

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



BÉZİER TIPLI EĞRİLERİN YENİ BİR SINIFI ÜZERİNE

Dudu Şeyma KUN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ



BÉZİER TIPLI EĞRİLERİN YENİ BİR SINIFI ÜZERİNE

Dudu Şeyma KUN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞUBAT 2025

ANTALYA

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BÉZİER TIPLI EĞRİLERİN YENİ BİR SINIFI ÜZERİNE

Dudu Şeyma KUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Bu tez T.C. Akdeniz Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Koordinasyon
Birimi tarafından 6646 nolu proje ile desteklenmiştir.**

ŞUBAT 2025

T.C.
AKDENİZ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BÉZİER TIPLI EĞRİLERİN YENİ BİR SINIFI ÜZERİNE

Dudu Şeyma KUN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bu tez 03/02/2025 tarihinde jüri tarafından Oybirliği/Oy çokluğu ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN (Danışman)

Prof.Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖZET

BÉZIER TIPLİ EĞRİLERİN YENİ BİR SINIFI ÜZERİNE

Dudu Şeyma KUN

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Şubat 2025, 26 sayfa

Bu tezin temel amacı, $\mathbb{R}^2$ uzayındaki m . dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliğini hesaplamaktır. Bunun için ilk olarak Bézier tipli eğrilere baz teşkil eden Bernstein tipli fonksiyonlar incelenmiştir. Bu fonksiyonların birinci ve ikinci türevleri hesaplanmıştır. Bu türevler yardımıyla Bézier tipli eğrilerin birinci ve ikinci türevleri elde edilmiştir. Elde edilen bu türevler kullanılarak Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği hesaplanmıştır. $\mathbb{R}^2$ uzayındaki Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısının ve eğriliğinin, eğrinin başlangıç ve bitiş noktasındaki değerleri incelenmiştir. Ayrıca, ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği hesaplanmıştır. Son olarak, ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğriler şekiller ile Serret-Frenet çatıları ve eğrilik değerleriyle örneklendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bernstein polinomları, Bézier eğrileri, Bézier tipli eğriler, Eğrilik, Serret-Frenet çatısı.

JÜRİ: Doç. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN (Danışman)

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Doç. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

ABSTRACT

ON A NEW CLASS OF BÉZIER TYPE CURVES

Dudu Şeyma KUN

MSc Thesis in MATHEMATICS

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

February 2025, 26 pages

The main purpose of this thesis is to calculate the Serret-Frenet frame and the curvature of Bézier type curves of order m in the space $\mathbb{R}^2$. For this, firstly Bernstein type functions which are the basis of Bézier type curves analysed. The first and second derivatives of these functions are calculated. With the help of these derivatives, the first and second derivatives of Bézier type curves are obtained. Using these derivatives, the Serret-Frenet frame and curvature of Bézier type curves are calculated. The values of the Serret-Frenet frame and curvature of Bézier type curves in the space $\mathbb{R}^2$ at the starting and ending points of the curve are examined. In addition, the Serret-Frenet frame and the curvature of second and third order Bézier type curves are calculated. Finally, the Serret-Frenet frames and curvature of the second and third order Bézier type curves are exemplified.

KEYWORDS: Bernstein polynomials, Bézier curves, Bézier like curves, Curvature, Serret-Frenet frame.

COMMITTEE: Assoc. Prof. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN

Prof. Dr. Mustafa ÖZDEMİR

Assoc. Prof. Dr. İrem KÜÇÜKOĞLU

ÖNSÖZ

$\mathbb{R}^2$ uzayındaki bir eğrinin Serret-Frenet çatısı, eğrinin geometrisini karakterize etmek ve analiz etmek için önem arzeden bir araç olmuştur. Bu tezde Ceylan (2021) tarafından verilen m . dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısının ve eğriliğinin hesaplanması amaçlanmıştır. Bu Serret-Frenet elemanlarını vermek için Bernstein tipli fonksiyonların ve Bézier tipli eğrilerin özellikleri incelenip, birinci ve ikinci mertebeden türevleri hesaplanmıştır. Ayrıca ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği hesaplanıp, örneklendirilmiştir.

Bu tezde verilen bölümler kısaca aşağıdaki gibi özetlenebilir:

Giriş bölümünde, Bézier eğrileri ve Bézier tipli eğrilerin kullanım alanlarına ve tarihsel açıdan önemine yer verilmiştir. Tarihi gelişmelere önemli katkılar sağlayan bazı matematikçiler verilmiştir.

Kaynak Taraması bölümünde, Bernstein polinomları, Bézier eğrileri, doğrusal dönüşüm, Serret-Frenet çatısı ve eğrilik gibi kavramların tanımları ve özellikleri verilmiştir.

Materyal ve Metot bölümünde, Bernstein tipli fonksiyonların ve Bézier tipli eğri kavramları verilmiştir. Bernstein tipli fonksiyonlar ve Bézier tipli eğrilerin özellikleri ve birinci mertebeden türevleri verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde, üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonların formleri bulunmuştur. Bazı özel değerleri hesaplanmıştır. Bernstein tipli fonksiyonların ve Bézier tipli eğrilerin ikinci mertebeden türevleri hesaplanmıştır. Tezin asıl amacı olan, $\mathbb{R}^2$ uzayında Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet elemanları hesaplanmıştır. Bazı özel durumları incelenmiştir. Ayrıca, ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğriler ve bu eğrilerin Serret-Frenet elemanları örneklendirilmiştir.

Tezin geri kalan kısımları Sonuç, Kaynaklar ve Özgeçmiş bölümlerini kapsamaktadır.

Bu tez çalışması boyunca desteğini esirgemeyen sayın danışmanım Doç. Dr. Ayşe YILMAZ CEYLAN'a teşekkür ederim ve saygılarımı sunarım. Ayrıca eğitim hayatım boyunca her zaman yanımda olan babam Ahmet KUN ve annem Ayşe KUN'a yürekten teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iii
AKADEMİK BEYAN	v
SİMGELER VE KISALTMALAR	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
TABLolar DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK TARAMASI	3
3. MATERYAL VE METOT	8
3.1. Bernstein Tipli Fonksiyonlar	8
3.1.1. Bernstein Tipli Fonksiyonların Özellikleri	10
3.1.2. Bernstein Tipli Fonksiyonların Türevi	10
3.1.3. Bernstein Polinomları ve Bernstein Tipli Fonksiyonların Karşılaş- tırılması	11
3.2. Bézier Tipli Eğriler	11
3.2.1. Bézier Tipli Eğrilerin Türevi	11
3.2.2. Bézier Tipli Eğrilerin Özellikleri	12
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	14
4.1. Bernstein Tipli Fonksiyonların İkinci Türevi	16
4.2. Bézier Tipli Eğrilerin İkinci Türevi	17
4.3. $\mathbb{R}^2$ de Bézier Tipli Eğrilerin Serret-Frenet Elemanları	17
5. SONUÇLAR	23
6. KAYNAKLAR	24
ÖZGEÇMİŞ	

AKADEMİK BEYAN

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “BÉZİER TİPLİ EĞRİLERİN YENİ BİR SINIFI ÜZERİNE” adlı bu çalışmanın, akademik kurallar ve etik değerlere uygun olarak bulunduğunu belirtir, bu tez çalışmasında bana ait olmayan tüm bilgilerin kaynağını gösterdiğimi beyan ederim.

