzere $[a, b]$ aralığında $|f|^p$

β -integrellenebilir fonksiyonlar kümesini $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ ile gösterelim. Yani

$$\mathcal{L}_\beta^p[a, b] = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_a^b |f|^p d_\beta < \infty \right\}$$

olur. $p = \infty$ için

$$\mathcal{L}_\beta^\infty[a, b] = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{C} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \{ |f(\beta^k(a))|, |f(\beta^k(b))| \} < \infty \right\}$$

ile verilir. $a \leq s_0 \leq b$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olmak üzere, klasik fonksiyonlarda toplama ve çarpma işlemleri altında $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ 'nin $\mathbb{K}$ üzerinde lineer bir uzay olur (Cardoso, 2020).

2.4.2. $L_\beta^p[a, b]$ Uzayı

$f, g \in \mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ olsun. Her $k=0, 1, 2, \dots$ için

$$f(\beta^k(a)) = g(\beta^k(a)) \text{ ve } f(\beta^k(b)) = g(\beta^k(b)) \quad (2.34)$$

olduğunda $f \sim g$ ile gösterebiliriz. Yani $[a, b]_\beta$ aralığında $f=g$ ise $f \sim g$ olduğunu söyleriz.

Açıkça $\sim$, $\mathcal{L}_\beta^p[a, b]$ 'de bir denklik bağıntısı tanımlar.

$$L_\beta^p[a, b] := \mathcal{L}_\beta^p[a, b] / \sim$$

olur (Cardoso, 2020).

Teorem 2.4.3. $a \leq s_0 \leq b$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $L_\beta^p[a, b]$

$$\|f\|_{L_\beta^p[a, b]} := \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p d_\beta \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sup_{k \in \mathbb{N}_0} \{ |f(\beta^k(a))|, |f(\beta^k(b))| \}, & p = \infty \end{cases} \quad (2.35)$$

normu ile $\mathbb{K}$ üzerinde normlu lineer uzaydır. (Cardoso, 2020).

Teorem 2.4.4. $a \leq s_0 \leq b$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. O zaman

(i) (2.37) normu ile verilen $L_\beta^p[a, b]$, $1 \leq p \leq \infty$ bir Banach uzayıdır,

$1 \leq p < \infty$ ise ayrılabilir ve $1 < p < \infty$ ise yansımalıdır.

(ii) $L_\beta^2[a, b]$

$$\langle f, g \rangle_\beta := \int_a^b f \bar{g} d_\beta, \quad f, g \in L_\beta^2[a, b] \quad (2.36)$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır (Cardoso, 2020).

2.5. β -Üstel ve β -Trigonometrik Fonksiyonlar

Üstel ve trigonometrik fonksiyonların β -analogları ve bunların bazı özellikleri (Hamza, vd., 2017)'den alınmıştır.

$p: I \rightarrow \mathbb{C}$, s_0 noktasında sürekli bir fonksiyon olsun. β -üstel fonksiyonlar

$$e_{p, \beta}(t) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{\infty} [1 - p(\beta^k(t))(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))]} \quad (2.37)$$

ve

$$E_{p,\beta}(t) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 + p(\beta^k(t))(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))] \quad (2.38)$$

ile tanımlanır.

p ve β fonksiyonları üzerindeki varsayımlar altında (2.37) ve (2.38) sonsuz çarpımları yakınsaktır (Hamza vd., 2017).

Öte yandan, trigonometrik fonksiyonlar şu şekilde tanımlanır:

$$\cos_{p,\beta}(t) = \frac{e_{ip,\beta}(t) + e_{-ip,\beta}(t)}{2}, \sin_{p,\beta}(t) = \frac{e_{ip,\beta}(t) - e_{-ip,\beta}(t)}{2}, \quad (2.39)$$

ve

$$\cos_{p,\beta}(t) = \frac{E_{ip,\beta}(t) + E_{-ip,\beta}(t)}{2}, \sin_{p,\beta}(t) = \frac{E_{ip,\beta}(t) - E_{-ip,\beta}(t)}{2} \quad (2.40)$$

$$e_{p,\beta}(t) = \frac{1}{E_{-ip,\beta}(t)}, e_{p,\beta}(s_0) = 1, E_{p,\beta}(s_0) = 1$$

ve

$$\begin{cases} D_{\beta} e_{p,\beta}(t) = p(t) e_{p,\beta}(t), & D_{\beta} E_{p,\beta}(t) = p(t) E_{p,\beta}(\beta(t)), \\ D_{\beta} \sin_{p,\beta}(t) = p(t) \cos_{p,\beta}(t), & D_{\beta} \cos_{p,\beta}(t) = -p(t) \sin_{p,\beta}(t), \\ D_{\beta} \sin_{p,\beta}(t) = p(t) \cos_{p,\beta}(t), & D_{\beta} \cos_{p,\beta}(t) = -p(t) \sin_{p,\beta}(t) \end{cases} \quad (2.41)$$

olduğu bilinir (Cardoso, 2020).

