



T.C.
BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ALT
SINIFLARI İÇİN FABER VE CHEBYSHEV
POLİNOM KATSAYI TAHMİNLERİ**

Ertuğrul DOĞAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalını

Temmuz-2019
BATMAN
Her Hakkı Saklıdır

TEZ KABUL VE ONAYI

Ertuğrul DOĞAN tarafından hazırlanan “Bi-ünivalent Fonksiyonların Alt Sınıfları için Faber ve Chebyshev Polinom Katsayı Tahminleri” adlı tez çalışması 08/07/2019 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

Başkan

Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ

Danışman

Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR

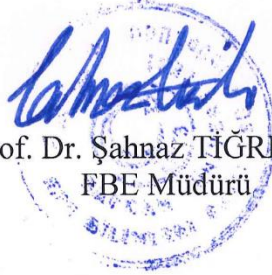
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

İmza

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof. Dr. Şahnaz TİGREK
FBE Müdürü



TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all material and results that are not original to this work.

Ertuğrul DOĞAN
08.07.2019

ÖZET

YÜKSEK LİSANS

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN ALT SINIFLARI İÇİN FABER VE CHEBYSHEV POLİNOM KATSAYI TAHMİNLERİ

Ertuğrul DOĞAN

Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR
2019 Yıl, 48 Sayfa

Jüri

Danışman: Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR
Doç. Dr. Zehra YÜCEDAĞ
Dr. Öğr. Üyesi Veyis TURUT

Bu çalışmada ilk olarak analitik ve bi-ünivalent fonksiyonlara ait bazı alt sınıfların tanımı verilmiştir. Daha sonra, bu alt sınıflara ait Faber polinomları yardımıyla $|a_n|$ katsayısı, Chebyshev polinomları yardımıyla da $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminlerinde bulunulmuştur. Ayrıca bazı özel durumlar için temel sonuçlarımızla ilgili olan diğer önemli bazı sonuçlara da yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Katsayı tahminleri, Analitik, Bi-ünivalent, Chebyshev polinomu, Faber polinomu

ABSTRACT

MS

**COEFFICIENT ESTIMATES OF FABER AND CHEBYSHEV POLYNOMIALS
FOR SUBCLASSES OF BI-UNIVALENT FUNCTIONS**

Ertuğrul DOĞAN

**THE GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCE OF
BATMAN UNIVERSITY
THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE**

Advisor: Associate Professor Fethiye Müge SAKAR

2019 Year, 48 Pages

Jury

**Advisor, Associate Professor Fethiye Müge SAKAR
Associate Professor Zehra YÜCEDAĞ
Dr. Lecturer Member Veyis TURUT**

In this study, firstly, definition of some subclasses of analytic and bi-univalent function is given. Later, the coefficient of $|a_n|$ using by Faber polynomials and the coefficients of $|a_2|$ and $|a_3|$ with the help of Chebyshev polynomials were estimated. Furthermore, for some special cases, other important consequences related to our main results are also presented.

Keywords: Coefficient estimates, Analytic, Bi-univalent, Chebyshev polynomial, Faber polynomial.

ÖNSÖZ

İlk danışmanım Sayın Doç. Dr. Bilal ŞEKER'e, onun yokluğunda danışmanlığımı üstlenen Sayın Doç. Dr. Fethiye Müge SAKAR'a ve sınıf arkadaşım Sayın Adnan CANBULAT'a desteklerinden ötürü sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Ertuğrul DOĞAN
BATMAN-2019

İÇİNDEKİLER

ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER.....	viii
1. GİRİŞ VE KURAMSAL BİLGİLER	1
2. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR.....	7
2.1. Subordinasyon İlkesi	11
2.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları.....	11
2.3. Bi-Ünivalent Fonksiyonlar.....	14
3. $P_m(\beta)$ SINIFI.....	15
4. $R_\Sigma(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ VE $S_\Sigma(\lambda, \tau; \beta)$ ALT SINIFLARININ TANIMI VE FABER POLİNOMLARI YARDIMIYLA BULUNAN KATSAYI TAHMİNLERİ.....	16
5. $R_\Sigma(\tau, \alpha, \gamma; t)$ VE $S_\Sigma(\lambda, \tau; t)$ ALT SINIFLARININ TANIMI VE CHEBSYHEV POLİNOMLARI YARDIMIYLA BULUNAN KATSAYI TAHMİNLERİ.....	27
6. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA.....	38
7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	48

SİMGELER

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{U}$	: $\mathbb{U} = \{z: z < 1\}$ birim disk
$D(z_0, \varepsilon)$	: z_0 merkezli ε yarıçaplı disk
$\mathcal{P}$	: Pozitif gerçel değere sahip fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{A}$	: $\mathbb{U}$ da analitik olan $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}$	: Normalleştirilmiş ünivalent fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*$	: Yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	: α mertebeden yıldızlı fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}$	: Konveks fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{C}(\alpha)$	: α mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı
Σ	: Bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfı
$\prec$	: Subordinasyon simgesi
$R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$	: Bi-univalent fonksiyonların $P_m(\beta)$ sınıfıyla ilişkili bir alt sınıfı
$S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$	: Bi-univalent fonksiyonların $P_m(\beta)$ sınıfıyla ilişkili bir alt sınıfı

1. GİRİŞ VE KURAMSAL BİLGİLER

18. yy da ortaya çıkan karmaşık analizin en önemli konularından biri 20. yy başlarında ortaya çıkan ünivalent fonksiyon teorisidir. 1907 yılında Koebe'nin ünivalent bir fonksiyonun kendisinin ve birinci mertebeden türevinin mutlak değeri üzerindeki sınırları ispatladığı çalışması ünivalent fonksiyonlar teorisini ortaya çıkarmıştır. Bieberbach 1916 yılında ünivalent fonksiyonlar için $|a_2| \leq 2$ olduğu göstermiş ve $|a_n| \leq n$ kestiriminde bulunmuştur. Bieberbach kestirimi olarak bilinen bu kestirim ancak 1984 yılında Branges tarafından ispatlanabilmiştir. Bu kestirimin sonuçları ünivalent fonksiyonlar teorisini daha önemli hale getirmiştir. Böylece ünivalent fonksiyonlar teorisi birçok matematikçiyi cezbetmeye başlamış ve günümüze kadar ünivalent fonksiyonların üst sınırları üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Kendi ve tersi de ünivalent olan bi-ünivalent fonksiyonlarla ilgili ilk çalışma 1967 yılında Lewin tarafından yapılmıştır ve bi-ünivalent fonksiyonların sınıfını Σ ile göstererek $|a_2| \leq 1.51$ olduğunu ispatlamıştır. Brannan ve Clunie 1980 yılında Σ sınıfına ait her f fonksiyonu için $|a_2| \leq \sqrt{2}$ olduğunu açık problem olarak ortaya atmışlardır. Netanyahu 1969 yılında Σ sınıfına ait her f fonksiyonu için $|a_2| \leq \frac{4}{3}$ olduğunu göstermiştir. En iyi tahmin ise 1985 yılında Taha tarafından yapılmış olan $|a_2| \leq 1.485$ katsayı tahminidir

Bu çalışmada Σ sınıfına ait, Vays ve Kant'nın 2017 yılında tanımladığı sınıfları da göz önünde bulundurarak Faber polinomları yardımıyla $|a_n|$ genel katsayısı ve Chebyshev polinomları yardımıyla da $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için üst sınırlar elde edilmiştir. Faber ve Chebyshev polinomları ile ilgili genel bilgiler ise ileriki bölümlerde verilmiştir.

