

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Bİ-PERİYODİK (p, q) -FİBONACCİ VE Bİ-PERİYODİK
 (p, q) -LUCAS DİZİLERİ

Naime Şeyda TÜRKOĞLU

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

ERZİNCAN
2023
Her Hakkı Saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU danışmanlığında, Naime Şeyda TÜRKOĞLU tarafından hazırlanan bu çalışma 03/03/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği ile kabul edilmiştir.

Başkan: Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR İmza:

Yukarıdaki sonuç Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Bülent ÇAĞLAR

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Bi-Periyodik (p, q) -Fibonacci ve Bi-Periyodik (p, q) -Lucas Dizileri” isimli “Yüksek Lisans” tezim tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 03/03/2023

(İmza)

Naime Şeyda TÜRKOĞLU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bİ-PERİYODİK (p, q) -FİBONACCİ VE Bİ-PERİYODİK (p, q) -LUCAS DİZİLERİ

Naime Şeyda TÜRKOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU

Bu çalışmada (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları kullanılarak Fibonacci tipi, Lucas tipi, bi-periyodik Fibonacci tipi ve bi-periyodik Lucas tipi dizileri genelleştiren bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin n -inci terimlerini hesaplamamızı sağlayan Binet formülleri, üretici fonksiyonları verilmiş ve ardışık terimlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin bazı temel eşitliklerinin Fibonacci ve Lucas dizilerinin iyi bilinen özelliklerine uygun olduğunu gösterilmiştir. Ayrıca (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri için döşeme yaklaşımı sunulmuştur. Kareler için p farklı renk ve dominolar için q farklı renk olmak üzere renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı dairesel bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanmıştır.

2023, 96 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Bi-periyodik Fibonacci sayıları, Bi-periyodik Lucas sayıları, Fibonacci sayısı, genelleştirilmiş Fibonacci sayıları, genelleştirilmiş Lucas sayıları, Lucas sayısı

ABSTRACT

MSc Thesis

BI-PERIODIC (p, q) -FIBONACCI AND BI-PERIODIC (p, q) -LUCAS SEQUENCES

Naime Şeyda TÜRKOĞLU

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Yasemin TAŞYURDU

In this study, bi-periodic (p, q) -Fibonacci and bi-periodic (p, q) -Lucas sequences which generalize Fibonacci type, Lucas type, bi-periodic Fibonacci type and bi-periodic Lucas type sequences are defined by using recurrence relations of (p, q) -Fibonacci and (p, q) -Lucas sequences. Binet formulas that allow us to calculate the n th terms of these sequences, generating functions are given and the convergence properties of their consecutive terms are examined. It is shown that some fundamental identities of bi-periodic (p, q) -Fibonacci and bi-periodic (p, q) -Lucas sequences conform to the well-known properties of Fibonacci and Lucas sequences. Also, tiling approach to the (p, q) -Fibonacci and (p, q) -Lucas sequences is presented. The n th (p, q) -Fibonacci number is interpreted as the number of ways to tile a $1 \times n$ board, and n th (p, q) -Lucas number is interpreted as the number of ways to tile a circular $1 \times n$ board by using colored 1×1 squares and colored 1×2 dominoes, where there are p different colors for squares and q different colors for dominoes.

2023, 96 Pages

Keywords: Bi-periodic Fibonacci numbers, Bi-periodic Lucas numbers, Fibonacci number, generalized Fibonacci numbers, generalized Lucas numbers, Lucas number

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde yapılmıştır. Bu çalışmada bana her türlü kolaylığı sağlayan ve desteklerini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Yasemin TAŞYURDU'ya en içten dileklerle teşekkür eder saygılarımı sunarım. Matematik Bölümü'nde gerekli ilgiyi ve yardımı esirgemeyen Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Sezai KIZILTUĞ'a, değerli öğretim üyeleri Sayın Doç. Dr. Abdullah ÇAĞMAN'a, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR'a ve Matematik Bölümü'nün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca kendilerinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Naime Şeyda TÜRKOĞLU

Mart, 2023

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
İÇİNDEKİLER	iv
TABLOLAR LİSTESİ.....	vi
SİMGELER.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. KURAMSAL TEMELLER.....	7
2.1. Genel Kavramlar	7
2.2. Fibonacci ve Lucas Dizileri.....	8
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	15
3.1. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas Dizileri	15
3.1.1. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin özellikleri.....	19
3.2. Genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci Benzeri Diziler	29
3.2.1. Bazı sayı dizilerinin döşeme yorumları.....	32
3.3. Genelleştirilmiş Bi-periyodik Fibonacci ve Bi-periyodik Lucas Dizileri	40
3.3.1. Fibonacci tipli bi-periyodik diziler.....	40
3.3.2. Lucas tipli bi-periyodik diziler.....	46
3.3.3. Fibonacci ve Lucas tipli bi-periyodik dizilerin özellikleri.....	52
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	60
4.1. Bi-Periyodik (p, q) -Fibonacci Dizileri ve Özellikleri.....	60
4.2. Bi-Periyodik (p, q) -Lucas Dizileri ve Özellikleri.....	73
4.3. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas Dizilerinin Döşeme Yorumu.....	86
4.3.1. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin özellikleri.....	88
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	92
5.1. Sonuçlar.....	92
5.2. Öneriler.....	92
KAYNAKLAR	93

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

Şekil 3.1. İlk birkaç Fibonacci sayının kare döşemesi.....	32
Şekil 3.2. n hücreli n uzunluğundaki $1 \times n$ tahtası	33
Şekil 3.3. Fibonacci dizinin kare döşemesi.....	33
Şekil 3.4. f_1, f_2, f_3, f_4 ve f_5 sayılarının döşemeleri.....	36
Şekil 3.5. f_6, f_7 ve f_8 sayılarının döşemeleri	37
Şekil 3.6. 1×2 dominosuna göre f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ve f_6 sayılarının döşemeleri.....	39



TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 4.1. $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizisinin özel durumları.....	61
Tablo 4.2. $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizisinin özel durumları	74



SİMGELER

$\{c_n\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik Jacobsthal-Lucas Dizisi
$\{c_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik k -Jacobsthal-Lucas Dizileri
$\{F_n\}_{n \geq 0}$	Fibonacci Dizisi
$\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$	Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi
$\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik (p, q) -Fibonacci Dizileri
$\{F_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Fibonacci Dizileri
$\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$	(p, q) -Fibonacci Dizileri
$\{j_n\}_{n \geq 0}$	Jacobsthal-Lucas Dizisi
$\{j_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Jacobsthal-Lucas Dizileri
$\{J_n\}_{n \geq 0}$	Jacobsthal Dizisi
$\{J_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Jacobsthal Dizileri
$\{\mathcal{J}_n\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik Jacobsthal Dizisi
$\{\mathcal{J}_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik k -Jacobsthal Dizileri
$\{l_n\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik Lucas Dizisi
$\{l_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik k -Lucas Dizileri
$\{L_n\}_{n \geq 0}$	Lucas Dizisi
$\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik (p, q) -Lucas Dizileri
$\{L_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Lucas Dizileri
$\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$	(p, q) -Lucas Dizileri
$\{P_n\}_{n \geq 0}$	Pell Dizisi
$\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik Pell Dizisi
$\{P_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Pell Dizileri
$\{\mathcal{P}_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik k -Pell Dizileri
$\{q_n\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik Fibonacci Dizisi
$\{q_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik k -Fibonacci Dizileri
$\{Q_n\}_{n \geq 0}$	Pell-Lucas Dizisi
$\{Q_n\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik Pell-Lucas Dizileri
$\{Q_{k,n}\}_{n \geq 0}$	k -Pell-Lucas Dizileri
$\{Q_{k,n}\}_{n \geq 0}$	Bi-Periyodik k -Pell-Lucas Dizileri
$\{s_n\}_{n \geq 0}$	r -inci Mertebeden Homojen Lineer Rekürans Dizi
$\{S_n\}_{n \geq 0}$	Fibonacci Benzer Dizi
$\{S_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$	Genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci Benzeri Dizile
$\{V_n\}_{n \geq 0}$	Genelleştirilmiş Fibonacci Dizisi

1. GİRİŞ

Literatürde uzun yıllardır farklı disiplinlerden bilim insanlarının ve düşünürlerin yaptığı çalışmalar sonucunda mükemmel olan evrenin rastgele yaratılmadığı ortaya konulmuş ve sayılar temeline dayandırıldığı görülmüştür. Bunun en güzel örneği ise altın orandır. İkiye bölünmüş bir doğru parçasında, küçük parçanın uzunluğunun büyük parçanın uzunluğuna oranı ile büyük parçanın uzunluğunun bütünün uzunluğuna oranı bir orantı oluşturuyorsa yani bu iki oran birbirine eşitse, bu orana “Altın Oran” denilmiştir. Değeri 1,61803... olan bu sayı altın ortalama, altın bölüm, altın kesit, ilahi (kutsal) orantı, Fibonacci sayısı ve Phidias ortalaması şeklinde de adlandırılır. Altın oran bilim insanları, müzisyenler, mimarlar gibi birçok kişinin estetik algılarında en güzeli yakalamak adına kullandıkları başlıca ölçü olmuştur.

Fibonacci ismi ile tanınan Leonardo Pisa 13. yüzyılda yaşamış İtalyan matematikçidir. Fibonacci tarafından yazılan Liber Abaci adlı eserde Edward Lucas gördüğü bir problemdeki 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... dizisinin her bir terimine Fibonacci sayısı ve diziye Fibonacci dizisi adını vermiştir. Fibonacci dizisinin ardışık terimlerinin de altın orana yakınsaması antik çağdan beri matematikçilerin, fizikçilerin, filozofların, sanatçıların ve hatta müzisyenlerin ilgilendiği bir konu haline getirmiştir.

Doğadaki birçok olgularda Fibonacci sayıları görülmüştür. Çam kozalaklarının dip kısmındaki spirallerin sağa dönük olanlarının sayısı genelde 8, sola dönük olanların sayısı ise genelde 13 tür. Venüs, Güneş’in çevresinde dolanması sırasında yaklaşık 8 yıllık periyotlarla Güneş’in önünden 5 kez geçer, yani 8 yılda yaklaşık 5 kez Güneş-Venüs-Dünya dizilimi olur. Özellikle papatyalar olmak üzere birçok çiçek cinslerinin taç yapraklarının sayısı da genellikle Fibonacci sayıları olmaktadır. Nobel ödüllü matematikçi ve fizikçi Robert Penrose tarafından bulunan karolarla düzlem döşeme teorisinde de sık sık karşımıza altın oran çıkmaktadır. Bu ise bir düzlemin kaplanması gerektiği yerlerde Fibonacci sayıları çıkarır.

İkinci ve daha yüksek mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan Fibonacci ve Fibonacci benzer dizilerinin cebir, fizik, kimya, biyoloji, bilgisayar biliminin yanı sıra sanatın birçok farklı alanında uygulamaları vardır. Bilimin hemen hemen her alanında hem teorik hem de uygulamalı olarak bu dizilerin terimleri çok geniş alanda çalışılmaktadır.

İkinci mertebeden rekürans bağıntılarla tanımlanan Fibonacci ve Lucas dizileri literatürde en çok ilgi gören dizilerdir. Bu dizilerle ilgili birçok çalışma sunulmuştur (Horadam, 1961; Vorobyov 1976; Vajda, 1989; Everest vd., 2003).

Fibonacci ve Lucas dizileri gibi rekürans bağıntılarla tanımlanan Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Pell, Pell-Lucas gibi diziler Fibonacci tipli ve Lucas tipli diziler olarak incelenmiştir ve birçok özelliği sunulmuştur. Bu sayılar ve farklı genelleştirmeleri üzerine yıllardır birçok çalışma yapılmaktadır (Miles, 1960; Horadam, 1965; 1971; Hoggatt, 1969; Shanon ve Horadam, 1973; Stakhov, 1989; Allouche ve Johnson, 1996; Kalman ve Mena, 2003). Koshy ise literatürde bulunan Fibonacci ve Lucas dizileri ile genelleştirilmeleri üzerine sunulan hemen hemen her çalışmayı toplamış ve iki harika kitap şeklinde okuyuculara sunmuştur (Koshy, 2001; 2014).

Uzun yıllardır Fibonacci ve Lucas sayıları ile dizilerinin genelleştirmeleri çalışılmaktadır. Bu dizilerin genelleştirilmesi çalışılırken farklı bakış açıları ortaya çıkmıştır. Bir taraftan sunulan genelleştirmeler dizilerin başlangıç değerlerine bağlıyken diğer taraftan ise dizilerin rekürans bağıntısındaki terimlerin katsayısına bağlı olarak çok farklı genellemeleri sunulmuştur.

Falcon ve Plaza, Fibonacci ve Lucas dizilerinin rekürans bağıntısındaki terimlerin katsayılarını dikkate almış ve bu katsayı değeri için k parametresine bağlı olarak k -Fibonacci ve k -Lucas dizilerini sunmuşlardır (Falcon ve Plaza, 2007; Falcon, 2012). El-Mikkawy ve Sogabe ise k -Fibonacci dizilerinin yeni bir ailesini tanıtmıştır (El-Mikkawy ve Sogabe, 2010). Taşyurdu ve vd. ise bu yeni ailenin periyodu ile birçok özelliğini sunmuştur (Taşyurdu vd., 2016). Daha sonraki yıllarda genelleştirilmiş Fibonacci türleri ya da aileleri olarak çeşitli rekürans diziler üzerine birçok çalışma literatüre kazandırılmıştır (Boussayoud vd., 2018; Taşyurdu, 2019; Panwar, 2021).

Fibonacci sayılarının yeni bir genelleştirmesi olarak Fibonacci p -sayıları sunulmuş ve bu sayılar için analitik formüller elde edilmiştir. Ayrıca bu formüllerin klasik Fibonacci sayılarının Binet formüllerine benzer olduğunu gösterilmiştir. Ayrıca, Lucas sayılarının Lucas p -sayıları şeklindeki genelleştirmesi de elde edilmiştir (Stakhov, 1977; Stakhov ve Rozin, 2006). Taşyurdu 2022 yılında sunduğu beş parametrelili genelleştirilmiş Fibonacci sayıları ile hem Fibonacci, Fibonacci benzer sayıları hem de Fibonacci p -sayılarını genelleştirmiştir (Taşyurdu, 2022)

Fibonacci ve Lucas dizilerinin genelleştirilmesi olarak (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri tanımlanmıştır. Genelleştirmeler arasında önemli bir yere sahip olan bu diziler Fibonacci ve Lucas dizilerinin yanı sıra k -Fibonacci, k -Lucas, Jacobsthal, k -Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, k -Jacobsthal-Lucas, Pell, k -Pell, Pell-Lucas, k -Pell-Lucas gibi dizilerin de genelleştirilmesidir. Birçok araştırmacı tarafından (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin özellikleri ve uygulamaları büyük bir ilgiyle yıllardır çalışılmaktadır.

2015 yılında Suvarnamani ve Tatong (p, q) -Fibonacci sayıları olarak bilinen genelleştirilmiş Fibonacci dizisi üzerine çalışmışlar ve bu dizi için birçok eşitlik elde edilmiştir. Ayrıca bu eşitlikleri gösterirken n -inci (p, q) -Fibonacci sayısını veren Binet formülünü kullanmışlardır (Suvarnamani ve Tatong, 2015). Suvarnamani 2016 yılında sunduğu çalışmasında (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerini incelemiştir. Bu çalışmasında Binet formüllerini kullanarak (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin tek ve çift indisli terimlerinin birçok özelliğini elde etmiştir (Suvarnamani, 2016a). Diğer taraftan (p, q) -Lucas sayı dizisi olan genelleştirilmiş Lucas sayı dizisini incelemiştir. Ayrıca (p, q) -Lucas sayısının bazı özelliklerini göstermek için Binet formülünü kullanmış ve (p, q) -Lucas sayısının bazı genelleştirilmiş özelliklerini elde etmiştir (Suvarnamani, 2016b). Suvarnamani çalışmalarına devam ederek (p, q) -Fibonacci sayısının bazı özelliklerini göstermek için matris temsillerini kullanmış ve (p, q) -Fibonacci sayısının bazı genelleştirilmiş özdeşliklerini elde etmiştir (Suvarnamani, 2017). Taşyurdu ise 2019 yılında bilinen birçok dizinin genel hali olarak (p, q) -Fibonacci benzer dizileri tanımlanmıştır. Bu çalışmada dizilerinin üreteç fonksiyonlarını, Binet formüllerini, önemli eşitlikleri ve toplam formüllerini sunmuştur (Taşyurdu, 2019). Fibonacci ve Lucas sayıları için Fibonacci tipi ve Lucas tipi polinomların birçok genelleştirmesi sunulmuş ve uygulamaları verilmiştir. Birçok özelliği elde edilmiştir (Çağman, 2021a; 2021b; Taşyurdu, vd., 2016).

Fibonacci tipli ve Lucas tipli dizilerin daha sonra farklı bir bakış açısıyla genelleştirmeleri sunulmuştur. Bu dizilerin rekürans bağıntıları ile tek ve çift indisli terimleri dikkate alınarak bi-periyodik Fibonacci tipli ve bi-periyodik Lucas tipli diziler olarak adlandırılan diziler tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Koçer vd. 2009 yılında Fibonacci ve Lucas p -sayılarının m -genişlemesini tanımlamışlardır. Daha sonra, genelleştirilmiş Binet formüllerini kullanarak Fibonacci ve Lucas p -sayılarının m -genişlemesi için sürekli fonksiyonlar elde etmişlerdir. Ayrıca, klasik altın ortalamanın, altın p -oranlarının ve altın m -oranlarının geniş bir genelleştirmesi olan altın (p, m) -oranlar adlı yeni bir matematiksel sabit sınıfını tanımlamışlardır (Koçer vd., 2009).

Edson ve Yayenie 2009 yılında Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısını tek ve çift indisli terimleri için ayrı ayrı kullanmış ve bi-periyodik Fibonacci dizileri olarak adlandırılan Fibonacci dizisinin yeni bir genelleştirmesini sunmuşlardır. Ayrıca bu dizinin n -inci için Binet formülünü ve Cassini, Catalan, d'Ocagne gibi bilinen eşitlikler sunulmuştur (Edson ve Yayenie, 2009). Yayenie ise 2011 sunduğu çalışması ile bi-periyodik Fibonacci dizilerinin birçok yeni özelliğini vermiştir (Yayenie, 2011). Bu çalışmalar birçok yazar için ilham kaynağı olmuştur. Bilgici Lucas dizisinin tek ve çift indisli terimleri dikkate alarak bi-periyodik Lucas dizileri olarak adlandırılan Lucas dizisinin genelleştirmesini tanımlanmıştır. Bu dizi ile bi-periyodik Fibonacci dizileri arasındaki bazı ilişkileri vermiştir Ayrıca, Yayenie'nin 2011 yılında bi-periyodik Fibonacci dizileri için elde ettiği özellikleri bi-periyodik Lucas dizileri için sunmuştur (Bilgici, 2014).

Uygun ve Owusu 2016 yılında Edson ve Yayenie'nin 2009 da tanımladığı bi-periyodik Fibonacci dizisi ve Bilgici'nin 2014 de tanımladığı bi-periyodik Lucas dizisine benzer olarak Jacobsthal sayılarının tek ve çift durumları için bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizileri olarak adlandırılan Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir genelleştirmesini tanımlamışlardır. Bu dizinin Binet ve üreteç fonksiyonunu ile iyi bilinen Cassini, Catalan ve d'Ocagne'in eşitliklerini ve bazı binom toplama formülleri vermişlerdir. Bu dizinin ardışık terimlerinin yakınsaklık özellikleri de incelemişlerdir (Uygun ve Owusu, 2016). 2019 yılında Uygun ve Owusu çalışmalarına devam ederek, Jacobsthal-Lucas sayılarının yeni bir genelleştirmesini bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizisi olarak sunmuşlardır. Bu dizinin de genel formülünü ve üreteç fonksiyonunu vermişlerdir. Ayrıca dizinin ardışık terimlerinin yakınsama özelliği incelendikten sonra iyi bilinen Cassini, Catalan ve d'Ocagne eşitlikleri ile ilgili bazı toplama formülleri de vermişlerdir (Uygun and Owusu, 2019).

Yazlık vd., ise Fibonacci ve Lucas p -sayılarının yeni bir genelleştirmesini tanımlamışlardır. Genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas p -dizisi için ağaç diyagramlarını ve Binet formüllerini elde etmişler. Ayrıca bu diyagramları kullanarak bu diziler için rekürans bağıntıları vermişlerdir (Yazlık vd., 2018).

Uygun ve Karataş 2019 yılında sundukları çalışmalarında bi-periyodik Pell-Lucas dizileri olarak adlandırılan Pell-Lucas dizilerinin yeni bir genelleştirmesini tanımlamışlardır. Bu dizinin ardışık terimleri arasındaki ilişki ile sayı dizileri için iyi bilinen birçok özelliği, Binet formülünü ve üreteç fonksiyonunu sunmuşlardır (Uygun and Karataş, 2019). Daha sonra aynı yazarlar 2020 yılında benzer düşünce ile Pell dizisinin rekürans bağıntısı dikkate alarak bi-periyodik Pell dizileri olarak adlandırılan Pell sayılarının yeni bir genelleştirmesini tanımlamışlardır. Bu dizi için de Binet formülünü, üreteç fonksiyonunu ve iyi bilinen Cassini, Catalan ve d'Ocagne gibi eşitliklerin yanı sıra toplam formülleri verilmiştir. Ayrıca bu dizinin ardışık terimlerinin yakınsaklık özellikleri de incelenmişlerdir (Uygun and Karataş, 2020). Diğer taraftan Tan 2017 yılında bi-periyodik Fibonacci ve bi-periyodik Lucas dizileri için bilinen sonuçları genelleştirerek bi-periyodik Horadam dizilerinin bazı temel özelliklerini vermiştir. Ayrıca, iki mertebeden Lucas dizileri için bazı yeni özdeşlikler elde etmiştir (Tan, 2017). 2020 yılında ise Tan ve Leung bi-periyodik Horadam dizilerinin birçok özelliğini elde etmişlerdir (Tan ve Leung, 2020).

Fibonacci ve Lucas dizileri ile genelleştirmeleri farklı yorumlarla da sunulmuştur. Sonsuz bir geometrik düzlemin birbirine uyumlu düzlem figürleriyle kaplanması olan döşeme ve kombinatoriyal yorumları ile Fibonacci sayıları ve Fibonacci tipli sayıların özellikleri incelenmiştir (Holden, 1975; Brigham vd., 1996-97, Benjamin ve Quinn, 2003; Taşyurdu ve Cengiz, 2022).

Sunulan bu tezde (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları kullanılarak Fibonacci tipi, Lucas tipi, bi-periyodik Fibonacci tipi ve bi-periyodik Lucas tipi dizileri genelleştiren bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin ardışık terimlerinin yakınsaklık ve birçok önemli özelliklerini içeren sonuçlar elde edilmiştir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022a; 2023). Ayrıca (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin özellikleri incelenmiştir.

(p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerine bir döşeme yaklaşımı sunulmuştur. Bu döşeme yorumlarıyla toplam formülleri verilmiştir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022b; 2022c). Bu amaçla kuramsal temeller adını alan ikinci bölümde temel kavramlar verilmiştir.

Çalışmamız üçüncü bölümünde ilk olarak Fibonacci ve Lucas dizilerinin genelleştirmeleri olan (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri sunulmuştur. Bu dizilerin rekürans bağıntıları göz önüne alınarak Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve özellikleri verilmiştir. Rekürans diziler için döşeme yorumları sunulmuştur. Daha sonra Fibonacci, Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Pell, Pell-Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları kullanılarak tanımlanan bi-periyodik Fibonacci, bi-periyodik Lucas, bi-periyodik Jacobsthal, bi-periyodik Jacobsthal-Lucas, bi-periyodik Pell, bi-periyodik Pell-Lucas dizileri sunulmuştur. Bu dizilerin Binet formülleri, üreteç fonksiyonları, toplam formülleri ile Catalan, Cassini, ve d'Ocagne eşitlikleri gibi özel eşitlikler sunulmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde ilk olarak Fibonacci, k -Fibonacci, Lucas, k -Lucas, Jacobsthal, k -Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, k -Jacobsthal-Lucas, Pell, k -Pell, Pell-Lucas, k -Pell-Lucas dizileri ile bi-periyodik Fibonacci, bi-periyodik k -Fibonacci, bi-periyodik Lucas, bi-periyodik k -Lucas, bi-periyodik Jacobsthal, bi-periyodik k -Jacobsthal, bi-periyodik Jacobsthal-Lucas, bi-periyodik k -Jacobsthal-Lucas, bi-periyodik Pell, bi-periyodik k -Pell, bi-periyodik Pell-Lucas, bi-periyodik k -Pell-Lucas dizilerini genelleştiren bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas tanımlanmış ve detaylı bir şekilde özellikleri incelenmiştir. Bu dizilerin n -inci terimin elde edilmesini sağlayan genel formüller elde edilmiştir. Ayrıca üreteç fonksiyonları verilmiş ve ardışık terimlerinin yakınsaklık özellikleri incelenmiştir. Daha sonra (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerine döşeme yaklaşımı ile sunulmuştur. Kareler için p tane farklı renk ve dominolar için q tane farklı renk olmak üzere renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı bir $1 \times n$ tahtasını döşemen yollarının sayısı ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı dairesel bir $1 \times n$ tahtasını döşemen yollarının sayısı olarak yorumlanmıştır. Bu yorumla kullanılarak bu sayılar için bazı temel özdeşlikler ve toplam formülleri döşeme yorumlarıyla verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Matematikte birçok dizi türü bulunmaktadır. Bu bölümde çalışmamız için temel teşkil eden kavramlar ve diziler hakkında genel bilgiler verilmiştir.