Önerme 2.5.1. Aşağıdakiler I aralığı üzerinde geçerlidir:

$$D_{\beta^{-1}} e_{p,\beta}(t) = p(\beta^{-1}(t)) e_{p,\beta}(t), D_{\beta^{-1}} E_{p,\beta}(t) = p(\beta^{-1}(t)) E_{p,\beta}(\beta(t)),$$

$$D_{\beta^{-1}} \sin_{p,\beta}(t) = p(\beta^{-1}(t)) \cos_{p,\beta}(t), D_{\beta^{-1}} \cos_{p,\beta}(t) = p(\beta^{-1}(t)) \sin_{p,\beta}(t),$$

$$D_{\beta^{-1}} \sin_{p,\beta}(t) = p(\beta^{-1}(t)) \cos_{p,\beta}(t)$$

$$D_{\beta^{-1}} \cos_{p,\beta}(t) = -p(\beta^{-1}(t)) \sin_{p,\beta}(t)$$

(Cardoso, 2020).

Kanıt. İlk özdeşliği kanıtlayalım.

$$D_{\beta^{-1}} e_{p,\beta}(t) = \frac{e_{p,\beta}(t) - e_{p,\beta}(\beta^{-1}(t))}{t - \beta^{-1}(t)} =$$

$$\frac{1 - \frac{1}{1 - p(\beta^{-1}(t))(\beta^{-1}(t) - t)}}{(t - \beta^{-1}(t)) \prod_{k=0}^{\infty} [1 - p(\beta^k(t))(\beta^k(t) - \beta^{k+1}(t))]} = -\frac{p(\beta^{-1}(t))(\beta^{-1}(t) - t)}{t - \beta^{-1}(t)} e_{p,\beta}(t) = p(\beta^{-1}(t)) e_{p,\beta}(t).$$

β -türev çarpım kuralından,

$$\begin{aligned} D_{\beta^{-1}}[f \cdot g](t) &= D_{\beta^{-1}}[f](t) \cdot g(t) + f(\beta^{-1}(t)) \cdot D_{\beta^{-1}}[g](t) \\ &= D_{\beta^{-1}}[g](t) \cdot f(t) + g(\beta^{-1}(t)) \cdot D_{\beta^{-1}}[f](t) \end{aligned} \quad (2.42)$$

(Cardoso, 2020).

Önerme 2.5.2. Aşağıdakiler I aralığı üzerinde geçerlidir:

$$\begin{aligned} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} e_{p,\beta}(t) &= [p^2(\beta^{-1}(t)) + D_{\beta^{-1}} p(t)] e_{p,\beta}(t), \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} E_{p,\beta}(t) &= p(t) p(\beta^{-1}(t)) E_{p,\beta}(t) + D_{\beta^{-1}} p(t) E_{p,\beta}(\beta(t)) \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \sin_{p,\beta}(t) &= -p^2(\beta^{-1}(t)) \sin_{p,\beta}(t) + D_{\beta^{-1}} p(t) \cos_{p,\beta}(t), \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \cos_{p,\beta}(t) &= -p^2(\beta^{-1}(t)) \cos_{p,\beta}(t) - D_{\beta^{-1}} p(t) \sin_{p,\beta}(t), \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \text{Sin}_{p,\beta}(t) &= -p^2(\beta^{-1}(t)) \text{Sin}_{p,\beta}(t) + D_{\beta^{-1}} p(t) \text{Cos}_{p,\beta}(t), \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \text{Cos}_{p,\beta}(t) &= -p^2(\beta^{-1}(t)) \text{Cos}_{p,\beta}(t) - D_{\beta^{-1}} p(t) \text{Sin}_{p,\beta}(t) \end{aligned}$$

(Cardoso, 2020).