Şimdi ise çalışmamızın temeli olan bazı tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 1.1 (Disk) z , karmaşık sayılar kümesi olan $\mathbb{C}$ nin bir elemanı olsun. $r > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

şeklinde tanımlanan $D(z_0, r)$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı **açık disk**,

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

şeklinde tanımlanan $\bar{D}(z_0, r)$ kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı disk**,

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

şeklinde tanımlanan $\partial D(z_0, r)$ kümesine de z_0 merkezli r yarıçaplı **çember** denir.

Tanım 1.2 (İç Nokta) $\mathbb{C}$ kümesinin bir alt kümesi A olsun. $z_0 \in A$ için $D(z_0, r)$ açık diski A kümesinin alt kümesi olacak şekilde bir $r > 0$ reel sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir **iç noktası** denir. A da tanımlanan bütün iç noktaların kümesine de A nın **içi** denir.

Tanım 1.3 (Açık Küme) $\mathbb{C}$ kümesinin bir alt kümesi A olsun. Her $z_0 \in A$ için z_0 bir iç nokta ise A kümesine **açık küme** denir. Tümleyeni açık olan kümeye de **kapalı küme** denir.

Tanım 1.4 (Yığılma Noktası) $\mathbb{C}$ kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi A olsun. z_0 noktasının her $D(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda, A kümesinin z_0 dan farklı bir z noktası varsa z_0 noktası A kümesinin bir **yığılma noktasıdır** denir.

Tanım 1.5 (Bağlantılı Küme) $\mathbb{C}$ kümesinin boş kümeden farklı bir alt kümesi A olsun. Eğer A kümesi ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu kümeye **bağlantılıdır** denir. Yani,

$$A \cap U \neq \emptyset, A \cap V \neq \emptyset, A \subset U \cup V, A \cap U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri bulunamıyorsa, A kümesi bağlantılıdır. Bağlantılı olmayan kümeye de **bağlantısızdır** denir.

Tanım 1.6 (Bölge) Karmaşık düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** adı verilir.

Tanım 1.7 (Basit Bağlantılı Bölge) D , $\mathbb{C}$ düzleminde bir bölge olsun. Eğer hem D hem de D' (D nin tümleyeni) bağlantılı bir küme ise D bölgesine **basit bağlantılı bölge** denir.

Tanım 1.8 (Karmaşık Fonksiyon) $\mathbb{C}$ nin herhangi bir alt kümesi A olsun. Her $z \in A$ elemanına belli bir $f(z) \in \mathbb{C}$ elemanını karşılık getiren kurala **karmaşık fonksiyon** denir. $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ gösterimi ile belirtilir.

Bir f karmaşık fonksiyonu $w = f(z)$ şeklinde belirtilir.

Tanım 1.9 (Fonksiyonun Limiti) $\mathbb{C}$ nin boş kümeden farklı bir alt kümesi A olsun. $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ noktası, A kümesinin bir yığılma noktası olsun. $w_0 \in \mathbb{C}$ ve her $\varepsilon > 0$ ve $0 < |z - z_0| < \delta$ şartını sağlayan her $z \in A$ için $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(z_0, \varepsilon)$ sayısı varsa **f in z_0 daki limiti w_0 dır** denir ve

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

ile gösterilir.

Tanım 1.10 (Süreklilik) Tanım 1.9 ile tanımlanan fonksiyonun limit değeri ile fonksiyonun o noktadaki görüntüsü aynı ise $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında **süreklidir** denir. Yani,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0 \text{ ve } f(z_0) = w_0$$

şartlarını sağlayan $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu A kümesinin her noktasında sürekli ise $f(z)$ fonksiyonuna A kümesinde **sürekli fonksiyon** denir.

Tanım 1.11 (Eğri) Reel sayıların bir alt kümesi $[a, b]$ olsun.

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon sürekli ise γ ye $\mathbb{C}$ düzleminde bir **eğri** denir.

Tanım 1.12 (Diferansiyellenebilirlik) $\mathbb{C}$ nin boş kümeden farklı bir açık alt kümesi A ve $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

Eğer $z_0 \in A$ noktasında

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında **diferansiyellenebirdir** veya **türevlenebilirdir** denir. Bu limit $f'(z)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.13 (Analitik Fonksiyon) $\mathbb{C}$ düzleminin bir alt kümesi A , $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 , A nın bir iç noktası olsun. Eğer f fonksiyonu, z_0 noktasında ve bu noktanın seçilen komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ karmaşık değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ karmaşık fonksiyonu için f_z ve $f_{\bar{z}}$ kısmi türevleri

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}(f_x - i f_y) = \frac{1}{2}(u_x + i v_x - i u_y + v_y)$$

$$f_{\bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + i f_y) = \frac{1}{2}(u_x + i v_x + i u_y - v_y)$$

şeklinde dir. Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinde analitik ise $f_{\bar{z}} = 0$ ve $f_z = f'(z)$ olur. Tersine eğer bir D bölgesinde $f_{\bar{z}} = 0$ veya $f_z = f'(z)$ ise $f(z)$ fonksiyonu bu D bölgesinde analitiktir. Ayrıca, jakobiyen determinatı

$$|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}$$

olarak yazılabilir. Cauchy-Riemann denklemlerinin bir sonucu olarak,

$$J_{f(z)} = J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = u_x^2 + u_y^2 = |u_x + i u_y|^2 = |f'(z)|^2$$

olduğu açıktır.

Teorem 1.14 (Maksimum Modül Teoremi) $\mathbb{C}$ düzleminin bir D bölgesinde tanımlanan f fonksiyonu D bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon bu bölgede sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülünün maksimum değerini bu bölgenin sınırında alır (Duren, 1983).