2.1. Genel Kavramlar

Tanım 2.1: Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan fonksiyonlara dizi denir (Kadioğlu ve Kamali, 2003).

Bir dizinin başlangıcındaki birkaç terimi hariç, her bir teriminin kendisinden önceki terimler yardımıyla elde edildiği rekürans dizileri literatürde ilgiyle çalışılmaktadır.

Tanım 2.2: Her $n \geq r$ için $k_0 \neq 0$ olacak şekilde k_i ($0 \leq i \leq r-1$) katsayıları için r -inci mertebeden homojen lineer rekürans dizisi, $\{s_n\}_{n \geq 0}$

$$s_n = k_{r-1}s_{n-1} + k_{r-2}s_{n-2} + \dots + k_1s_{n-r+1} + k_0s_{n-r} \quad (2.1)$$

eşitliği ile tanımlanır. (2.1) eşitliğine ise r -inci mertebeden homojen lineer rekürans bağıntı denir. $\{s_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin ilk r terimini olan $s_0, s_1, \dots, s_{r-1}$ sayılarına da dizisinin başlangıç değerleri denir (Everest vd., 2003).

(2.1) rekürans bağıntısında $s_n = x^n$ yineleme bağıntısı kullanılarak r -inci mertebeden homojen lineer rekürans dizisinin karakteristik polinomu ve denklemi elde edilir.

Tanım 2.3: (2.1) rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{s_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik polinomu

$$p(x) = x^n - k_{r-1}x^{n-1} - k_{r-2}x^{n-2} - \dots - k_1x - k_0$$

şeklinde tanımlanır (Everest vd., 2003).

Tanım 2.4: (2.1) rekürans bağıntısı ile tanımlanan $\{s_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin karakteristik denklemi $p(x) = x^n - k_{r-1}x^{n-1} - k_{r-2}x^{n-2} - \dots - k_1x - k_0 = 0$ olarak tanımlanır (Everest vd., 2003).

Tanım 2.5: $p(x)$ polinomunun kökleri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ olmak üzere $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$ için $\alpha_i \neq \alpha_j$ ise, $a_n = A_1\alpha_1^n + A_2\alpha_2^n + \dots + A_r\alpha_r^n$ olacak şekilde $A_1, A_2, \dots, A_r$ sabitleri vardır. Bu eşitlik başlangıç değerleri için yerine yazılıp elde edilen denklem sisteminden $A_1, A_2, \dots, A_r$ bilinmeyenleri bulunur. Böylece elde edilen karakteristik polinomunun kökleri ve a_n arasındaki eşitliğe rekürans bağıntısının çözümü denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.6: Bir $\{s_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin terimleri kullanılarak tanımlanan

$$G(x) = s_0x^0 + s_1x^1 + s_2x^2 + s_3x^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} s_i x^i$$

serisine $\{s_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu denir (Everest vd., 2003).

Tanım 2.7: $\xi(n)$ fonksiyonu $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olarak tanımlanır, yani

$$\xi(n) = \begin{cases} 0, & n \text{ çift ise} \\ 1, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

dir.

Tanım 2.2 de özel olarak $r = 2$ alınırsa s_0 ve s_1 başlangıç değerleri için

$$s_n = k_1 s_{n-1} + k_0 s_{n-2} \quad (2.2)$$

bağıntısı ile $\{s_n\}_{n \geq 0}$ ikinci mertebeden lineer rekürans dizisi tanımlanır. Şimdi bu dizinin özel durumu olan ve literatürde en çok ilgi gören Fibonacci ve Lucas dizileri ve özellikleri sunulacaktır.

2.2. Fibonacci ve Lucas Dizileri

19. yüzyıl sayı teorisyenlerinden Edvard Lucas, Leonarda Pisa'nın Liber Abaci adlı eserinde gördüğü bir problemdeki $\{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots\}$ dizisine Fibonacci dizisi, bu dizinin terimlerine ise Fibonacci sayıları ismini vermiştir.

Özel olarak $s_0 = 0$ ve $s_1 = 1$ başlangıç değerleri için (2.2) rekürans bağıntısında $k_0 = k_1 = 1$ alınarak Fibonacci dizisi tanımlanabilir.

Tanım 2.8: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleriyle n -inci Fibonacci sayısı, F_n

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (2.3)$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye Fibonacci dizisi denir ve $\{F_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Horadam, 1961).

Fibonacci dizisi (2.3) rekürans bağıntısı kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile dizinin herhangi bir terimi, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunabilir. Bir dizinin n -inci terimini elde etmek için rekürans bağıntısı kullanılırsa kendisinden önce ilk $n - 1$ terimin bilinmesi gerekmektedir. Ancak bunun yerine Binet formülü kullanılırsa bu hesaplama ihtiyacı duyulmamaktadır. Bu formülü elde etmek, dizinin rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır. (2.3) rekürans bağıntısında $F_n = r^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa Fibonacci dizisinin karakteristik denklemi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \Rightarrow r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$$

olur. Özel olarak $n = 2$ için $r^2 - r - 1 = 0$ elde edilir. Bu karakteristik denklemin kökleri α_1 ve α_2 olarak alınır

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

olarak bulunur. Ayrıca bu kökler arasında

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 \alpha_2 = -1$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = \sqrt{5}$$

eşitlikleri vardır. Buradan Fibonacci dizisinin n -inci terimi için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 2.9: $n \geq 0$ için $r^2 - r - 1 = 0$ denkleminin kökleri, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n -inci Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

şeklindedir (Horadam, 1961).

İspat: Tanım 2.5 ten A_1, A_2 sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tam sayısı için n -inci Fibonacci sayısının genel formu

$$F_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n \quad (2.4)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0, 1$ için

$$F_0 = 0 = A_1 + A_2$$

$$F_1 = 1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A_1 = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \quad \text{ve} \quad A_2 = -\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

olarak bulunur. Bulunan A_1 ve A_2 değerleri (2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa n -inci Fibonacci sayısı için Binet formülü

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu verilecektir. n -inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere $\{F_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n \quad (2.5)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.10: Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklindedir (Carlitz, 1962).

İspat: (2.5) eşitliğinden Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F_0 x^0 + F_1 x^1 + F_2 x^2 + \dots + F_n x^n + \dots$$

dir. Bu denklemin her iki yanını $-x$ ve $-x^2$ ile çarpılırsa

$$-xG(x) = -F_0 x^1 - F_1 x^2 - F_2 x^3 - \dots - F_n x^{n+1} - \dots$$

$$-x^2 G(x) = -F_0 x^2 - F_1 x^3 - F_2 x^4 - \dots - F_n x^{n+2} - \dots$$

elde edilir. Buradan Tanım 2.8 den $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ başlangıç değerleri ile $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - x - x^2)G(x) = F_0 x^0 + F_1 x^1 - F_0 x^1 = x$$

olup Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$G(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Fibonacci dizisine benzer olarak $s_0 = 2$ ve $s_1 = 1$ başlangıç değerleri için (2.2) rekürans bağıntısında $k_0 = k_1 = 1$ alınarak Lucas dizisi tanımlanabilir.

Tanım 2.11: $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç değerleriyle n -inci Lucas sayısı, L_n

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (2.6)$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır. Bu sayıların oluşturduğu diziye Lucas dizisi denir ve $\{L_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilir (Horadam, 1961).

Şimdi n -inci Lucas sayısı için Binet formülü verilecektir. Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısı Lucas dizisinin rekürans bağıntısıyla aynı olup $r^2 - r - 1 = 0$ karakteristik denkleminde sahiptir. Dolayısıyla bu karakteristik denklemin kökleri de

$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{ve} \quad \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

şeklindedir.

Teorem 2.12: $n \geq 0$ için $r^2 - r - 1 = 0$ denkleminin kökleri, $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere n -inci Lucas sayısı için Binet formülü

$$L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$$

şeklindedir (Horadam, 1961).

İspat: Tanım 2.5 ten A_1, A_2 sabit katsayılar olmak üzere her $n \geq 0$ tam sayısı için n -inci Lucas sayısının genel formu

$$L_n = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n \quad (2.7)$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0, 1$ için

$$L_0 = 2 = A_1 + A_2$$

$$L_1 = 1 = A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A_1 = \frac{1-2\alpha_2}{\alpha_1-\alpha_2} \quad \text{ve} \quad A_2 = \frac{2\alpha_1-1}{\alpha_1-\alpha_2}$$

olarak bulunur. Bulunan A_1 ve A_2 değerleri (2.7) eşitliğinde yerine yazılırsa n -inci Lucas sayısı için Binet formülü

$$L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu verilecektir. n -inci Lucas sayısı L_n olmak üzere $\{L_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \quad (2.8)$$

olsun. Buradan Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonuna benzer çözümle Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.13: Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$S(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

şeklindedir (Carlitz, 1962).

İspat: (2.8) eşitliğinden Lucas dizisinin üreteç fonksiyonu

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = L_0 x^0 + L_1 x^1 + L_2 x^2 + \dots + L_n x^n + \dots$$

dir. Bu denklemin her iki yanı $-x$ ve $-x^2$ ile çarpılırsa

$$-xS(x) = -L_0 x^1 - L_1 x^2 - L_2 x^3 - \dots - L_n x^{n+1} - \dots$$

$$-x^2 S(x) = -L_0 x^2 - L_1 x^3 - L_2 x^4 - \dots - L_n x^{n+2} - \dots$$

elde edilir. Buradan Tanım 2.11 den $L_0 = 2$, $L_1 = 1$ başlangıç değerleri ile $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1-x-x^2)S(x) = L_0 x^0 + L_1 x^1 - L_0 x^1 = 2-x$$

olup Lucas dizisi için üreteç fonksiyonu

$$S(x) = \frac{2-x}{1-x-x^2}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Fibonacci ve Lucas dizileri gibi bilimin hemen hemen her alanında hem teorik hem de uygulamalı olarak çok geniş alanda çalışılan k -Fibonacci $\{F_{k,n}\}_{n \geq 0}$, k -Lucas $\{L_{k,n}\}_{n \geq 0}$, Jacobsthal $\{J_n\}_{n \geq 0}$, k -Jacobsthal $\{J_{k,n}\}_{n \geq 0}$, Jacobsthal-Lucas $\{j_n\}_{n \geq 0}$, k -Jacobsthal-Lucas $\{j_{k,n}\}_{n \geq 0}$, Pell $\{P_n\}_{n \geq 0}$, k -Pell $\{P_{k,n}\}_{n \geq 0}$, Pell-Lucas $\{Q_n\}_{n \geq 0}$, k -Pell-Lucas $\{Q_{k,n}\}_{n \geq 0}$ dizileri Tanım 2.2 nin özel durumları olarak aşağıdaki gibi tanımlanır. s_0 ve s_1 başlangıç değerleri için (2.2) rekürans bağıntısı ile verilen ikinci mertebeden $\{s_n\}_{n \geq 0}$ rekürans dizisinde

- i. $k_1 = k, k_0 = 1$ için $F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ile k -Fibonacci dizisi $F_{k,n} = kF_{k,n-1} + F_{k,n-2}$
- ii. $k_1 = k, k_0 = 1$ için $L_{k,0} = 2, L_{k,1} = k$ başlangıç değerleri ile k -Lucas $L_{k,n} = kL_{k,n-1} + L_{k,n-2}$
- iii. $k_1 = 1, k_0 = 2$ için $J_0 = 0, J_1 = 1$ başlangıç değerleri ile Jacobsthal dizisi $J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$
- iv. $k_1 = k, k_0 = 2$ için $J_{k,0} = 0, J_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ile k -Jacobsthal dizisi $J_{k,n} = kJ_{k,n-1} + 2J_{k,n-2}$
- v. $k_1 = 1, k_0 = 2$ için $j_0 = 2, j_1 = 1$ başlangıç değerleri ile Jacobsthal-Lucas dizisi $j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}$
- vi. $k_1 = k, k_0 = 2$ için $j_0 = 2, j_1 = k$ başlangıç değerleri ile k -Jacobsthal-Lucas dizisi $j_{k,n} = kj_{k,n-1} + 2j_{k,n-2}$
- vii. $k_1 = 2, k_0 = 1$ için $P_0 = 0, P_1 = 1$ başlangıç değerleri ile Pell dizisi $P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$
- viii. $k_1 = 2, k_0 = k$ için $P_{k,0} = 0, P_{k,1} = 1$ başlangıç değerleri ile k -Pell dizisi $P_{k,n} = 2P_{k,n-1} + kP_{k,n-2}$
- ix. $k_1 = 2, k_0 = 1$ için $Q_0 = 2, Q_1 = 2$ başlangıç değerleri ile Pell-Lucas dizisi $Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}$
- x. $k_1 = 2, k_0 = k$ için $Q_{k,0} = 2, Q_{k,1} = 2$ başlangıç değerleri ile k -Pell-Lucas dizisi $Q_{k,n} = 2Q_{k,n-1} + kQ_{k,n-2}$

rekürans bağıntıları ile tanımlanır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde literatürde yer alan, birçok araştırmacının çalışma konusu olmuş, uygulama alanları geniş olan ve çalışmamız için temel teşkil eden ikinci mertebeden lineer rekürans bağıntılarla tanımlanan, Fibonacci tipli ve Lucas tipli dizilerin genelleştirilmiş hali olan (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri ile sayı dizileri ile ilişkili bi-periyodik dizilerinin tanımları ve özellikleri sunulmuştur. Bu diziler için üreteç fonksiyonları, genel formüller olarak bilinen ve n -inci (p, q) -Fibonacci ile n -inci (p, q) -Lucas sayısını elde etmek için kullanılan Binet formülleri ile Cassini eşitliği, Catalan eşitliği ve Vajda eşitliği gibi önemli eşitlikleri sunulmuştur.

3.1. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas Dizileri

Tanım 3.1: $p, q \geq 1$ olacak şekilde p ve q tam sayıları için $F_{p,q,0} = 0$ ve $F_{p,q,1} = 1$ başlangıç değerleri ile (p, q) -Fibonacci dizisi $\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ ve $L_{p,q,0} = 2$ ve $L_{p,q,1} = p$ başlangıç değerleri ile (p, q) -Lucas dizisi $\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ sırasıyla

$$F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2} \quad (3.1)$$

$$L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2} \quad (3.2)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır (Horadam, 1961).

Tanım 3.1 kullanılarak (p, q) -Fibonacci dizisi

$$\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0} = \{0, 1, p, p^2 + q, p^3 + 2pq, p^4 + 3p^2q + q^2, \dots\}$$

ve (p, q) -Lucas dizisi

$$\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0} = \{2, p, p^2 + 2q, p^3 + 3pq, p^4 + 4p^2q + 2q^2, \dots\}$$

şeklinde elde edilir.

(p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin terimleri (3.1) ve (3.2) rekürans bağıntıları kullanılarak elde edilebileceği gibi genel formül olarak bilinen Binet formülü kullanılarak da elde edilir.

Bilindiği gibi Binet formülü ile dizinin herhangi bir terimi, kendisinden önceki tüm terimlerin bilinmesine gerek kalmadan kolay bir şekilde bulunabilir. Bu formülü elde etmek dizinin rekürans bağıntısını çözmeye dayanmaktadır.

Şimdi (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri için Binet formülleri verilecektir. (3.1) ve (3.2) rekürans bağıntılarında $F_{p,q,n} = s^n$ ve $L_{p,q,n} = t^n$ yineleme bağıntısı kullanılırsa

$$F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2} \Rightarrow s^n = ps^{n-1} + qs^{n-2}$$

$$L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2} \Rightarrow t^n = pt^{n-1} + qt^{n-2}$$

elde edilir. Burada özel olarak $n = 2$ alınırsa (3.1) ve (3.2) rekürans bağıntılarının karakteristik denklemi aynı olup

$$r^2 - pr - q = 0$$

şeklindedir. Bu denklemin kökleri $r_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $r_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ şeklindedir. Ayrıca bu kökler arasında

$$r_1 + r_2 = p$$

$$r_1 r_2 = -q$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{p^2 + 4q}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Teorem 3.2: $n \geq 0$ için $r^2 - pr - q = 0$ denkleminin kökleri, $r_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $r_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ olmak üzere (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri için Binet formülleri sırasıyla

$$F_{p,q,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \quad (3.3)$$

$$L_{p,q,n} = r_1^n + r_2^n \quad (3.4)$$

şeklindedir (Horadam, 1961).

İspat: Tanım 2.5 ten A_1, A_2 sabit katsayılar ve her $n \geq 0$ tam sayısı için (3.1) rekürans bağıntısının karakteristik denkleminin kökleri $r_1 = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2}$ ve $r_2 = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$ dir. Buradan (p, q) -Fibonacci dizisinin n -inci teriminin genel formu

$$F_{p,q,n} = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$$

şeklindedir. Özel olarak $n = 0, 1$ için

$$F_{p,q,0} = 0 = A_1 + A_2$$

$$F_{p,q,1} = 1 = A_1 r_1 + A_2 r_2$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde ise

$$A_1 = \frac{1}{r_1 - r_2} \quad \text{ve} \quad A_2 = \frac{-1}{r_1 - r_2}$$

olarak bulunur. Bulunan A_1 ve A_2 değerleri

$$F_{p,q,n} = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n$$

eşitliğinde yerine yazılırsa (p, q) -Fibonacci dizisi için Binet formülü

$$F_{p,q,n} = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}$$

şeklinde elde edilir. Benzer düşünce ile (p, q) -Lucas dizisinin Binet formülü (3.2) rekürans bağıntısı kullanılarak elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Şimdi Fibonacci ve Lucas dizileri için üreteç fonksiyonları verilecektir. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere $\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ ve $\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları sırasıyla

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{p,q,n} x^n \tag{3.5}$$

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_{p,q,n} x^n \tag{3.6}$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.3: $\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ dizisi için üreteç fonksiyonu $K(x)$ ve $\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ dizisi için üreteç fonksiyonu $H(x)$ olmak üzere

$$K(x) = \frac{x}{1 - px - qx^2}$$

$$H(x) = \frac{2 - px}{1 - px - qx^2}$$

şeklindedir (Haukkanen, 2002).

İspat: (3.5) eşitliğinden (p, q) -Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{p,q,n} x^n = F_{p,q,0} x^0 + F_{p,q,1} x^1 + F_{p,q,2} x^2 + \dots + F_{p,q,n} x^n + \dots$$

dir. Bu denklemin her iki yanı $-px$ ve $-qx^2$ ile çarpılırsa

$$-pxK(x) = -pF_{p,q,0}x^1 - pF_{p,q,1}x^2 - pF_{p,q,2}x^3 - \dots - pF_{p,q,n}x^{n+1} - \dots$$

$$-qx^2K(x) = -qF_{p,q,0}x^2 - qF_{p,q,1}x^3 - qF_{p,q,2}x^4 - \dots - qF_{p,q,n}x^{n+2} - \dots$$

elde edilir. Buradan Tanım 3.1 den $F_{p,q,0} = 0$ ve $F_{p,q,1} = 1$ başlangıç değerleri ile $F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılırsa

$$(1 - px - qx^2)K(x) = F_{p,q,0}x^0 + F_{p,q,1}x^1 - pF_{p,q,0}x^1 = x$$

olup Fibonacci dizisi için üreteç fonksiyonu

$$K(x) = \frac{x}{1 - px - qx^2}$$

şeklinde elde edilir. Benzer olarak (3.6) eşitliği ve Tanım 3.1 den $L_{p,q,0} = 2$ ve $L_{p,q,1} = p$ başlangıç değerleri ile $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$ rekürans bağıntısı kullanılarak (p, q) -Lucas dizileri için üreteç fonksiyonu

$$H(x) = \frac{2 - px}{1 - px - qx^2}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.1.1. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin özellikleri

Bu bölümde (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin ardışık terimleri arasındaki oran ile Cassini eşitliği, Catalan eşitliği ve Vajda eşitliği gibi önemli eşitlikleri sunulmuştur. Ayrıca tek ve çift indisli (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas sayılarının bazı özellikleri eşitliklerle sunulmuştur.

Teorem 3.4: n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

i. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{p,q,n}}{F_{p,q,n-1}} = r_1$

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{p,q,n}}{L_{p,q,n-1}} = r_1$

dir (Suvarnamani ve Tatong, 2015; Suvarnamani, 2016a).

İspat:

i. $\left| \frac{r_2}{r_1} \right| < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{p,q,n}}{F_{p,q,n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}}{\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}{\frac{1}{r_1} - \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \left(\frac{1}{r_2}\right)} \\ &= \frac{1}{\left(\frac{1}{r_1}\right)} \\ &= r_1 \end{aligned}$$

ii. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n = 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{p,q,n}}{L_{p,q,n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^n + r_2^n}{r_1^{n-1} + r_2^{n-1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1^n \left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right)}{r_1^{n-1} \left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n-1}\right)} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1 \left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\right)}{\left(1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{n-1}\right)} \\
&= r_1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5 (Cassini Eşitlikleri): p, q ve n pozitif tam sayılar olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,n+1}F_{p,q,n-1} - F_{p,q,n}^2 = (-1)^n q^{n-1} \quad (3.7)$$

$$L_{p,q,n+1}L_{p,q,n-1} - L_{p,q,n}^2 = (-q)^{n-1}(p^2 + 4q) \quad (3.8)$$

dir (Suvarnamani ve Tatong, 2015; Suvarnamani, 2016a).

İspat: İspat için (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılabilir. p, q ve n pozitif tam sayılar olmak üzere (3.3) eşitliği kullanılarak (3.7) eşitliği

$$F_{p,q,n+1}F_{p,q,n-1} - F_{p,q,n}^2 = \left(\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2}\right)\left(\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2}\right) - \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(r_1^{2n} + r_2^{2n} - r_1^{n-1}r_2^{n+1} - r_1^{n+1}r_2^{n-1})}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{(r_1^{2n} - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n})}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{-r_1^{n-1} + r_2^{n-1} - r_1^{n-1}r_2^{n+1} + 2r_1^n r_2^n}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{r_1^{n-1}r_2^{n-1}(-1)(r_1^2 - r_1r_2 + r_2^2)}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{(-1)^n q^{n-1}(r_1 - r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= (-1)^n q^{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak (3.4) eşitliği kullanılarak (3.8) eşitliği

$$\begin{aligned}
L_{p,q,n+1}L_{p,q,n-1} - L_{p,q,n}^2 &= (r_1^{n+1} + r_2^{n+1})(r_1^{n-1} + r_2^{n-1}) - (r_1^n + r_2^n)^2 \\
&= (r_1^{2n} + r_2^{2n} + r_1^{n-1}r_2^{n+1} + r_1^{n+1}r_2^{n-1}) - (r_1^{2n} + 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n}) \\
&= r_1^{n+1}r_2^{n-1} + r_1^{n-1}r_2^{n+1} - 2r_1^n r_2^n \\
&= r_1^{n-1}r_2^{n-1}(r_1^2 - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n}) \\
&= (-q)^{n-1}(r_1 - r_2)^2 \\
&= (-q)^{n-1}(p^2 + 4q)
\end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.6 (Catalan Eşitlikleri): p, q, m, n pozitif tam sayı ve $m \geq n$ olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,m}^2 - F_{p,q,m-n}F_{p,q,m+n} = (-1)^{m-n}q^{m-n}F_{p,q,n}^2 \quad (3.9)$$

$$L_{p,q,m-n}L_{p,q,m+n} - L_{p,q,m}^2 = (-q)^{m-n}(p^2 + 4q) \quad (3.10)$$

dir (Suvarnamani ve Tatong, 2015; Suvarnamani, 2016a).