Kanıt. Kanıtlar açıktır. Sadece ikinci eşitlik ispatlanacaktır. (2.40) ve (2.41) ile aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} E_{p,\beta}(t) &= D_{\beta^{-1}} [p(t) E_{p,\beta}(\beta(t))] \\ &= D_{\beta^{-1}} p(t) E_{p,\beta}(\beta(t)) + p(\beta^{-1}(t)) D_{\beta^{-1}} E_{p,\beta}(\beta(t)) \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$(D_{\beta} f)(\beta^{-1}(t)) = (D_{\beta^{-1}} f)(t) \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} E_{p,\beta}(t) &= D_{\beta^{-1}} p(t) E_{p,\beta}(\beta(t)) + p(\beta^{-1}(t)) D_{\beta} E_{p,\beta}(t) \\ &= p(t) p(\beta^{-1}(t)) E_{p,\beta}(t) + D_{\beta^{-1}} p(t) E_{p,\beta}(\beta(t)) \end{aligned}$$

elde edilir (Cardoso, 2021).

Lemma 2.5.3. Eğer p , I aralığı üzerinde $p(t) = z$ sabit fonksiyon ise aşağıdaki özdeşlikler sağlanır.

$$\begin{aligned} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} e_{z,\beta}(t) &= z^2 e_{z,\beta}(t), \quad D_{\beta^{-1}} D_{\beta} E_{z,\beta}(t) = z^2 E_{z,\beta}(t), \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \sin_{z,\beta}(t) &= -z^2 \sin_{z,\beta}(t), \quad D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \cos_{z,\beta}(t) = -z^2 \cos_{z,\beta}(t) \\ D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \text{Sin}_{z,\beta}(t) &= -z^2 \text{Sin}_{z,\beta}(t), \quad D_{\beta^{-1}} D_{\beta} \text{Cos}_{z,\beta}(t) = -z^2 \text{Cos}_{z,\beta}(t). \end{aligned}$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde Beta-Sturm-Liouville problemi ve özellikleri ele alınacaktır.

Lemma 3.1. b sabit bir reel parametre olsun. O zaman

$$\int_{s_0}^b f(\beta(t)) d_\beta t = \int_{s_0}^{\beta(b)} f(u) (D_\beta \beta^{-1})(u) d_\beta u \text{ dir (Cardoso, 2021).}$$

Kanıt. Kanıt basittir; çünkü tanım gereğince sağ taraf

$$\int_{s_0}^{\beta(b)} f(u) (D_\beta \beta^{-1})(u) d_\beta u,$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(\beta^k(\beta(b))) \frac{\beta^{-1}(\beta^k(\beta(b))) - \beta^k(\beta(b))}{\beta^k(\beta(b)) - \beta(\beta^k(\beta(b)))} (\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b))$$

toplamına eşittir. Sadeleştirmeden sonra;

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(\beta(\beta^k(b))) (\beta^k(b) - \beta^{k+1}(b)) = \int_{s_0}^b f(\beta(t)) d_\beta t$$

olur (Cardoso, 2021).

Lemma 3.2. b sabit bir reel parametre, $f, g \in L^2_\beta(s_0, b)$, f ve g fonksiyonlarının her ikisi de s_0 noktasında sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman $t \in (s_0, b]$ için aşağıdakiler elde edilir:

$$(i) (D_\beta f)(\beta^{-1}(t)) = (D_{\beta^{-1}} f)(t);$$

$$(ii) \langle D_\beta f, g \rangle = f(b) \overline{g(\beta^{-1}(b))} - f(s_0) \overline{g(s_0)} + \langle f, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} g \rangle;$$

$$(iii) \langle -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} f, g \rangle = f(s_0) \overline{g(s_0)} - f(\beta^{-1}(b)) \overline{g(b)} + \langle f, D_\beta g \rangle \text{ (Cardoso, 2021).}$$

Kanıt. (i)'nin kanıtı açıktır. (ii) kanıtlayalım.

β -kısmi integrasyon teoreminden aşağıdaki formülü elde edilir.

$$\begin{aligned} \langle D_\beta f, g \rangle &= \int_{s_0}^b (D_\beta f)(t) \overline{g(t)} d_\beta t \\ &= f(b) \overline{g(b)} - f(s_0) \overline{g(s_0)} - \int_{s_0}^b f(\beta(t)) \overline{(D_\beta g)(t)} d_\beta t. \end{aligned}$$

$u = \beta(t)$ olarak Lemma 3.1 den aşağıdaki elde edilir.

$$\langle D_\beta f, g \rangle = f(b) \overline{g(b)} - f(s_0) \overline{g(s_0)} - \int_{s_0}^{\beta(b)} f(u) (D_\beta \beta^{-1})(u) \overline{(D_\beta g)(\beta^{-1}(u))} d_\beta u,$$

(i) kullanılarak

$$\langle D_\beta f, g \rangle = f(b)\overline{g(b)} - f(s_0)\overline{g(s_0)} - \int_{s_0}^{\beta(b)} f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u. \quad (3.1)$$

elde edilir. Lemma 2.3.5 (iv) den

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\beta(b)} f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u &= \int_{s_0}^b f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u \\ &+ \int_b^{\beta(b)} f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 2.3.7 den

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{\beta(b)} f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u &= \int_{s_0}^b f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u \\ &+ (\beta(b) - b) f(b) D_\beta \beta^{-1}(b) \overline{D_{\beta^{-1}} g(b)} \end{aligned}$$

bulunur (A. E. Hamza vd., 2015).