Teorem 1.15 (Schwarz Yardımcı Teoremi) f fonksiyonu $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{C}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta} z$ fonksiyonu ile sağlanır.

Tanım 1.16 (Argüman) $\mathbb{C}$ düzlemde z karmaşık sayısıyla belirtilen vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı θ açısına z nin **argümenti** denir ve $\theta = \arg(z)$ ile gösterilir.

Tanım 1.17 (Konform Dönüşüm) $\mathbb{C}$ düzlemindeki bir D bölgesi için $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonu verilsin. Eğer $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi γ_1, γ_2 düzgün eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasın

da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı oluyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir **konform dönüşümdür** denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonu D bölgesinde konformdur denir.

Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilişkinin daha iyi anlaşılabilmesi için herhangi bir karmaşık fonksiyon yerine konform dönüşüm ele alınır.

Teorem 1.18 $\mathbb{C}$ düzleminde tanımlı bir D bölgesinde $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümü verilsin. f fonksiyonu $z_0 \in D$ noktasında sürekli ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonu z_0 noktasında bir konform dönüşümdür denir.

Tanım 1.19 (Karmaşık Dizi) $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $f(n) = z_n$ olan fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir **karmaşık dizi** denir ve (z_n) şeklinde gösterilir.

Tanım 1.20 (Yakınsak Dizi) $z_0 \in \mathbb{C}$ ve (z_n) bir karmaşık dizi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n > n_0$ ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (z_n) dizisinin limiti z_0 olur. Yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n) = z_0$$

dır. Limit değeri olan karmaşık diziye **yakınsak dizi** denir.

Tanım 1.21 (Seri) $\mathbb{C}$ düzleminde karmaşık bir dizi (z_n) olsun.

$$z_1 + z_2 + \cdots z_n + \cdots$$

toplamına **karmaşık seri** denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ile gösterilir. Bu serinin

$$s_n = \sum_{k=1}^n z_k$$

olarak tanımlanan (s_n) dizisine de **kısmi toplamlar dizisi** denir.

Tanım 1.22 (Yakınsak Seri) $\mathbb{C}$ düzleminde bir karmaşık seri $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ ve (s_n) bu serinin

kısmi toplamlar dizisi olsun. (s_n) dizisi bir s_0 değerine yakınsıyorsa (yani $n \rightarrow \infty$ iken $(s_n) \rightarrow s_0$ oluyorsa) verilen seri s_0 sayısına yakınsıyor denir ve bu seriye **yakınsak seri** adı verilir.

Tanım 1.23 (Kuvvet Serisi) $\mathbb{C}$ düzleminin iki elemanı a_n ve z_0 olsun

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçiminde tanımlanan serilere **kuvvet serileri** denir.

Teorem 1.24 (Taylor Teoremi) $\mathbb{C}$ düzleminde tanımlanan bir $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğunda

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

şeklindeki bir kuvvet serisi açılımına sahiptir. Bu seriye z_0 noktası komşuluğundaki

Taylor serisi denir. Özel olarak $z_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

serisi elde edilir ki bu seriye **Maclaurin serisi** adı verilir.

2. ÜNİVALENT FONKSİYONLAR

Bu bölümde ünivalent fonksiyonların tanımları ve önemli bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.1 (Ünivalent Fonksiyon) $\mathbb{C}$ düzleminin açık bir D alt kümesi üzerinde tanımlanmış $f(z)$ fonksiyonu için $\forall z_1, z_2 \in D$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) \neq f(z_2)$ oluyorsa $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde **ünivalent fonksiyon** (Türkçede “yalıncat”, Almancada “schlicht” ve Rusçada “odnolistni” olarak isimlendirilir.) denir. Yani $f(z)$ ünivalent bir fonksiyon ise D bölgesini birebir olarak başka bir bölgeye dönüştürür.

Tanım 2.2 (Yerel Ünivalent Fonksiyon) $\mathbb{C}$ düzleminin bir D bölgesinde tanımlı bir f fonksiyonu, D bölgesindeki herhangi bir noktanın komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna o noktada **yerel ünivalent fonksiyon** denir.

Teorem 2.3 $\mathbb{C}$ düzlemindeki bir D bölgesinde tanımlı analitik bir fonksiyon f olsun. $z_0 \in D$ noktasında $f'(z_0) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun $z_0 \in D$ noktasında yerel ünivalent olmasıdır.

D bölgesinde tanımlı f fonksiyonu $z_0 \in D$ için yerel ünivalent ise $f'(z_0)$ türevi z_0 noktasında f fonksiyonunun yerel olarak geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ sırasıyla uzunlukların yerel büyüme çarpanı ve yerel dönme çarpanını gösterir.

Yerel ünivalent bir fonksiyon, açıları ve dönmeyi korur. Bu sebepten dolayıdır ki ünivalent bir fonksiyon, konform bir dönüşüm ile denk kabul edilir.

Öte yandan, $\mathbb{C}$ düzleminde tanımlı bir D bölgesinde, $f'(z_0) \neq 0$ olması şartı D bölgesinin tümünde ünivalent olması için gerek koşul iken yeterli koşul değildir. Örneğin $f(z) = z^2$ fonksiyonu $D = \{z: 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$ bölgesinde yerel ünivalent bir fonksiyondur. Fakat ünivalent fonksiyon değildir.

Tek değişkenli ünivalent fonksiyonlar teorisinin en önemli olan sonuçlarından biri aşağıdaki tanımda verilen Riemann dönüşüm teoremidir.

Tanım 2.4 (Riemann Dönüşüm Teoremi) $z_0 \in D$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak şekilde basit bağlantılı bir $D \neq \mathbb{C}$ bölgesini $\mathbb{U}$ birim diski üzerine birebir ve konform olarak taşıyan bir tek f fonksiyonu vardır (Duren, 1983).

Birebir, örten ve analitik bir fonksiyon $\mathbb{C}$ düzlemindeki iki bölge arasında tanımlanabiliyorsa, bu iki bölge konform olarak denktir denir. Buna göre Riemann Dönüşüm Teoremi, $\mathbb{C}$ düzlemindeki basit bağlantılı her alt kümenin $\mathbb{U}$ birim diskinde konform olarak denk olduğunu söyler.

$\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan $f(z)$ fonksiyonu $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşulları ile normalize edilebilir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent ise o zaman

$$g(z) = \frac{f(z) - f(0)}{f'(0)}$$

fonksiyonu da $f(z)$ fonksiyonu ile aynı özellikleri taşır. Böylece yapılan bu normalizasyon sınıfın genelliğini sınırlamaz.