İspat: İspat için (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılabilir. p, q, m, n pozitif tam sayılar olsun. $m \geq n$ için (3.3) eşitliği kullanılarak (3.9) eşitliği

$$\begin{aligned}
F_{p,q,m}^2 - F_{p,q,m-n}F_{p,q,m+n} &= \left(\frac{r_1^m - r_2^m}{r_1 - r_2} \right)^2 - \left(\frac{r_1^{m-n} - r_2^{m-n}}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{r_1^{m+n} - r_2^{m+n}}{r_1 - r_2} \right) \\
&= \frac{(r_1^{2m} - 2r_1^m r_2^m + r_2^{2m})}{(r_1 - r_2)^2} - \frac{(r_1^{2m} + r_2^{2m} - r_1^{m+n} r_2^{m-n} - r_1^{m-n} r_2^{m+n})}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{-r_1^{m-n} r_2^{m-n} (r_1^{2n} - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n})}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{(-1)^{m-n} q^{m-n} (r_1^n - r_2^n)^2}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= (-1)^{m-n} q^{m-n} F_{p,q,n}^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak (3.4) eşitliği kullanılarak (3.10) eşitliği

$$\begin{aligned}
L_{p,q,m-n}L_{p,q,m+n} - L_{p,q,n}^2 &= (r_1^{m-n} + r_2^{m-n})(r_1^{m+n} + r_2^{m+n}) - (r_1^m + r_2^m)^2 \\
&= r_1^{2m} + r_1^{m+n} r_2^{m-n} + r_1^{m-n} r_2^{m+n} + r_2^{2m} - r_1^{2m} - 2r_1^m r_2^m - r_2^{2m} \\
&= r_1^{m+n} r_2^{m-n} + r_1^{m-n} r_2^{m+n} - 2r_1^m r_2^m \\
&= r_1^{m-n} r_2^{m-n} (r_1^{2n} - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n}) \\
&= (-q)^{m-n} (r_1^n - r_2^n)^2 \\
&= (-q)^{m-n} (r_1^n - r_2^n)^2 \frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2} \\
&= (-q)^{m-n} \sqrt{p^2 + 4q} F_{p,q,m}^2
\end{aligned}$$

elde edilebilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.7 (Vajda Eşitlikleri): p, q, m, n ve k pozitif tam sayı olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,m+n}F_{p,q,m+k} - F_{p,q,m}F_{p,q,m+n+k} = (-q)^m F_{p,q,n}F_{p,q,k} \quad (3.11)$$

$$L_{p,q,m+n}L_{p,q,m+k} - L_{p,q,m}L_{p,q,m+n+k} = (-1)^{m+1} (q)^m (p^2 + 4q) F_{p,q,n}F_{p,q,k} \quad (3.12)$$

dir (Suvarnamani ve Tatong, 2015; Suvarnamani, 2016a).

İspat: İspat için (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılabilir. p, q, m, n ve k tam sayılar olmak üzere (3.3) eşitliği kullanılarak (3.11) eşitliği

$$\begin{aligned}
& F_{p,q,m+n}F_{p,q,m+k} - F_{p,q,m}F_{p,q,m+n+k} \\
&= \left(\frac{r_1^{m+n} - r_2^{m+n}}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{r_1^{m+k} - r_2^{m+k}}{r_1 - r_2} \right) - \left(\frac{r_1^m - r_2^m}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{r_1^{m+n+k} - r_2^{m+n+k}}{r_1 - r_2} \right) \\
&= \frac{r_1^m r_2^m (-r_1^n r_2^k - r_1^k r_2^n + r_1^{n+k} + r_2^{n+k})}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{(-q)^m (-r_2^k (r_1^n - r_2^n) + r_1^k (r_1^n - r_2^n))}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{(-q)^m (r_1^k - r_2^k) (r_1^n - r_2^n)}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= (-q)^m F_{p,q,n} F_{p,q,k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak (3.4) eşitliği kullanılarak (3.12) eşitliği

$$\begin{aligned}
& L_{p,q,m+n}L_{p,q,m+k} - L_{p,q,m}L_{p,q,m+n+k} = \\
&= (r_1^{m+n} + r_2^{m+n})(r_1^{m+k} + r_2^{m+k}) - (r_1^m + r_2^m)(r_1^{m+n+k} + r_2^{m+n+k}) \\
&= r_1^{m+n}r_2^{m+k} + r_1^{m+k}r_2^{m+n} - r_1^m r_2^{m+n+k} - r_1^{m+n+k}r_2^m \\
&= r_1^m r_2^m (r_1^n r_2^k + r_1^k r_2^n - r_1^{n+k} + r_2^{n+k}) \\
&= (-q)^m (r_2^k (r_1^n - r_2^n) + r_1^k (r_1^n - r_2^n)) \\
&= (-1)(-q)^m (r_1^n - r_2^n) (r_1^k - r_2^k) \\
&= (-1)^{m+1} q^m (p^2 + 4q) F_{p,q,n} F_{p,q,k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.8: p, q, n pozitif tam sayı ve $n \geq 2$ olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,n-2}F_{p,q,n+1} - F_{p,q,n-1}F_{p,q,n} = (-1)^{n-1}pq^{n-2} \quad (3.13)$$

$$L_{p,q,n-2}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,n-1}L_{p,q,n} = (-q)^{n-2}(p^3 + 4pq) \quad (3.14)$$

dir (Suvarnamani ve Tatong, 2015; Suvarnamani, 2016a).

İspat: İspat için (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri kullanılabilir. p, q, m, n pozitif tam sayılar olsun. $m \geq n$ için (3.3) eşitliği kullanılarak (3.13) eşitliği

$$\begin{aligned} F_{p,q,n-2}F_{p,q,n+1} - F_{p,q,n-1}F_{p,q,n} &= \left(\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{r_1^{n+1} - r_2^{n+1}}{r_1 - r_2} \right) - \left(\frac{r_1^{n-1} - r_2^{n-1}}{r_1 - r_2} \right) \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right) \\ &= \frac{(r_1^{2n-1} + r_2^{2n-1} - r_1^{n-2}r_2^{n+1} - r_1^{n+1}r_2^{n-2})}{(r_1 - r_2)^2} \\ &\quad - \frac{(r_1^{2n-1} + r_2^{2n-1} - r_1^n r_2^{n-1} - r_1^{n-1} r_2^n)}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= \frac{(-r_1^{n-2} + r_2^{n+1} - r_1^{n+1}r_2^{n-2} + r_1^n r_2^{n-1} + r_1^{n-1}r_2^n)}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= \frac{r_1^{n-1} \Gamma_z^{n-2}(-1)(r_1^3 + r_2^3 - r_1^2 r_2 - r_1 r_2^2)}{(r_1 - r_2)^2} \\ &= (-1)^{n-1} q^{n-2} (r_1 + r_2) \\ &= (-1)^{n-1} p q^{n-2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer olarak (3.4) eşitliği kullanılarak (3.14) eşitliği

$$\begin{aligned}
L_{p,q,n-2}L_{p,q,n+1} - L_{p,q,n-1}L_{p,q,n} &= (r_1^{n-2} + r_2^{n-2})(r_1^{n+1} + r_2^{n+1}) - (r_1^{n-1} + r_2^{n-1})(r_1^n + r_2^n) \\
&= (r_1^{2n-1} + r_2^{2n-1} + r_1^{n-2}r_2^{n+1} + r_1^{n+1}r_2^{n-2}) \\
&\quad - (r_1^{2n-1} + r_2^{2n-1} + r_1^n r_2^{n-1} + r_1^{n-1}r_2^n) \\
&= r_1^{n-2}r_2^{n+1} + r_1^{n+1}r_2^{n-2} - r_1^n r_2^{n-1} - r_1^{n-1}r_2^n \\
&= r_1^{n-2}r_2^{n-2}(r_1^3 + r_2^3 - r_1^2r_2 - r_1r_2^2) \\
&= (-q)^{n-2}(r_1 - r_2)(r_1^2 - r_2^2) \\
&= (-q)^{n-2}(r_1 + r_2)(r_1 - r_2)^2 \\
&= (-q)^{n-2}p(p^2 + 4q) \\
&= (-q)^{n-2}(p^3 + 4pq)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin tek ve çift indisli terimleri özellikleri eşitliklerle sunulacaktır.

Teorem 3.9: p, q ve n pozitif tam sayılar olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,2n} = F_{p,q,n}L_{p,q,n}$$

dir (Suvarnamani, 2016b).

İspat: (p, q) -Fibonacci dizisinin Binet formülü olan (3.3) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_{p,q,2n} &= \frac{r_1^{2n} - r_2^{2n}}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{(r_1^n)^2 - (r_2^n)^2}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{(r_1^n - r_2^n)}{r_1 - r_2} (r_1^n + r_2^n) \\
&= F_{p,q,n}L_{p,q,n}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.10: p, q ve n pozitif tam sayılar ve $n \geq 2$ olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$L_{p,q,2n} = \frac{(p^2 + 4p)F_{p,q,n}^2 + L_{p,q,n}^2}{2}$$

dir (Suvarnamani, 2016b).

İspat: (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri olan (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} L_{p,q,2n} &= (r_1^{2n} + r_2^{2n}) \\ &= \frac{(2r_1^{2n} + 2r_2^{2n})}{2} \\ &= \frac{(r_1^{2n} - 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n}) + (r_1^{2n} + 2r_1^n r_2^n + r_2^{2n})}{2} \\ &= \frac{(r_1^n - r_2^n)^2 + (r_1^n + r_2^n)^2}{2} \\ &= \frac{(r_1^n - r_2^n)^2 \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 - r_2}\right)^2 + (r_1^n + r_2^n)^2}{2} \\ &= \frac{(p^2 + 4p)F_{p,q,n}^2 + L_{p,q,n}^2}{2} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.11: p, q ve n pozitif tam sayılar olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,2n}F_{p,q,2n+1} = \frac{L_{p,q,4n+1} - pq^{2n}}{p^2 + 4p}$$

dir (Suvarnamani, 2016b).

İspat: (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri olan (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_{p,q,2n}F_{p,q,2n+1} &= \frac{r_1^{2n} - r_2^{2n}}{r_1 - r_2} \frac{r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{r_1^{4n+1} - r_1^{2n+1}r_2^{2n} - r_1^{2n}r_2^{2n+1} + r_2^{4n+1}}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{r_1^{4n+1} + r_2^{4n+1} - (r_1^{2n+1}r_2^{2n} + r_1^{2n}r_2^{2n+1})}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{r_1^{4n+1} + r_2^{4n+1} - r_1^{2n}r_2^{2n}(r_1 - r_2)}{(r_1 - r_2)^2} \\
&= \frac{L_{p,q,4n+1} - (-q)^{2n}p}{p^2 + 4q} \\
&= \frac{L_{p,q,4n+1} - pq^{2n}}{p^2 + 4q}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.12: p, q ve n pozitif tam sayılar olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$L_{p,q,2n}L_{p,q,2n+1} = L_{p,q,4n+1} + pq^{2n}$$

dir (Suvarnamani, 2016b).

İspat: (p, q) -Lucas dizisinin Binet formülü olan (3.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
L_{p,q,2n}L_{p,q,2n+1} &= (r_1^{2n} + r_2^{2n})(r_1^{2n+1} + r_2^{2n+1}) \\
&= r_1^{4n+1} - r_1^{2n+1}r_2^{2n} - r_1^{2n}r_2^{2n+1} + r_2^{4n+1} \\
&= (r_1^{4n+1} + r_2^{4n+1}) + (r_1^{2n+1}r_2^{2n} + r_1^{2n}r_2^{2n+1}) \\
&= (r_1^{4n+1} + r_2^{4n+1}) + r_1^{2n}r_2^{2n}(r_1 + r_2) \\
&= L_{p,q,4n+1} + pq^{2n}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.13: p, q ve n pozitif tam sayılar olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,2n}L_{p,q,2n+1} = F_{p,q,4n+1} - q^{2n}$$

dir (Suvarnamani, 2016b).

İspat: (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri olan (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} F_{p,q,2n}L_{p,q,2n+1} &= \left(\frac{r_1^{2n} - r_2^{2n}}{r_1 - r_2} \right) (r_1^{2n+1} + r_2^{2n+1}) \\ &= \frac{r_1^{4n+1} - r_1^{2n+1}r_2^{2n} + r_1^{2n}r_2^{2n+1} - r_2^{4n+1}}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{(r_1^{4n+1} - r_2^{4n+1}) - (r_1^{2n+1}r_2^{2n} - r_1^{2n}r_2^{2n+1})}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{(r_1^{4n+1} - r_2^{4n+1}) - r_1^{2n}r_2^{2n}(r_1 - r_2)}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{(r_1^{4n+1} - r_2^{4n+1})}{r_1 - r_2} - (r_1r_2)^{2n} \\ &= F_{p,q,4n+1} - q^{2n} \end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 3.14: p, q ve n pozitif tam sayılar olsun. n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$F_{p,q,2n+1}L_{p,q,2n} = F_{p,q,4n+1} + q^{2n}$$

dir (Suvarnamani, 2016b).

İspat: (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülleri olan (3.3) ve (3.4) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_{p,q,2n+1}L_{p,q,2n} &= \left(\frac{r_1^{2n+1} - r_2^{2n+1}}{r_1 - r_2} \right) (r_1^{2n} + r_2^{2n}) \\
&= \frac{r_1^{4n+1} + r_1^{2n+1}r_2^{2n} - r_1^{2n}r_2^{2n+1} - r_2^{4n+1}}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{(r_1^{4n+1} - r_2^{4n+1}) + (r_1^{2n+1}r_2^{2n} - r_1^{2n}r_2^{2n+1})}{r_1 - r_2} \\
&= \frac{(r_1^{4n+1} - r_2^{4n+1}) + r_1^{2n}r_2^{2n}(r_1 - r_2)}{r_1 - r_2} \\
&= F_{p,q,4n+1} + q^{2n}
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

3.2. Genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci Benzeri Diziler

Bu bölümde (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri ile ilişkili genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci benzeri diziler ve özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.15: $p, q \geq 1$ ve $k \geq 0$ olmak üzere $S_{p,q,0} = 2k$, $S_{p,q,1} = 1 + kp$ başlangıç değerleri ile genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci benzeri diziler

$$S_{p,q,n} = pS_{p,q,n-1} + qS_{p,q,n-2}, \quad n \geq 2 \quad (3.15)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve $\{S_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ şeklinde gösterilir (Taşyurdu, 2019).

Tanım 3.15 den genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci benzeri dizisi

$$\{S_{p,q,n}\}_{n \geq 0} = \{2k, 1 + kp, p + kp^2 + 2kq, p^2 + kp^3 + 3kpq + q, \dots\}$$

şeklindedir. Tanım 3.15 birçok çalışmada sunulmuş farklı dizilerin genel halidir. Bunun için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.16: Tanım 3.15 te

- $k = 0$ alınırsa (Suvarnamani and Tatong, 2015) çalışmasında

$$F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2}, F_{p,q,0} = 0, F_{p,q,1} = 1, n \geq 2$$

olarak sunulan (p, q) -Fibonacci dizileri $\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$

- $k = 0, p = a$ ve $q = b$ alınırsa (Klaman and Mena, 2002) çalışmasında

$$\mathcal{F}_n = a\mathcal{F}_{n-1} + b\mathcal{F}_{n-2}, \mathcal{F}_0 = 0, \mathcal{F}_1 = 1, n \geq 2$$

olarak sunulan genelleştirilmiş Fibonacci dizileri $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$

- $k = 0$ ve $p = q = 1$ alınırsa (Horadam, 1961) çalışmasında

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_0 = 0, F_1 = 1, n \geq 2$$

olarak sunulan bilinen Fibonacci dizileri $\{F_n\}_{n \geq 0}$

- $k = 0$ ve $p = 2$ ve $q = 1$ alınırsa (Horadam, 1971) çalışmasında

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, P_0 = 0, P_1 = 1, n \geq 2$$

olarak sunulan bilinen Pell dizileri $\{P_n\}_{n \geq 0}$

- $k = 0$ ve $p = 1$ ve $q = 2$ alınırsa (Horadam, 1996) çalışmasında

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, J_0 = 0, J_1 = 1, n \geq 2$$

olarak sunulan bilinen Jacobsthal dizileri $\{J_n\}_{n \geq 0}$

- $k = 1$ ve $p = 1$ ve $q = 1$ alınırsa (Singh, *et al*, 2010) çalışmasında

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}, S_0 = 2, S_1 = 2, n \geq 2$$

olarak sunulan Fibonacci benzer dizileri $\{S_n\}_{n \geq 0}$

- $k = 1$ ve $p = 1$ ve $q = 2$ alınırsa (Gupta *et al*, 2012) çalışmasında

$$V_n = V_{n-1} + 2V_{n-2}, V_0 = 2, V_1 = 2, n \geq 2$$

olarak sunulan $\{V_n\}_{n \geq 0}$ dizileri elde edilir (Taşyurdu, 2019).

(p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri ile genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci benzeri diziler arasında $n \geq 0$ için

$$S_{p,q,n} = F_{p,q,n} + kL_{p,q,n}$$

eşitliği sağlanır. (3.15) eşitliğinin $r^2 - pr - q = 0$ karakteristik denkleminin kökleri

$$r_1 = \frac{p + \sqrt{p^2 + 4q}}{2} \text{ ve } r_2 = \frac{p - \sqrt{p^2 + 4q}}{2}$$

olmak üzere genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci benzeri dizileri için Binet formülü ve üreteç fonksiyonu sırasıyla

$$S_{p,q,n} = \left(\frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \right) + k(r_1^n + r_2^n)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_{p,q,n} x^n = \frac{2k + (1 - kp)x}{1 - px - qx^2}$$

şeklindedir (Taşyurdu, 2019).

Teorem 3.17: p, q, k, m, n ve t pozitif tam sayılar olmak üzere

i. (Cassini eşitliği) $n \geq 1$ için

$$S_{p,q,n+1}S_{p,q,n-1} - S_{p,q,n}^2 = (-1)^n q^{n-1} (1 - k^2(p^2 + 4q))$$

ii. (Catalan eşitliği) $m \geq n$ için

$$S_{p,q,m-n}S_{p,q,m+n} - S_{p,q,m}^2 = (-q)^{m-n} (-1 + k^2(p^2 + 4q)) F_{p,q,n}^2$$

iii. (Vajda eşitliği)

$$S_{p,q,m+n}S_{p,q,m+t} - S_{p,q,m}S_{p,q,m+n+t} = (-q)^m (1 - k^2(p^2 + 4q)) F_{p,q,n} F_{p,q,t}$$

iv. (d'Ocagne's eşitliği) $m \geq n$ için

$$S_{p,q,m}S_{p,q,n+1} - S_{p,q,m+1}S_{p,q,n} = (-q)^n (1 - k^2(p^2 + 4q)) F_{p,q,m-n}$$

v. $n \geq 2$ için $S_{p,q,n-2}S_{p,q,n+1} - S_{p,q,n-1}S_{p,q,n} = p(-q)^{n-2} (-1 + k^2(p^2 + 4q))$

vi. $S_{p,q,m}S_{p,q,n+1} + qS_{p,q,m-1}S_{p,q,n} = (1 + k^2(p^2 + 4q)) F_{p,q,m+n} + 2kL_{p,q,m+n}$

dir (Taşyurdu, 2019).

Teorem 3.18: Genelleştirilmiş (p, q) -Fibonacci benzeri dizilerinin, $\{S_{p,q,n}\}$

i. İlk n teriminin toplamı

$$\sum_{i=0}^n S_{p,q,i} = \frac{1 + k(2 - p) - S_{p,q,n+1} - qS_{p,q,n}}{1 - p - q}$$

ii. Tek indisli ilk n teriminin toplamı

$$\sum_{i=0}^n S_{p,q,2i+1} = \frac{1 + kp(1 + q) - q - S_{p,q,2n+3} + q^2 S_{p,q,2n+1}}{1 - p^2 - 2q + q^2}$$

iii. Çift indisli ilk n teriminin toplamı

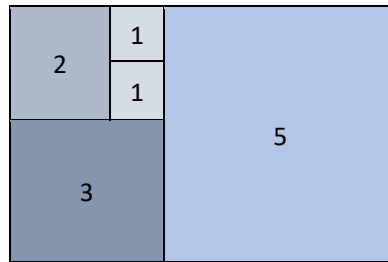
$$\sum_{i=0}^n S_{p,q,2i} = \frac{p + k(2 - p^2 - 2q) - S_{p,q,2n+2} + q^2 S_{p,q,2n}}{1 - p^2 - 2q + q^2}$$

şeklindedir (Taşyurdu, 2019).

3.2.1. Bazı sayı dizilerinin döşeme yorumları

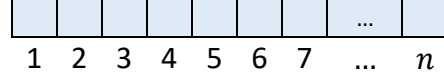
Düzlemi döşemenin geleneksel yöntemlerinden biri, uyumlu geometrik şekiller kullanmaktır. Yani, düzlem belirli bir şekil veya döşemenin üst üste binmeyen ötelemeleriyle kaplanmalıdır. Bu tür döşemeler, her bir döşemenin merkezlerinin önemli bir rol oynadığı ilgi çekici cebirsel modellere sahiptir.

Fibonacci dizileri kullanılarak çeşitli kareler döşenmiş ve bu tür desenler Fibonacci sayılarının ilginç cebirsel özelliklerini göstermek için kullanılmıştır (Brousseau, 1972). i -inci karenin kenarları $(i + 1)$ -inci Fibonacci sayısına karşılık gelen karelerle döşenmiş aşağıdaki Şekil 3.1 elde edilmiştir.



Şekil 3.1. İlk birkaç Fibonacci sayısının kare döşemesi

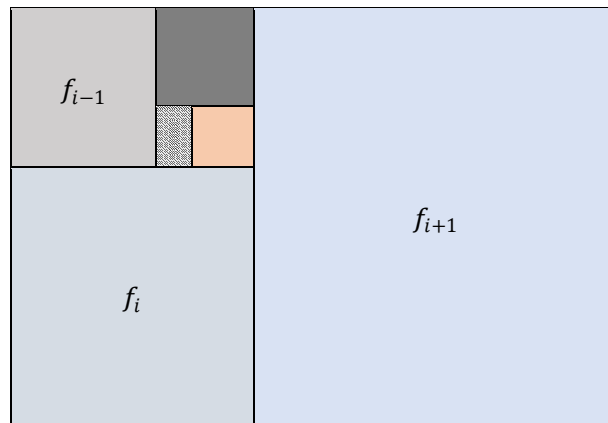
n hücreli n uzunluğundaki bir tahta $1 \times n$ ile gösterilmek üzere Fibonacci sayıları için başka bir yaklaşım olan diğer döşeme yorumu, 1×1 kareleri ve 1×2 dominoları kullanarak bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını nasıl bulacağımızı gösterir. Bu görsel yorum Şekil 3.2 ile verilmiştir.



Şekil 3.2. n hücreli n uzunluğundaki $1 \times n$ tahtası

$n \geq 1$ için $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını F_{n+1} temsil etsin. 1 uzunluğundaki tahta sadece 1×1 tahtası kullanılarak tek bir şekilde döşendiğinden $F_2 = 1$ ve 2 uzunluğundaki tahta iki tane 1×1 karesi veya 1×2 dominosu kullanılarak döşendiğinden $F_3 = 2$ dir. $n \geq 3$ için döşemenin bir 1×1 kare ile bittiği $F_{n+1-1} = F_n$ yol ve bir 1×2 domino ile bittiği durumlarda $F_{n+1-2} = F_{n-1}$ yolu olduğunu görüyoruz. Böylece Tanım 2.8 de verilen Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısı $n \geq 1$ için $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ olarak elde edilir. Buradan n -inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere özel olarak $f_n = F_{n+1}$ olsun. Bu durumda $f_1 = 1$ ve $f_2 = 2$ başlangıç değerleri için $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ rekürans bağıntısıyla tanımlanan dizide $f_0 = 1$ olur.

Fibonacci dizisinin rekürans bağıntısını dikkate alarak genel durum için Şekil 3.3 ile verilmiş spiral desenler elde edilebilir.



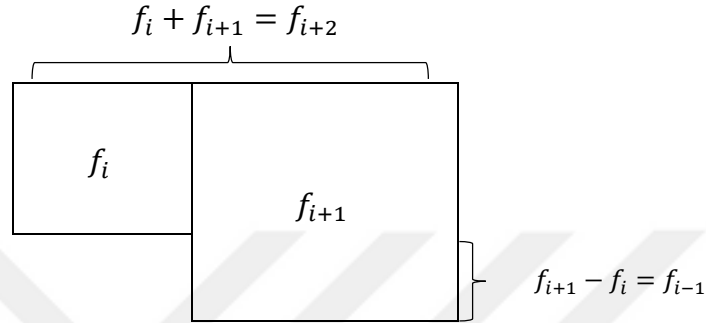
Şekil 3.3. Fibonacci dizinin kare döşemesi

Teorem 3.20: Fibonacci sayılarının karelerinin toplamı

$$f_i^2 + f_{i+1}^2 = f_{2i+1}$$

dir.

İspat: Fibonacci sayıları karelerini alanlar olarak alınırsa aşağıdaki şekil elde edilir.