03/02/2025

Dudu Şeyma KUN

İmza



SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler:

$\mathbb{R}^2$	: İki boyutlu Öklid uzayı
$\binom{m}{j}$	: Binom katsayısı
$\mathcal{B}(t)$	: Bézier eğrileri
$\mathcal{BL}(t)$	: Bézier tipli eğriler
P_i	: Kontrol noktaları
$B_i^n(t)$	: Bernstein polinomları
$v_j^m(t)$	: Bernstein tipli fonksiyonlar
$\kappa(t)$	: Eğrilik
$\mathbf{T}(t)$	: Teğet vektör
$\mathbf{N}(t)$	: Normal vektör
$CH\{X\}$	: X kümesinin konveks kabuğu
$\langle ., . \rangle$	: Öklid iç çarpımı
$\ .\ $	: Öklid normu

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	2. dereceden Bernstein polinomları ve 2. dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar	9
Şekil 3.2	2. dereceden Bézier eğrisi ve 2. dereceden Bézier tipli eğriler	13
Şekil 4.3	3. dereceden Bernstein polinomları ve 3. dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar	15
Şekil 4.4	2. dereceden Bézier tipli eğri ve Serret-Frenet elemanları	21
Şekil 4.5	3. dereceden Bézier tipli eğri ve Serret-Frenet elemanları	22



TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1	Bernstein polinomu ve Bernstein tipli fonksiyonlar	11
------------------	--	----



1. GİRİŞ

Eğri ve yüzey tasarımının kolaylaştırılması amacıyla matematikçi Paul de Casteljau 1959 yılında bir formül üzerinde araştırma yapmaya başladı. Aynı amaçla, mühendis Pierre Bézier, onun araştırmalarından bağımsız ve habersiz olarak benzer bir formül geliştirdi. Bézier'in 1968'de yayınlanan ilgili çalışmaları sonucunda, teori onun adıyla anılmaktadır. Bu çalışmaların bir sonucu olarak Bézier formülü, sıralı bir kümede yer alan $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ kontrol noktalarını kullanarak orijinal eğriye bir yaklaşımı açıklamanın motivasyonu ile kurulmuştur.

Bézier eğrileri, kontrol noktaları adı verilen vektör değerli katsayılara sahip Bernstein polinomlarının doğrusal bir kombinasyonu olarak verilir (Lorentz 1986; Phillips 2003; Marsh 2004; Salomon 2006; Farouki 2012). Bézier eğrileri teorisinin, Bilgisayar Destekli Tasarım (CAD) alanında büyük bir önemi vardır, çünkü bunlar CAD deki tüm polinom tabanları arasında sayısal olarak en kararlı olanlardır (Farin 1996). Parçalı polinom eğrileri veya fonksiyonlar genellikle diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde yaklaşık çözümü temsil etmek için kullanılır. Bézier eğrileri, kısmi diferansiyel denklemlerin, dalga denklemlerinin, ısı denklemlerinin ve dinamik sistemlerin çözümünde kullanılır (Ghomanjani vd. 2014). Bézier eğrileri, CAD/CAM de serbest formlu eğriler oluşturmak için güçlü araçlardır (Kucukoglu vd. 2019). Aynı zamanda Bernstein polinomlarının ve Bézier eğrilerinin üretici fonksiyonları ve uygulamaları çalışılmıştır (Simsek 2011; Simsek 2012; Simsek 2013; Simsek 2014a; Simsek 2014b; Simsek 2014c; Simsek 2018; Simsek 2019).

Bernstein polinomları, derecesi m ve m den küçük olan polinomların oluşturduğu vektör uzayı $P_m[t] = \text{span} \{1, t, t^2, \dots, t^m\}$ için en çok kullanılan tabanlardan biridir. Polinom yapısından dolayı Bernstein polinomları, üstel fonksiyonlar, trigonometrik fonksiyonlar ve zincir eğrisi gibi transandantal eğrileri temsil etmede birçok eksikliğe sahiptir. Literatürde, polinom yapısının sakıncalarından kaçınmak için yeni uzaylarda birçok farklı taban bulunmuştur.

Zhang (1996), $\text{span} \{1, t, \cos t, \sin t\}$ uzayında eğriler üzerinde çalışmıştır. Trigonometrik uzay $\text{span} \{1, \sin t, \cos t, \dots, \sin mt, \cos mt\}$ için Sanchez-Reyes (1998) tarafından bir temel bulunmuştur. Mainar ve arkadaşları (2001) $\text{span} \{1, t, \cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t\}$, $\text{span} \{1, t, t^2, \cos t, \sin t\}$ ve $\text{span} \{1, t, \cos t, \sin t, t \cos t, t \sin t\}$ uzayları için birer ta-

ban tanımlamışlardır. Chen ve Wang (2003), $\Gamma_m = \text{span} \{1, t, t^2, \dots, t^{m-2}, \sin t, \cos t\}$, $(m \geq 2)$ uzayında bir Bézier tipli eğriler sınıfı oluşturmuştur. Ayrıca Wang (2006), $\text{span} \{1, t, t^2, \dots, t^{m-2}, \sinh t, \cosh t\}$ hiperbolik fonksiyonlar uzayında normalize edilmiş bazlar bulmuştur. Zhu ve Tan (2012), bir başka Bézier tipli eğriyi

$$\text{span} \{1, t, t^2, \dots, t^{m-2}, e^{t\omega}, e^{-t\omega}\}$$

uzayında vermiştir. Qin ve arkadaşları (2015) terminal özelliği, dışbükey gövde özelliği ve afin değişmezlik dahil olmak üzere Bézier eğrileri ile aynı özelliklere sahip kuartik C –Bézier eğrilerini bulmuşlardır.

Parametrik yapısından dolayı bir Bézier eğrisi sürekli bir eğriliğe sahiptir. Böylelikle, tıp ve mühendislik alanları gibi çeşitli uygulamalarda kullanılabilir (Kucukoglu vd. 2019). Eğrilik ve burulma gibi diferansiyel değişmezlerin Öklid geometrisindeki özellikleri makalelerde araştırılmıştır (Farin vd. 1989; Frey vd. 2000; Goldman 2005). Bir Bézier eğrisinin uç noktalarındaki eğriligi ve geometrik anlamları diferansiyel geometri için büyük bir önem arz etmektedir (Farin 1996; Farin vd. 2002; Marsh 2004).

2. KAYNAK TARAMASI

Bu kısımda tez boyunca yararlanılacak olan tanımlar ve teoremler verilecektir. Bu bölüm boyunca verilen tanımlar için özellikle Bustamante (2017), Marsh (2004), Farin (1996), Salomon (2006), Kaplan ve Mann (2006), Gray vd. (2016) kaynaklarından yararlanılmıştır

Tanım 2.1. (Bernstein polinomu) Bernstein polinomu $B_i^n(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $0 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$$

ile tanımlanır (Salomon 2006 ; Marsh 2004).

Bernstein polinomunun birkaç değeri

$$B_0^1(t) = 1 - t,$$

$$B_1^1(t) = t,$$

$$B_0^2(t) = (1 - t)^2,$$

$$B_1^2(t) = 2t(1 - t),$$

$$B_2^2(t) = t^2$$

ile belirlenir (Salomon 2006 ; Marsh 2004).

Bernstein polinomunun özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

1. Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ için

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$$

dir (Farin 1996; Marsh 2004).

2. $t \in [0, 1]$ için $B_i^n(t) \geq 0$ dir (Marsh 2004).

3. Bernstein polinomları $B_i^n(t)$ için

$$B_{n-i}^n(t) = B_i^n(1 - t)$$

eşitliği geçerlidir (Marsh 2004).

4. n . dereceden Bernstein polinomları $B_i^n(t)$, $i = 0, \dots, n$ için $(n - 1)$. dereceden polinomlarla aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t).$$

Burada $B_{-1}^{n-1}(t) = 0$ ve $B_n^{n-1}(t) = 0$ dır (Marsh 2004; Farin 1996).

5. Derecesi n olan Bernstein polinomları uç noktalarda aşağıdaki değerleri alır:

$$B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1,$$

$$B_i^n(0) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$B_i^n(1) = 0, \quad i = 0, \dots, n.$$

(Marsh 2004).

Teorem 2.2. (Bernstein polinomunun türevi) n . dereceden Bernstein polinomunun 1. ve r . türevi aşağıda verilmiştir:

$$\frac{d}{dt} B_i^n(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

ve

$$\frac{d^r}{dt^r} B_i^n(t) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^r \binom{r}{j} (-1)^j B_{i-r+j}^{n-r}(t)$$

şeklindedir (Kaplan ve Mann 2006; Marsh 2004).

Tanım 2.3. (Bézier eğrisi) $\mathbb{R}^n$ uzayında $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ kontrol noktaları verildiğinde her $t \in [0, 1]$ için

$$\mathcal{B}(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad (2.1)$$

parametrik eşitliği bu kontrol noktalarının oluşturduğu n . dereceden Bézier eğrisi adını alır. Burada $B_i^n(t)$ n . dereceden Bernstein polinomlarıdır.