Bu çalışmamızda, $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlanan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, \quad (z \in \mathbb{U})$$

şeklindeki Taylor serisi açılımına sahip analitik fonksiyonların sınıflarıyla ilgileneceğiz. Bu fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5 ($\mathcal{S}$ sınıfı) Tanım 2.4. de bahsedildiği gibi $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent, analitik ve $f(0) = 0$ ve $f'(0) = 1$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfına **normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı** denir. Bu sınıfı $\mathcal{S}$ ile göstereceğiz.

$\mathcal{S}$ sınıfına örnek verilebilecek en önemli fonksiyonlardan biri

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \dots \quad (z \in \mathbb{U})$$

şeklinde tanımlanan Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini görüntü kümesi $-\frac{1}{4}$ den ∞ a kadar çıkarılmış negatif reel eksen hariç tüm karmaşık düzlem üzerine konform olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonu, ünivalent fonksiyonlar teorisinde birçok problem için son derece önemli bir rol oynar.

Lineer kesirsel bir dönüşüm olan

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini $Re\{f(z)\} > -\frac{1}{2}$ yarı düzlemi üzerine dönüştürür ve bu fonksiyon normalize edilirse $\mathcal{S}$ sınıfına ait olur.

Diğer bir lineer kesirsel dönüşüm olan

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu da, $\mathbb{U}$ birim diskini $Re\{f(z)\} > 0$ yarı düzlemi üzerine birebir olarak dönüştüren bir fonksiyondur.

Böylece $\mathcal{S}$ deki bir $f(z)$ fonksiyonunun seri açılımı,

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (2.1)$$

olarak yazılabilir.

Bieberbach, ilk kez $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonun a_n katsayıları için bir üst sınır oluşturmaya çalıştı. 1946 yılında da aşağıdaki teoremden verilen $|a_2| \leq 2$ eşitsizliğini ispatladı.

Teorem 2.6 (Bieberbach Teoremi) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına ait ise $|a_2| \leq 2$ dir.

Bieberbach bu teoremi ispatladı ve $|a_n| \leq n$ eşitsizliğinin sağlandığına dair bir tahminde bulundu. Bieberbach kestirimi olarak bilinen bu problem ancak 1985 yılında L. De Branges tarafından ispatlanabildi.

Teorem 2.7 (Bieberbach Kestirimi) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına ait ise her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olur (Bieberbach, 1916).

$f \in \mathcal{S}$ ünivalent fonksiyonları için en önemli temel geometrik sonuç 1907 yılında Koebe tarafından verilen ve Koebe dörtte bir teoremi olarak bilinen ünlü teoremdir. Her bir $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $f(0) = 0$ özelliğinde bir açık dönüşüm olduğu için bu dönüşümlerin görüntüsü, orijin merkezli bazı diskleri kapsar. Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntülerinin ρ bir mutlak sabit olmak üzere ortak bir $|f(z)| < \rho$ diskini kapsadığını söylemiştir. Koebe fonksiyonu, ρ mutlak sabitinin $|\rho| \leq \frac{1}{4}$ eşitsizliğini sağlar. Daha sonra, Bieberbach ρ mutlak sabitinin $\frac{1}{4}$ olarak alınabileceğini belirten Koebe kestirimini ortaya koymuştur.

Teorem 2.9 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) Her $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \in \mathcal{S}$ fonksiyonunun görüntüsü $\{f(z): |f(z)| < \frac{1}{4}\}$ diskini kapsar (Duren, 1983).

Bieberbach'ın ispatlamış olduğu $|a_2| \leq 2$ katsayı eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrisinde büyüme teoremi ve bükülme teoremi gibi daha ileri uygulamalara sahiptir. Büyüme teoremi ve bükülme teoremi, tüm $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonları üzerinde sırası ile $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ için sınırlar oluşturur.

Bükülme teoremi, $f \in \mathcal{S}$ dönüşümü altında yay uzunluğunun sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|$ nin geometrik açıklamasından veya alanın sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|^2$ jakobiyeninden gelmektedir. Bükülme teoremi ve onun sonuçlarına ilişkin öncül bir tahmin aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.10 $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2} \right| \leq \frac{4r}{1-r^2}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman, 1983).

Teorem 2.11 (Bükülme Teoremi) $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman, 1983).

Teorem 2.12 (Büyüme Teoremi) $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman, 1983).

Teorem 2.13 $\mathcal{S}$ sınıfına ait her bir f fonksiyonu için $|z| = r < 1$ olmak üzere

$$\frac{1-r}{1+r} \leq \left| \frac{zf'(z)}{f(z)} \right| \leq \frac{1+r}{1-r}$$

eşitsizliği sağlanır (Duren, 1983).

Tanım 2.14 Koebe-dörtte bir teoremi $\mathcal{S}$ sınıfına ait her fonksiyonun $w = f(z)$ altındaki görüntüsünün, yarıçap $\frac{1}{4}$ olan bir disk içerir.

2.1. Subordinasyon İlkesi

İlk olarak Lindelöf (1909) tarafından kullanılan subordinasyon kavramı daha sonra Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) tarafından tanıtılmış ve temel özellikleri belirlenmiştir. Subordinasyon kavramı, ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir.

Tanım 2.1.1 (Schwarz Fonksiyonu) $\mathbb{U}$ birim diski içinde analitik ve

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

şeklinde ifade edilen $w(z)$ fonksiyonu $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona **Schwarz fonksiyonu** denir. Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 (Subordinasyon Prensibi) f ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun. $f(z) = g(w(z))$ olacak şekilde $w(z) \in \Omega$ Schwarz fonksiyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna **subordinatedir** denir ve $f \prec g$ şeklinde gösterilir.

f subordinasyon fonksiyonu ünivalent olmak zorunda değildir. Özellikle, $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ise

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0) \text{ ve } f(\mathbb{U}) \subseteq g(\mathbb{U})$$

koşulu sağlanır (Duren, 1983).

2.2. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu bölümde $\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı alt sınıflar ve bu alt sınıfların özellikleri verilecektir. İleriki kısımda tanımlayacağımız pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı ve daha önce tanımladığımız subordinasyon kavramı ile ilişkili olan bu alt sınıflar arasında yıldızıl, konveks, α mertebeli yıldızıl ve α mertebeli konveks fonksiyonların sınıfları bulunmaktadır.