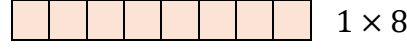
Bu alan $f_{i-1}f_{i+1} + f_i f_{i+2}$ olarak gösterilebilir. Fibonacci dizisinin $f_{i-1}f_j + f_i f_{j+1} = f_{i+j}$ özelliğinden $f_{i+(i+1)} = f_{2i+1}$ elde edilir.

Bu döşeme probleminin yukarıdaki çözümü genellikle kombinatoryal yollarla elde edilir ve aşağıdaki teorem ile özetlenir (Brigham vd., 1996-97).

Teorem 3.21: 1×1 kareler ve 1×2 dominolar kullanarak bir $1 \times n$ tahtasını döşemenin f_n farklı yolu vardır.

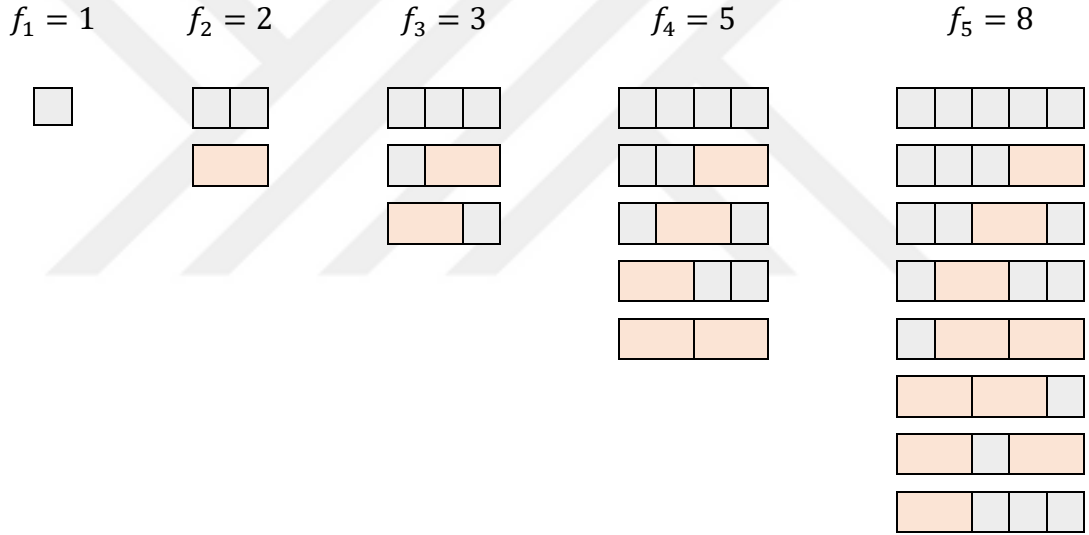
İspat: n uzunluğundaki bir $1 \times n$ tahtanın döşemelerinin sayısı s_n olsun. $f_n = s_n$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. $n = 1$ için 1×1 tahtası kullanılarak tek bir şekilde döşendiğinden $f_1 = 1$ ve 2 uzunluğundaki tahta iki tane 1×1 karesi veya 1×2 dominosu kullanılarak döşendiğinden $f_2 = 2$ dir. n için $f_n = s_n$ olduğunu kabul edelim. İspat için $f_{n+1} = s_{n+1}$ olduğunu göstermeliyiz. $1 \times (n + 1)$ tahtası için tüm döşemeler ya 1×1 karesi yada 1×2 dominosu ile başlar. Bir 1×1 kare ile başlarsa kalan $(n + 1) - 1$ hücreyi döşemelerin sayısı s_n dir. Bir 1×2 domino ile başlarsa kalan $(n + 1) - 2$ hücreyi döşemelerin sayısı s_{n-1} dir. Toplam döşeme sayısı bu iki ayrı durumun toplamı olup tümevarım prensibinden $s_{n+1} = s_n + s_{n-1} = f_n + f_{n-1} = f_{n+1}$ bulunur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Örnek 3.22: $f_5 = 8$ sayısı 1×8 tahtasının 1×1 kareler ve 1×2 dominolarla döşemenin yollarının sayısına eşittir. 8 uzunluğundaki 1×8 tahtasını



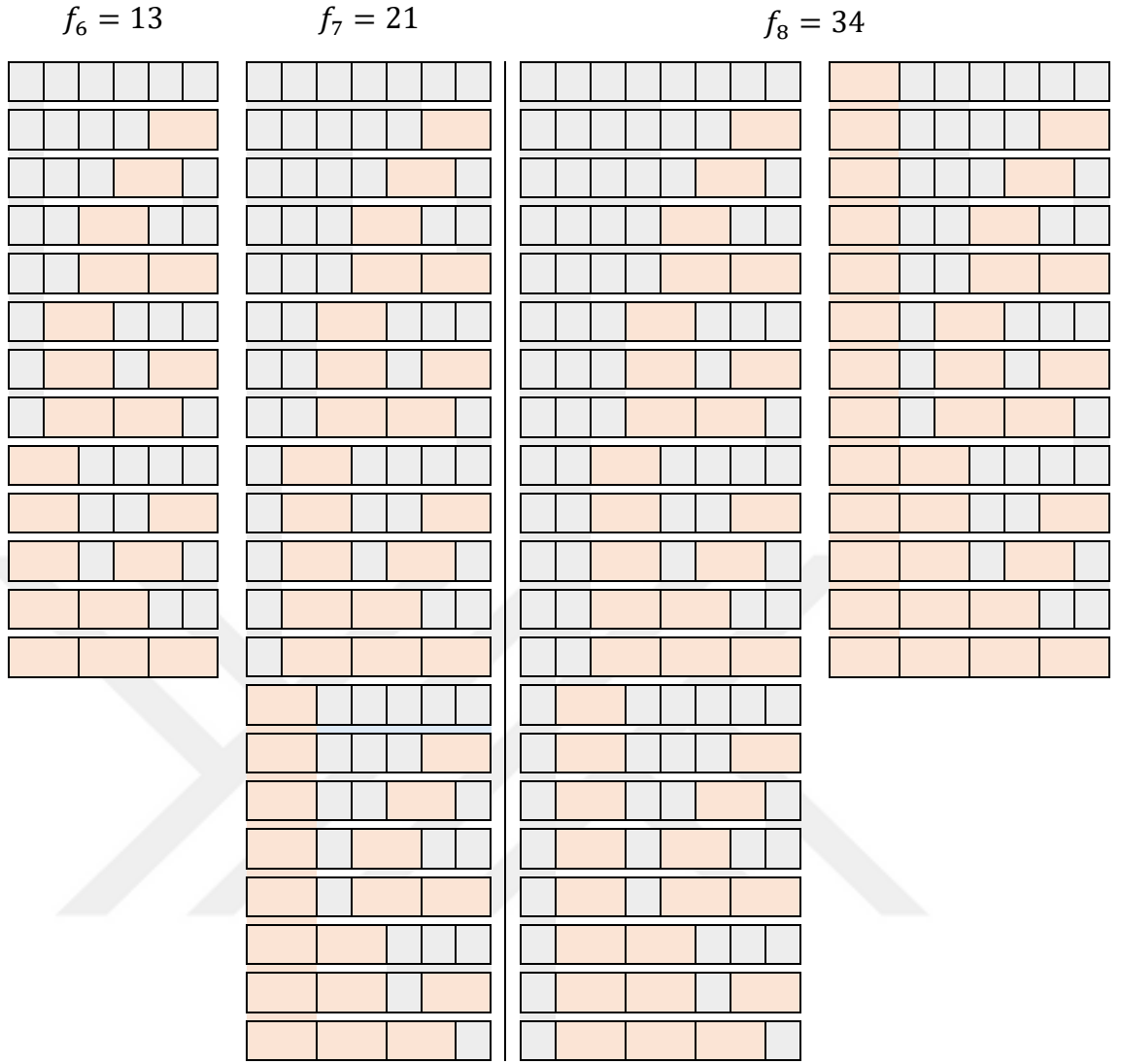
olarak alalım. 8 hücrenin tümünü, 8 tane 1×1 kare veya 4 tane 1×2 domino kullanabilir fakat birçok farklı kombinasyon vardır ve bunların nasıl düzenlenip sayılacağı kolay bir şekilde elde edilemeyebilir. Bunun için önce daha küçük durumlara bakabilir. f_n , $1 \times n$ tahtasının farklı döşeme yollarının sayısı olsun. Buradan f_8 kadar çalışalım.

$f_1 = 1$, $f_2 = 2$, $f_3 = 3$, $f_4 = 5$ ve $f_5 = 8$ elde edilir. Yani bir 1×5 tahtasını döşemenin 8 farklı yolu vardır.



Şekil 3.4. f_1, f_2, f_3, f_4 ve f_5 sayılarının döşemeleri

Diğer bulunan sonuçlarda olduğu gibi burada da ana rekürans bağıntısının $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ olduğu görülür. Yani bir $1 \times n$ tahtasının döşeme yollarının sayısı, bir $1 \times (n-1)$ tahtasını döşeme yollarının sayısı ile bir $1 \times (n-2)$ tahtasını döşeme yollarının sayısının toplamıdır. Bu döşeme çözümlerde rekürans bağıntısının nereden ortaya çıktığını düşünmeye olanak sağlar. Bu yinelemeyi, n nin her ardışık değeri için olası tüm döşemeleri hızlı bir şekilde çizmek için de kullanabilir. Önce tüm $n-1$ döşemeleri alıp sola bir 1×1 kare eklenir ardından $n-2$ döşemeleri alıp sola bir 1×2 domino eklenir. Örnek 3.22 deki işlemi tekrarlayarak $f_6 = 13$, $f_7 = 21$ ve son olarak $f_8 = 34$ olduğunu görülür. Bu sayıların döşemeleri Şekil 3.5 ile verilmiştir.



Şekil 3.5. f_6 , f_7 ve f_8 sayılarının döşemeleri

Dolayısıyla Fibonacci dizisi, döşeme yorumlarına genel bir yanıt vermiştir. Ayrıca n -inci Fibonacci sayısı F_n olmak üzere özel olarak $f_n = F_{n+1}$ olup Teorem 3.21 den 1×1 kareler ve 1×2 dominolar kullanarak bir $1 \times n$ tahtasını döşemenin F_{n+1} farklı yolu vardır.

Teorem 3.23:

$$f_{n+2} = \sum_{i=0}^n f_i + 1$$

(Biggs, 1985)

İspat: İspat klasik yol olan tümevarım metodu ile yapılabilceği gibi hücreleri döşememek daha doğrudan bir görsel ispat olacaktır. Buna göre Teorem 3.21 den 1×1 kareler ve 1×2 dominolar kullanılarak bir $1 \times (n + 2)$ tahtasını döşemelerin sayısı f_{n+2} ye eşittir. Böylece bu eşitliğin sol tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sağ tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. Bir $1 \times (n + 2)$ tahtasını düşünelim. Tüm hücrelerin 1×1 kare olduğu döşemelerin sayısı 1 dir. Diğer tüm döşemeler en az bir 1×2 domino içerir. 1×2 domino içeren döşemeler, soldan başlayarak ilk 1×2 dominonun konumuna göre parçalanabilir. O halde bu ilk 1×2 domino, $1 \leq i \leq n + 1$ için i ve $i + 1$ hücrelerini kapsıyorsa $f_{n+2-(i+1)}$ döşeme olduğu anlamına gelir. Tüm döşemelerin toplamı istenen sonuç olup $f_{n+2} = \sum_{i=0}^n f_i + 1$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

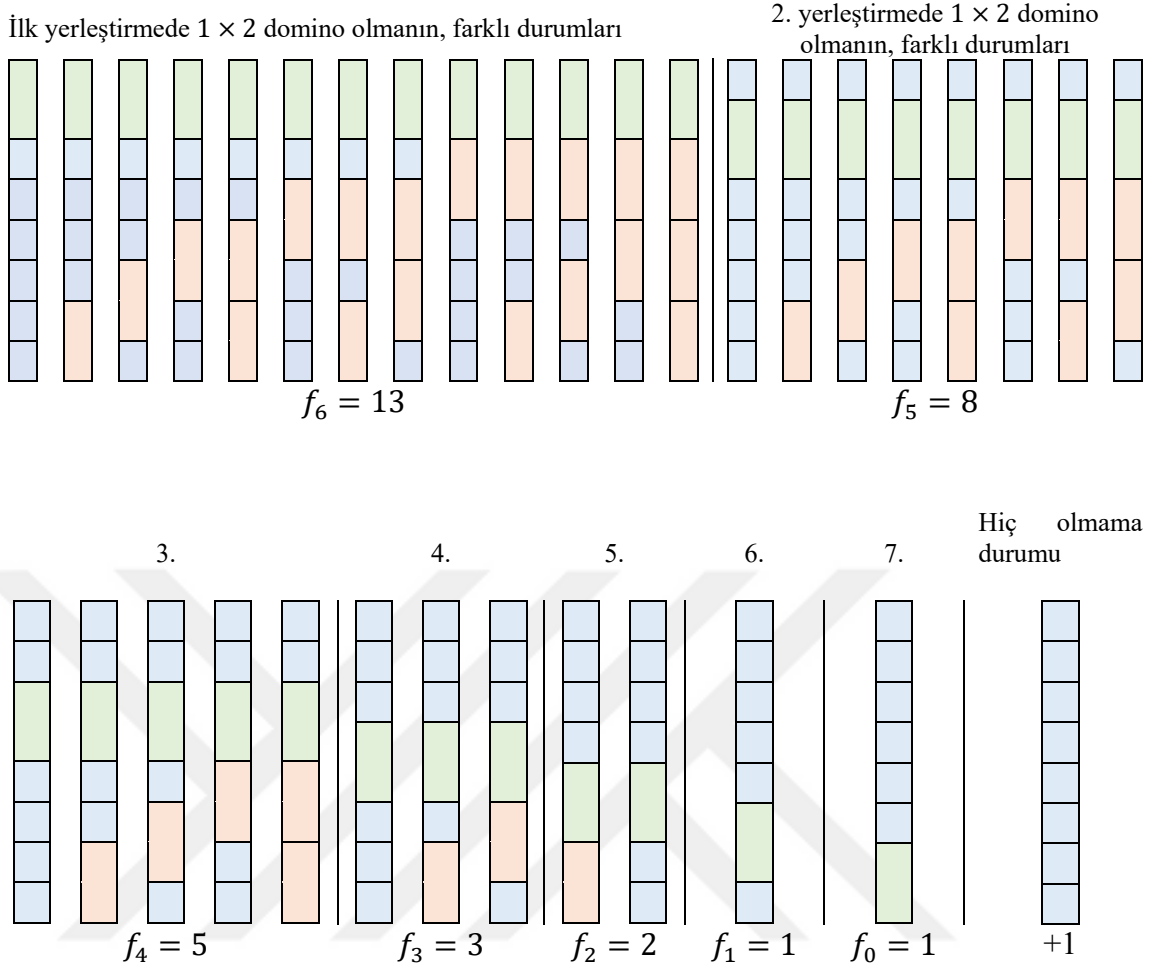
Teorem 3.23 te $n = 0, 1, \dots, 8$ için aşağıdaki örnek incelenebilir.

Örnek 3.24: Şekil 3.4 ve 3.5 verilen $n = 0, 1, \dots, 8$ için $1 \times n$ tahtasını döşemenin 34 farklı durumun olup

$$\begin{aligned} f_{6+2} &= \sum_{i=0}^6 f_i + 1 \\ &= f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 + 1 \\ &= 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 1 \end{aligned}$$

dir.

Bu örneğin görel yorumu için Şekil 3.6 incelenebilir. Görüldüğü gibi 1×2 dominonun konumu önemlidir. 1×2 dominosu ya ilk sırada, ikinci sırada, üçüncü sırada, son sırada olabilir ya da hiç olmayabilir. Bu durumları ayırırsak, 1×2 domino ile başlayarak f_{n-2} farklı yolu olduğunu görülür ve daha sonra diğer durumları elde edilir. Tüm hücrelerin 1×1 kare olduğu döşemelerin sayısı 1 ise hiç 1×2 dominosunun olmadığı durum anlamına gelir.



Şekil 3.6. 1×2 dominosuna göre f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ve f_6 sayılarının döşemeleri

Teorem 3.25:

- i. $f_{2n+1} = \sum_{i=0}^n f_{2i}$
- ii. $f_{2n+2} = \sum_{j=0}^n f_{2j+1} + 1$
- iii. $f_{n+1} = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-j}{j}$
- iv. $f_n f_{n+1} = \sum_{j=0}^n f_j^2$
- v. $f_{2n}^2 = \sum_{j=0}^{2n-1} f_j f_{j+1} + 1$

(Koshy, 2001).

3.3. Genelleştirilmiş Bi-periyodik Fibonacci ve Bi-periyodik Lucas Dizileri

Bu bölümde rekürans dizilerinin rekürans bağıntıları ile tek ve çift indisli terimleri dikkate alınarak tanımlanan Fibonacci tipli ve Lucas tipli dizilerin genelleştirmeleri sunulmuştur. Bi-periyodik Fibonacci tipli ve bi-periyodik Lucas tipli diziler olarak adlandırılan bu diziler ve özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu yeni genelleştirmeler için Binet formülleri, üreteç fonksiyonları ve önemli eşitlikler sunulmuştur.

3.3.1. Fibonacci tipli bi-periyodik diziler

Tanım 3.25: a, b sıfırdan farklı reel sayılar ve $n \geq 2$ için $q_0 = 0, q_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $\{q_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilen bi-periyodik Fibonacci dizileri

$$q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.16)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Edson ve Yayenie, 2009).

Tanım 3.25 kullanılarak bi-periyodik Fibonacci dizileri

$$\{q_n\}_{n \geq 0} = \{0, 1, a, ab + 1, a^2b + 2a, a^2b^2 + 3ab + 1, \dots\}$$

şeklindedir.

Bi-periyodik Fibonacci dizilerine benzer şekilde tanımlanan bi-periyodik Pell dizileri ve bi-periyodik Jacobsthal dizileri aşağıdaki tanım ile verilmiştir.

Tanım 3.26: a, b sıfırdan farklı reel sayılar ve $n \geq 2$ için

- i. $\mathcal{P}_0 = 0, \mathcal{P}_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere bi-periyodik Pell dizileri, $\{\mathcal{P}_n\}_{n \geq 0}$

$$\mathcal{P}_n = \begin{cases} 2a\mathcal{P}_{n-1} + \mathcal{P}_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ 2b\mathcal{P}_{n-1} + \mathcal{P}_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

- ii. $\mathcal{J}_0 = 0, \mathcal{J}_1 = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere bi-periyodik Jacobsthal dizileri, $\{\mathcal{J}_n\}_{n \geq 0}$

$$\mathcal{J}_n = \begin{cases} a\mathcal{J}_{n-1} + 2\mathcal{J}_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ b\mathcal{J}_{n-1} + 2\mathcal{J}_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntılarıyla tanımlanır (Uygun ve Owusu, 2016; Uygun ve Karataş, 2020).

Şimdi Fibonacci tipli bi-periyodik dizilerin üreteç fonksiyonları verilecektir. n -inci bi-periyodik Fibonacci sayısı q_n olmak üzere $\{q_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (3.17)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.27: Bi-periyodik Fibonacci dizileri için üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x(1 + ax - x^2)}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

şeklindedir (Edson ve Yayenie, 2009).

İspat: Bi-periyodik Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_k x^k + \dots$$

yazılabilir. Buradan

$$bxF(x) = bq_0 x + bq_1 x^2 + bq_2 x^3 + \dots + bq_k x^{k+1} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} bq_m x^{m+1} = \sum_{m=1}^{\infty} bq_{m-1} x^m$$

ve

$$x^2 F(x) = q_0 x^2 + q_1 x^3 + q_2 x^4 + \dots + q_k x^{k+2} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^{m+2} = \sum_{m=2}^{\infty} q_{m-2} x^m$$

yazılır. (3.16) rekürans bağıntısından $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ başlangıç değerleri için $q_{2k+1} = bq_{2k} + q_{2k-1}$ eşitliğinden

$$(1 - bx - x^2)F(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (q_{2m} - bq_{2m-1} - q_{2m-2})x^{2m}$$

elde edilir.

Benzer olarak (3.16) rekürans bağıntısından $q_0 = 0$, $q_1 = 1$ başlangıç değerleri için $q_{2k} = aq_{2k-1} + q_{2k-2}$ eşitliğinden

$$(1 - bx - x^2)F(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} (a - b)q_{2m-1}x^{2m} = x + (a - b)x \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m-1}x^{2m-1}$$

dir. Buradan

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m-1}x^{2m-1}$$

olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} q_{2k+1} &= bq_{2k} + q_{2k-1} \\ &= b(aq_{2k-1} + q_{2k-2}) + q_{2k-1} \\ &= (ab + 1)q_{2k-1} + bq_{2k-2} \\ &= (ab + 1)q_{2k-1} + q_{2k-1} - q_{2k-3} \\ &= (ab + 2)q_{2k-1} - q_{2k-3} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (1 - (ab + 2)x^2 + x^4)f(x) &= x - x^3 + \sum_{m=3}^{\infty} (q_{2m-1} - (ab + 2)q_{2m-3} + q_{2m-5})x^{2m-1} \\ &= x - x^3 \end{aligned}$$

ve

$$f(x) = \frac{x - x^3}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

yazılır. Bulunan $f(x)$ değeri için

$$\begin{aligned} (1 - bx - x^2)F(x) &= x + (a - b)x \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m-1}x^{2m-1} \\ &= (x + (a - b)x) \frac{x - x^3}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4} \end{aligned}$$

dir.

Gerekli sadeleştirmeler yapılarak bi-periyodik Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x(1 + ax - x^2)}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Bi-periyodik Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonuna benzer şekilde elde edilen bi-periyodik Pell ve bi-periyodik Jacobsthal dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.28: Bi-periyodik Pell dizilerinin üreteç fonksiyonu $P(x)$ ve bi-periyodik Jacobsthal dizilerinin üreteç fonksiyonu $J(x)$ olmak üzere

i. Bi-periyodik Pell dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$P(x) = \frac{x + 2ax^2 - x^3}{1 - (4ab + 2)x^2 + x^4}$$

ii. Bi-periyodik Jacobsthal dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$J(x) = \frac{x(1 + ax - 2x^2)}{1 - (ab + 4)x^2 + 4x^4}$$

şeklinde tanımlanır (Uygun ve Owusu, 2016; Uygun ve Karataş, 2020).

Fibonacci tipli bi-periyodik dizilerin terimleri rekürans bağıntıları kullanılarak elde edilebilmesinin yanısıra bilinen dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde Fibonacci tipli bi-periyodik dizilerin n -inci terimler elde edilir.

Şimdi bi-periyodik Fibonacci dizileri için Binet formülü verilecektir.

(3.16) rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - abx - ab = 0$ dır. Bu denklemin kökleri α ve β olmak üzere

$$\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$$

şeklindedir.

Ayrıca bu kökler arasında

$$\begin{aligned}
(\alpha + 1)(\beta + 1) &= 1 \\
\alpha + \beta &= ab \\
\alpha\beta &= -ab \\
\alpha + 1 &= \frac{\alpha^2}{ab} \\
\beta + 1 &= \frac{\beta^2}{ab} \\
-\beta(\alpha + 1) &= \alpha \\
-\alpha(\beta + 1) &= \beta
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Buradan bi-periyodik Fibonacci dizilerinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.29: $n \geq 0$ için α ve β , $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri ve $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere bi-periyodik Fibonacci dizilerinin Binet formülü

$$q_m = \left(\frac{a^{1-\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}} \right) \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir (Edson ve Yayenie, 2009).

İspat: $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri α ve β olsun. Bu köklerin özellikleri Teorem 3.27 ile verilen bi-periyodik Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonunda kullanılırsa

$$F(x) = \frac{x(1 + ax - x^2)}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4} = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{a(\alpha + 1) - \alpha x}{x^2 - (\alpha + 1)} - \frac{a(\beta + 1) - \beta x}{x^2 - (\beta + 1)} \right]$$

yazılır. $\frac{A-Bz}{z^2-C}$ fonksiyonun Maclaurin serisinin açılımından

$$\frac{A - Bz}{z^2 - C} = \sum_{n=0}^{\infty} BC^{-n-1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} AC^{-n-1} z^{2n}$$

dir.