(2.3.2) eşitliği yardımıyla,

$$\begin{aligned} \langle D_\beta f, g \rangle &= f(b)\overline{g(b)} - f(s_0)\overline{g(s_0)} - \int_{s_0}^b f(u) D_\beta \beta^{-1}(u) \overline{D_{\beta^{-1}} g(u)} d_\beta u \\ &\quad - (\beta(b) - b) f(b) D_\beta \beta^{-1}(b) \overline{D_{\beta^{-1}} g(b)} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} f(b)\overline{g(b)} - f(s_0)\overline{g(s_0)} - (\beta(b) - b) f(b) (D_\beta \beta^{-1})(b) \overline{(D_{\beta^{-1}} g)(b)} &= f(b) g(\beta^{-1}(b)) - \\ f(s_0) g(s_0) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\langle D_\beta f, g \rangle = f(b) g(\beta^{-1}(b)) - f(s_0) g(s_0) - \langle f, D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} g \rangle$$

elde edilir. (ii) kanıtlanır. Son olarak, (iii), (ii) nin bir sonucudur (A.E. Hamza vd., 2015).

Sonuç 3.3. $a \leq s_0 \leq b$ ve $f, g \in L^2_\beta(a, b)$ fonksiyonlarının her ikisi de s_0 noktasında sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman

$$\langle D_\beta f, g \rangle = f(b) g(\beta^{-1}(b)) - f(a) g(\beta^{-1}(a)) + \langle f, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} g \rangle \text{ dir.}$$

Şimdi $L^2_\beta(s_0, b)$ uzayı üzerinde $s_0 \leq t \leq b < \infty$, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\ell_\beta y(t) := -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y(t) + r(t) y(t) = \lambda y(t) \quad (3.2)$$

denklemini ve

$$\begin{cases} a_1 y(s_0) + a_2 D_{\beta^{-1}} y(s_0) = 0 \\ b_1 y(b) + b_2 D_{\beta^{-1}} y(b) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

sınır koşulları ile verilen Beta-Sturm-Liouville problemini (β -SLP) ele alalım. Burada $r(t)$ fonksiyonunun $[s_0, b]$ aralığı üzerinde reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $|a_1|+|a_2| \neq 0 \neq |b_1|+|b_2|$ olduğu varsayılır.

Şimdi β -Lagrange özdeşliğini ispatlayalım (Cardoso, 2021).

Teorem 3.4. Eğer $y, z \in L_{\beta}^2(s_0, b)$ ise o zaman

$$\int_{s_0}^b [(\ell_{\beta} y(t)) \overline{z(t)} - y(t) \overline{(\ell_{\beta} z(t))}] d_{\beta} u = [y, \overline{z}](b) - [y, \overline{z}](s_0) \quad (3.4)$$

dir. Burada

$$[y, z](t) = y(t) D_{\beta^{-1}} z(t) - z(t) D_{\beta^{-1}} y(t) \quad (3.5)$$

ile tanımlanır (Cardoso, 2021).

Kanıt. $y, z \in L_{\beta}^2(s_0, b)$ olsun. Lemma 3.2 (iii) de

$f(t) = D_{\beta} y(t)$ ve $g(t) = z(t)$ yazarsak

$$\langle -D_{\beta} \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} y, z \rangle = -D_{\beta} y(\beta^{-1}(b)) \overline{z(b)} + D_{\beta} y(s_0) \overline{z(s_0)} + \langle D_{\beta} y, D_{\beta} z \rangle$$

elde edilir.