Tanım 2.2.1 (Caratheodory Sınıfı) Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı veya Caratheodory sınıfı olarak adlandırılan bu sınıf,

$$f(z) = 1 + p_1z + p_2z^2 + \dots + p_nz^n + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_nz^n, \quad (z \in \mathbb{U})$$

formunda, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve z noktaları için $Re\{f(z)\} > 0$ olacak şekilde tanımlanır. Bu sınıf $\mathcal{P}$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 (Yıldızıl Küme): D , $\mathbb{C}$ düzleminde bir küme olsun. $z_0 \in D$ noktasını kendinden farklı her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa D kümesine z_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. z_0 noktası yerine orijin seçilirse bu kümeye kısaca yıldızıl küme denir.

Tanım 2.2.3 (Yıldızıl Fonksiyon) f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini z_0 noktasına göre yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasına göre yıldızıl fonksiyon denir. Eğer f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini sadece yıldızıl bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir. Yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir. (Alexander, 1915)

Teorem 2.2.4 $f(z)$ analitik bir fonksiyon ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $f(z)$ nin yıldızıl olması için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ olmak üzere

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Graham and Kohr, 2003).

Tanım 2.2.5 (Konveks Küme) D , $\mathbb{C}$ düzleminde bir küme olsun. Her $z_1, z_2 \in D$ noktaları için z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren doğru parçasının tamamı D kümesinin içinde kalıyorsa D 'ye konveks küme denir. Yani noktalarının her birine göre yıldızıl olan kümeye konveks küme denir.

Tanım 2.2.6 (Konveks Fonksiyon) f fonksiyonu konveks bir kümeyi, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. Konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Duren, 1983).

Teorem 2.2.7 $f(z)$ analitik bir fonksiyon olsun. $f(z)$ nin konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart $f'(0) \neq 0$ olmak üzere

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır (Graham ve Kohr, 2003).

Konveks ve yıldızlı fonksiyonlar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S}$ bağıntısı vardır.

$$\frac{z}{1-z^2}$$

fonksiyonu yıldızlı,

$$\frac{z}{1-z}$$

fonksiyonunu da konveks olan fonksiyonlara örnek olarak verilebilir. Ayrıca konveks ve yıldızlı fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkiyi veren Alexander teoremi aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.8 (Alexander Teoremi) $\mathbb{U}_R = \{z: |z| < R, 0 < R < 1\}$ şeklinde tanımlanan $\mathbb{U}_R$ bölgesinde $f'(z) \neq 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonunun $\mathbb{U}_R$ bölgesinde konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $F(z) = z f'(z)$ fonksiyonunun bu bölgede yıldızlı olmasıdır (Alexander, 1915).

Tanım 2.2.8 (α -Mertebeli Yıldızlı Fonksiyon) $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu, her $z \in \mathbb{U}$ noktası için

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna **α mertebeli yıldızlı fonksiyon** denir ve $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir (Robertson, 1936).

Tanım 2.2.9 (α -Mertebeli Konveks Fonksiyon) $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu her $z \in \mathbb{U}$ noktası için

$$\operatorname{Re} \left\{ 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right\} > \alpha, \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna **α mertebeli konveks fonksiyon** denir ve $\mathcal{C}(\alpha)$ ile gösterilir (Robertson, 1936).

2.3. Bi-Ünivalent Fonksiyonlar

Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı ilk olarak 1967 yılında Lewin tarafından araştırılmış ve $|a_2| < 1.15$ olduğu gösterilmiştir. Daha sonra Brannan ve Clunie, Lewin'in bulmuş olduğu bu sonucu geliştirmiş ve $|a_2| < \sqrt{2}$ olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Netanyahu $\max|a_2| < \frac{4}{3}$ olduğunu göstermiştir. En iyi tahmin 1985 yılında Taha tarafından yapılmış olan $|a_2| \leq 1.485$ katsayı tahmini olarak bilinir.

Hem f hem f^{-1} fonksiyonlarının $\mathbb{U}$ da ünivalent olması durumunda f fonksiyonuna **bi-ünivalent fonksiyon** denir ve bu sınıf Σ ile gösterilir. Örneğin; $\frac{z}{1-z}$ fonksiyonu bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfına ait iken $\frac{z}{(1-z)^2}$ şeklindeki Koebe fonksiyonu bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfına ait değildir. Koebe fonksiyonun bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfına ait olmamasının nedeni $\mathbb{U}$ birim diskini $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -\frac{1}{4})$ bölgesi üzerine resmettiği için görüntü bölgesinin $\mathbb{U}$ birim diskini kapsamamasıdır.

D , $\mathbb{C}$ düzleminin açık ve bağlantılı bir alt kümesi olsun. D üzerinde tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu, ünivalent ise tersi $f(D)$ bölgesinde $g(f(z)) = z$ kuralı ile verilen g fonksiyonudur. $\mathbb{U}$ birim diskinin her $f(z) \in \mathcal{S}$ fonksiyonu altındaki görüntüsü Koebe-dörtte bir teoremi gereğince (bkz. Tanım 2.14.) $\frac{1}{4}$ yarıçaplı diski içine aldığını biliyoruz. Bu nedenle her ünivalent f fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyona sahiptir;

$$f^{-1}(f(z)) = z, \quad (z \in \mathbb{U})$$

$$f(f^{-1}(w)) = w, \quad (|w| < r_0(f), r_0(f) \geq \frac{1}{4}),$$

olmak üzere $f^{-1}(w)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) &= w - a_2 w^2 + (2a_2^2 - a_3)w^3 - (5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4)w^4 + \dots = g(w) \\ &= w + \sum_{n=2}^{\infty} A_n w^n \end{aligned} \tag{2.2}$$

3. $\mathcal{P}_m(\beta)$ SINIFI

$\mathcal{P}_m(\beta)$ sınıfı ile ilgili birçok araştırmacı çalışmalar yapmış ve bazı sonuçlar bulmuşlardır. Bu çalışmalardan bazıları Bulboaca ve Murugusundaramoorthy (2016), Altinkaya ve Yalçın (2016), Goswami ve ark. (2015), Peng ve ark. (2014), Deniz (2013), Vays ve Kant (2017) dir.

$m \geq 2$, $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere $\mathcal{P}_m(\beta)$ sınıfı, $p(0) = 1$ ile normalize edilmiş, ünivalent ve analitik fonksiyonların $\mathcal{P}$ sınıfını belirtir.

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{Re(z) - \beta}{1 - \beta} \right| d\theta \leq n\pi ,$$

burada , $z = re^{i\theta}$ dir. $\beta = 0$ için, $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_m(0)$ olur, bu nedenle $\mathcal{P}_m$ sınıfı, $p(0) = 1$ ile normalize edilen ve $\mathbb{U}$ da analitik olan aşağıdaki $p(z)$ fonksiyonlarının sınıfını temsil eder.