Buradan $F(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\frac{a(\alpha + 1) - \alpha x}{x^2 - (\alpha + 1)} - \frac{a(\beta + 1) - \beta x}{x^2 - (\beta + 1)} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{-\beta(\alpha + 1)^{m+1} + \alpha(\beta + 1)^{m+1}}{(\alpha + 1)^{m+1}(\beta + 1)^{m+1}} x^{2m+1} \right] \\ & \quad + \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\beta + 1)(\alpha + 1)^{m+1} - (\alpha + 1)(\beta + 1)^{m+1}}{(\alpha + 1)^{m+1}(\beta + 1)^{m+1}} x^{2m} \right] \end{aligned}$$

olup α ve β köklerinin özelliklerinden

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ab} \right)^{m+1} \frac{-\beta\alpha^{2m+2} + \alpha\beta^{2m+2}}{\alpha - \beta} x^{2m+1} \\ & \quad + \sum_{m=0}^{\infty} a \left(\frac{1}{ab} \right)^{m+1} \frac{(\beta + 1)\alpha^{2m+2} - (\alpha + 1)\beta^{2m+2}}{\alpha - \beta} x^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ab} \right)^m \frac{\alpha^{2m+1} - \beta^{2m+1}}{\alpha - \beta} x^{2m+1} \\ & \quad + \sum_{m=0}^{\infty} a \left(\frac{1}{ab} \right)^m \frac{\alpha^{2m} - \beta^{2m}}{\alpha - \beta} x^{2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^{1-\varepsilon(m)} \left(\frac{1}{ab} \right)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} x^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} q_m x^m \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $m \geq 0$ için

$$q_m = \left(\frac{\alpha^{1-\xi(m)}}{(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} \right) \frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta}$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Bi-periyodik Fibonacci dizilerin Binet formülüne benzer şekilde elde edilen bi-periyodik Pell ve bi-periyodik Jacobsthal dizilerinin Binet formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.30:

- i. $x^2 - 2abx - ab = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere bi-periyodik Pell dizilerinin Binet formül

$$\mathcal{P}_n = \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

- ii. $x^2 - abx - 2ab = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere bi-periyodik Jacobsthal dizilerinin Binet formülü

$$\mathcal{J}_n = \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

şeklindedir (Uygun ve Owusu, 2016; Uygun ve Karataş, 2020).

3.3.2. Lucas tipli bi-periyodik diziler

Tanım 3.31: a, b sıfırdan farklı reel sayılar ve $n \geq 2$ için $l_0 = 2$, $l_1 = a$ başlangıç değerleri olmak üzere $\{l_n\}_{n \geq 0}$ ile gösterilen bi-periyodik Lucas dizileri

$$l_n = \begin{cases} bl_{n-1} + l_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ al_{n-1} + l_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (3.18)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır (Bilgici, 2014).

Tanım 3.31 kullanılarak bi-periyodik Lucas dizileri

$$\{l_n\}_{n \geq 0} = \{2, a, ab + 2, a^2b + 3a, a^2b^2 + 4ab + 2, a^2b^3 + 4ab^2 + a^2b + 2b + 3a, \dots\}$$

şeklindedir.

Bi-periyodik Lucas dizilerine benzer şekilde tanımlanan bi-periyodik Pell-Lucas ve bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizileri aşağıdaki tanım ile verilmiştir.

Tanım 3.32: a, b sıfırdan farklı reel sayılar ve $n \geq 2$ için

- i. $Q_0 = 2, Q_1 = 2a$ başlangıç değerleri olmak üzere bi-periyodik Pell-Lucas dizileri, $\{Q_n\}_{n \geq 0}$

$$Q_n = \begin{cases} 2bQ_{n-1} + Q_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ 2aQ_{n-1} + Q_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

- ii. $c_0 = 2, c_1 = a$ başlangıç değerleri olmak üzere bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizileri, $\{c_n\}_{n \geq 0}$

$$c_n = \begin{cases} bc_{n-1} + 2c_{n-2}, & n \text{ çift ise} \\ ac_{n-1} + 2c_{n-2}, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

rekürans bağıntılarıyla tanımlanır (Uygun ve Karataş, 2019; Uygun ve Owusu, 2019).

Şimdi Lucas tipli bi-periyodik dizilerin üreteç fonksiyonları verilecektir. n -inci bi-periyodik Lucas sayısı l_n olmak üzere $\{l_n\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n x^n \quad (3.19)$$

olsun. Buradan aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 3.33: Bi-periyodik Lucas dizileri için üreteç fonksiyonu

$$L(x) = \frac{2 + ax - (ab + 2)x^2 + ax^3}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

şeklindedir (Bilgici, 2014).

İspat: Bi-periyodik Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu $L(x)$ olmak üzere

$$L(x) = \sum_{m=0}^{\infty} l_m x^m = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \dots + l_k x^k + \dots$$

dir.

Bu üreteç fonksiyonu çift ve tek indisli terimlerden oluşan ayrı iki dizinin toplamı şeklinde yazılsın. Buna göre

$$L_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{2m}x^{2m} \quad \text{ve} \quad L_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{2m+1}x^{2m+1}$$

olmak üzere

$$L(x) = L_0(x) + L_1(x)$$

yazılabilir. Daha açık olarak

$$L_0(x) = 2 + (ab + 2)x^2 + \sum_{m=2}^{\infty} l_{2m}x^{2m}$$

olur. Buradan

$$(ab + 2)x^2 L_0(x) = 2(ab + 2)x^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (ab + 2)l_{2m-2}x^{2m}$$

$$x^4 L_0(x) = \sum_{m=2}^{\infty} l_{2m-4}x^{2m}$$

yazılır. (3.18) rekürans bağıntısından

$$[1 - (ab + 2)x^2 + x^4]L_0(x) = 2 - (ab + 2)x^2$$

dir. Buradan

$$L_0(x) = \frac{2 - (ab + 2)x^2}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

ve benzer şekilde

$$L_1(x) = \frac{a + ax^3}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

elde edilir. $L(x) = L_0(x) + L_1(x)$ eşitliğinden bi-periyodik Lucas dizilerinin üreteç üreteç fonksiyonu

$$L(x) = \frac{2 + ax - (ab + 2)x^2 + ax^3}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Bi-periyodik Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonuna benzer şekilde elde edilen bi-periyodik Pell-Lucas ve bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonları aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.34: Bi-periyodik Pell-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu $Q(x)$ ve bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu $J(x)$ olmak üzere

i. Bi-periyodik Pell-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$Q(x) = \frac{2 + 2ax - (4ab + 2)x^2 + 2ax^3}{1 - (4ab + 2)x^2 + x^4}$$

ii. Bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu

$$C(x) = \frac{2 + ax - (ab + 4)x^2 + 2ax^3}{1 - (ab + 4)x^2 + 4x^4}$$

şeklinde tanımlanır (Uygun ve Owusu, 2019; Uygun ve Karataş, 2019).

Lucas tipli bi-periyodik dizilerin terimleri rekürans bağıntıları kullanılarak elde edilebilmesinin yanısıra bilinen dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde Lucas tipli bi-periyodik dizilerin n -inci terimler elde edilir.

Şimdi bi-periyodik Lucas dizileri için Binet formülü verilecektir.

Bi-periyodik Lucas dizilerinin rekürans bağıntısı bi-periyodik Fibonacci dizilerinin rekürans bağıntısına benzer olup aynı $x^2 - abx - ab = 0$ karakteristik denklemi sahiptir. Dolayısıyla bu denkleminin kökleri

$$\alpha = \frac{ab + \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{ab - \sqrt{a^2b^2 + 4ab}}{2}$$

dir. Bu kökler arasında da bilinen eşitlikler sağlanır. Buradan bi-periyodik Lucas dizilerinin Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 3.35: $n \geq 0$ için α ve β , $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri ve $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere bi-periyodik Lucas dizilerinin Binet formülü

$$l_n = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \right) (\alpha^n + \beta^n)$$

şeklindedir (Bilgici, 2014).

İspat: $x^2 - abx - ab = 0$ denkleminin kökleri α ve β olsun. Bu köklerin özellikleri Teorem 3.33 ile verilen bi-periyodik Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonunda kullanılırsa

$$L(x) = \frac{2 + ax - (ab + 2)x^2 + ax^3}{1 - (ab + 2)x^2 + x^4}$$

yazılır. $\frac{A+Bz}{z^2-C}$ fonksiyonun Maclaurin serisinin açılımından

$$\frac{Az + B}{z^2 - C} = - \sum_{n=0}^{\infty} AC^{-n-1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} BC^{-n-1} z^{2n}$$

dir. Buradan $L_o(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} L_o(x) &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(ab + 2)\alpha + ab}{(\alpha + 1)^{n+1}} - \frac{(ab + 2)\beta + ab}{(\beta + 1)^{n+1}} \right] x^{2n} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(ab + 2) \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{(ab)^n} - (ab) \frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{(ab)^{n+1}} \right] x^{2n} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ab)^n} \{ \alpha^{2n} [(ab + 2)\alpha - \alpha^2] - \beta^{2n} [(ab + 2)\beta - \beta^2] \} x^{2n} \end{aligned}$$

yazılır. $(ab + 2)\alpha - \alpha^2 = \alpha - \beta$ ve $(ab + 2)\beta - \beta^2 = \beta - \alpha$ olduğundan

$$L_o(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ab)^n} (\alpha^{2n} + \beta^{2n}) x^{2n}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $L_1(x)$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= -\frac{1}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a(\alpha + 2)}{(\alpha + 1)^{n+1}} - \frac{a(\beta + 2)}{(\beta + 1)^{n+1}} \right] x^{2n+1} \\
&= \frac{a}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{(ab)^n} + 2\frac{\alpha^{2n+2} - \beta^{2n+2}}{(ab)^{n+1}} \right] x^{2n+1} \\
&= \frac{a}{\alpha - \beta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{n+1}} [\alpha^{2n+1}(2\alpha - ab) - \beta^{2n+1}(2\beta - ab)] x^{2n+1}
\end{aligned}$$

yazılır. $2\alpha - ab = \alpha - \beta$ ve $2\beta - ab = \beta - \alpha$ olduğundan

$$L_1(x) = a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(ab)^{n+1}} (\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}) x^{2n+1}$$

elde edilir. Böylece $m \geq 0$ için

$$l_m = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\alpha^n + \beta^n)$$

dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Bi-periyodik Lucas dizilerin Binet formülüne benzer şekilde elde edilen bi-periyodik Pell-Lucas ve bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizilerinin Binet formülleri aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 3.36:

- iii. $x^2 - 2abx - ab = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere bi-periyodik Pell-Lucas dizilerinin Binet formülü

$$Q_n = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\alpha^n + \beta^n)$$

- iv. $x^2 - abx - 2ab = 0$ denkleminin kökleri α ve β olmak üzere bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizilerinin Binet formülü

$$c_n = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\alpha^n + \beta^n)$$

şeklindedir (Uygun ve Karataş, 2019; Uygun ve Owusu, 2019).

3.3.3. Fibonacci ve Lucas tipli bi-periyodik dizilerin özellikleri

Şimdi Fibonacci tipli bi-periyodik ve Lucas tipli bi-periyodik diziler için iyi bilinen Cassini, Catalan ve d'Ocagne'ın eşitliklerini verilecektir.

Teorem 3.37 (Catalan Eşitliği): $n, r \in \mathbb{N}$ ve $n \geq r$ olmak üzere Catalan eşitliği

- i. Bi-periyodik Fibonacci dizileri için

$$a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} q_{n-r} q_{n+r} - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} q_n^2 = (-1)^{n+1-r} a^{\xi(r)} b^{1-\xi(r)} q_r^2$$

- ii. Bi-periyodik Lucas dizileri için

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+r)} l_{n-r} l_{n+r} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 = \frac{(-1)^{n+r}}{(ab)^r} (\alpha^r - \beta^r)^2$$

- iii. Bi-periyodik Pell dizileri için

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+r)} \mathcal{P}_{n-r} \mathcal{P}_{n+r} - \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \mathcal{P}_n^2 = \frac{(-1)^{n-r}}{(ab)^r} \mathcal{P}_r^2$$

- iv. Bi-periyodik Pell-Lucas dizileri için

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+r)} \mathcal{Q}_{n-r} \mathcal{Q}_{n+r} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)} \mathcal{Q}_n^2 = (-1)^{n-r} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(r)} \mathcal{Q}_r^2$$

- v. Bi-periyodik Jacobsthal dizileri için

$$a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} \mathcal{J}_{n-r} \mathcal{J}_{n+r} - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} \mathcal{J}_n^2 = -(-2)^{n-r} a^{\xi(r)} b^{1-\xi(r)} \mathcal{J}_r^2$$

vi. Bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizileri için

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+r)} c_{n-r} c_{n+r} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} c_n^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(r)} \frac{(\alpha - \beta)^2 (-2)^{n-r}}{a^2} J_r^2$$

dir (Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014; Uygun ve Owusu, 2016; 2019; Uygun ve Karataş, 2019; 2020).

İspat: i. Teorem 3.29 ile verilen bi-periyodik Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} q_{n-r} q_{n+r} \\ &= a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} \left(\frac{a^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(n+r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{a^{2-\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{n-\xi(n-r)}} \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{a}{(ab)^{n-1}} \left[\frac{\alpha^{2n} - (\alpha\beta)^{n-r} (\alpha^{2r} + \beta^{2r}) + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} q_n^2 &= a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} \left(\frac{a^{2-2\xi(n)}}{(ab)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \left[\frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \right] \\ &= \frac{a}{(ab)^{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \xi(n) - 1}} \left[\frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \right] \\ &= \frac{a}{(ab)^{n-1}} \left[\frac{\alpha^{2n} - 2(\alpha\beta)^n + \beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \right] \end{aligned}$$

yazılır.

Buradan

$$\begin{aligned}
a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} q_{n-r} q_{n+r} - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} q_n^2 &= \frac{a}{(ab)^{n-1}} \left[\frac{2(\alpha\beta)^n - (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r} + \beta^{2r})}{(\alpha - \beta)^2} \right] \\
&= \frac{-a}{(ab)^{n-1}} (\alpha\beta)^{n-r} \left[\frac{\alpha^{2r} - 2(\alpha\beta)^r + \beta^{2r}}{(\alpha - \beta)^2} \right] \\
&= \frac{-a}{(ab)^{n-1}} (-\alpha\beta)^{n-r} \left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&= (-1)^{n+1-r} \frac{a}{(ab)^{r-1}} \frac{(ab)^{2\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}}{(ab)^{2-\xi(r)}} q_r^2 \\
&= (-1)^{n+1-r} a^{2\xi(r)-1} (ab)^{1-\xi(r)} q_r^2 \\
&= (-1)^{n+1-r} a^{\xi(r)} b^{1-\xi(r)} q_r^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

ii. Teorem 3.35 ile verilen bi-periyodik Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+r)} l_{n-r} l_{n+r} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 &= a^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor - n-r} b^{n+r-2\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor} (\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) \\
&\quad - a^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - n-1} b^{n+1-2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor} (\alpha^n + \beta^n)^2 \\
&= (ab)^{-n} (\alpha^{n-r} + \beta^{n-r})(\alpha^{n+r} + \beta^{n+r}) - (ab)^{-n} (\alpha^n + \beta^n)^2 \\
&= (ab)^{-n} (\alpha^{n-r} \beta^{n+r} + \alpha^{n+r} \beta^{n-r} - 2\alpha^n \beta^n) \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(ab)^n} \left[\frac{\alpha^r}{\beta^r} + \frac{\beta^r}{\alpha^r} - 2 \right] \\
&= (-1)^n \frac{1}{(\alpha\beta)^r} [\alpha^{2r} + \beta^{2r} - 2\alpha^r \beta^r] \\
&= \frac{(-1)^{n+r}}{(ab)^r} (\alpha^r - \beta^r)^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer olarak Teorem 3.30 kullanılarak iii. ve v. şıkların ispatları ve Teorem 3.36 kullanılarak iv. ve vi. şıkların ispatları yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.38 (Cassini Eşitliği): $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Cassini eşitliği

i. Bi-periyodik Fibonacci dizileri için

$$a^{1-\xi(n)}b^{\xi(n)}q_{n-1}q_{n+1} - a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}q_n^2 = a(-1)^n$$

ii. Bi-periyodik Lucas dizileri için

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)}l_{n-1}l_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}l_n^2 = (-1)^{n+1}(ab + 4)$$

iii. Bi-periyodik Pell dizileri için

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)}\mathcal{P}_{n-1}\mathcal{P}_{n+1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}\mathcal{P}_n^2 = \frac{(-1)^{n-1}a}{b}$$

iv. Bi-periyodik Pell-Lucas dizileri için

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n+1)}\mathcal{Q}_{n-1}\mathcal{Q}_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}\mathcal{Q}_n^2 = (-1)^{n-1}\frac{b}{a}\mathcal{Q}_n^2$$

v. Bi-periyodik Jacobsthal dizileri için

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n-1)}\mathcal{J}_{n-1}\mathcal{J}_{n+1} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}a^{\xi(n)}\mathcal{J}_n^2 = -(-2)^{n-1}\frac{a}{b}$$

vi. Bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizileri için

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)}c_{n-1}c_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}c_n^2 = (-2)^{n-1}(ab + 8)$$

dir (Edson ve Yayenie, 2009; Bilgici, 2014; Uygun ve Owusu, 2016; 2019; Uygun ve Karataş, 2019; 2020).

İspat: Teorem 3.37 verilen Catalan eşitliğinde $r = 1$ alınırsa ispat elde edilebilir.

Teorem 3.39 (d'Ocagne Eşitliği): $m, n \in N$ ve $m \geq n$ olmak üzere d'Ocagne eşitliği

i. Bi-periyodik Fibonacci dizileri için

$$a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}q_mq_{n+1} - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}q_{m+1}q_n = (-1)^n a^{\xi(m-n)}q_{m-n}$$

ii. Bi-periyodik Lucas dizileri için

$$\begin{aligned} a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}l_{m+1}l_n - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}l_ml_{n+1} \\ = (-1)^n a^{\xi(m-n)}(ab + 4)q_{m-n} \end{aligned}$$

iii. Bi-periyodik Pell dizileri için

$$\begin{aligned} a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}\mathcal{P}_m\mathcal{P}_{n+1} - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}\mathcal{P}_{m+1}\mathcal{P}_n \\ = a^{\xi(m-n)}(ab)^n\mathcal{P}_{m-n} \end{aligned}$$

iv. Bi-periyodik Pell-Lucas dizileri için

$$\begin{aligned} a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}\mathcal{Q}_m\mathcal{Q}_{n+1} - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}\mathcal{Q}_{m+1}\mathcal{Q}_n \\ = 4(-1)^{n+1}(ab + 1)a^{\xi(m-n)}\mathcal{P}_{m-n} \end{aligned}$$

v. Bi-periyodik Jacobsthal dizileri için

$$a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}\mathcal{J}_m\mathcal{J}_{n+1} - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}\mathcal{J}_{m+1}\mathcal{J}_n = (-1)^n a^{\xi(m-n)}\mathcal{J}_{m-n}$$

vi. Bi-periyodik Jacobsthal-Lucas dizileri için

$$a^{\xi(mn+m)}b^{\xi(mn+n)}c_{m+1}c_n - a^{\xi(mn+n)}b^{\xi(mn+m)}c_mc_{n+1} = (-2)^n(ab + 8)\mathcal{J}_{m-n}$$

dir (Edson ve Yayenie, 2009; Uygun ve Owusu, 2016; 2019; Uygun ve Karataş, 2019; 2020; Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: i. Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(m) + \xi(n+1) - 2\xi(mn+m) = \xi(m+1) + \xi(n) - 2\xi(mn+n) = 1 - \xi(m-n)$$

$$\xi(m-n) = \xi(mn+m) + \xi(mn+n)$$

$$\frac{m-n-\xi(m-n)}{2} + \xi(mn+n) + n = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

$$\frac{m-n-\xi(m-n)}{2} + \xi(mn+m) + n = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\frac{m-n-\xi(m-n)}{2} = \left\lfloor \frac{m-n}{2} \right\rfloor$$

yazılabilir. Buradan Teorem 3.29 ile verilen bi-periyodik Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & a^{\xi(mn+m)} b^{\xi(mn+n)} q_m q_{n+1} - a^{\xi(mn+n)} b^{\xi(mn+m)} q_{m+1} q_n \\ &= a^{\xi(mn+m)} b^{\xi(mn+n)} \left(\frac{a^{1-\xi(m)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(n+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \\ & \quad - a^{\xi(mn+n)} b^{\xi(mn+m)} \left(\frac{a^{1-\xi(m+1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\alpha^{m+1} - \beta^{m+1}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{ab^{\xi(mn+n)} a^{1-\xi(m)-\xi(n+1)+\xi(mn+m)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{m+n+1} - \alpha^m \beta^{n+1} - \beta^m \alpha^{n+1} + \beta^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ & \quad - \frac{ab^{\xi(mn+m)} a^{1-\xi(m+1)-\xi(n)+\xi(mn+n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\alpha^{m+n+1} - \alpha^{m+1} \beta^n - \beta^{m+1} \alpha^n + \beta^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &= \frac{ab^{\xi(mn+n)} a^{\xi(m-n)-\xi(mn+n)}}{(ab)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2} + \xi(mn+n)+n}} \left(\frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - (\alpha\beta)^n (\alpha\beta^{m-n} + \beta\alpha^{m-n})}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ & \quad - \frac{ab^{\xi(mn+n)} a^{\xi(m-n)-\xi(mn+n)}}{(ab)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2} + \xi(mn+m)+n}} \left(\frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - (\alpha\beta)^n (\alpha^{m-n+1} + \beta^{m-n+1})}{(\alpha - \beta)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ab^{\xi(mr+n)}a^{\xi(mn+r)}}{(ab)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2}+\xi(mn+n)+n}} \left(\frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - (\alpha\beta)^n(\alpha\beta^{m-n} + \beta\alpha^{m-n})}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&\quad - \frac{ab^{\xi(mn+m)}a^{\xi(mn+m)}}{(ab)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2}+\xi(mn+m)+n}} \left(\frac{\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} - (\alpha\beta)^n(\alpha^{m-n+1} + \beta^{m-n+1})}{(\alpha - \rho)^2} \right) \\
&= \frac{a(ab)^{-n}}{(ab)^{\frac{m-n-\xi(m-n)}{2}}} \left(\frac{(\alpha\rho)^n(-\alpha\beta^{m-n} - \beta\alpha^{m-n} + \alpha^{m-n+1} + \beta^{m-n+1})}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&= \frac{a(ab)^{-n}}{(ab)^{\lfloor \frac{m-n}{2} \rfloor}} \left(\frac{(-ab)^n(\alpha - \beta)(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&= \frac{a(-1)^n}{(ab)^{\lfloor \frac{m-n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}}{\alpha - \beta} \right) \\
&= (-1)^n a^{\xi(m-n)} q_{m-n}
\end{aligned}$$

ii. Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(m) + \xi(n+1) - 2\xi(mn+m) = \xi(m+1) + \xi(n) - 2\xi(mn+n) = 1 - \xi(m-n)$$

$$\xi(m-n) = \xi(mn+m) + \xi(mn+n)$$

$$\frac{m+n-\xi(m-n)}{2} = \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - \xi(mn+m)$$

$$\frac{m+n-\xi(m-n)}{2} = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - \xi(mn+n)$$

$$\frac{m+n-\xi(m-n)}{2} = \left\lfloor \frac{m-n}{2} \right\rfloor$$

yazılabilir.

Buradan Teorem 3.35 ile verilen bi-periyodik Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& a^{\xi(mn+m)} b^{\xi(mn+n)} l_{m+1} l_n - a^{\xi(mn+n)} b^{\xi(mn+m)} l_m l_{r+1} \\
&= a^{\xi(mn+m)} b^{\xi(mn+n)} \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{m+2}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\alpha^{m+1} + \beta^{m+1})(\alpha^n + \beta^n) \\
&\quad - a^{\xi(mn+n)} b^{\xi(mn+m)} \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}} \right) (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^m + \beta^m) \\
&= a^{\xi(mn+m) - \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^{\xi(mn+n) - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} (\alpha^{m+n+1} + \alpha^{m+1} \beta^n + \beta^{m+1} \alpha^n + \alpha^{m+n+1}) \\
&\quad - a^{\xi(mn+n) - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} b^{\xi(mn+m) - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor - 1} (\alpha^{m+n+1} + \alpha^{n+1} \beta^m + \beta^{n+1} \alpha^m + \beta^{m+n+1}) \\
&= a^{\frac{-m-n+\xi(m-n)}{2}} b^{\frac{-m-n+\xi(m-r)}{2} - 1} (\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} + (\alpha\beta)^n (\alpha^{m-n+1} + \beta^{m-n+1})) \\
&\quad - a^{\frac{-m-n+\xi(m-n)}{2}} b^{\frac{-m-n+\xi(m-n)}{2} - 1} (\alpha^{m+n+1} + \beta^{m+n+1} + (\alpha\beta)^n (\alpha\beta^{m-n} + \beta\alpha^{m-n})) \\
&= \frac{1}{b(ab)^{\frac{m+n-\xi(m-n)}{2}}} ((\alpha\beta)^n (\alpha^{m-n+1} + \beta^{m-n+1} - \alpha\beta^{m-n} - \beta\alpha^{m-n})) \\
&= \frac{1}{b(ab)^{\lfloor \frac{m-n}{2} \rfloor + n}} (\alpha\beta)^n (\alpha - \beta) (\alpha^{m-n} - \beta^{m-n}) \\
&= \frac{1}{b(ab)^{\lfloor \frac{m-n}{2} \rfloor + n}} (-ab)^n \frac{(\alpha^{m-n} - \beta^{m-n})}{(\alpha - \beta)} (\alpha - \beta)^2 \\
&= \frac{(-q)^n}{ab} F_{m-n} a^{\xi(m-n)} (\alpha - \beta)^2 \\
&= (-1)^n a^{\xi(m-n)} (ab + 4) q_{m-n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Benzer olarak Teorem 3.30 kullanılarak iii. ve v. şıkların ispatları ve Teorem 3.36 kullanılarak iv. ve vi. şıkların ispatları yapılabilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde $p, q \geq 1$ tam sayılar ve $n \geq 2$ olmak üzere

$$F_n(p, q) = pF_{n-1}(p, q) + qF_{n-2}(p, q), \quad F_0(p, q) = 0, F_1(p, q) = 1$$

$$L_n(p, q) = pL_{n-1}(p, q) + qL_{n-2}(p, q), \quad L_0(p, q) = 2, L_1(p, q) = p$$

rekürans bağıntıları ile tanımlanan sırasıyla (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri incelenmiştir. İlk olarak (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları kullanılarak Fibonacci, k -Fibonacci, Lucas, k -Lucas, Jacobsthal, k -Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, k -Jacobsthal-Lucas, Pell, k -Pell, Pell-Lucas, k -Pell-Lucas gibi dizilerinin genelleştirmesi olarak bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizileri tanımlanmış ve özel durumları sunulmuştur. Dizinin pozitif ve negatif indisli terimleri arasındaki ilişki elde edilmiş ve kolay bir şekilde tüm terimlerin elde edilmesi sağlayan genel formüller verilmiştir. Üreteç fonksiyonları ile Cassini, Catalan ve d'Ocagne eşitlikleri elde edilmiştir.