$P_0, P_1, P_2 \dots P_n$ kontrol noktalarının sırasıyla ikişerli oluşturduğu doğru parçalarının birleşimine kontrol poligonu denir (Salomon 2006; Marsh 2004).

n . dereceden bir Bézier eğrisi için n , eğrinin mertebesini göstermektedir. Örneğin; $n = 1$ için doğrusal, $n = 2$ için kuadratik ve $n = 3$ için kübik olarak adlandırılır. İlk ve son kontrol noktaları her zaman eğrinin uç noktalarıdır; ancak ara kontrol noktaları (varsa) genellikle eğri üzerinde yer almaz.

Örnek 2.4. (*Kuadratik Bézier eğrisi*) $\mathbb{R}^n$ uzayında P_0, P_1 ve P_2 noktaları verildiğinde $t \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0^1(t) &= (1-t)P_0 + tP_1, \\ \mathcal{B}_1^1(t) &= (1-t)P_1 + tP_2, \\ \mathcal{B}_0^2(t) &= (1-t)\mathcal{B}_0^1(t) + t\mathcal{B}_1^1(t)\end{aligned}$$

denklemleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t) &= \mathcal{B}_0^2(t) \\ &= (1-t)^2 P_0 + 2(1-t)tP_1 + t^2 P_2 \\ &= \sum_{i=0}^2 P_i B_i^2(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

kuadratik Bézier eğrisi elde edilir. Burada $\mathcal{B}_0^1(t)$, $\mathcal{B}_1^1(t)$ ve $\mathcal{B}_0^2(t)$ birinci dereceden Bézier eğrilerdir ve $B_0^2(t)$, $B_1^2(t)$ ve $B_2^2(t)$ kuadratik Bernstein polinomlarıdır.

Teorem 2.5. (*Bézier eğrisinin denkleminin türevi*) n . dereceden bir Bézier eğrisinin r . türevi

$$\frac{d^r}{dt^r} \mathcal{B}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} P_i^{(r)} B_i^{n-r}(t)\tag{2.3}$$

ile belirlenir. Burada

$$P_i^{(r)} = n(n-1) \dots (n-r-1) \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} P_{i+j}$$

dir (Marsh 2004).

Tanım 2.6. n boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında $X = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ noktalar kümesi verilsin. Bu X kümesinin konveks kabuğu

$$CH \{X\} = \left\{ \lambda_0 x_0 + \dots + \lambda_n x_n \mid \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve $CH \{X\}$ ile gösterilir (Marsh 2004).

Bézier eğrisinin özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir:

1. (2.1) eşitliği ile verilen $\mathcal{B}(t)$ Bézier eğrisi, $t = 0$ ve $t = 1$ için sırasıyla $\mathcal{B}(0) = P_0$ ve $\mathcal{B}(1) = P_n$ uç kontrol noktaları elde edilir. (Salomon 2006 ; Marsh 2004).

2. (2.1) eşitliği ile verilen $\mathcal{B}(t)$ Bézier eğrisi için

$$\frac{d}{dt}\mathcal{B}(0) = n(P_1 - P_0) \text{ ve } \frac{d}{dt}\mathcal{B}(1) = n(P_n - P_{n-1})$$

dir (Marsh 2004).

3. (2.1) parametrik denklemiyle verilen $\mathcal{B}(t)$ Bézier eğrisi her $t \in [0, 1]$ için

$$\mathcal{B}(t) \in CH \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$$

için konveks kabuk özelliği sağlanır (Salomon 2006; Marsh 2004).

Teorem 2.7. (2.1) parametrik denklemiyle verilen $\mathcal{B}(t)$ Bézier eğrisi için aşağıdaki yineleme özelliği sağlanır:

$$\mathcal{B}_i^j(t) = (1-t)\mathcal{B}_i^{j-1}(t) + t\mathcal{B}_{i+1}^{j-1}.$$

Burada $i = 0, \dots, n-j$, $j = 1, \dots, n$ ve $P_i^0 = P_i$ olmak üzere $\mathcal{B}(t) = \mathcal{B}_0^n(t)$ ($0 \leq t \leq 1$) dir (Marsh 2004).

Bu tezde, Ceylan (2021) tarafından verilen m . dereceden Bézier tipli eğrilerin, Öklid geometrisinde büyük önem arzeden Serret-Frenet çatısının ve eğriliğinin hesaplanması amaçlanmıştır. Bu nedenle aşağıdaki tanımlara değinilecektir.

Tanım 2.8. $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ aşağıdaki gibi tanımlanan doğrusal bir dönüşüm olsun:

$$J(p_1, p_2) = (-p_2, p_1).$$

Başka bir ifadeyle, (p_1, p_2) noktası orijinden saat yönünün tersine 90 derece döndürülerek $(-p_2, p_1)$ noktası elde edilir. J dönüşümü her $p, q \in \mathbb{R}^2$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

$$\langle Jp, Jq \rangle = \langle p, q \rangle,$$

$$\langle Jp, p \rangle = 0,$$

$$\langle Jp, q \rangle = -\langle p, Jq \rangle.$$

Burada, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iki vektörün iç çarpımını göstermektedir (Gray vd. 2016).

Tanım 2.9. p ve q , $\mathbb{R}^2$ uzayında sıfır olmayan iki vektör ve θ , bu iki vektör arasındaki açı olmak üzere

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|}, \\ \sin \theta &= \frac{\langle p, Jq \rangle}{\|p\| \|q\|} \end{aligned}$$

ile tanımlanır. Burada $\|\cdot\|$ Öklid normudur (Gray vd. 2016).

Tanım 2.10. $\alpha : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}^2$ düzlemsel ve birim hızlı olmayan ($\|\alpha'(t)\| \neq 1$) bir eğri olsun.

$\forall t \in \mathbb{I}$ için α eğrisinin Serret-Frenet çatısı $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ ve eğriliği κ aşağıdaki denklemlerle tanımlanır:

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{N}(t) = \frac{J\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \quad (2.5)$$

$$\kappa(t) = \frac{\langle \alpha''(t), J\alpha'(t) \rangle}{\|\alpha'(t)\|^3} \quad (2.6)$$

(Gray vd. 2016).

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, Bernstein tipli fonksiyonlar ve özellikleri ele alınmıştır. Ayrıca bu fonksiyonlar yardımıyla bir Bézier tipli eğrinin karakterizasyonu incelenmiştir.

Bölüm boyunca, Ceylan (2021) çalışmasındaki tanımlar, bazı hesaplama formülleri ve bağıntılardan yararlanılacaktır.

3.1. Bernstein Tipli Fonksiyonlar

Bu alt bölümde sırasıyla birinci, ikinci ve m . dereceden Bernstein tipli fonksiyonların tanımları verilmiştir.

Tanım 3.1. (Bernstein tipli fonksiyonlar) $\Gamma_1 = \text{span} \{e^t, e^{-t}\}$ uzayında birinci dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$v_0^1(t) = e^{-t+a}, \quad v_1^1(t) = e^t. \quad (3.7)$$

Burada $t \in [0, a]$ ve $a > 0$ dir (Ceylan 2021).

Tanım 3.2. $\Gamma_2 = \text{span} \{1, e^t, e^{-t}\}$ uzayında ikinci dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} v_0^2(t) &= 1 - \int_0^t \delta_0^1 v_0^1(s) ds, \\ v_1^2(t) &= \int_0^t \delta_0^1 v_0^1(s) ds - \int_0^t \delta_1^1 v_1^1(s) ds \\ &\quad \text{ve} \\ v_2^2(t) &= \int_0^t \delta_1^1 v_1^1(s) ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

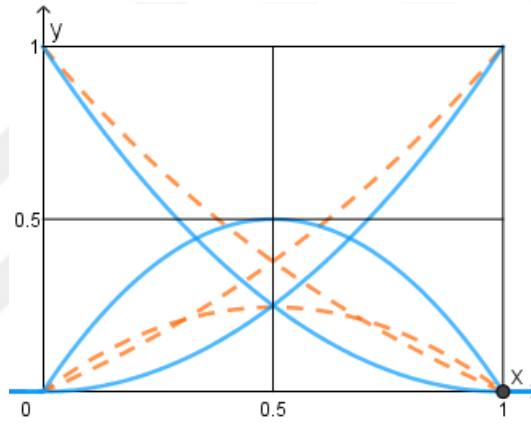
Burada $\delta_0^1 = \left(\int_0^a v_0^1(t) dt \right)^{-1}$ ve $\delta_1^1 = \left(\int_0^a v_1^1(t) dt \right)^{-1}$ dir (Ceylan 2021).