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1 - ze^{i\theta}}{1 + ze^{i\theta}} d\mu(t) ,$$

burada μ , sınırlayıcı varyasyona sahip gerçel değerli bir fonksiyondur. Böylece

$$\int_0^{2\pi} d\mu(t) = 2\pi \quad ve \quad \int_0^{2\pi} |d\mu(t)| \leq m , \quad m \geq 2$$

elde edilir. $\mathcal{P} = \mathcal{P}_2$, Caratheodory fonksiyonunun iyi bilinen sınıfı olduğuna dikkat edin. Yani $\mathcal{P}_m(\beta)$ sınıfı $\mathbb{U}$ açık birim diskte pozitif reel kısma sahip normalleştirilmiş fonksiyonların sınıfıdır (Padmanabhan ve Parvatham, 1975).

4. $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ VE $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ ALT SINIFLARININ TANIMI VE FABER POLİNOMLARI YARDIMIYLA BULUNAN KATSAYI TAHMİNLERİ

$R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfın Faber polinomları yardımıyla bulduğumuz $|a_n|$ genel katsayı tahmini “International Conference on Computational Methods in Applied Sciences” isimli konferansında sunulmuştur ve Proceeding kitabında basılmıştır. $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfının ise Faber polinomları yardımıyla bulduğumuz $|a_n|$ genel katsayı tahmini “Intrenational Euroasia Congress on Multidisciplinary Studies-IV” isimli konferans da sunulmak üzere kabul edilmiştir.

Tanım 4.1 (Faber Polinomları)

$$g(z) = z + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n} \quad (4.1.1)$$

ile verilen fonksiyonun ∞ un en az bir komşuluğunda analitik olduğunu kabul edelim. Böylece ∞ civarında ünivalent olacaktır. $|z| > R$ olsun. Belirli bir $w \in \mathbb{C}$ için $\log[\zeta^{-1}(g(\zeta) - w)]$ fonksiyonu yeterince büyük ζ değerleri için analitik olur ve g fonksiyonun tanımı sebebiyle ∞ da sıfıra gidecektir. Böylece ζ değerleri için ∞ civarında

$$\log \frac{g(\zeta) - w}{\zeta} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi_n(w) \zeta^{-n}, \quad (w \in \mathbb{C}) \quad (4.1.2)$$

şeklinde bir açılıma sahip olacaktır. Eğer bu ifadenin ζ ye ve w ya göre türevi alınırsa ve $\Phi_0(w) = 1$ yazılırsa

$$\frac{g'(\zeta)}{g(\zeta) - w} = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(w) \zeta^{-(n+1)} \quad (4.1.3)$$

ve

$$\frac{1}{g(\zeta) - w} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \Phi'_n(w) \zeta^{-n} \quad (4.1.4)$$

denklemleri elde edilir. (4.1.1) ile verilen fonksiyon (4.1.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\zeta - \sum_{n=1}^{\infty} n b_n \zeta^{-n} = \left(\zeta + (b_0 - w) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{-n} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Phi_n(w) \zeta^{-n} \right)$$

eşitliği elde edilir. Karşılıklı katsayılar eşitlendiğinde, $\Phi_1(w) = w - b_0$ ve $n = 1, 2, \dots$ için

$$\Phi_{n+1}(w) = (w - b_0)\Phi_n(w) - \sum_{v=1}^{n-1} b_{n-v}\Phi_v(w) - (n+1)b_n$$

elde edilir. Tümevarım metodu ile $\Phi_n(w)$ polinomu

$$\Phi_n(w) = (w - b_0)^n - nb_1(w - b_0)^{n-2} + \dots, \quad (n = 2, 3, \dots)$$

şeklindeki n . dereceden bir polinom olarak elde edilir. $\Phi_n(w)$ polinomuna $g(z)$ fonksiyonunun **n. dereceden Faber polinomu** denir ve ilk beş terimi,

$$\Phi_0(w) = 1$$

$$\Phi_1(w) = w - b_0$$

$$\Phi_2(w) = (w - b_0)^2 - 2b_1$$

$$\Phi_3(w) = (w - b_0)^3 - 3b_1(w - b_0) - 3b_2$$

$$\Phi_4(w) = (w - b_0)^4 - 4b_1(w - b_0)^2 - 4b_2(w - b_0) + (2b_1^2 - 4b_3)$$

şeklinde bulunur.

$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun Faber polinom genişlemesi kullanılarak, $g = f^{-1}$ ters görüntüsünün katsayıları aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Airault ve Bouali, 2006).

$$g(w) = f^{-1}(w) = w + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, \dots) w^n \quad (4.1.5)$$

burada;

$$\begin{aligned} K_{n-1}^{-n} = & \frac{(-n)!}{(-2n+1)!(n-1)!} a_2^{n-1} \\ & + \frac{(-n)!}{(2(-n+1))!(n-3)!} a_2^{n-3} a_3 \\ & + \frac{(-n)!}{(-2n+3)!(n-4)!} a_2^{n-4} a_4 \\ & + \frac{(-n)!}{(2(-n+2))!(n-5)!} a_2^{n-5} [a_5 + (-n+2)a_3^2] \\ & + \frac{(-n)!}{(-2n+5)!(n-6)!} a_2^{n-6} [a_6 + (-2n+5)a_3 a_4] \\ & + \sum_{j \geq 7} a_2^{n-j} V_j \end{aligned}$$

olur. Böylece $7 \leq j \leq n$ olan V_j de $a_2, a_3, \dots, a_n$ değişkenleriyle tanımlanan homojen bir polinom olur (Airault ve Ren, 2002). Özellikle, K_{n-1}^{-n} nin ilk üç terimi,

$$K_1^{-2} = -2a_2$$

$$K_2^{-3} = 3(2a_2^2 - a_3)$$

$$K_3^{-4} = -4(5a_2^3 - 5a_2a_3 + a_4)$$

olarak yazılabilir. Genel olarak, herhangi bir $p \in \mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$ için, K_n^p nin genişlemesi aşağıdaki gibidir (Airault ve Bouali, 2006).

$$K_n^p = pa_n + \frac{p(p-1)}{2}D_n^2 + \frac{p!}{(p-3)!3!}D_n^3 + \dots + \frac{p!}{(p-n)!n!}D_n^n$$

burada

$$D_n^p = D_n^p(a_2, a_3, \dots)$$

yazılabilir (Todorov, 1991). Buradan,

$$D_n^m(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m!}{i_1! \dots i_n!} a_1^{i_1} \dots a_n^{i_n}$$

ifadesi elde edilir. Ayrıca $a_1 = 1$ iken, negatif olmayan $i_1, \dots, i_n$ tamsayıları için

$$i_1 + i_2 + \dots + i_n = m$$

$$i_1 + 2i_2 + \dots + ni_n = n$$

şeklinde tanımlanır ve

$$D_n^n(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1^n = 1$$

olduğu açıktır.