(p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin döşeme yorumları sunulmuştur. Kareler için p farklı renk ve dominolar için q farklı renk olmak üzere renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak n -inci (p, q) -Fibonacci sayısının n hücreli bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısına ve n -inci (p, q) -Lucas sayısının bir dairesel $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısına eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu yorumları kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve genelleştirilmiş Lucas dizilerinin özellikleri sunulmuştur.

4.1. Bi-Periyodik (p, q) -Fibonacci Dizileri ve Özellikleri

Tanım 4.1: a, b sıfırdan farklı reel sayılar, $p, q \geq 1$ tam sayılar ve $F_0(p, q) = 0$, $F_1(p, q) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilen bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizileri $n \geq 2$ için

$$F_n(p, q) = \begin{cases} apF_{n-1}(p, q) + qF_{n-2}(p, q), & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ bpF_{n-1}(p, q) + qF_{n-2}(p, q), & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (4.1)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n -inci bi-periyodik (p, q) -Fibonacci sayısı $F_n(p, q)$ ile gösterilir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

Tanım 4.1 den bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizileri

$$\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0} = \{0, 1, ap, abp^2 + q, a^2bp^3 + 2apq, a^2b^2p^4 + 3abp^2q + q^2, a^3b^2p^5 + 4a^2bp^3q + 3apq^2, a^3b^3p^6 + 5a^2b^2p^4q + 6abp^2q^2 + q^3, a^4b^3p^7 + 6a^3b^2p^5q + 10a^2bp^3q^2 + 4apq^3, \dots\}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1, literatürde rekürans bağıntılarla tanımlanan Fibonacci tipli diziler ile ilişkili birçok bi-periyodik dizilerin genel halidir. Tanım 3.1 de verilen p, q parametrelerine göre bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin özel durumları Tablo 4.1 de verilmiştir.

Tablo 4.1. $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizisinin özel durumları

p	q	Sembol	Genelleştirilmiş n -inci bi-periyodik sayı
1	1	$F_n(1, 1) = q_n$	q_n , n -inci bi-periodic Fibonacci sayısı
k	1	$F_n(k, 1) = q_{k,n}$	$q_{k,n}$, n -inci bi-periodic k -Fibonacci sayısı
1	2	$F_n(1, 2) = J_n$	J_n , n -inci bi-periodic Jacobsthal sayısı
k	2	$F_n(k, 2) = J_{k,n}$	$J_{k,n}$, n -inci bi-periodic k -Jacobsthal sayısı
2	1	$F_n(2, 1) = \mathcal{P}_n$	$\mathcal{P}_n$, n -inci bi-periodic Pell sayısı
2	k	$F_n(2, k) = \mathcal{P}_{k,n}$	$\mathcal{P}_{k,n}$, n -inci bi-periodic k -Pell sayısı

Şimdi $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları verilecektir. $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu $F(x)$ olmak üzere

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(p, q)x^n \quad (4.2)$$

yazılabilir. Bu üreteç fonksiyonu elde edilirken ihtiyaç duyulan, $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin tek ve çift indisli terimleri arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma 4.2: Bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin terimleri arasında

$$\text{i.} \quad F_{2n}(p, q) = (abp^2 + 2q)F_{2n-2}(p, q) - q^2F_{2n-4}(p, q)$$

$$\text{ii.} \quad F_{2n+1}(p, q) = (abp^2 + 2q)F_{2n-1}(p, q) - q^2F_{2n-3}(p, q)$$

eşitlikleri sağlanır (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: (4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\text{i.} \quad F_{2n}(p, q) = apF_{2n-1}(p, q) + qF_{2n-2}(p, q)$$

$$= ap(bpF_{2n-2}(p, q) + qF_{2n-3}(p, q)) + qF_{2n-2}(p, q)$$

$$= (abp^2 + q)F_{2n-2}(p, q) + apqF_{2n-3}(p, q)$$

$$= (abp^2 + q)F_{2n-2}(p, q) + qF_{2n-2}(p, q) - q^2F_{2n-4}(p, q)$$

$$= (abp^2 + 2q)F_{2n-2}(p, q) - q^2F_{2n-4}(p, q)$$

$$\text{ii.} \quad F_{2n+1}(p, q) = bpF_{2n}(p, q) + qF_{2n-1}(p, q)$$

$$= bp(apF_{2n-1}(p, q) + qF_{2n-2}(p, q)) + qF_{2n-1}(p, q)$$

$$= (abp^2 + q)F_{2n-1}(p, q) + bpqF_{2n-2}(p, q)$$

$$= (abp^2 + q)F_{2n-1}(p, q) + qF_{2n-1}(p, q) - q^2F_{2n-3}(p, q)$$

$$= (abp^2 + 2q)F_{2n-1}(p, q) - q^2F_{2n-3}(p, q)$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Lemma 4.2 kullanılarak elde edilen bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.3: a, b sıfırdan farklı reel sayılar, $p, q \geq 1$ tam sayılar olmak üzere bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizileri için üreteç fonksiyonları

$$F(x) = \frac{x + apx^2 - qx^3}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

şeklinde (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: (4.2) eşitliği kullanılarak $\{F_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(p, q)x^n = F_0(p, q) + F_1(p, q)x + F_2(p, q)x^2 \dots + F_n(p, q)x^n + \dots$$

yazılabilir. Bu üreteç fonksiyonu çift ve tek indisli terimlerden oluşan ayrı iki dizinin toplamı şeklinde yazılsın. Çift indisli terimlerin toplamı $F_{\zeta}(x)$ ve tek indisli terimlerin toplamı $F_T(x)$ olmak üzere

$$F(x) = F_{\zeta}(x) + F_T(x) \quad (4.3)$$

yazılabilir. Buradan çift indisli terimler için üreteç fonksiyonu

$$F_{\zeta}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i} = F_0(p, q) + F_2(p, q)x^2 + \dots + F_{2n}(p, q)x^{2n} + \dots \quad (4.4)$$

dir. (4.4) eşitliğinin her iki tarafı $-(abp^2 + 2q)x^2$ ve q^2x^4 ile çarpılırsa

$$-(abp^2 + 2q)x^2 F_{\zeta}(x) = -(abp^2 + 2q) \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i+2} \quad (4.5)$$

ve

$$q^2x^4 F_{\zeta}(x) = q^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i+4} \quad (4.6)$$

elde edilir. (4.4), (4.5) ve (4.6) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} (1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4)F_{\zeta}(x) &= F_0(p, q) + F_2(p, q)x^2 + \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i} \\ &\quad - (abp^2 + 2q) \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i+2} + q^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i+4} \\ &= apx^2 + \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i}(p, q)x^{2i} - (abp^2 + 2q) \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i-2}(p, q)x^{2i} + q^2 \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i-4}(p, q)x^{2i} \\ &= apx^2 + \sum_{i=2}^{\infty} [F_{2i}(p, q) - (abp^2 + 2q)F_{2i-2}(p, q) + q^2F_{2i-4}(p, q)]x^{2i} \end{aligned}$$

yazılır.

Lemma 4.2. i. kullanılarak bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizisinin çift indisli terimlerinin üreteç fonksiyonu

$$F_{\zeta}(x) = \frac{apx^2}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

şeklinde elde edilir. Benzer düşünce ile tek indisli terimler için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} F_T(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+1} \\ &= F_1(p, q)x + F_3(p, q)x^3 + \dots + F_{2n+1}(p, q)x^{2n+1} + \dots \end{aligned} \quad (4.7)$$

dir. (4.7) eşitliğinin her iki tarafı $-(abp^2 + 2q)x^2$ ve q^2x^4 ile çarpılırsa

$$-(abp^2 + 2q)x^2 F_T(x) = -(abp^2 + 2q) \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+3} \quad (4.8)$$

ve

$$q^2x^4 F_T(x) = q^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+5} \quad (4.9)$$

elde edilir. (4.7), (4.8) ve (4.9) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} (1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4)F_T(x) &= F_1(p, q)x + F_3(p, q)x^3 + \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+1} \\ &\quad - (abp^2 + 2q)x^3 F_1(p, q) - (abp^2 + 2q) \sum_{i=1}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+3} + q^2 \sum_{i=0}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+5} \\ &= x + (abp^2 + q)x^3 + \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i+1}(p, q)x^{2i+1} - (abp^2 + 2q)x^3 \\ &\quad - (abp^2 + 2q) \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i-1}(p, q)x^{2i+1} + q^2 \sum_{i=2}^{\infty} F_{2i-3}(p, q)x^{2i+1} \\ &= x + (abp^2 + q)x^3 - (abp^2 + 2q)x^3 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} [F_{2i+1}(p, q) - (abp^2 + 2q)F_{2i-1}(p, q) + q^2 F_{2i-3}(p, q)] x^{2i+1} \end{aligned}$$

yazılır.

Lemma 4.2. ii. kullanılarak bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizisinin tek indisli terimlerinin üreteç fonksiyonu

$$F_T(x) = \frac{x - qx^3}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

şeklinde elde edilir. (4.3) eşitliğinden bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$F(x) = \frac{x + apx^2 - qx^3}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Tanım 2.7 ile verilen $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ fonksiyonu kullanılarak bi-periyodik (p, q) -Fibonacci sayılarını elde etmemize olanak sağlayan alternatif bir rekürans bağıntı verilecektir. $n \geq 2$ için a, b sıfırdan farklı reel sayılar, $p, q \geq 1$ tam sayılar ve $F_0(p, q) = 0$, $F_1(p, q) = 1$ başlangıç değerleri olmak üzere n -inci bi-periyodik (p, q) -Fibonacci sayısı

$$F_n(p, q) = a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} p F_{n-1}(p, q) + q F_{n-2}(p, q) \quad (4.10)$$

ile tanımlanır (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

Bi-periyodik (p, q) -Fibonacci sayıları (4.1) ve (4.10) eşitlikleri kullanılarak elde edilebilmesinin yanısıra bilinen dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde n -inci bi-periyodik (p, q) -Fibonacci sayısı elde edilir.

Bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin rekürans bağıntısının karakteristik denklemi $x^2 - pabx - qab = 0$ şeklindedir. Bu denkleminin kökleri

$$\sigma = \frac{pab + \sqrt{p^2a^2b^2 + 4qab}}{2} \quad \text{ve} \quad \rho = \frac{pab - \sqrt{p^2a^2b^2 + 4qab}}{2}$$

dir.

Bu kökler arasında

$$\sigma + \rho = pab$$

$$\sigma - \rho = \sqrt{p^2a^2b^2 + 4qab}$$

$$\sigma\rho = -qab$$

$$p\sigma + q = \frac{\sigma^2}{ab}$$

$$p\rho + q = \frac{\rho^2}{ab}$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizileri için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.4: $n \geq 0$ için σ ve ρ , $x^2 - pabx - qab = 0$ denkleminin kökleri ve $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin Binet formülü

$$F_n(p, q) = \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho} \quad (4.11)$$

şeklindedir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: İspat n üzerinde tümevarım yöntemiyle tamamlanabilir. $n = 0, 1$ için (4.11) eşitliğinin sağlandığı açık bir şekilde görülür. $n \geq 0$ için (4.11) eşitliğinin sağlandığını kabul edip $n + 1$ için sağlandığını gösterelim. Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(n) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

$$1 - \xi(n+1) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$$

yazılabilir.

Buradan (4.10) eşitliği, tümevarım hipotezi kullanılırsa ve bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri arasındaki $p\sigma + q = \frac{\sigma^2}{ab}$ ve $p\rho + q = \frac{\rho^2}{ab}$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(p, q) &= a^{1-\xi(n+1)} b^{\xi(n+1)} p F_n(p, q) + q F_{n-1}(p, q) \\
&= a^{1-\xi(n+1)} b^{\xi(n+1)} p \left(\left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho} \right) + q \left(\left(\frac{a^{1-\xi(n-1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^{n-1} - \rho^{n-1}}{\sigma - \rho} \right) \\
&= \frac{a^{1-\xi(n+1)} \sigma^{n-1}}{\sigma - \rho} \left(\frac{abp\sigma}{a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n+1)} (ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} + \frac{abq}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}} \right) \\
&\quad - \frac{a^{1-\xi(n+1)} \rho^{n-1}}{\sigma - \rho} \left(\frac{abp\rho}{a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n+1)} (ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} + \frac{abq}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}} \right) \\
&= \frac{a^{1-\xi(n+1)} \sigma^{n-1}}{\sigma - \rho} \left(\frac{ab(p\sigma + q)}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) - \frac{a^{1-\xi(n+1)} \rho^{n-1}}{\sigma - \rho} \left(\frac{ab(p\rho + q)}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) \\
&= \frac{a^{1-\xi(n+1)} \sigma^{n-1}}{\sigma - \rho} \left(\frac{\sigma^2}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) - \frac{a^{1-\xi(n+1)} \rho^{n-1}}{\sigma - \rho} \left(\frac{\rho^2}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) \\
&= \left(\frac{a^{1-\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^{n+1} - \rho^{n+1}}{\sigma - \rho}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem ile bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin pozitif ve negatif indisli terimleri arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca bu teorem ile bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin negatif indisli terimleri elde edilebilir.

Teorem 4.5: Bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin negatif indisli terimleri

$$F_{-n}(p, q) = -(-q)^{-n}F_n(p, q)$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: (4.11) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_{-n}(p, q) &= \left(\frac{a^{1-\xi(-n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{-n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^{-n} - \rho^{-n}}{\sigma - \rho} \\ &= (-1) \left(\frac{\sigma^{1-\xi(-n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{-n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^n - \rho^n}{(-qab)^n(\sigma - \rho)} \\ &= (-1)(-q)^{-n} \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \beta} \\ &= -(-q)^{-n}F_n(p, q) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremlerle bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin ardışık terimleri arasındaki oran ve Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitlikleri gibi bazı temel özellikler sunulmuştur.

Teorem 4.6: Bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin ardışık terimleri arasındaki oranın limiti

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n+1}(p, q)}{F_{2n}(p, q)} = \frac{\sigma}{a} \\ \text{ii.} \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n}(p, q)}{F_{2n-1}(p, q)} = \frac{\sigma}{b} \end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: $|\rho| < \sigma$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n = 0$ olmak üzere (4.11) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\text{i. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n+1}(p, q)}{F_{2n}(p, q)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^{1-\xi(2n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor}}\right) \left(\frac{\sigma^{2n+1} - \rho^{2n+1}}{\sigma - \rho}\right)}{\left(\frac{a^{1-\xi(2n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor}}\right) \left(\frac{\sigma^{2n} - \rho^{2n}}{\sigma - \rho}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(ab)^n} \left(\frac{\sigma^{2n+1} - \rho^{2n+1}}{\sigma - \rho}\right)}{\frac{a}{(ab)^n} \left(\frac{\sigma^{2n} - \rho^{2n}}{\sigma - \rho}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{\sigma^{2n+1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2n+1}\right)}{\sigma^{2n} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2n}\right)}$$

$$= \frac{\sigma}{a}$$

$$\text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{2n}(p, q)}{F_{2n-1}(p, q)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^{1-\xi(2n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor}}\right) \left(\frac{\sigma^{2n} - \rho^{2n}}{\sigma - \rho}\right)}{\left(\frac{a^{1-\xi(2n-1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n-1}{2} \rfloor}}\right) \left(\frac{\sigma^{2n-1} - \rho^{2n-1}}{\sigma - \rho}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{(ab)^n} \left(\frac{\sigma^{2n} - \rho^{2n}}{\sigma - \rho}\right)}{\frac{1}{(ab)^{n-1}} \left(\frac{\sigma^{2n-1} - \rho^{2n-1}}{\sigma - \rho}\right)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{ab} \frac{\sigma^{2n} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2n}\right)}{\sigma^{2n-1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2n-1}\right)}$$

$$= \frac{\sigma}{b}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.7 (Catalan Eşitliği): n ve r negatif olmayan sayılar olmak üzere $n \geq r$ için

$$a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} F_{n-r}(p, q) F_{n+r}(p, q) - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} F_n^2(p, q) = -(-q)^{n-r} a^{\xi(r)} b^{1-\xi(r)} F_r^2(p, q)$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor = n - \xi(n-r)$$

yazılabilir. Buradan (4.11) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} F_{n-r}(p, q) F_{n+r}(p, q) - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} F_n^2(p, q) \\ &= a^{\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)} \left(\frac{a^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(n+r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\sigma^{n-r} - \rho^{n-r}}{\sigma - \rho} \right) \left(\frac{\sigma^{n+r} - \rho^{n+r}}{\sigma - \rho} \right) \\ & \quad - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) \left(\frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho} \right) \left(\frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho} \right) \\ &= \frac{a^{2-\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+r}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\sigma^{2n} - \sigma^{n-r} \rho^{n+r} - \rho^{n-r} \sigma^{n+r} + \rho^{2n}}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\ & \quad - \frac{a^{2-\xi(n)} b^{1-\xi(n)}}{(ab)^{2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \left(\frac{\sigma^{2n} - 2\sigma^n \rho^n + \rho^{2n}}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\ &= \frac{a^{2-\xi(n-r)} b^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{n-\xi(n-r)}} \left(\frac{\sigma^{2n} - (\sigma\rho)^{n-r}(\sigma^{2r} + \rho^{2r}) + \rho^{2n}}{(\sigma - \rho)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{a^{2-\xi(n)}b^{1-\xi(n)}}{(ab)^{n-\xi(n)}}\left(\frac{\sigma^{2n}-2(\sigma\rho)^n+\rho^{2n}}{(\sigma-\rho)^2}\right) \\
& =\frac{a}{(ab)^{n-1}}\left[\frac{-(\sigma\rho)^{n-r}(\sigma^{2r}+\rho^{2r})+2(\sigma\rho)^n}{(\sigma-\rho)^2}\right] \\
& =\frac{-a(\sigma\rho)^{n-r}}{(ab)^{n-1}}\left(\frac{\sigma^r-\rho^r}{\sigma-\rho}\right)^2 \\
& =\frac{-a(-qab)^{n-r}}{(ab)^{n-1}}\frac{(ab)^{2\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}}{a^{2-2\xi(r)}}F_r^2(p,q) \\
& =-(-q)^{n-r}\frac{a(ab)^{2\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}}{(ab)^{\xi(r)+2\lfloor\frac{r}{2}\rfloor-1}a^{2-2\xi(r)}}F_r^2(p,q) \\
& =-(-q)^{n-r}a^{\xi(r)}b^{1-\xi(r)}F_r^2(p,q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.8 (Cassini Eşitliği): n negatif olmayan sayı olmak üzere

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n-1)}F_{n-1}(p,q)F_{n+1}(p,q)-\left(\frac{a}{b}\right)^{\xi(n)}F_n^2(p,q)=-(-q)^{n-1}\frac{a}{b}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: Teorem 4.7 de verilen Catalan eşitliğinde $r = 1$ alınırsa ispat elde edilebilir.

Teorem 4.9 (d'Ocagne Eşitliği): n ve r negatif olmayan sayılar olmak üzere $n \geq r$ için

$$\begin{aligned}
& a^{\xi(nr+n)}b^{\xi(nr+r)}F_n(p,q)F_{r+1}(p,q)-a^{\xi(nr+r)}b^{\xi(nr+n)}F_{n+1}(p,q)F_r(p,q) \\
& =(-q)^ra^{\xi(n-r)}F_{n-r}(p,q)
\end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(n) + \xi(r+1) - 2\xi(nr+n) = \xi(n+1) + \xi(r) - 2\xi(nr+r) = 1 - \xi(n-r)$$

$$\xi(n-r) = \xi(nr+n) + \xi(nr+r)$$

$$\frac{n-r-\xi(n-r)}{2} + \xi(nr+r) + r = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor$$

$$\frac{n-r-\xi(n-r)}{2} + \xi(nr+n) + r = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$$

$$\frac{n-r-\xi(n-r)}{2} = \left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor$$

yazılabilir. Buradan (4.11) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} & a^{\xi(nr+n)} b^{\xi(nr+r)} F_n(p, q) F_{r+1}(p, q) - a^{\xi(nr+r)} b^{\xi(nr+n)} F_{n+1}(p, q) F_r(p, q) \\ &= a^{\xi(nr+n)} b^{\xi(nr+r)} \left(\frac{a^{1-\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(r+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\sigma^n - \rho^n}{\sigma - \rho} \right) \left(\frac{\sigma^{r+1} - \rho^{r+1}}{\sigma - \rho} \right) \\ & \quad - a^{\xi(nr+r)} b^{\xi(nr+n)} \left(\frac{a^{1-\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{a^{1-\xi(r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{\sigma^{n+1} - \rho^{n+1}}{\sigma - \rho} \right) \left(\frac{\sigma^r - \rho^r}{\sigma - \rho} \right) \\ &= \frac{ab^{\xi(nr+r)} a^{1-\xi(n)-\xi(r+1)+\xi(nr+n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\sigma^{n+r+1} - \sigma^n \rho^{r+1} - \rho^n \sigma^{r+1} + \rho^{n+r+1}}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\ & \quad - \frac{ab^{\xi(nr+n)} a^{1-\xi(n+1)-\xi(r)+\xi(nr+r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{r}{2} \rfloor}} \left(\frac{\sigma^{n+r+1} - \sigma^{n+1} \rho^r - \rho^{n+1} \sigma^r + \rho^{n+r+1}}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\ &= \frac{ab^{\xi(nr+r)} a^{\xi(n-r)-\xi(nr+n)}}{(ab)^{\frac{n-r-\xi(n-r)}{2} + \xi(nr+r) + r}} \left(\frac{\sigma^{n+r+1} + \rho^{n+r+1} - (\sigma\rho)^r (\sigma\rho^{n-r} + \rho\sigma^{n-r})}{(\sigma - \rho)^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{ab^{\xi(nr+n)}a^{\xi(n-r)-\xi(nr+r)}}{(ab)^{\frac{n-r-\xi(n-r)}{2}+\xi(nr+n)+r}} \left(\frac{\sigma^{n+r+1} + \rho^{n+r+1} - (\sigma\rho)^r(\sigma^{n-r+1} + \rho^{n-r+1})}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\
& = \frac{ab^{\xi(nr+r)}a^{\xi(nr+r)}}{(ab)^{\frac{n-r-\xi(n-r)}{2}+\xi(nr+r)+r}} \left(\frac{\sigma^{n+r+1} + \rho^{n+r+1} - (\sigma\rho)^r(\sigma\rho^{n-r} + \rho\sigma^{n-r})}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\
& \quad - \frac{ab^{\xi(nr+n)}a^{\xi(nr+n)}}{(ab)^{\frac{n-r-\xi(n-r)}{2}+\xi(nr+n)+r}} \left(\frac{\sigma^{n+r+1} + \rho^{n+r+1} - (\sigma\rho)^r(\sigma^{n-r+1} + \sigma^{n-r+1})}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\
& = \frac{a(ab)^{-r}}{(ab)^{\frac{n-r-\xi(n-r)}{2}}} \left(\frac{(\sigma\rho)^r(-\sigma\rho^{n-r} - \rho\sigma^{n-r} + \sigma^{n-r+1} + \rho^{n-r+1})}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\
& = \frac{a(ab)^{-r}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor}} \left(\frac{(-qab)^r(\sigma - \rho)(\sigma^{n-r} - \rho^{n-r})}{(\sigma - \rho)^2} \right) \\
& = \frac{a(-q)^r}{(ab)^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor}} \left(\frac{\sigma^{n-r} - \rho^{n-r}}{\sigma - \rho} \right) \\
& = (-q)^r a^{\xi(n-r)} F_{n-r}(p, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

4.2. Bi-Periyodik (p, q) -Lucas Dizileri ve Özellikleri

Tanım 4.10: a, b sıfırdan farklı reel sayılar, $p, q \geq 1$ tam sayılar ve $L_0(p, q) = 2$, $L_1(p, q) = ap$ başlangıç değerleri olmak üzere $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ ile gösterilen bi-periyodik (p, q) -Lucas dizileri $n \geq 2$ için

$$L_n(p, q) = \begin{cases} bpL_{n-1}(p, q) + qL_{n-2}(p, q), & \text{eğer } n \text{ çift ise} \\ apL_{n-1}(p, q) + qL_{n-2}(p, q), & \text{eğer } n \text{ tek ise} \end{cases} \quad (4.12)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır ve n -inci bi-periyodik (p, q) -Lucas sayısı $L_n(p, q)$ ile gösterilir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

Tanım 4.10 dan bi-periyodik (p, q) -Lucas dizileri

$$\begin{aligned} \{L_n(p, q)\}_{n \geq 0} = \{ & 2, ap, abp^2 + 2q, a^2bp^3 + 3apq, a^2b^2p^4 + 4abp^2q + 2q^2, a^3b^2p^5 \\ & + 5a^2bp^3q + 5apq^2, a^3b^3p^6 + 6a^2b^2p^4q + 9abp^2q^2 + 2q^3, a^4b^3p^7 \\ & + 7a^3b^2p^5q + 14a^2bp^3q^2 + 7apq^3, \dots \} \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 4.10 literatürde rekürans bağıntılarla tanımlanan Lucas tipli dizileri ile ilişkili birçok bi-periyodik dizilerin genel halidir. Tanım 3.1 de verilen p, q parametrelerine göre bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin özel durumları Tablo 4.2 de verilmiştir.