Lemma 3.2 (i) ile aşağıdaki elde edilir.

$$\langle -D_{\beta} \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} y, z \rangle = -D_{\beta^{-1}} y(b) \overline{z(b)} + D_{\beta^{-1}} y(s_0) \overline{z(s_0)} + \langle D_{\beta} y, D_{\beta} z \rangle \quad (3.6)$$

Öte yandan, Lemma 3.2 (ii)'de, $f(t) = y(t)$ ve $g(t) = D_{\beta} z(t)$ yazarak aşağıdaki elde edilir.

$$\langle D_{\beta} y, D_{\beta} z \rangle = y(b) \overline{D_{\beta} z(\beta^{-1}(b))} - y(s_0) \overline{D_{\beta} z(s_0)} + \langle y, -D_{\beta} \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_{\beta} z \rangle,$$

Lemma 3.2 (i) ile

$$\langle D_\beta y, D_\beta z \rangle = y(b) \overline{D_{\beta^{-1}} z(b)} - y(s_0) \overline{D_{\beta^{-1}} z(s_0)} + \langle y, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta z \rangle \quad (3.7)$$

bulunur. (3.6) ile (3.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y, z \rangle &= y(b) \overline{(D_{\beta^{-1}} z)(b)} - (D_{\beta^{-1}} y)(b) \overline{z(b)} - \\ & y(s_0) \overline{(D_{\beta^{-1}} z)(s_0)} + (D_{\beta^{-1}} y)(s_0) \overline{z(s_0)} + \langle y, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta z \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç

$$\langle -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y, z \rangle = [y, \bar{z}](b) - [y, \bar{z}](s_0) + \langle y, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta z \rangle \quad (3.8)$$

ifadesine denktir.

(3.8) ve $r(t)$ fonksiyonunun gerçel oluşu kullanarak aşağıdakiler elde edilir:

$$\begin{aligned} \langle \ell_\beta y, z \rangle &= \langle D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y(t) + r(t)y(t), z(t) \rangle \\ &= \langle D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y(t), z(t) \rangle + \langle r(t)y(t), z(t) \rangle \\ &= [y, \bar{z}](b) - [y, \bar{z}](s_0) + \langle y, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta z(t) \rangle + \langle y(t), r(t)z(t) \rangle \\ &= [y, \bar{z}](b) - [y, \bar{z}](s_0) + \langle y, -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta z(t) + r(t)z(t) \rangle \\ &= [y, \bar{z}](b) - [y, \bar{z}](s_0) + \langle y, \ell_\beta z \rangle \end{aligned}$$

(Cardoso, 2021).

Sonuç 3.5. (3.2)-(3.3) ile tanımlanan Beta-Sturm-Liouville operatörü $L_\beta^2(s_0, b)$ uzayında biçimsel kendine eş operatördür (Cardoso, 2021).

Kanıt. y ve z (3.3) sınır koşullarını sağlasın.

(i) Eğer $a_2 \neq 0$ ise (3.5) ile,

$$[y, \bar{z}](s_0) = y(s_0) \overline{\left(-\frac{a_1}{a_2} z(s_0)\right)} + \frac{a_1}{a_2} y(s_0) \overline{z(s_0)} = 0$$

elde edilir.

(ii) Eğer $a_2 = 0$ ise, $|a_1| + |a_2| \neq 0$ olduğundan, $a_1 \neq 0$ olmalıdır ki

(3.3) den $y(s_0) = 0$ olduğu görülür. Benzer şekilde $z(s_0) = 0$ elde edilir.

Böylece $[y, \bar{z}](s_0) = 0$ olur.

Yukarıdaki gibi $[y, \bar{z}](b) = 0$ dır. Böylece

$$\langle \ell_\beta y, z \rangle = \langle y, \ell_\beta z \rangle$$

elde edilir (Cardoso, 2021).

Teorem 3.6. (3.2)-(3.3) ile tanımlanan Beta-Sturm-Liouville problemi tüm özdeğerleri gerçektir. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldır (Cardoso, 2021).

Kanıt. İlk önce özfonksiyonların gerçekte olduğunu gösterelim.

λ_0 bir özdeğer ve $y_0(t)$ karşılık gelen bir özfonksiyon olsun.

$$\ell_\beta y_0(t) = \lambda_0 y_0(t), \quad \overline{\ell_\beta y_0(t)} = \overline{\lambda_0 y_0(t)}$$

olduğundan Sonuç 3.5 yardımıyla

$$\int_{s_0}^b \ell_\beta y_0(t) \overline{y_0(t)} d_\beta t = \int_{s_0}^b y_0(t) \overline{\ell_\beta y_0(t)} d_\beta t$$

elde edilir. Buradan,

$$\lambda_0 \int_{s_0}^b |y_0(t)|^2 d_\beta t = \overline{\lambda_0} \int_{s_0}^b |y_0(t)|^2 d_\beta t$$

ve,

$$(\lambda_0 - \overline{\lambda_0}) \int_{s_0}^b |y_0(t)|^2 d_\beta t = 0$$

bulunur. $y_0(t)$ bir özfonksiyon olduğundan $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ olur.

ϕ_1 ve ϕ_2 fonksiyonları sırasıyla $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsunlar.