Faber polinomlarını kullanarak birçok araştırmacı tanımlanan sınıflar için $|a_n|$ katsayısını hesaplamışlardır. Bu araştırmacılardan bazıları Bulut (2018), Hamidi ve Jahangiri (2014), Sakar ve Güney (2017), Altinkaya ve Yalçın (2016) dır.

Tanım 4.2 (Vyas ve Kant, 2017) $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, 0 \leq \beta < 1$ ve $m \geq 2$ olmak üzere (2.1) de verilen f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfında ise aşağıdaki iki şart sağlanır.

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] \in \mathcal{P}_m(\beta); \quad (z \in \mathbb{U})$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{g(w)}{w} + \alpha g'(w) + \gamma w g''(w) - 1 \right] \in \mathcal{P}_m(\beta); \quad (w \in \mathbb{U}).$$

Burada $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $g = f^{-1}$ fonksiyonu (2.2) ile verilir.

Lemma 4.3 (Vyas ve Kant, 2017) $\phi(z) = 1 + h_1z + h_2z^2 + \dots$ fonksiyonunda $z \in \mathbb{U}$, $\phi \in \mathcal{P}_m(\beta)$ ise $|h_n| \leq m(1 - \beta)$; $n \geq 1$ dir.

Sonuç: Pozitif değerli iki fonksiyon $p, q \in \mathcal{P}_m(\beta)$ olsun.

Yani;

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \quad (z \in \mathbb{U})$$

$$q(w) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n w^n \quad (w \in \mathbb{U})$$

ise yukarıdaki Lemma 4.3 gereği aşağıdaki eşitsizlikler yazılabilir.

$$|c_n| \leq m(1 - \beta) \text{ ve } |d_n| \leq m(1 - \beta); \quad n \geq 1.$$

Teorem 4.4 $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, 0 \leq \beta < 1, \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere, (2.1) de verilen f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfında olsun. Eğer $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n - 1$) ise

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{1 + (n - 1)\alpha + \gamma n(n - 1)} \quad (n \geq 4)$$

eşitsizliği bulunur.

İspat; $f \in R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ olduğundan (2.1) deki açılım

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

yazılabilir. Buradan

$$(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} = (1 - \alpha) + \sum_{n=2}^{\infty} (1 - \alpha) a_n z^{n-1} \quad (4.1.6)$$

$$\alpha f'(z) = \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha n a_n z^{n-1} \quad (4.1.7)$$

$$\gamma z f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \gamma n(n - 1) a_n z^{n-1} \quad (4.1.8)$$

olur. Bulunan (4.1.6), (4.1.7) ve (4.1.8) eşitlikleri $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfında yerine yazılıp ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] \\
&= 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) + \sum_{n=2}^{\infty} (1 - \alpha) a_n z^{n-1} + \alpha + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha n a_n z^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma n(n-1) a_n z^{n-1} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan da,

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] \\
&= 1 + \frac{1}{\tau} \left[\sum_{n=2}^{\infty} [1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)] a_n z^{n-1} \right] \tag{4.1.9}
\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç gereği,

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] = p(z) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(c_1, c_2, \dots, c_n) z^n \tag{4.1.10}
\end{aligned}$$

ve yukarıda yaptığımız benzer işlem adımları takip edilirse,

$$\begin{aligned}
& 1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{g(w)}{w} + \alpha g'(w) + \gamma w g''(w) - 1 \right] = q(w) \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(d_1, d_2, \dots, d_n) w^n \tag{4.1.11}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Lemma 4.3 gereği

$$|c_n| \leq m(1 - \beta) \text{ ve } |d_n| \leq m(1 - \beta) \quad n \geq 1 \text{ dir.}$$

(4.1.9), (4.1.10) ve (4.1.11) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$\frac{1}{\tau} [1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)] a_n = K_{n-1}^1(c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{4.1.12}$$

ve

$$\frac{1}{\tau} [1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)] A_n = K_{n-1}^1(d_1, d_2, \dots, d_n) \tag{4.1.13}$$

yazılabilir.

$$A_n = -a_n$$

olduğundan bu eşitlik (4.1.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{\tau} [1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)] a_n = c_{n-1}$$

ve

$$-\frac{1}{\tau} [1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)] a_n = d_{n-1}$$

olur. Yukarıdaki son iki eşitliğin mutlak değeri alınarak a_n yalnız bırakılırsa,

$$|a_n| = \frac{|\tau||c_{n-1}|}{1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)} = \frac{|\tau||d_{n-1}|}{1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)} \quad (4.1.14)$$

eşitliği elde edilir. Elde ettiğimiz bu son eşitlikte $|c_{n-1}|$ veya $|d_{n-1}|$ e Lemma 4.3 uygulanırsa,

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)}$$

olarak bulunur ki bu da ispatı tamamlar.

Vyas ve Kant 2017 yılındaki çalışmasında $f \in R_\Sigma(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfına ait bir fonksiyonun $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarını hesaplamışlardır. Biz de burada daha önce yapılan bu hesaplamayı daha da hassaslaştırarak sınırları hesapladık.

Teorem 4.5 $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, 0 \leq \beta < 1, \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere (2.1) de verilen f fonksiyonu $R_\Sigma(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfında ise

$$|a_2| \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\alpha+6\gamma}} & , \quad 0 \leq \beta < 1 - \frac{(1+\alpha+2\gamma)^2}{\tau m(1+2\alpha+6\gamma)} \\ \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+\alpha+2\gamma} & , \quad 1 - \frac{(1+\alpha+2\gamma)^2}{\tau m(1+2\alpha+6\gamma)} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (4.1.15)$$