Tablo 4.2. $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizisinin özel durumları

p	q	Sembol	Genelleştirilmiş n -inci Bi-Periyodik Sayı
1	1	$L_n(1,1) = l_n$	l_n , n -inci bi-periodic Lucas sayısı
k	1	$L_n(k, 1) = l_{k,n}$	$l_{k,n}$, n -inci bi-periodic k - Lucas sayısı
1	2	$L_n(1,2) = c_n$	c_n , n -inci bi-periodic Jacobsthal-Lucas sayısı
k	2	$L_n(k, 2) = c_{k,n}$	$c_{k,n}$, n -inci bi-periodic k -Jacobsthal-Lucas sayısı
2	1	$L_n(2,1) = Q_n$	Q_n , n -inci bi-periodic Pell-Lucas sayısı
2	k	$L_n(2, k) = Q_{k,n}$	$Q_{k,n}$, n -inci bi-periodic k -Pell-Lucas sayısı

Şimdi $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonları verilecektir. $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin üreteç fonksiyonu $L(x)$ olmak üzere

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(p, q)x^n \quad (4.13)$$

yazılabilir. Bu üreteç fonksiyonu elde edilirken ihtiyaç duyulan, $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizilerinin tek ve çift indisli terimleri arasındaki ilişki aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma 4.11: Bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin terimleri arasında

- i. $L_{2n}(p, q) = (abp^2 + 2q)L_{2n-2}(p, q) - q^2L_{2n-4}(p, q)$
- ii. $L_{2n+1}(p, q) = (abp^2 + 2q)L_{2n-1}(p, q) - q^2L_{2n-3}(p, q)$

eşitlikleri sağlanır (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: (4.12) eşitliği kullanılırsa

- i.
$$\begin{aligned} L_{2n}(p, q) &= bpL_{2n-1}(p, q) + qL_{2n-2}(p, q) \\ &= bp(apL_{2n-2}(p, q) + qL_{2n-3}(p, q)) + qL_{2n-2}(p, q) \\ &= (abp^2 + q)L_{2n-2}(p, q) + bpqL_{2n-3}(p, q) \\ &= (abp^2 + q)L_{2n-2}(p, q) + qL_{2n-2}(p, q) - q^2L_{2n-4}(p, q) \\ &= (abp^2 + 2q)L_{2n-2}(p, q) - q^2L_{2n-4}(p, q) \end{aligned}$$
- ii.
$$\begin{aligned} L_{2n+1}(p, q) &= apL_{2n}(p, q) + qL_{2n-1}(p, q) \\ &= ap(bpL_{2n-1}(p, q) + qL_{2n-2}(p, q)) + qL_{2n-1}(p, q) \\ &= (abp^2 + q)L_{2n-1}(p, q) + apqL_{2n-2}(p, q) \\ &= (abp^2 + q)L_{2n-1}(p, q) + qL_{2n-1}(p, q) - q^2L_{2n-3}(p, q) \\ &= (abp^2 + 2q)L_{2n-1}(p, q) - q^2L_{2n-3}(p, q) \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Lemma 4.11 kullanılarak elde edilen bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin üreteç fonksiyonu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.12: a, b sıfırdan farklı reel sayılar, $p, q \geq 1$ tam sayılar olmak üzere bi-periyodik (p, q) - Lucas dizileri için üreteç fonksiyonları

$$L(x) = \frac{2 + apx - (abp^2 + 2q)x^2 + apqx^3}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

şeklinde (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: (4.13) eşitliği kullanılarak $\{L_n(p, q)\}_{n \geq 0}$ dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n(p, q)x^n = L_0(p, q) + L_1(p, q)x + L_2(p, q)x^2 \dots + L_n(p, q)x^n + \dots$$

yazılabilir. Bu üreteç fonksiyonu çift ve tek indisli terimlerden oluşan ayrı iki dizinin toplamı şeklinde yazılsın. Çift indisli terimlerin toplamı $L_{\zeta}(x)$ ve tek terimlerinin toplamı $L_T(x)$ olmak üzere

$$L(x) = L_{\zeta}(x) + L_T(x) \quad (4.14)$$

yazılabilir. Buradan çift indisli terimler için üreteç fonksiyonu

$$L_{\zeta}(x) = \sum_{i=2}^{\infty} L_{2i}(p, q)x^{2i} = L_0(p, q) + L_2(p, q)x^2 + \dots + L_{2n}(p, q)x^{2n} + \dots \quad (4.15)$$

dir. (4.15) eşitliğinin her iki tarafı $-(abp^2 + 2q)x^2$ ve q^2x^4 ile çarpılırsa

$$-(abp^2 + 2q)x^2 L_{\zeta}(x) = -(abp^2 + 2q) \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i}(p, q)x^{2i+2} \quad (4.16)$$

ve

$$q^2x^4 L_{\zeta}(x) = q^2 \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i}(p, q)x^{2i+4} \quad (4.17)$$

elde edilir. (4.15), (4.16) ve (4.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} (1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4)L_{\zeta}(x) &= L_0(p, q) + L_2(p, q)x^2 + \sum_{i=2}^{\infty} L_{2i}(p, q)x^{2i} \\ &\quad - (abp^2 + 2q)x^2 L_0(p, q) - (abp^2 + 2q) \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i}(p, q)x^{2i+2} + q^2 \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i}(p, q)x^{2i+4} \\ &= 2 + (abp^2 + 2q)x^2 + \sum_{i=2}^{\infty} [L_{2i}(p, q) - (abp^2 + 2q)L_{2i-2}(p, q) + q^2L_{2i-4}(p, q)]x^{2i} \\ &\quad - (abp^2 + 2q)L_0(p, q)x^2 \end{aligned}$$

yazılır.

Lemma 4.11. i. kullanılarak bi-periyodik (p, q) - Lucas dizisinin çift indisli terimlerinin üreteç fonksiyonu

$$L_{\zeta}(x) = \frac{2 - (abp^2 + 2q)x^2}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

elde edilir. Benzer düşünce ile tek indisli terimler için üreteç fonksiyonu

$$\begin{aligned} L_T(x) &= \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+1} \\ &= L_1(p, q)x + L_3(p, q)x^3 + \cdots + L_{2n+1}(p, q)x^{2n+1} + \cdots \end{aligned} \quad (4.18)$$

dir. (4.18) eşitliğinin her iki tarafı $-(abp^2 + 2q)x^2$ ve q^2x^4 ile çarpılırsa

$$-(abp^2 + 2q)x^2 L_T(x) = -(abp^2 + 2q) \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+3} \quad (4.19)$$

ve

$$q^2x^4 L_T(x) = q^2 \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+5} \quad (4.20)$$

elde edilir. (4.18), (4.19) ve (4.20) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} (1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4)L_T(x) &= L_1(p, q)x + L_3(p, q)x^3 + \sum_{i=2}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+1} \\ &\quad - (abp^2 + 2q)x^3 L_1(p, q) - (abp^2 + 2q) \sum_{i=1}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+3} + q^2 \sum_{i=0}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+5} \\ &= apx + (a^2bp^3 + 3apq)x^3 + \sum_{i=2}^{\infty} L_{2i+1}(p, q)x^{2i+1} - (abp^2 + 2q)x^3ap \\ &\quad - (abp^2 + 2q) \sum_{i=2}^{\infty} L_{2i-1}(p, q)x^{2i+1} + q^2 \sum_{i=2}^{\infty} L_{2i-3}(p, q)x^{2i+1} \\ &= apx + apqx^3 \\ &\quad + \sum_{i=2}^{\infty} [L_{2i+1}(p, q) - (abp^2 + 2q)L_{2i-1}(p, q) + q^2L_{2i-3}(p, q)]x^{2i+1} \end{aligned}$$

yazılır.

Lemma 4.11. ii. kullanılarak bi-periyodik (p, q) -Luca dizisinin tek indisli terimlerinin üreteç fonksiyonu

$$L_T(x) = \frac{apx + apqx^3}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

elde edilir. (4.14) eşitliğinden bi-periodic (p, q) -Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu

$$L(x) = \frac{2 + apx - (abp^2 + 2q)x^2 + apqx^3}{1 - (abp^2 + 2q)x^2 + q^2x^4}$$

şeklinde elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi Tanım 2.7 ile verilen $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ fonksiyonu kullanılarak bi-periyodik (p, q) -Lucas sayılarını elde etmemize olanak sağlayan alternatif bir rekürans bağıntı verilecektir. $n \geq 2$ için a, b sıfırdan farklı reel sayılar, $p, q \geq 1$ tam sayılar ve $L_0(p, q) = 2$, $L_1(p, q) = ap$ başlangıç değerleri olmak üzere n -inci bi-periyodik (p, q) -Lucas sayısı

$$L_n(p, q) = a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} p L_{n-1}(p, q) + q L_{n-2}(p, q) \quad (4.21)$$

ile tanımlanır (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

Bi-periyodik (p, q) -Lucas sayıları (4.12) ve (4.21) eşitlikleri kullanılarak elde edilebilmesinin yanısıra bilinen dizilerinde olduğu gibi Binet formülü kullanılarak da elde edilir. Binet formülü ile daha pratik bir şekilde n -inci bi-periyodik (p, q) -Lucas sayısı elde edilir.

Bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin rekürans bağıntısı bi-periyodik (p, q) -Fibonacci dizilerinin rekürans bağıntısına benzer olup aynı $x^2 - pabx - qab = 0$ karakteristik denklemini sahiptir. Dolayısıyla bu denklemin kökleri

$$\sigma = \frac{pab + \sqrt{p^2a^2b^2 + 4qab}}{2} \quad \text{ve} \quad \rho = \frac{pab - \sqrt{p^2a^2b^2 + 4qab}}{2}$$

dir. Bu kökler arasında da bilinen eşitlikler sağlanır. Buradan bi-periyodik (p, q) -Lucasi dizilerini için Binet formülü aşağıdaki teorem ile verilir.

Teorem 4.13: $n \geq 0$ için σ ve ρ , $x^2 - pabx - qab = 0$ denkleminin kökleri ve $\xi(n) = n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ olmak üzere bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülü

$$L_n(p, q) = \left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \right) (\sigma^n + \rho^n) \quad (4.22)$$

şeklinde (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: İspat n üzerinde tümevarım yöntemiyle tamamlanabilir. $n = 0, 1$ için (4.22) eşitliğinin sağlandığı açık bir şekilde görülür. $n \geq 0$ için (4.22) eşitliğinin sağlandığını kabul edip $n + 1$ için sağlandığını gösterelim. Tanım 2.7 ile verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(n + 1) + \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + 2}{2} \right\rfloor$$

$$1 - \xi(n) + \left\lfloor \frac{n + 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n + 2}{2} \right\rfloor$$

yazılabilir. Buradan (4.21) eşitliği, tümevarım hipotezi kullanılırsa ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin karakteristik denkleminin kökleri arasındaki $p\sigma + q = \frac{\sigma^2}{ab}$ ve $p\rho + q = \frac{\rho^2}{ab}$ eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} L_{n+1}(p, q) &= a^{\xi(n+1)} b^{1-\xi(n+1)} p L_n(p, q) + q L_{n-1}(p, q) \\ &= a^{\xi(n+1)} b^{1-\xi(n+1)} p \left(\left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} \right) (\sigma^n + \rho^n) \right) + q \left(\left(\frac{a^{\xi(n-1)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}} \right) (\sigma^{n-1} + \rho^{n-1}) \right) \\ &= (a^{\xi(n+1)} \sigma^{n-1}) \left(\frac{abp\sigma}{a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} + \frac{abq}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1}} \right) \\ &\quad + (a^{\xi(n+1)} \rho^{n-1}) \left(\frac{abp\rho}{a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n+1)} (ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} + \frac{abq}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor+1}} \right) \\ &= (a^{\xi(n+1)} \sigma^{n-1}) \left(\frac{ab(p\sigma + q)}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor}} \right) + (a^{\xi(n+1)} \rho^{n-1}) \left(\frac{ab(p\rho + q)}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a^{\xi(n+1)}\sigma^{n-1})\left(\frac{\sigma^2}{(ab)^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}}\right) + (a^{\xi(n+1)}\rho^{n-1})\left(\frac{\rho^2}{(ab)^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}}\right) \\
&= \left(\frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}}\right)(\sigma^{n+1} + \rho^{n+1})
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem ile bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin pozitif ve negatif indisli terimleri arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca bu teorem ile bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin negatif indisli terimleri elde edilebilir.

Teorem 4.14: Bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin negatif indisli terimleri

$$L_{-n}(p, q) = (-q)^{-n}L_n(p, q)$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: (4.22) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
L_{-n}(p, q) &= \left(\frac{a^{\xi(-n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{-n+1}{2} \rfloor}}\right)(\sigma^{-n} + \rho^{-n}) \\
&= \left(\frac{\sigma^{\xi(-n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{-n+1}{2} \rfloor}}\right)\left(\frac{\sigma^n + \rho^n}{(\sigma\beta)^n}\right) \\
&= \left(\frac{\sigma^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{-n+1}{2} \rfloor}}\right)\left(\frac{\sigma^n + \rho^n}{(-qab)^n}\right) \\
&= (-q)^{-n}\left(\frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}\right)(\sigma^n + \rho^n) \\
&= (-q)^{-n}L_n(p, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teoremlerle bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin ardışık terimleri arasındaki oran ve Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitlikleri gibi bazı temel özellikler sunulmuştur.

Teorem 4.15: Bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin ardışık terimleri arasındaki oranın limiti

$$\text{i.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{2n+1}(p, q)}{L_{2n}(p, q)} = \frac{\sigma}{b}$$

$$\text{ii.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{2n}(p, q)}{L_{2n-1}(p, q)} = \frac{\sigma}{a}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: $|\rho| < \sigma$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^n = 0$ olmak üzere (4.22) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{2n+1}(p, q)}{L_{2n}(p, q)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^{\xi(2n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n+2}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{2n+1} + \rho^{2n+1})}{\left(\frac{a^{\xi(2n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{2n} + \rho^{2n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{(ab)^n} (\sigma^{2n+1} + \rho^{2n+1})}{\frac{1}{(ab)^n} (\sigma^{2n} + \rho^{2n})} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{ab} \frac{\sigma^{2n+1} \left(1 + \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2n+1} \right)}{\sigma^{2n} \left(1 + \left(\frac{\rho}{\sigma}\right)^{2n} \right)} \\ &= \frac{\sigma}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ii. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{2n}(p, q)}{L_{2n-1}(p, q)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{a^{\xi(2n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{2n} + \rho^{2n})}{\left(\frac{a^{\xi(2n-1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{2n}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{2n-1} + \rho^{2n-1})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(ab)^n} (\sigma^{2n} + \rho^{2n})}{\frac{a}{(ab)^n} (\sigma^{2n-1} + \rho^{2n-1})} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a} \frac{\sigma^{2n} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{2n} \right)}{\sigma^{2n-1} \left(1 - \left(\frac{\rho}{\sigma} \right)^{2n-1} \right)} \\
&= \frac{\sigma}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.16 (Catalan Eşitliği): n ve r negatif olmayan sayılar olmak üzere $n \geq r$ için

$$\begin{aligned}
a^{1-\xi(n+r)} b^{1+\xi(n+r)} L_{n-r}(p, q) L_{n+r}(p, q) - a^{1-\xi(n)} b^{1+\xi(n)} L_n^2(p, q) = \\
(-q)^{n-r} a^{\xi(r)} b^{1-\xi(r)} (p^2 ab^2 + 4bq) F_r^2(p, q)
\end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\begin{aligned}
\xi(n) &= n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\
\xi(n+r) - \left\lfloor \frac{n-r+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+r+1}{2} \right\rfloor &= -n \\
\xi(n-r) - \left\lfloor \frac{n-r+1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n+r+1}{2} \right\rfloor &= -n
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan (4.22) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& a^{1-\xi(n+r)} b^{1+\xi(n+r)} L_{n-r}(p, q) L_{n+r}(p, q) - a^{1-\xi(n)} b^{1+\xi(n)} L_n^2(p, q) \\
&= a^{1-\xi(n+r)} b^{1+\xi(n+r)} \left(\frac{a^{\xi(n-r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{n-r} + \rho^{n-r}) \left(\frac{a^{\xi(n+r)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{n+r} + \rho^{n+r}) \\
&\quad - a^{1-\xi(n)} b^{1+\xi(n)} \left(\frac{a^{2\xi(n)}}{(ab)^{2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^n + \rho^n)^2 \\
&= a^{\xi(n-r) - \lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1} b^{\xi(n+r) - \lfloor \frac{n-r+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n+r+1}{2} \rfloor + 1} (\sigma^{n-r} + \rho^{n-r}) (\sigma^{n+r} + \rho^{n+r}) \\
&\quad - a^{\xi(n) - 2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} b^{\xi(n) - 2\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1} (\sigma^{2n} + 2(\sigma\rho)^n \rho^{2n}) (\sigma^{n+r} + \rho^{n+r}) \\
&= a^{1-n} b^{1-n} (\sigma^{2n} + \sigma^{n-r} \rho^{n+r} + \rho^{n-r} \sigma^{n+r} + \rho^{2n}) - a^{-n} b^{-n} (\sigma^{2n} + 2(\sigma\rho)^n + \rho^{2n}) \\
&= (ab)^{1-n} (\sigma\rho)^n \left(\frac{\sigma^r}{\rho^r} + \frac{\rho^r}{\sigma^r} - 2 \right) \\
&= (ab)^{1-n} (-qab)^n \left(\frac{\sigma^{2r} - 2(\sigma\rho)^r + \rho^{2r}}{(\sigma\rho)^r} \right) \\
&= (ab)^{1-n} (-q)^n (ab)^n \frac{(\sigma^r - \rho^r)^2}{(-qab)^r} \\
&= ab(-q)^{n-r} \frac{1}{(ab)^r} (\sigma^r - \rho^r)^2 \\
&= (-q)^{n-r} a^{1+\xi(r)} b^{1-\xi(r)} \frac{(\sigma^r - \rho^r)^2}{a^2} F_r^2(p, q) \\
&= (-q)^{n-r} a^{\xi(r)} b^{1-\xi(r)} (p^2 ab^2 + 4bq) F_r^2(p, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

Teorem 4.17 (Cassini Eşitliği): n negatif olmayan sayı olmak üzere

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} L_{n-1}(p, q) L_{n+1}(p, q) - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} L_n^2(p, q) = (-q)^{n-1} (p^2 ab + 4q)$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: Teorem 4.16 verilen Catalan eşitliğinde $r = 1$ alınırsa ispat elde edilebilir.

Teorem 4.18 (d'Ocagne Eşitliği): n ve r negatif olmayan sayılar olmak üzere $n \geq r$ için

$$\begin{aligned} a^{\xi(nr+n)} b^{\xi(nr+r)} L_{n+1}(p, q) L_r(p, q) - a^{\xi(nr+r)} b^{\xi(nr+n)} L_n(p, q) L_{r+1}(p, q) \\ = (-q)^r a^{\xi(n-r)} (p^2 ab + 4q) F_{n-r}(p, q) \end{aligned}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2023).

İspat: Tanım 2.7 de verilen $\xi(n)$ fonksiyonundan

$$\xi(n) + \xi(r+1) - 2\xi(nr+n) = \xi(n+1) + \xi(r) - 2\xi(nr+r) = 1 - \xi(n-r)$$

$$\xi(n-r) = \xi(nr+n) + \xi(nr+r)$$

$$\frac{n+r-\xi(n-r)}{2} = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - \xi(nr+n)$$

$$\frac{n+r-\xi(n-r)}{2} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{r+1}{2} \right\rfloor - \xi(nr+r)$$

$$\frac{n-r-\xi(n-r)}{2} = \left\lfloor \frac{n-r}{2} \right\rfloor$$

yazılabilir.

Buradan (4.22) eşitliği ile verilen bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin Binet formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& a^{\xi(nr+n)} b^{\xi(nr+r)} L_{n+1}(p, q) L_r(p, q) - a^{\xi(nr+r)} b^{\xi(nr+n)} L_n(p, q) L_{r+1}(p, q) \\
&= a^{\xi(nr+n)} b^{\xi(nr+r)} \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{n+1} + \rho^{n+1})(\sigma^r + \rho^r) \\
&\quad - a^{\xi(nr+r)} b^{\xi(nr+n)} \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{r+2}{2} \rfloor}} \right) \left(\frac{1}{a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \right) (\sigma^{r+1} + \rho^{r+1})(\sigma^n + \rho^n) \\
&= a^{\xi(nr+n) - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{r}{2} \rfloor} b^{\xi(nr+r) - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor - 1} (\sigma^{n+r+1} + \sigma^{n+1} \rho^r + \rho^{n+1} \sigma^r + \rho^{n+r+1}) \\
&\quad - a^{\xi(nr+r) - \lfloor \frac{r+1}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^{\xi(nr+n) - \lfloor \frac{r}{2} \rfloor - \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor - 1} (\sigma^{n+r+1} + \sigma^{r+1} \rho^n + \rho^{r+1} \sigma^n + \rho^{n+r+1}) \\
&= a^{\frac{-n-r+\xi(n-r)}{2}} b^{\frac{-n-r+\xi(n-r)}{2} - 1} (\sigma^{n+r+1} + \rho^{n+r+1} + (\sigma\rho)^r (\sigma^{n-r+1} + \rho^{n-r+1})) \\
&\quad - a^{\frac{-n-r+\xi(n-r)}{2}} b^{\frac{-n-r+\xi(n-r)}{2} - 1} (\sigma^{n+r+1} + \rho^{n+r+1} + (\sigma\rho)^r (\sigma\rho^{n-r} + \rho\sigma^{n-r})) \\
&= \frac{1}{b(ab)^{\frac{n+r-\xi(n-r)}{2}}} ((\sigma\rho)^r (\sigma^{n-r+1} + \rho^{n-r+1} - \sigma\rho^{n-r} - \rho\sigma^{n-r})) \\
&= \frac{1}{b(ab)^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor + r}} (\sigma\rho)^r (\sigma - \rho) (\sigma^{n-r} - \rho^{n-r}) \\
&= \frac{1}{b(ab)^{\lfloor \frac{n-r}{2} \rfloor + r}} (-qab)^r \frac{(\alpha^{n-r} - \beta^{n-r})}{(\alpha - \beta)} (\alpha - \beta)^2 \\
&= \frac{(-q)^r}{ab} F_{n-r} \alpha^{\xi(n-r)} (\alpha - \beta)^2 \\
&= (-q)^r \alpha^{\xi(n-r)} (p^2 ab + 4q) F_{n-r}(p, q)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

4.3. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas Dizilerinin Döşeme Yorumu

Bu bölümde (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri döşeme yorumları ile verilmiştir. n -inci (p, q) -Fibonacci ve n -inci (p, q) -Lucas sayıları döşeme yaklaşımıyla incelenmiştir. Daha sonra döşeme yorumları kullanılarak bu sayılar için bazı temel özdeşlikler ve toplam formülleri verilmiştir.