Not 3.3. Tanım 3.2 de, $v_0^1(t) = 1 - t$, $v_1^1(t) = t$ ve $a = 1$ olarak alınırsa klasik Bernstein polinomları elde edilir (Ceylan 2021).

Örnek 3.4. Tanım 3.2 den açıktır ki $\Gamma_2 = \text{span}\{1, e^t, e^{-t}\}$ uzayı için

$$\begin{aligned} v_0^2(t) &= \frac{e^{-t+a} - 1}{e^a - 1}, \\ v_1^2(t) &= \frac{-e^{-t+a} - e^t + e^a + 1}{e^a - 1}, \\ v_2^2(t) &= \frac{e^t - 1}{e^a - 1} \end{aligned}$$

2. dereceden Bernstein tipli fonksiyonlardır. Şekil 3.1 de ikinci dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar ve Bernstein polinomları gösterilmektedir. Burada turuncu eğriler ile 2. dereceden Bernstein tipli fonksiyonları ($a = 1$) ve mavi eğriler ile de 2. dereceden Bernstein polinomları gösterilmiştir (Ceylan 2021).



Şekil 3.1. 2. dereceden Bernstein polinomları ve 2. dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar

(3.7) bağıntısında verilen başlangıç fonksiyonlarına integral yaklaşımı m kez uygulanırsa m . dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar elde edilir.

Tanım 3.5. $m \geq 2$ için $\Gamma_m = \text{span}\{1, t, t^2, \dots, t^{m-2}, e^t, e^{-t}\}$ uzayında m . dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned} v_0^m(t) &= 1 - \int_0^t \delta_0^{m-1} v_0^{m-1}(s) ds, \\ v_j^m(t) &= \int_0^t \delta_{j-1}^{m-1} v_{j-1}^{m-1}(s) ds - \int_0^t \delta_j^{m-1} v_j^{m-1}(s) ds \quad j = 1, 2, \dots, m-1, \quad (3.9) \\ v_m^m(t) &= \int_0^t \delta_{m-1}^{m-1} v_{m-1}^{m-1}(s) ds. \end{aligned}$$

Burada $\delta_j^m = \left(\int_0^a v_j^m(t) dt \right)^{-1}$ ve $j = 0, 1, \dots, m$ dir (Ceylan 2021).

3.1.1. Bernstein Tipli Fonksiyonların Özellikleri

Bu bölümde, Bernstein tipli fonksiyonların en önemli özellikleri verilecektir. Bu özellikleri sunabilmek için Ceylan (2021) çalışmasından yararlanılmıştır.

1. (Birim parçalanması özelliği) m . dereceden Bernstein tipli fonksiyonları birimin parçalanması özelliğini sağlar:

$$\sum_{j=0}^m v_j^m(t) = 1.$$

Burada $t \in [0, a]$ dır.

2. (Pozitiflik özelliği) Aşağıdaki eşitsizlik $m \geq 2$ için geçerlidir:

$$v_j^m(t) \geq 0, j = 0, 1, \dots, m.$$

Burada $t \in [0, a]$ ve $a > 0$ dır.

3. (Simetri özelliği) m . dereceden Bernstein tipli fonksiyonları tarafından aşağıdaki simetri özelliği sağlanır:

$$v_j^m(t) = v_{m-j}^m(a-t).$$

Burada $t \in [0, a]$ ve $j = 0, 1, \dots, m$ dir.

4. (Uç nokta özelliği) Derecesi m olan Bernstein tipli fonksiyonların $m \geq 2$ için uç noktaları aşağıdaki değerleri alır:

$$\begin{aligned} v_0^m(0) &= v_m^m(a) = 1, \\ v_j^m(0) &= 0, j = 1, \dots, m, \\ v_j^m(a) &= 0, j = 0, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.1.2. Bernstein Tipli Fonksiyonların Türevi

Bernstein tipli fonksiyonların birinci türevi aşağıdaki gibidir:

$$(v_j^m)'(t) = \delta_{j-1}^{m-1} v_{j-1}^{m-1}(t) - \delta_j^{m-1} v_j^{m-1}(t).$$

Burada $\delta_{-1}^{m-1} = \delta_m^{m-1} = 0$ dır (Ceylan 2021).

3.1.3. Bernstein Polinomları ve Bernstein Tipli Fonksiyonların Karşılaştırılması

Bu bölümde, Bernstein polinomları ile Bernstein tipli fonksiyonların özellikleri karşılaştırılmıştır (Ceylan 2021).

Tablo 3.1. Bernstein polinomları ve Bernstein tipli fonksiyonlar

Bernstein Polinomları	Bernstein Tipli Fonksiyonlar
$0 \leq j \leq m$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_j^m(t) \geq 0$.	$t \in [0, a]$, $0 \leq j \leq m$, $m > 1$ ve $a > 0$ için $v_j^m(t) \geq 0$.
$0 \leq j \leq m$ ve $t \in [0, 1]$ için $B_j^m(t) = B_{m-j}^m(1-t)$. $\sum_{j=0}^m B_j^m(t) = 1$.	$0 \leq j \leq m$ ve $t \in [0, a]$ için $v_j^m(t) = v_{m-j}^m(a-t)$. $m > 1$ için $\sum_{j=0}^m v_j^m(t) = 1$.
$B_0^m(0) = B_m^m(1) = 1$.	$v_0^m(0) = v_m^m(a) = 1$.
$1 \leq j \leq m$ için $B_j^m(0) = 0$.	$1 \leq j \leq m$ için $v_j^m(0) = 0$.
$0 \leq j \leq m-1$ için $B_j^m(1) = 0$.	$0 \leq j \leq m-1$ için $v_j^m(a) = 0$.

3.2. Bézier Tipli Eğriler

Bu bölümde, Bernstein tipli fonksiyonlar yardımıyla üretilen Bézier tipli eğriler tanımlanıp, özellikleri incelenmiştir. Bu incelemeler sunulurken Ceylan (2021) çalışmasından yararlanılmıştır.

Tanım 3.6. Kontrol noktaları P_j olan Bézier tipli bir $\mathcal{BL}(t)$ eğrisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\mathcal{BL}(t) = \sum_{j=0}^m P_j v_j^m(t), t \in [0, a]. \quad (3.11)$$

Burada $v_j^m(t)$ fonksiyonları Tanım 3.5 ile tanımlanan Bernstein tipli fonksiyonlardır (Ceylan 2021).

3.2.1. Bézier Tipli Eğrilerin Türevi

Derecesi m olan Bézier tipli $\mathcal{BL}(t)$ eğrisinin birinci türevi aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{BL}'(t) = \sum_{j=0}^{m-1} P_j^{(1)} v_j^{m-1}(t). \quad (3.12)$$

Burada, $P_j^{(1)} = \delta_j^{m-1}(P_{j+1} - P_j)$ dir. Böylece, $\{P_j^{(1)}\}$ kontrol noktalarıyla birlikte $(m - 1)$. dereceden yeni bir Bézier tipli eğri elde edilir (Ceylan 2021).

3.2.2. Bézier Tipli Eğrilerin Özellikleri

Bu alt bölümde, (3.11) denklemi ile verilen Bézier tipli eğrilerin temel özellikleri verilecektir. Bu özellikler, Ceylan (2021) çalışmasında verilmiştir.

1. (Son nokta interpolasyon özelliği) (3.11) denkleminde verilen Bézier tipli eğrinin uç noktalarda aldığı değerler

$$\mathcal{BL}(0) = P_0$$

ve

$$\mathcal{BL}(a) = P_m$$

şeklindedir.