Sonuç 3.5'ten ve özdeğerlerin reel oluşundan

$$\lambda_1 \int_{s_0}^b \phi_1(t) \overline{\phi_2(t)} d_\beta t = \lambda_2 \int_{s_0}^b \phi_1(t) \overline{\phi_2(t)} d_\beta t$$

elde edilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, ortogonallik elde edilir (Cardoso, 2021).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde Beta-Sturm-Liouville denklemi tarafından üretilen Beta-Sturm-Liouville operatörü ele alınacaktır. Sınır koşulları kullanılarak bu operatör için sınır değer uzayı inşa edilecektir. Bu kavram yardımıyla Beta-Sturm-Liouville operatörü için tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilecektir.

$r(\cdot)$ fonksiyonu $[s_0, b]$ aralığı üzerinde reel-değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$ly := -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y(t) + r(t)y(t) \quad (4.1)$$

Beta-Sturm-Liouville denklemini göz önüne alalım. Beta-Sturm-Liouville denklemden operatöre geçiş yapmak için $L_\beta^2[a, b]$ Hilbert uzayını dikkate alalım.

Şimdi bu denkleme karşılık gelen maksimal ve minimal operatörlerin tanımlayalım.

$$D_{max} = \left\{ y \in L_\beta^2[s_0, b]: \begin{array}{l} y \text{ ve } D_\beta y \text{ fonksiyonları } (s_0, b) \text{ üzerinde tanımlı,} \\ \text{sürekli ve} \\ l(y) \in L_\beta^2[s_0, b] \end{array} \right\}$$

$$D_{min} = \{y \in D_{max}: y(s_0) = D_{\beta^{-1}}y(s_0) = y(b) = D_{\beta^{-1}}y(b) = 0\}.$$

D_{max} kümesi üzerinde

$$L_{max}y = ly$$

ile L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım. L_{max} operatörünü D_{min} kümesine kısıtlarsak L_{min} minimal operatör elde edilir. $L_{min}^* = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatörüdür (Naimark, 1968).

Şimdi genişleme yaparken kullanılacak olan temel tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 4.1. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

$f, g \in D_{A^*}$ için

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_K - (\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_K;$$

keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1 f = F_1, \Gamma_2 f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörüdür; şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 4.2. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 4.3. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 = 0 \quad (4.2)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 = 0 \quad (4.3)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (4.2) ve (4.3) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (4.2), (4.3) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (4.2), (4.3) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C)\Gamma_2 f - (\sin C)\Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f + i\Gamma_2 \in D_K \quad (4.4)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \Gamma_1 f - i\Gamma_2 \in D_K \quad (4.5)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (4.4), (4.5) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991). Şimdi

$$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{max} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y(s_0) \\ y(b) \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} D_{\beta^{-1}} y(s_0) \\ D_{\beta^{-1}} y(b) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

dönüşümlerini tanımlayalım.

Teorem 4.4. (4.6) ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü L_{min} operatörünün bir sınır değer uzayıdır.

Kanıt. $\forall y, z \in D_{max}$ için

$$\begin{aligned} & (\Gamma_1 y - \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y - \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} \\ &= \left(\begin{pmatrix} -y(s_0) \\ y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} D_{\beta^{-1}} z(s_0) \\ D_{\beta^{-1}} z(b) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} - \left(\begin{pmatrix} D_{\beta^{-1}} y(s_0) \\ D_{\beta^{-1}} y(b) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -z(s_0) \\ z(b) \end{pmatrix} \right)_{\mathbb{C}^2} \\ &= \left(-y(s_0) \overline{(D_{\beta^{-1}} z(s_0))} + y(b) \overline{(D_{\beta^{-1}} z(b))} \right) \\ &\quad - \left(-D_{\beta^{-1}} y(s_0) \overline{(z(s_0))} + D_{\beta^{-1}} y(b) \overline{(z(b))} \right) \\ &= D_{\beta^{-1}} y(s_0) \overline{(z(s_0))} - y(s_0) \overline{(D_{\beta^{-1}} z(s_0))} \\ &\quad + y(b) \overline{(D_{\beta^{-1}} z(b))} - D_{\beta^{-1}} y(b) \overline{(z(b))} \\ &= [y, z](b) - [y, z](s_0) \end{aligned}$$

Teorem 3.4 den

$$(\Gamma_1 y - \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y - \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = (L_{max} y, z) - (y, L_{max} z)$$

elde edilir. Böylece sınır değeri uzayının tanımının ilk koşulunu kanıtladık.

Şimdi sınır değer uzayının tanımının ikinci koşulunu ispatlayacağız.