$p, q \geq 1$ tam sayıları olmak üzere n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı için n hücreli bir $1 \times n$ tahtası için özel olarak $F_{p,q,0} = 1$ ve $F_{p,q,1} = p$ başlangıç değerleri ile (p, q) -Fibonacci dizisi $\{F_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ ve $L_{p,q,0} = 2$ ve $L_{p,q,1} = p$ başlangıç değerleri ile (p, q) -Lucas dizisi $\{L_{p,q,n}\}_{n \geq 0}$ verilsin. 1×1 kareler için p farklı renk ve 1×2 dominoları için q farklı renk olmak üzere bir başlangıç karesi için $F_{p,q,1}$ değeri ve bir başlangıç dominosu için $qF_{p,q,0}$ değeri olacak şekilde ilk iki tahta verilir.

Teorem 4.19: $n \geq 1$, kareler için p farklı renk ve dominolar için q farklı renk olmak üzere n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominoları ile bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısıdır (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022c).

İspat: Kareler için p farklı renk ve dominolar için q farklı renk olmak üzere n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı, $F_{p,q,n}$ renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak $1, 2, \dots, n$ etiketli hücrelere sahip bir $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını temsil etsin. Boş bir tahtayı döşemenin sadece bir yolu olduğundan $F_{p,q,0} = 0$ ve bir uzunluğunda bir tahta için p tane farklı renk olduğundan $F_{p,q,1} = p$ dir. Böylece (p, q) -Fibonacci dizilerinin başlangıç şartları elde edilir. $n \geq 2$ için tüm döşemelerdeki ilk hücre ya bir renklendirilmiş karedir ya da bir renklendirilmiş dominodur. İlk hücre bir renklendirilmiş 1×1 kare ise bu kare için p farklı renk seçilebilir ve $1 \times (n - 1)$ tahtasını döşemek için $F_{p,q,n-1}$ farklı yol elde edilir. Benzer olarak ilk hücre bir renklendirilmiş 1×2 domino ise bu domino için q farklı renk seçilebilir ve $1 \times (n - 2)$ tahtasını döşemek için $F_{p,q,n-2}$ farklı yol elde edilir. Böylece (3.1) rekürans bağıntısındaki $F_{p,q,n} = pF_{p,q,n-1} + qF_{p,q,n-2}$ bağıntı elde edilir ve ispat tamamlanır.

Benzer şekilde n -inci (p, q) -Lucas sayısı dairesel bir $1 \times n$ tahtayı renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar ile döşeme yollarının sayısı olarak yorumlanabilir. 1×1 kareler için p tane farklı renk ve 1×2 dominoları için q farklı renk olmak üzere bir başlangıç karesi için $L_{p,q,1}$ değeri ve bir başlangıç dominosu için $qL_{p,q,0}$ değeri olacak şekilde ilk iki tahta verilir.

Teorem 4.20: $n \geq 1$, kareler için p farklı renk ve dominolar için q farklı renk olmak üzere n -inci (p, q) -Lucas sayısı renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominoları ile bir dairesel $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısıdır (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022c).

İspat: Kareler için p farklı renk ve dominolar için q farklı renk olmak üzere n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak $1 \times n$ dairesi olarak adlandırılan bir dairesel $1 \times n$ tahtasını döşeme yollarının sayısını temsil etsin. $1 \times n$ dairesinde n -inci ve 1. hücreleri kaplayan bir domino yoksa çember içi daire, n -inci ve 1. hücreleri kaplayan bir domino varsa çember dışı daire olarak adlandırılsın. Boş daire ya çember içi daire ya da çember dışı daire olabilir ve $L_{p,q,0} = 2$ elde edilir. 1×1 dairesi sadece bir kare ile döşenebilir ve p farklı renk seçeneği vardır. Dolayısıyla $L_{p,q,1} = p$ dir. Böylece (p, q) -Lucas dizilerinin başlangıç şartları elde edilir. $n \geq 2$ için birinci hücreye göre iki durum vardır. $1 \times n$ dairesi $1 \times (n - 1)$ dairede ilk hücrenin soluna p farklı renk seçimiyle bir kare eklenirse ya da $1 \times (n - 2)$ dairede ilk hücrenin soluna q farklı renk seçimiyle bir domino eklenirse elde edilir. Ayrıca $1 \times (n - 1)$ dairesini döşemek için $L_{p,q,n-1}$ farklı yol ve $1 \times (n - 2)$ dairesini döşemek için $L_{p,q,n-2}$ farklı yol vardır. Böylece (3.2) rekürans bağıntısındaki $L_{p,q,n} = pL_{p,q,n-1} + qL_{p,q,n-2}$ bağıntı elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu döşeme yorumları ile (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri için birçok özellik elde edilir. Şimdi (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri için toplam formülleri ve bu dizilerin terimleri arasındaki iyi bilinen ilişkiler döşeme yorumlarını kullanarak verilecektir.

4.3.1. (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin özellikleri

(p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin ilk n teriminin toplam formülleri döşeme yorumları kullanılarak aşağıda teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.21: n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

$$\text{i.} \quad q \sum_{i=0}^n p^{n-i} F_{p,q,i} + p^{n+2} = F_{p,q,n+2}$$

$$\text{ii.} \quad q \sum_{i=0}^n p^{n-i} L_{p,q,i} + p^{n+2} = L_{p,q,n+2}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022c).

İspat: i. Teorem 4.19 dan renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak bir $1 \times (n + 2)$ tahtasını döşeme yollarının sayısı $F_{p,q,n+2}$ ye eşittir. Böylece bu eşitliğin sağ tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sol tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. Bir $1 \times (n + 2)$ tahtasını düşünelim. Tüm hücrelerin 1×1 kare olduğu döşemelerin sayısı p^{n+2} dir. Diğer tüm döşemeler en az bir 1×2 domino içerir. 1×2 domino içeren döşemeler sayısı $0 \leq i \leq n$ için $i + 1$ ve $i + 2$ hücrelerini kapsayan son dominonun konumuna göre hesaplanabilir. $1 \leq i \leq n$ için $i + 1$ ve $i + 2$ hücrelerini kapsayan bir domino için 1. hücreden i . hücreye kadar olan hücreleri döşemenin $F_{p,q,i}$ yolları vardır ve $i + 3$ hücresinden $n + 2$ hücresine kadar olan hücreler için p^{n-i} farklı renk seçeneği vardır. Dominolar için q renk seçeneği ile böyle döşemelerin sayısı $qF_{p,q,i}p^{n-i}$ dir. $i = 0$ ise, ilk domino seçmenin $qF_{p,q,0}$ yolu vardır ve kalan kareler p^n farklı renk ile seçilebilir ve böyle döşemelerin sayısı $qF_{p,q,0}p^n$ dir. Tüm döşeme yollarının toplamı istenen sonuç olup $q \sum_{i=0}^n p^{n-i} F_{p,q,i} + p^{n+2} = F_{p,q,n+2}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii. Benzer şekilde Teorem 4.20 kullanılarak elde edilir.

(p, q) -Fibonacci dizileri ile (p, q) -Lucas dizilerinin tek indisli ilk n teriminin toplam formülleri $2n$ uzunluğunda bir tahtanın döşenmesi yorumuyla aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 4.22: n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

- i. $p \sum_{i=1}^n q^{n-i} F_{p,q,2i-1} + q^n = F_{p,q,2n}$
- ii. $p \sum_{i=1}^n q^{n-i} L_{p,q,2i-1} + 2q^n = L_{p,q,2n}$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022c).

İspat: i. Teorem 4.19 dan renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak bir $1 \times 2n$ tahtasını döşeme yollarının sayısı $F_{p,q,2n}$ ye eşittir. Böylece bu eşitliğin sağ tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sol tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. Bir $1 \times 2n$ tahtasını düşünelim. Tüm hücrelerin 1×2 domino olduğu döşemelerin sayısı q^n dir. Diğer tüm döşemeler en az bir 1×1 kare içerir. 1×1 kare içeren döşemeler sayısı $1 \leq i \leq n$ için $2i$ hücresini kapsayan son karenin konumuna göre hesaplanabilir. 1. hücreden $(2i - 1)$. hücreye kadar olan hücreleri döşemenin $F_{p,q,2i-1}$ yolu vardır. Ayrıca son kare ve kalan $n - i$ domino için pq^{n-i} farklı renk seçeneği vardır. Tüm döşeme yollarının toplamı istenen sonuç olup $p \sum_{i=1}^n q^{n-i} F_{p,q,2i-1} + q^n = F_{p,q,2n}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii. Benzer şekilde Teorem 4.20 kullanılarak elde edilir.

(p, q) -Fibonacci dizileri ile (p, q) -Lucas dizilerinin çift indisli ilk n teriminin toplam formülleri $2n - 1$ uzunluğundaki bir tahtanın döşenmesi yorumuyla aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem 4.23: n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,n}$ ve n -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,n}$ olmak üzere

- i. $p \sum_{i=1}^n q^{n-i} F_{p,q,2i} + pq^n = F_{p,q,2n+1}$
- ii. $p \sum_{i=0}^n q^{n-i} L_{p,q,2i} + pq^n = L_{p,q,2n+1}$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022c).

İspat: i. Teorem 4.19 dan renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak bir $1 \times (2n + 1)$ tahtasını döşeme yollarının sayısı $F_{p,q,2n+1}$ ye eşittir. Böylece bu eşitliğin sağ tarafı hesaplanmış olur. Eşitliğin sol tarafının da aynı sayıyı verdiği gösterilirse ispat tamamlanır. Bir $1 \times (2n + 1)$ tahtasını düşünelim. Bütün döşemeler en az bir 1×1 kare içerir. 1×1 kare içeren döşeme yollarının sayısı $0 \leq i \leq n$ için $2i + 1$ hücresini kapsayan son karenin konumuna göre hesaplanabilir. 1. hücreden $(2i)$. hücreye kadar olan hücreleri döşemenin $F_{p,q,2i}$ yolları vardır. Ayrıca son kare ve kalan $n - i$ domino için pq^{n-i} farklı renk seçeneği vardır. $i = 0$ durumunu ayrı tutularak tüm döşeme yollarının toplamı istenen sonuç olup $p \sum_{i=1}^n q^{n-i} F_{p,q,2i} + pq^n = F_{p,q,2n+1}$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii. Benzer şekilde Teorem 4.20 kullanılarak elde edilir.

n -inci (p, q) -Fibonacci sayısı ile n -inci (p, q) -Lucas sayısı arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 4.24: $m, n \geq 1$ tam sayılar ve i -inci (p, q) -Fibonacci sayısı $F_{p,q,i}$ ve i -inci (p, q) -Lucas sayısı $L_{p,q,i}$ olmak üzere

$$2F_{p,q,m+n-1} = F_{p,q,m-1}L_{p,q,n} + F_{p,q,n-1}L_{p,q,m}$$

dir (Taşyurdu ve Türkoğlu, 2022c).

İspat: $1 \times (m + n - 1)$ tahtasını alalım. Teorem 4.19 dan renklendirilmiş 1×1 kareler ve renklendirilmiş 1×2 dominolar kullanılarak bir $1 \times (m + n - 1)$ tahtasını döşeme yollarının sayısı $F_{p,q,m+n-1}$ ye eşittir. Diğer taraftan $1 \times (m + n - 1)$ tahtası iki şekilde döşenebilir:

1. Durum: $1 \times (m + n - 1)$ döşemesinde $n + 1$ ve n -inci hücreleri kaplayan domino yoktur ve n -inci hücrede olan n ve $n + 1$ hücreleri arasında bir çizgi vardır. Buradan $1 \times (m + n - 1)$ döşemesi, $1 \times n$ döşemesi ve $1 \times (m - 1)$ döşemesi olarak ikiye ayrılabilir. $1 \times n$ döşemesinin ilk hücresinin sol tarafına n -inci hücrenin sağ tarafını ilâştirilirse bir çember içi $1 \times n$ dairesi oluşur. Buradan $L_{p,q,n}^1$, çember içi $1 \times n$ daire döşeme yollarının sayısını gösterir.

2. Durum: $1 \times (n + m - 1)$ döşemesinde $n + 1$ ve n -inci hücreleri kaplayan domino vardır ve n -inci hücrede olan n ve $n + 1$ hücreleri arasında bir çizgi yoktur. Bu durumda, $1 \times (n - 1)$ döşeme ve çember dışı $1 \times m$ daire oluştur. Buradan $L_{p,q,m}^2$ çember dışı $1 \times m$ daire daire döşeme yollarının sayısını gösterir.

Benzer yaklaşım $1 \times (m + n - 1)$ tahtasında m -inci hücrede bir çizgi olup olmadığını dikkate alarak m -inci hücreye uygulanır. Buradan (3.2) rekürans bağıntılarından $L_{p,q,n}^1 + L_{p,q,n}^2 = L_{p,q,n}$ ve $L_{p,q,m}^1 + L_{p,q,m}^2 = L_{p,q,m}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 2F_{p,q,n+m-1} &= L_{p,q,n}^1 F_{p,q,m-1} + F_{p,q,n-1} L_{p,q,m}^2 + L_{p,q,m}^1 F_{p,q,n-1} + F_{p,q,m-1} L_{p,q,n}^2 \\ &= F_{p,q,m-1} (L_{p,q,n}^1 + L_{p,q,n}^2) + F_{p,q,n-1} (L_{p,q,m}^1 + L_{p,q,m}^2) \\ &= F_{p,q,m-1} L_{p,q,n} + F_{p,q,n-1} L_{p,q,m} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizilerinin rekürans bağıntıları kullanılarak Fibonacci tipi, Lucas tipi, bi-periyodik Fibonacci tipi ve bi-periyodik Lucas tipi dizileri genelleştiren bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizileri tanımlanmıştır. Bu dizilerin n -inci terimlerinin hesaplanmasında kendisinden önceki terimlerin bilinmesine ihtiyaç bırakmayan ve kapalı formül olarak bilinen Binet formülleri ve üreteç fonksiyonları verilmiştir. Dizilerin pozitif ve negatif indisli terimleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Ayrıca bi-periyodik (p, q) -Fibonacci ve bi-periyodik (p, q) -Lucas dizilerinin ardışık terimleri arasındaki oran ve Catalan, Cassini, d'Ocagne eşitlikleri gibi bazı temel özellikleri sunulmuştur.

Literatürde Fibonacci ve Lucas dizilerinin genelleştirmeleri üzerine birçok tanımlanmış rekürans dizi vardır. Bu dizilerin en önemli genelleştirmelerinden biri rekürans bağıntılarındaki terimlerin katsayılarının dikkate alınmasıyla tanımlanan (p, q) -Fibonacci ve (p, q) -Lucas dizileri ve diğeri tek ve çift indisli terimlerine göre bi-periyodik diziler olarak adlandırılan dizilerdir. Bu çalışmada sunulan tanımlar ve ilişkili olarak elde edilen sonuçlar ile hem Fibonacci ve Lucas tipli diziler hem de bi-periyodik diziler genelleştirilmiştir ve yeni sayı dizileri ile sonuçları literatüre kazandırılmıştır.

Uzun yıllardır Fibonacci ve Lucas sayıları ile dizilerinin genelleştirmeleri çalışılmaktadır. Bu dizilerin genelleştirilmesi çalışılırken farklı bakış açıları ortaya çıkmıştır. Bir taraftan sunulan genelleştirmeler dizilerin başlangıç değerlerine bağlıyken diğer taraftan ise dizilerin rekürans bağıntısındaki terimlerin katsayısına bağlı olarak çok farklı genellemeleri sunulmuştur.

5.2. Öneriler

Çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlar doğrultusunda araştırmacılara öneriler olarak, Fibonacci ve Lucas dizileri ile ilişkili olarak rekürans bağıntılarla tanımlanan genelleştirilmiş polinom diziler için bi-periyodik polinom dizileri tanımlanabileceğini ve bu çalışmada elde edilen tüm sonuçların araştırılabileceğini ifade edebiliriz.

KAYNAKLAR

- Allouche, J. P. and Johnson, J. (1996) “Narayana’s cows and delayed morphisms”, **3rd Computer Music Conference JIM96**, France.
- Benjamin, A. T. and Quinn, J. J. (2003) Proofs That Really Count: The Art of Combinatorial Proof 1st ed., **Mathematical Association of America**, America 27, 1-209.
- Bilgici, G. (2014) “Two generalizations of Lucas sequence”, **Applied Mathematics and Computation**, 24, 18245, 526-538.
- Boussayoud, A., Boughaba, S. and Kerada, M. (2018) “Generating functions k -Fibonacci and k -Jacobsthal numbers at negative indices”, **Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications**, 6(2), 195-202.
- Brigham, R. C., Caron, R. M., Chinn, P. Z. and Grimaldi, R. P. (1996-97) “A tiling scheme for the Fibonacci numbers”, **Journal of Recreational Mathematics**, 28(1), 10–17.
- Brousseau, A. (1972) “Fibonacci numbers and geometry”, **Fibonacci Quarterly**, 10(3), 303-318.
- Carlitz, L. (1962) “Generating functions for powers of certain sequences of numbers”, **Duke Mathematical Journal**, 29, 521-537.
- Çağman A. (2021a) “An approach to pillar’s problem with the Pell sequence and the powers of 3”, **Miskolc Mathematical Notes**, 22(2), 599-610.
- Çağman A. (2021b) “Repdigits as product of Fibonacci and Pell numbers”, **Turkish Journal of Science**, 6(1), 31-35.
- Edson, M. and Yayenie, O. (2009) “A new generalization of Fibonacci sequence & extended Binet's formula”, **Integers**, 9(6), 639-654.
- El-Mikkawy, M. and Sogabe, T. (2010) “A new family of k -Fibonacci numbers”, **Applied Mathematics and Computation**, 215, 4456-4461.
- Everest, G., Poorten, A., Shparlinski, I. and Ward, T. (2003) Recurrence sequences, **American Mathematical Society**, USA, 1-323.
- Falcon, S. and Plaza, A. (2007) “On the Fibonacci k -numbers”, **Chaos, Solitons & Fractals**, 32(5), 1615-1624.
- Falcon, S. (2012) “On the Lucas triangle and its relationship with the k -Lucas numbers”, **Journal Of Mathematical and Computational Science**, 2(3), 425-434.
- Gupta, V. K., Panwar, Y. K., and Sikhwal, O. (2012) “Generalized Fibonacci Sequences”, **Theoretical Mathematics & Applications**, 2(2), 115-124.

- Haukkanen, P. (2002) "A note on Horadam's sequence", *Fibonacci Quarterly*, 40, 358-361.
- Hoggatt, V. (1969) Fibonacci and Lucas Numbers; *Houghton Mifflin*, Boston, MA, USA.
- Holden, H. L. (1975) "Fibonacci tiles", *Fibonacci Quarterly*, 13(1), 45-49.
- Horadam, A. (1961) "A generalized Fibonacci sequence", *The American Mathematical Monthly*, 68(5), 455-459.
- Horadam, A.F. (1965) "Basic properties of a certain generalized sequence of numbers", *Fibonacci Quarterly*, 3(3), 161-176.
- Horadam, A.F. (1971) "Pell Identities", *Fibonacci Quarterly*, 9(3), 245-252.
- Horadam, A.F. (1996) "Jacobsthal representation numbers", *Fibonacci Quarterly*, 37(2), 40-54.
- Kadioğlu, E. and Kamali, M. (2003) Genel Matematik, *Bakanlar Matbaacılık*, Erzurum, 1-491.
- Kalman, D. and Mena, R. (2002) "The Fibonacci Numbers—Exposed" *The Mathematical Magazine*, 2.
- Koçer, E. G., Tuglu, N. and Stakhov, A. (2009) "On the m -extension of the Fibonacci and Lucas p -numbers", *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(4), 1890-1906.
- Koshy, T. (2001) Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, *Wiley*, New York, NY, USA, 1-641.
- Koshy, T. (2014) Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications, *Springer*, New York, NY, USA, 1-431.
- Miles, E. P. (1960) "Generalized Fibonacci numbers and associated matrices", *The American Mathematical Monthly*, 67(8) 745-752.
- Panwar, Y. K. (2021) "A note on the generalized k -Fibonacci sequence", *MTU Journal of Engineering and Natural Sciences*, 2(2), 29-39.
- Shanon, A.G. and Horadam, A. F. (1973) "Generalized Fibonacci triples", *The American Mathematical Monthly*, 80(2), 187-90.
- Singh, B., Sikhwal, O. and Bhatnagar, S. (2010) "Fibonacci-Like Sequence and its Properties", *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 5(18), 859-868.
- Stakhov, A. P., (1977) Introduction into Algorithmic Measurement Theory, *Soviet Radio*, Moskow, Russia.
- Stakhov, A. (1989) "The Golden section in the measurement theory", *Computers & Mathematics with Applications*, 17(46), 613-38.

- Stakhov, A. and Rozin, B. (2006) "Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas p -numbers", *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(5), 1162-1177.
- Suvarnamani, A., and Tatong, M. (2015) "Some Properties of (p, q) -Fibonacci Numbers", *Science and Technology RMUTT Journal*, 5(2), 17-21.
- Suvarnamani, A. (2016a) "Some Properties of (p, q) -Lucas Number", *Kyungpook Mathematical Journal*, 56, 367-370.
- Suvarnamani, A. (2016b) "On the Odd and Even Terms of (p, q) -Fibonacci Number and (p, q) -Lucas Number" *NSRU Science and Technology Journal*, 8(8), 73-78.
- Suvarnamani, A. (2017) "Some Identities of (p, q) -Fibonacci Numbers by Matrix Methods", *Phranakhon Rajabhat Research Journal (Science and Technology)*, 12(2), 49-53.
- Tan, E. (2017) "Some properties of the bi-periodic Horadam sequences", *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 23(4), 56-65.
- Tan, E., and Leung, H. (2020) "A note on congruence properties of the generalized bi-periodic Horadam sequence", *Haceteppe Journal of Mathematics & Statistics*, 49(6), 2084-2093.
- Taşyurdu, Y., Cobanoğlu, N. and Dilmen, Z. (2016) "On The a New Family of k -Fibonacci Numbers", *Erzincan University Journal of Science and Thechnology*, 9(1), 95-101.
- Taşyurdu, Y. (2019) "Generalized (p, q) -Fibonacci-Like sequences and their properties", *Journal of Mathematics Research*, 11(6), 43-52.
- Taşyurdu, Y. (2022) "Generalized Fibonacci numbers with five parameters", *Thermal Science*, Spec. issue 2(26), 495-505.
- Taşyurdu, Y. and Cengiz, B. (2022) "A tiling approach to Fibonacci p -numbers", *Journal of Universal Mathematics*, 5(2), 177-184.
- Taşyurdu, Y. and Türkoğlu, N. Ş. (2022a) "Bi-periodic (p, q) -Fibonacci and bi-periodic (p, q) -Lucas sequences", *8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference*, Mersin, 161-161.
- Taşyurdu, Y. and Türkoğlu, N. Ş. (2022b) "A tiling interpretation for (p, q) -Fibonacci and (p, q) -Lucas numbers", *8th International IFS and Contemporary Mathematics Conference*, Mersin, 162-162.
- Taşyurdu, Y. and Türkoğlu, N. Ş. (2022c) "A tiling interpretation for (p, q) -Fibonacci and (p, q) -Lucas numbers", *Journal of Universal Mathematics*, 5(2), 81-87.
- Taşyurdu, Y. and Türkoğlu, N. Ş. (2023) "Bi-periodic (p, q) -Fibonacci and bi-periodic (p, q) -Lucas sequences", *Sakarya University Journal of Science*, 27(1), 1-13.

- Uygun, Ş. and Karatas, H. (2019) “A New Generalization of Pell-Lucas Numbers (Bi-Periodic Pell-Lucas Sequence)”, *Communications in Mathematics and Applications*, 10(3), 469-479.
- Uygun, Ş. and Karatas, H. (2020) “Bi-Periodic Pell Sequence”, *Academic Journal of Applied Mathematical Sciences*, 6(7), 136-144.
- Uygun, Ş. and Owusu, E. (2016) “A New Generalization Of Jacobsthal Numbers”, *Journal of Mathematical Analysis*, 7(4), 28-39.
- Uygun, Ş. and Owusu, E. (2019) “A New Generalization of Jacobsthal Lucas Numbers”, *Journal of Advances in Mathematics and Computer Science*, 34(5), 1-13.
- Vajda, S. (1989) Fibonacci & Lucas numbers and golden section: Theory and Applications, *Ellis Horwood*, Chichester.
- Vorobyov, N. (1976) Elementary Numbers Theory, *Allyn and Bacon inc*, Boston, 285-299.
- Yayenie, O. (2011) “A note on generalized Fibonacci sequences”, *Applied Mathematics and Computation*, 217(12), 5603-5611.
- Yazlık, Y., Köme, C., and Madhusudanan, V. (2018) “A new generalization of Fibonacci and Lucas p -numbers”, *J. Computational Analysis And Applications*, 25(4), 657-669.