2. (Son nokta teğet özelliği) (3.11) denkleminde verilen Bézier tipli eğrinin uç noktalardaki teğetleri aşağıdaki gibidir:

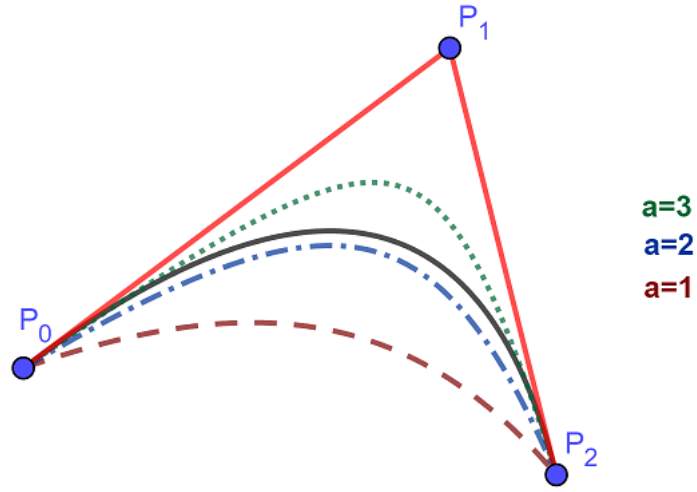
$$\mathcal{BL}'(0) = \delta_0^{m-1}(P_1 - P_0)$$

ve

$$\mathcal{BL}'(a) = \delta_{m-1}^{m-1}(P_m - P_{m-1}).$$

3. (Konveks kabuk özelliği) (3.11) denkleminde verilen Bézier tipli eğri kontrol poligonu tarafından kapsanmaktadır.

Örnek 3.7. $P_0(0, 1)$, $P_1(4, 4)$ ve $P_2(5, 0)$ kontrol noktaları ile verilen ikinci dereceden Bézier eğri kesintisiz siyah renkli eğri ile gösterilsin. $P_0(0, 1)$, $P_1(4, 4)$ ve $P_2(5, 0)$ kontrol noktaları ile verilen ikinci dereceden Bézier tipli eğrisi ise $a = 1$, $a = 2$ ve $a = 3$ için kesikli çizgiler ile gösterilsin. Kırmızı çizgiler de kontrol poligonunu gösterecek. Bu durumda, bahsi geçen kontrol noktaları, tüm eğriler ve kontrol poligonu aynı düzlemde GeoGebra (2025) programı ile çizildiğinde Şekil 3.2 elde edilmiştir.



Şekil 3.2. 2. dereceden Bézier eğrisi ve 2. dereceden Bézier tipli eğriler

Not 3.8. Yukarıdaki şekilde a değeri arttırılırsa, eğri kontrol poligonuna yaklaşır. Dolayısıyla eğri ile poligon arasındaki mesafe gittikçe azalır. Klasik Bézier eğrilerinde ise kontrol poligonuna yaklaşmak için daha fazla kontrol noktasına ihtiyaç vardır. Sonuç olarak Bézier tipli eğriler bükülmeye daha elverişlidirler (Ceylan 2021).

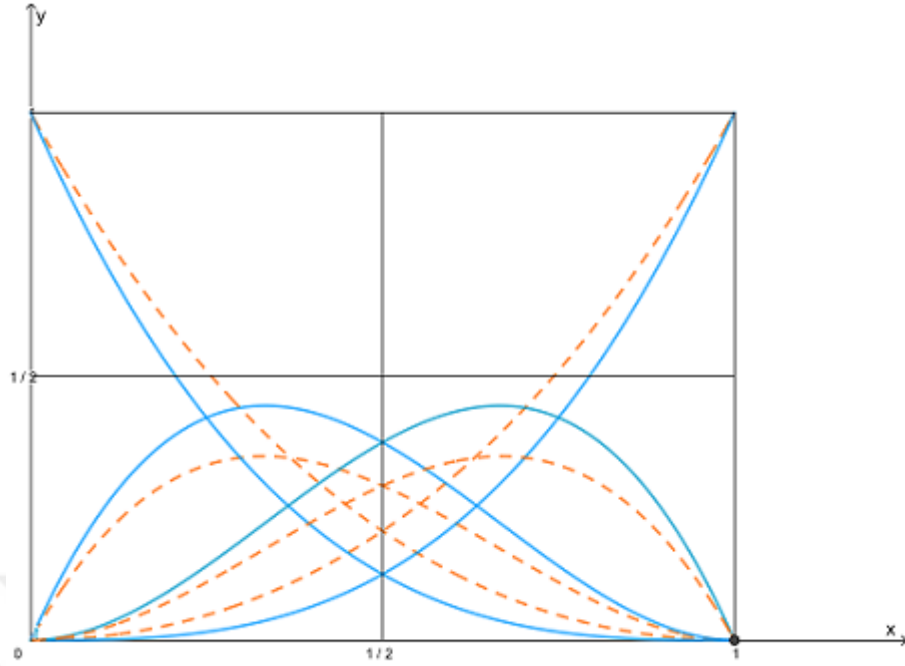
4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, daha önceki bölümlerde verdiğimiz tanımlar ve formüller kullanılarak üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar ve bazı özel değerleri bulunacaktır. Bernstein tipli fonksiyonların ve Bézier tipli eğrilerin ikinci mertebeden türevleri hesaplanacaktır. Ayrıca Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı kurulacaktır. Bu çatının bazı özel noktalardaki değerleri ve ikinci ve üçüncü mertebeden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatıları bulunacaktır. Bunlara ilaveten, ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğriler şekillerle örneklendirilecektir.

Tanım 3.5 yardımıyla, üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar $\Gamma_3 = \text{span}\{1, t, e^t, e^{-t}\}$ uzayı için

$$\begin{aligned}
 v_0^3(t) &= \frac{e^{-t+a} + t - a - 1}{e^a - a - 1}, \\
 v_1^3(t) &= \frac{-e^{-t+a} - t + e^a}{e^a - a - 1} - \frac{e^{-t+a} + te^a - e^t - e^a + t + 1}{ae^a - 2e^a + a + 2}, \\
 v_2^3(t) &= \frac{e^{-t+a} + te^a - e^t - e^a + t + 1}{ae^a - 2e^a + a + 2} - \frac{e^t - t - 1}{e^a - a - 1} \\
 &\text{ve} \\
 v_3^3(t) &= \frac{e^t - t - 1}{e^a - a - 1}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde elde edilir. Şekil 4.3 ile üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar ve Bernstein polinomları gösterilmektedir. Burada turuncu eğriler ile 3. dereceden Bernstein tipli fonksiyonları ($a = 1$) ve mavi eğriler ile de 3. dereceden Bernstein polinomları gösterilmektedir ve GeoGebra (2025) programı ile çizilmiştir.



Şekil 4.3. 3. dereceden Bernstein polinomları ve 3. dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar

1.Durum: (4.13) eşitlikleri ile verilen üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonların $t = 0$ durumunda aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

$$v_0^3(0) = 1,$$

$$v_1^3(0) = 0,$$

$$v_2^3(0) = 0,$$

$$v_3^3(0) = 0.$$

Gerçekten üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar (4.13) bağıntısında $t = 0$ yazıldığında

$$\begin{aligned} v_0^3(0) &= \frac{e^a - a - 1}{e^a - a - 1} = 1, \\ v_1^3(0) &= \frac{-e^a + e^a}{e^a - a - 1} - \frac{e^a - 1 - e^a + 1}{ae^a - 2e^a + a + 2} = 0, \\ v_2^3(0) &= \frac{e^a - 1 - e^a + 1}{ae^a - 2e^a + a + 2} - \frac{1 - 1}{e^a - a - 1} = 0, \\ v_3^3(0) &= \frac{1 - 1}{e^a - a - 1} = 0 \end{aligned}$$

değerleri elde edilir.

2.Durum: (4.13) eşitlikleri ile verilen üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonlarının $t = a$ durumunda aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

$$v_0^3(a) = 0,$$

$$v_1^3(a) = 0,$$

$$v_2^3(a) = 0,$$

$$v_3^3(a) = 1.$$

Gerçekten üçüncü dereceden Bernstein tipli fonksiyonlar (4.13) bağıntısında $t = a$ yazıldığında

$$\begin{aligned} v_0^3(a) &= \frac{-1 - a + 1 + a}{e^a - a - 1} = 0, \\ v_1^3(a) &= \frac{e^a - a - 1}{e^a - a - 1} - \frac{1 + ae^a - 2e^a + a + 1}{ae^a - 2e^a + a + 2} = 0, \\ v_2^3(a) &= \frac{1 + ae^a - 2e^a + a + 1}{ae^a - 2e^a + a + 2} - \frac{e^a - a - 1}{e^a - a - 1} = 0, \\ v_3^3(a) &= \frac{e^a - a - 1}{e^a - a - 1} = 1 \end{aligned}$$

değerleri elde edilir.