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

$$y(t) = \alpha_1(t)u_1 + \alpha_2(t)v_1 + \alpha_3(t)u_2 + \alpha_4(t)v_2 \in L_\beta^2[s_0, b],$$

vektör değerli fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde tanımlayalım:

$$\alpha_1(s_0) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_1(s_0) = 0 \quad \alpha_1(b) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_1(b) = 0$$

$$\alpha_2(s_0) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_2(s_0) = 0 \quad \alpha_2(b) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_2(b) = 0$$

$$\alpha_3(s_0) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_3(s_0) = 0 \quad \alpha_3(b) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_3(b) = 0$$

$$\alpha_4(s_0) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_4(s_0) = 0 \quad \alpha_4(b) = 1 \quad D_{\beta^{-1}}\alpha_4(b) = 0$$

Bu fonksiyon D_{max} kümesine aittir ve $\Gamma_1 y = u$, $\Gamma_2 y = v$ olduğu açıktır.

Şimdi Teorem 4.3 kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.5. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzülme operatörü olmak üzere L_{min} operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.7)$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.8)$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla L_{min} operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine L_{min} operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (4.7) ve (4.8) koşulları yardımıyla verilir. K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (4.7) ve (4.8) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa L_{min} operatörünün maksimal simetrik genişlemesini, eğer üniter olursa L_{min} operatörünün kendine eş genişlemesini verir. L_{min} operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y + i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

$$K(\Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) = (\Gamma_1 y + i\Gamma_2 y, \Gamma_1 y - i\Gamma_2 y) \in D(K)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D(K)$ için,
 $\|Kf\| \leq \|f\|$ koşulunu sağlayan lineer operatördür.



5.SONUÇ

Bu tez çalışmasında, $r(\cdot)$ fonksiyonu $[s_0, b]$ aralığı üzerinde reel-değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$ly: = -D_\beta \beta^{-1} D_{\beta^{-1}} D_\beta y(t) + r(t)y(t) \quad (5.1)$$

Beta-Sturm-Liouville denklemi ele alındı. Bu denklemlere karşılık gelen minimal ve maximal operatör oluşturuldu. Bu operatöre karşılık gelen sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır değer uzayı yardımıyla simetrik operatörün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edildi.

Bu çalışma singüler Beta-Sturm-Liouville denklemlerinin Weyl limit-nokta/Weyl limit-çember durumu için yani indis defektin (1,1) ve (2,2) olduğu durumlarda yapılarak Beta-Sturm-Liouville teorisi genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Akhiezer, N.I., Glazman, I.M., 1963. Theory of Linear Operators in Hilbert Spaces, Volume I. Frederick Ungar, New York.
- Aldwoah, K.A, 2009. Generalized Time Scales and the Associated Difference Equations. PhD thesis, Cairo University, Giza, Egypt.
- Allahverdiev, B.P., 1995. On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potential. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Serriya Matematicheskaya* 59, 19-54 (İngilizce tercümesi *Izvestiya Matematik* 59,45-62).
- Allahverdiev, B.P., 2013. Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations Applications* 19, 5, 839-849.
- Allahverdiev, B.P., 2014. Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra* 62, 9, 1146-1152.
- Allahverdiev, B.P., 2016. Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat* 30, 6, 1475-1484.
- Annaby, M.H., Hamza, A.E., Aldwoah, K.A., 2012. Hahn difference operator and associated Jackson-Nörlund Integrals, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154, 133-153.
- Annaby, M.H., Mansour, Z.S., 2012. *q-Fractional Calculus and Equations*. Springer, Berlin.
- Bangerezako, G., 2008. An Introduction to *q*-Difference Equations, Preprint, Burundi University, Bujumbura.
- Bairamogly, M., 1976. Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, *Izvestiya Akademii Nauk Azerbaycan* 2, 140-143.
- Birman, M.S., 1956. On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators, *Mathematical* 38, 431-450.
- Bruck, V.M., 1976. On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions. *Mathematics Sbornik*, 100, 210-216.
- Cardoso, J.L., 2020. Variations around a general quantum operator. *Ramanujan Journal*, 54: 555-569. <https://doi.org/10.1007/s11139-019-00210-8>.
- Cardoso, J.L. ve Petronilho, J., 2015. Variations around Jackson's quantum operator. *Methods and Applications of Analysis*, 22, 4, 343-358.
- Cardoso, J.L., 2021. A β -Sturm-Liouville problem associated with the general quantum operator. *Journal of Difference Equations and Applications*, 27:4, 579-595.

- Cruz, A.M. ve Martins, N., 2018. General quantum variational calculus. *Statistics Optimization Information Computing*, volume 6, 22–41.
- Faried, N., Shehata, E.M. ve Zafarani, R.M., 2017. On homogeneous second order linear general quantum difference equations, *Journal of Inequalities and Applications*, 98, 1–13. <https://doi.org/10.1186/s13660-017-1471-3>.
- Faried, N., Shehata, E.M. ve Zafarani, R.M., 2018. Theory of nth-order linear general quantum difference equations, *Advances in Difference Equations* 64, 1–24. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1715-7>.
- Gorbachuk, M.L., Gorbachuk, V.I., 1984. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Naukova Dumka, Kiev (İngilizce tercümesi 1991, Birkhauser Verlag).
- Gorbachuk, M.L., Kochubei, A.N., Rybak, M.A., 1972. Dissipative extensions of differential operators in a space of vector-valued functions, *Doklady Akademii Nauk*, 205, 1029-1032 (İngilizce tercümesi, Rusya Bilimler Akademisi 13, 1063-1067).
- Gorbachuk, M.L., Gorbachuk, V.I., Kochubei, A.N., 1989. The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations, *Ukrainian Mathematical Journal* 41, 1299-1312 (İngilizce tercümesi *Ukraynaca Matematik Dergisi*, 41, 1117-1129).
- Hamza, A. E. and Ahmed, S. A., 2013. Existence and Uniqueness of Solutions of Hahn Difference Equations, *Advances in Difference Equations*, 2013, 316, 1, 1–15.
- Hamza, A.E., Ahmed, S.M., 2013. Theory of linear Hahn difference equations. *Journal of Advances in Mathematics*, 4, 2, 440–460.
- Hamza, A.E., Sarhan, A.M., Shehata, E.M. ve Aldwoah, K.A., 2015. A general quantum difference calculus, *Advances in Difference Equations*, 182, 1–19.
- Hamza, A.E. ve Shehata, E.M., 2015. Some inequalities based on a general quantum difference operator, *Journal Inequalities and Applications*, 38, 1–12.
- Hamza, A.E. ve Shehata, E.M., 2016. Existence and Uniqueness of Solutions of General Quantum Difference Equations, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 11, N. 1, 45–58.
- Hamza, A.E., Sarhan, A.M., Shehata, E.M., 2017. Exponential, Trigonometric and Hyperbolic Functions Associated with a General Quantum Difference Operator, *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 12, number 1, 25–38.
- Kac, V., Cheung, P., 2002. Quantum Calculus. *Springer*, New York.
- Kochubei, A.N., 1975. Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations, *Math Zametki* 17, 41-48; İngilizce tercümesi *Matematik Notları* 17, 25-28.

- Krein, M.G., 1947. The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications. I, *Mathematics Sbornik* 20, 431-495; II, *Mat. Sb.* 21, 365-404.
- Krein, M.G., 1952. On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$, *Academy Nauk Serriya Matematicheskaya* 16, 292-324.
- Kreyszig, E., 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Willey and Sons, New York.
- Maksudov, F.G., Allahverdiev, B.P., 1993. On the extensions of Schrödinger operators with a matrix potentials, *Doklady Academy. Nauk* 332, 1, 18-20; İngilizce tercümesi Rusya Bilimler Akademisi. 48, 2, 240-243.
- Naimark., M.A., 1969. *Linear Differential Operators*, 2nd edition., Nauka, Moscow, (İngilizce tercümesi. 1. baskı, 1,2, 1968, New York).
- Neumann, J.V., 1929. Allgemeine Eigenwertheorie Hermitescher Functional operatoren, *Mathematische Annalen* 102, 49-131.
- Rellich, F., 1951. Halbbeschränkte gewöhnliche Diferansiyeloperatoren zweiter Ordnung', *Mathematische Annalen* 122, 343-368.
- Rofe-Beketov, F.S., 1969. Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions, *Doklady Academy. Nauk*, 184, 1034-1037 (İngilizce tercümesi Rusya Bilimler Akademisi. 10, 188-192).
- Shehata, E.M., Faried, N. ve Zafarani, R.M., 2020. A general quantum Laplace transform, *Advances in Difference Equations* 2020, 613. β -Sturm Liouville Problem 15 <https://advancesindifferenceequations.springeropen.com/articles/10.1186/s13662-020-03070-5>.
- Tuna, H., Allahverdiev, B.P., 2018. Dissipative Extensions of Fourth Order Differential Operators, *Thai Journal of Mathematics*, V 16, 275-285.
- Vishik, M.I., 1952. On general boundary-value problems for elliptic differential equations', *Trudy Moskov. Mathematical Obshch*, 1, 187-246.