4.1. Bernstein Tipli Fonksiyonların İkinci Türevi

Bu bölümde $v_j^m(t)$ Bernstein tipli fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi verilecektir. Ceylan (2021) çalışmasında verilen Bernstein tipli fonksiyonun birinci türevi kullanılarak ikinci türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned} (v_j^m)''(t) &= ((v_j^m)'(t))' \\ &= (\delta_{j-1}^{m-1} v_{j-1}^{m-1}(t) - \delta_j^{m-1} v_j^{m-1}(t))' \\ &= (\delta_{j-1}^{m-1} \delta_{j-2}^{m-2}) v_{j-2}^{m-2}(t) - (\delta_{j-1}^{m-1} \delta_{j-1}^{m-2} + \delta_j^{m-1} \delta_{j-1}^{m-2}) v_{j-1}^{m-2}(t) \\ &\quad + (\delta_j^{m-1} \delta_j^{m-2}) v_j^{m-2}(t) \end{aligned} \tag{4.14}$$

dir.

4.2. Bézier Tipli Eğrilerin İkinci Türevi

$\mathcal{BL}(t)$ Bézier tipli eğrilerin birinci mertebeden türevi Ceylan (2021) çalışmasında bulunmuştur. Buradan yola çıkarak Bézier tipli eğrinin ikinci mertebeden türevi aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{BL})''(t) &= (\mathcal{BL}'(t))' \\
 &= \left(\sum_{j=0}^{m-1} \delta_j^{m-1} (P_{j+1} - P_j) v_j^{m-1}(t) \right)' \\
 &= \sum_{j=0}^{m-2} [(\delta_{j+1}^{m-1} \delta_j^{m-2}) P_{j+2} - (\delta_j^{m-1} \delta_j^{m-2} + \delta_{j+1}^{m-1} \delta_j^{m-2}) P_{j+1} \\
 &\quad + (\delta_j^{m-1} \delta_j^{m-2}) P_j] v_j^{m-2}(t).
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

4.3. $\mathbb{R}^2$ de Bézier Tipli Eğrilerin Serret-Frenet Elemanları

Bu bölümde $\mathbb{R}^2$ uzayında verilen bir Bézier tipli eğrinin Serret-Frenet çatısı kurulacaktır ve eğrinin eğriliği hesaplanacaktır. Ayrıca bu çatının özel durumlarda aldığı değerler incelenecektir.

Teorem 4.1. $\forall t \in \mathbb{R}$ için (3.11) bağıntısı ile tanımlanan m . dereceden düzlemsel ve birim hızlı olmayan Bézier tipli eğrinin Serret-Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ ve eğriliği κ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) P_i^{(1)}}{\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(1)}, P_j^{(1)} \rangle\right)^{1/2}}, \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) J P_i^{(1)}}{\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(1)}, P_j^{(1)} \rangle\right)^{1/2}}, \\ \kappa(t) &= \frac{\sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=0}^{m-1} v_i^{m-2}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(2)}, J P_j^{(1)} \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(1)}, P_j^{(1)} \rangle\right)^{3/2}}\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat Serret-Frenet çatısı $\{T, N\}$, (3.11), (2.4) ve (2.5) bağıntıları kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= \frac{\mathcal{BL}'(t)}{\|\mathcal{BL}'(t)\|} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} v_i^{m-1}(t) P_i^{(1)}}{\left\|\sum_{i=0}^{n-1} v_i^{m-1}(t) P_i^{(1)}\right\|} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) P_i^{(1)}}{\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(1)}, P_j^{(1)} \rangle\right)^{1/2}}, \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{J\mathcal{BL}'(t)}{\|\mathcal{BL}'(t)\|} = \frac{\sum_{i=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) J P_i^{(1)}}{\left\|\sum_{i=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) P_i^{(1)}\right\|} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) J P_i^{(1)}}{\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(1)}, P_j^{(1)} \rangle\right)^{1/2}}.\end{aligned}$$

Eğrilik κ , (3.12), (2.6) ve (4.15) bağıntıları kullanarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\begin{aligned}\kappa(t) &= \frac{\langle \mathcal{BL}''(t), J\mathcal{BL}'(t) \rangle}{(\langle \mathcal{BL}'(t), \mathcal{BL}'(t) \rangle)^{3/2}} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{m-2} \sum_{j=0}^{m-1} v_i^{m-2}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(2)}, J P_j^{(1)} \rangle}{\left(\sum_{i,j=0}^{m-1} v_i^{m-1}(t) v_j^{m-1}(t) \langle P_i^{(1)}, P_j^{(1)} \rangle\right)^{3/2}}.\end{aligned}$$

□

Teorem 4.1 ile verilen sonucun bazı özel durumları aşağıda verilmiştir:

1. Durum: m . dereceden düzlemsel ve birim hızlı olmayan Bézier tipli eğrinin Serret-

Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ ve eğriliği κ nın $t = 0$ da aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t)|_{t=0} &= \frac{P_0^{(1)}}{\|P_0^{(1)}\|}, \\ \mathbf{N}(t)|_{t=0} &= \frac{JP_0^{(1)}}{\|P_0^{(1)}\|}, \\ \kappa(t)|_{t=0} &= \frac{\langle P_1^{(1)}, JP_0^{(1)} P_0 \rangle}{\|P_0^{(1)}\|^3}.\end{aligned}$$

2. Durum: m . dereceden düzlemsel ve birim hızlı olmayan Bézier tipli eğrinin Serret-Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ ve eğriliği κ nın $t = a$ da aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t)|_{t=a} &= \frac{P_{m-1}^{(1)}}{\|P_{m-1}^{(1)}\|}, \\ \mathbf{N}(t)|_{t=a} &= \frac{JP_{m-1}^{(1)}}{\|P_{m-1}^{(1)}\|}, \\ \kappa(t)|_{t=a} &= \frac{\langle P_{m-1}^{(1)}, JP_{m-1}^{(1)} \rangle}{\|P_{m-1}^{(1)}\|^3}.\end{aligned}$$

3. Durum: 2. dereceden düzlemsel ve birim hızlı olmayan Bézier tipli eğrinin Serret-Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ ve eğriliği κ nın aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

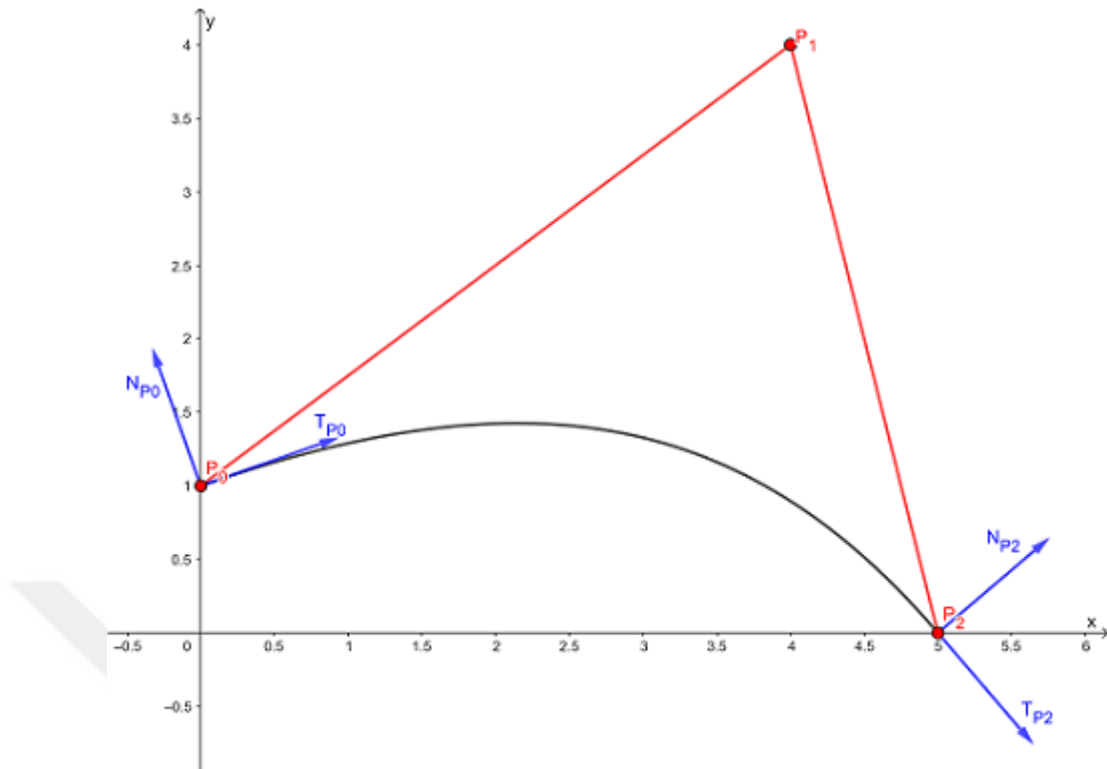
$$\begin{aligned}\mathbf{T}(t) &= \frac{e^{-t+a}P_0^{(1)} + e^tP_1^{(1)}}{\|e^{-t+a}P_0^{(1)} + e^tP_1^{(1)}\|}, \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{e^{-t+a}JP_0^{(1)} + e^tJP_1^{(1)}}{\|e^{-t+a}P_0^{(1)} + e^tP_1^{(1)}\|}, \\ \kappa(t) &= \frac{(e^{-t+a} + e^t)\delta_0^0 \langle P_1^{(1)}, jP_0^{(1)} \rangle}{\|e^{-t+a}P_0^{(1)} + e^tP_1^{(1)}\|^3}.\end{aligned}$$

4. Durum: 3. dereceden düzlemsel ve birim hızlı olmayan Bézier tipli eğrinin Serret-Frenet çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}\}$ ve eğriliği κ nın aldığı değerler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}(t) &= \frac{(e^{-t+a} - 1)P_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)P_1^{(1)} + (e^t - 1)P_2^{(1)}}{\|(e^{-t+a} - 1)P_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)P_1^{(1)} + (e^t - 1)P_2^{(1)}\|}, \\
\mathbf{N}(t) &= \frac{(e^{-t+a} - 1)JP_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)JP_1^{(1)} + (e^t - 1)JP_2^{(1)}}{\|(e^{-t+a} - 1)P_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)P_1^{(1)} + (e^t - 1)P_2^{(1)}\|}, \\
\kappa(t) &= \frac{\left(\frac{e^{-t+a}(e^a - e^t)\delta_0^0 - e^t(e^{-t+a} - 1)\delta_1^1}{e^a - 1}\right) \langle P_1^{(1)}, JP_0^{(1)} \rangle}{\|(e^{-t+a} - 1)P_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)P_1^{(1)} + (e^t - 1)P_2^{(1)}\|^3} \\
&+ \frac{\left(\frac{(e^{-t+a})(e^t - 1)\delta_0^1 + e^t(e^{-t+a} - 1)\delta_1^1}{e^a - 1}\right) \langle P_2^{(1)}, JP_0^{(1)} \rangle}{\|(e^{-t+a} - 1)P_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)P_1^{(1)} + (e^t - 1)P_2^{(1)}\|^3} \\
&+ \frac{\left(\frac{e^t(e^a - e^t)\delta_1^1 - e^{-t+a}(e^t - 1)\delta_0^0}{e^a - 1}\right) \langle P_2^{(1)}, JP_1^{(1)} \rangle}{\|(e^{-t+a} - 1)P_0^{(1)} + (e^{-t+a} + e^a - e^t + 1)P_1^{(1)} + (e^t - 1)P_2^{(1)}\|^3}.
\end{aligned}$$

Örnek 4.2. Örnek 3.7 de verilen ikinci dereceden, $P_0(0, 1)$, $P_1(4, 4)$ ve $P_2(5, 0)$ kontrol noktalarına sahip Bézier tipli eğrinin $a = 1$ için $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ ve κ Serret-Frenet elemanları GeoGebra (2025) programı ile çizildiğinde siyah eğri Bézier tipli eğriyi, kırmızı çizgiler kontrol poligonunu, mavi vektörler uç noktalardaki teğet ve normal vektörleri gösterir.

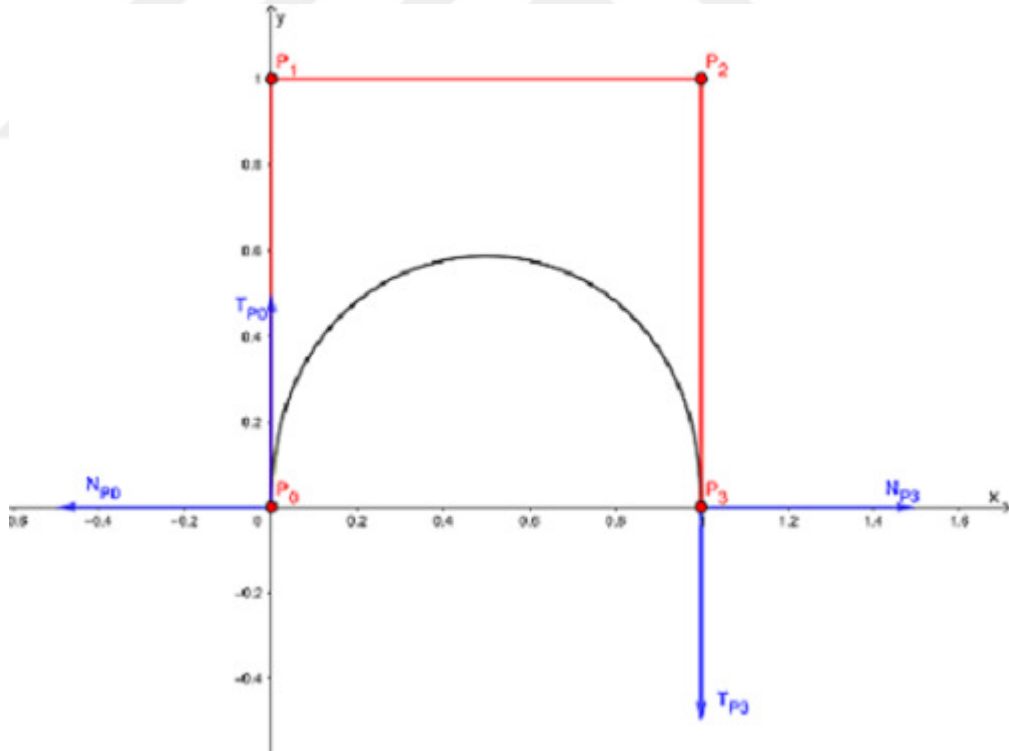
$$\begin{aligned}
\mathcal{BL}(t) &= \left(\frac{-4e^{-t+1} + 4e + e^t - 1}{e - 1}, \frac{-3e^{-t+1} + 4e - 4e^t + 3}{e - 1} \right), \\
\mathbf{T}(t) &= \frac{(4e^{-t+1} + e^t, 3e^{-t+1} - 4e^t)}{(25e^{-2t+2} - 16e + 17e^{2t})^{1/2}}, \\
\mathbf{N}(t) &= \frac{(-3e^{-t+1} + 4e^t, 4e^{-t+1} + e^t)}{(25e^{-2t+2} - 16e + 17e^{2t})^{1/2}}, \\
\kappa(t) &= \frac{-38e(e - 1)}{(25e^{-2t+2} - 16e + 17e^{2t})^{3/2}}.
\end{aligned}$$



Şekil 4.4. 2. dereceden Bézier tipli eğri ve Serret-Frenet elemanları

Örnek 4.3. Üçüncü dereceden, $P_0(0, 0)$, $P_1(0, 1)$, $P_2(1, 1)$ ve $P_3(1, 0)$ kontrol noktalarına sahip Bézier tipli eğrinin denkleminin $a = 1$ için $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ ve κ Serret-Frenet elemanları GeoGebra (2025) programı ile çizildiğinde siyah eğri Bézier tipli eğriyi, kırmızı çizgiler kontrol poligonunu, mavi vektörler uç noktalardaki teğet ve normal vektörleri gösterir.

$$\begin{aligned}\mathcal{BL}(t) &= \left(\frac{e^{-t+1} + te - e^t - e + t + 1}{-e + 3}, \frac{-e^{-t+1} + e - e^t + 1}{e - 2} \right), \\ \mathbf{T}(t) &= \frac{\left(\frac{-e^{-t+1} + e - e^t + 1}{-e + 3}, \frac{e^{-t+1} - e^t}{e - 2} \right)}{\left[\left(\frac{-e^{-t+1} + e - e^t + 1}{-e + 3} \right)^2 + \left(\frac{e^{-t+1} - e^t}{e - 2} \right)^2 \right]^{1/2}}, \\ \mathbf{N}(t) &= \frac{\left(\frac{-e^{-t+1} + e^t}{e - 2}, \frac{-e^{-t+1} + e - e^t + 1}{-e + 3} \right)}{\left[\left(\frac{-e^{-t+1} + e - e^t + 1}{-e + 3} \right)^2 + \left(\frac{e^{-t+1} - e^t}{e - 2} \right)^2 \right]^{1/2}}, \\ \kappa(t) &= \frac{\frac{-2e^{-t+1} - e^{-t+2} - e^t + 4e}{-e^2 + 5e - 6}}{\left[\left(\frac{-e^{-t+1} + e - e^t + 1}{-e + 3} \right)^2 + \left(\frac{e^{-t+1} - e^t}{e - 2} \right)^2 \right]^{3/2}}.\end{aligned}$$



Şekil 4.5. 3. dereceden Bézier tipli eğri ve Serret-Frenet elemanları

5. SONUÇLAR

Tezde verilenleri kısaca özetlersek: İlk olarak Bernstein tipli fonksiyonların ve Bézier tipli eğrilerin ikinci mertebeden türevleri hesaplanmıştır. $\mathbb{R}^2$ uzayındaki m . dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği hesaplanmıştır. $\mathbb{R}^2$ uzayındaki Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliğinin, eğrinin başlangıç ve bitiş noktasında aldığı değerler incelenmiştir. Ayrıca, ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği hesaplanmıştır. Son olarak, ikinci ve üçüncü dereceden Bézier tipli eğriler ve Serret-Frenet elemanları hesaplanıp örneklendirilmiştir. Bu örneklerin şekilleri GeoGebra paket programı yardımıyla çizdirilmiştir (GeoGebra).

Bu yapılan çalışmalar yardımıyla $\mathbb{R}^3$ uzayındaki m . dereceden Bézier tipli eğrilerin Serret-Frenet çatısı ve eğriliği hesaplanabilir. Ayrıca, bu sonuçlar yardımıyla bulduğumuz yeni tipli Bézier eğrilerinin başta matematik olmak üzere mühendislik, bilgisayar destekli geometrik tasarım, fizik, tıp, robotik, geometri vb. diğer bilim dallarındaki uygulamaları incelenebilir.

Bu nedenlerle, bu tezden elde edilen verilerin diğer araştırmacılara motivasyon sağlayacağı öngörülebilir.

6. KAYNAKLAR

- Bustamante, J. 2017. Bernstein Operators and Their Properties. Birkhauser Springer International Publishing, Berlin/Heidelberg, Germany.
- Ceylan, A.Y. 2021. Construction of a new class of Bézier-like curves. *Mathematical Methods in The Applied Sciences*, 7659-7665s.
- Chen, Q.Y. and Wang, G. Z. 2003. A class of Bézier-like curves. *Comput Aided Geometric Desing*, 20,29-39s.
- Farin, G. and Sapidis, N.S. 1989. Curvature and the fairness of Curves and Surfaces. *IEEE Comput. Gr. Appl.*, 9, 52–57s.
- Farin, G. 1996. *Curves and Surfaces For Computer Aided Geometric Design A Practical Guide*. Academic Press, 429s, CA, USA.
- Farin, G., Hoschek, J., Kim, M.S. 2002. *Handbook of Computer Aided Geometric Design*. Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands.
- Farouki, R.T. 2012. The Bernstein Polynomials Basis: A centennial retrospective. *Comput. Aided Geom. Design*, 29, 379–419s.
- Frey, W.H., Field, D.A. 2000. Designing Bézier Conic Segments with Monotone Curvature. *Comput. Aided Geom. Des.*, 17, 457–483s.
- GeoGebra: <https://www.geogebra.org/> [Son erişim tarihi: 03.01.2025].
- Ghomanjani, F., Farahi, M.H., Kılıçman, A., Kamyad, A.V., Pariz, N. 2014. Bézier Curves Based Numerical Solutions of Delay Systems with Inverse Time. *Math. Prob. Eng.*
- Goldman, R. 2005. Curvature Formulas for Implicit Curves and Surfaces. *Comput. Aided Geom. Des.*, 22, 632–658s.
- Gray, A., Abbena, E., Salamon, S. 2016. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, USA.

- Kaplan, C.S. and Mann, S. 2006. Introduction to Computer Graphics. Lecture notes CS 488-688 of University of Waterloo, 245s.
- Kucukoglu, I., Simsek, B., Simsek, Y. 2019. Multidimensional Bernstein polynomials and Bézier curves: Analysis of machine learning algorithm for facial expression recognition based on curvature. *Appl. Math. Comput.* 344–345, 150–162s.
- Mainer, E., Pena, J. M., Sanchez-Reyes, J. 2001. Shape preserving alternatives to the rational Bézier model. *Comput Aided Geometric Design*, 18, 37-60s.
- Marsh, D. 2004. *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*. Springer, 2, London, UK, Berlin, Heidelberg, Germany.
- Qin, X., Hu, G., Yang, Y., Wei, G. 2015. The fairing and G1 continuity of quartic C-Bézier curves. *Math Meth Appl Sci.*, 39(6), 1336-1348s.
- Salomon, D. 2006. *Curves and Surfaces for Computer Graphics*. Springer Science+Business Media, 460s, USA.
- Sanchez-Reyes, J. 1998. Harmonic rational Bézier p-Bézier curves and trigonometric polynomials. *Comput Aided Geometric Design*, 15, 909-923s.
- Simsek, Y. 2011. On generating functions for the Bernstein polynomials. The International Conference on Applied Analysis and algebra (ICAAA2011), Yıldız Technical University, Putra University of Malaysia, and Fatih University in Istanbul, Turkey.
- Simsek, Y. 2012. On Generating functions for the Bernstein basis functions and their applications. Eighth International Conference on Mathematical Methods for Curves and Surfaces, Oslo, Norway.
- Simsek, Y. 2013. Functional equations from generating functions: a novel approach to deriving identities for the Bernstein basis functions. *Fixed Point Theory and Applications*, 80, 1-13s.
- Simsek, Y. 2014a. Remarks on the Bernstein basis functions and their applications. *Diophantine Analysis and Related Fields*, Tsukuba, Japan.

- Simsek, Y. 2014b. A new approach to identities for the Bernstein basis functions and their generating functions. Number Theory and Cryptography Conference, Daejeon, South Korea.
- Simsek, Y. 2014c. Deriving Novel Formulas and Identities for the Bernstein Basis Functions and Their Generating Functions. In Lecture Notes in Computer Science 8177, Springer, Heidelberg.
- Simsek, Y. 2018. Generating functions for unification of the multidimensional Bernstein polynomials and their applications. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41, 7170-7181s.
- Simsek, Y. 2019. Applications and observations for Bézier Curves involving Bernstein Polynomials. International Symposium On Advanced Engineering Technologies (ISADET 2019), 111-115s, Kahramanmaraş, Turkey.
- Wang, Y. 2006. The Theory and Application of H-Bézier Curves. M.S. Thesis, Northwest University.
- Zhang, J. W. 1996. C-curves: An extension of cubic curves. Comput Aided Geometric Design, 13, 199-217s.
- Zhu, H. and Tan, J. 2012. Bézier-like curves based on algebraic and exponential polynomials and their connection conditions. J Inf Comput Sci., 9, 1499-1510s.
- Lorentz, G.G. 1986. Bernstein Polynomials. Chelsea Publishing Company, New York.
- Phillips, G.M. 2003. Bernstein Polynomials. In: Interpolation and Approximation by Polynomials. CMS Books in Mathematics. Springer, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Dudu Şeyma KUN

ÖĞRENİM BİLGİLERİ

Yüksek Lisans 2022-2025	Akdeniz Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Antalya
Lisans 2017-2022	Ordu Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Ordu

ESERLER

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan ve bildiri kitaplarında basılan bildiriler

1- Kun, D.Ş. and Ceylan, A. Y. (2024). On Generating Functions of Jacobi and Bernstein Polynomials. Proceedings Book of "The 14th Symposium on Generating Functions of Special Numbers and Polynomials and their Applications (GFSNP 2024)", Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1915-3.

2- Kun, D.Ş. and Ceylan, A. Y. (2024). On Bézier-type Curves. Proceedings Book of "The 7th Mediterranean International Conference of Pure & Applied Mathematics and Related Areas (MICOPAM 2024)", Antalya, Türkiye, ISBN: 978-625-00-1131-7.