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\alpha+6\gamma} \quad (4.1.16)$$

$$|a_3 - 2a_2^2| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\alpha+6\gamma}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: (4.1.12) ve (4.1.13) denklemlerinde sırasıyla $n = 2$ ve $n = 3$ yazılırsa,

$$\frac{1}{\tau}(1+\alpha+2\gamma)a_2 = c_1, \quad (4.1.17)$$

$$\frac{1}{\tau}(1+2\alpha+6\gamma)a_3 = c_2, \quad (4.1.18)$$

$$-\frac{1}{\tau}(1+\alpha+2\gamma)a_2 = d_1, \quad (4.1.19)$$

$$\frac{1}{\tau}(1+2\alpha+6\gamma)(2a_2^2 - a_3) = d_2 \quad (4.1.20)$$

bulunur. (4.1.17) ve (4.1.19) denklemlerinden a_2 katsayısı çekilirse,

$$a_2 = \frac{\tau c_1}{1 + \alpha + 2\gamma} = \frac{\tau c_2}{-(1 + \alpha + 2\gamma)} \quad (4.1.21)$$

yazılabilir. (4.1.21) denkleminde Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_2| = \frac{|\tau||c_1|}{1 + \alpha + 2\gamma} = \frac{|\tau||c_2|}{1 + \alpha + 2\gamma} \leq \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{1 + \alpha + 2\gamma} \quad (4.1.22)$$

olarak bulunur. (4.1.18) ve (4.1.20) denklemleri taraf tarafa toplanır,

$$\frac{2}{\tau}(1 + 2\alpha + 6\gamma)a_2^2 = c_2 + d_2 \quad (4.1.23)$$

olur. (4.1.23) denkleminde a_2 katsayısı çekilip Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{|\tau|m(1 - \beta)}{1 + 2\alpha + 6\gamma}}$$

olarak bulunur. Böylece (4.1.15) ile verilen $|a_2|$ katsayısının sınırı bulunmuş olur. Şimdi ise (4.1.18) denklemini, eksi ile çarpıp (4.1.20) denklemine eklersek;

$$\frac{1}{\tau}(1 + 2\alpha + 6\gamma)(-2a_2^2 + 2a_3) = c_2 - d_2$$

ya da

$$a_3 = a_2^2 + \frac{\tau(c_2 - d_2)}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)} \quad (4.1.24)$$

yazılabilir. (4.1.17) denkleminde a_2 katsayısının karesi alınıp (4.1.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a_3 = \frac{\tau^2 c_1^2}{(1 + \alpha + 2\gamma)^2} + \frac{\tau(c_2 - d_2)}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)}$$

elde edilir. Bu denkleme Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|^2 m^2 (1 - \beta)^2}{(1 + \alpha + 2\gamma)^2} + \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{1 + 2\alpha + 6\gamma} \quad (4.1.25)$$

bulunur. Şimdi ise (4.1.23) deki ifade (4.1.24) denkleminde yerine yazılırsa,

$$a_3 = \frac{\tau c_2}{1 + 2\alpha + 6\gamma}$$

elde edilir. Bu son denkleme Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{1 + 2\alpha + 6\gamma} \quad (4.1.26)$$

bulunur. (4.1.25) ve (4.1.26) daki denklemler (4.1.16) da verilen $|a_3|$ katsayısının ispatını tamamlar.

Son olarak (4.1.20) deki denklemden (Lemma 4.3 uygulanarak, mutlak değer alınır),

$$|a_3 - 2a_2^2| = \frac{|\tau||d_2|}{1 + 2\alpha + 6\gamma} \leq \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{1 + 2\alpha + 6\gamma}$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.5 in ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 4.6 (Vyas ve Kant, 2017) $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$ ve $m \geq 2$ olmak üzere (2.1) de verilen f fonksiyonu $S_\Sigma(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfına ait ise aşağıdaki iki şart sağlanır.

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1 - \lambda)f(z)} - 1 \right] \in P_m(\beta) \quad (z \in \mathbb{U}) \quad (4.1.27)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1 - \lambda)g(w)} - 1 \right] \in P_m(\beta) \quad (w \in \mathbb{U}). \quad (4.1.28)$$

Burada $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $g = f^{-1}$ (2.2) ile verilsin.

Teorem 4.7 $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere, (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $S_\Sigma(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfına ait olsun. Eğer $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n - 1$) ise,

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{(n - 1)[1 + (n - 1)\lambda]} \quad (n \geq 4)$$

eşitsizliği bulunur.

İspat: $f \in S_\Sigma(\lambda, \tau; \beta)$ fonsiyonu için (2.1) açılımı kullanılarak aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1 - \lambda)f(z)} - 1 \right] = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) z^{n-1}. \quad (4.1.29)$$

Burada $F_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n)$ soldaki denklemde gelecek $a_2, a_3, \dots, a_n$ terimlerinin z kuvvetine göre gösterimi olsun. Yani gerekli işlemler yapılırsa $F_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n)$ in ilk üç terimi,

$$F_1 = \frac{1}{\tau} (1 + \lambda) a_2$$

$$F_2 = \frac{1}{\tau} [2(1 + 2\lambda) a_3 - (1 + \lambda)^2 a_2^2]$$

$$F_3 = \frac{1}{\tau} [3(1 + 3\lambda) a_4 - 3(1 + \lambda)(1 + 2\lambda) a_2 a_3 + (1 + \lambda)^3 a_2^3]$$

olur. Öte yandan $g = f^{-1}$ fonksiyonu (2.2) eşitliği ile verilmek üzere aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w) + (1 - \lambda)g(w)} - 1 \right] = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1}(A_2, A_3, \dots, A_n) z^{n-1}. \quad (4.1.30)$$

Diğer taraftan (4.1.5) denkleminde,

$$A_n = \frac{1}{n} K_{n-1}^{-n}(a_2, a_3, \dots, a_n)$$

olarak yazılabilir. $f \in S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ ve $g = f^{-1} \in S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ olduğundan, $\Re\{p(z)\} \in \mathbb{U}$ ve $\Re\{q(z)\} \in \mathbb{U}$ olacak şekilde iki pozitif reel kısma sahip fonksiyon vardır ki,

$$p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n \in \mathcal{A} \text{ ve } q(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n \in \mathcal{A} \quad (4.1.31)$$

şeklinde yazılabilirler. Böylece,

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1 - \lambda)f(z)} - 1 \right] = p(z)$$

$$\frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1 - \lambda)f(z)} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(c_1, c_2, \dots, c_n) z^n \quad (4.1.32)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w) + (1 - \lambda)g(w)} - 1 \right] = q(w)$$

$$\frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda wg'(w) + (1 - \lambda)g(w)} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} K_n^1(d_1, d_2, \dots, d_n) w^n \quad (4.1.33)$$

olur. (4.1.29), (4.1.30) ve (4.1.31) denklemleriyle ilgili katsayılar karşılaştırıldığında

$$F_{n-1}(a_2, a_3, \dots, a_n) z^{n-1} = K_n^1(c_1, c_2, \dots, c_n) z^n \quad (4.1.34)$$

ve

$$F_{n-1}(A_2, A_3, \dots, A_n) z^{n-1} = K_n^1(d_1, d_2, \dots, d_n) w^n \quad (4.1.35)$$

yazılabileceği açıktır. $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n-1$) olmak üzere ve

$$A_n = -a_n$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} [(n-1)(1 + (n-1)\lambda)] a_n &= c_{n-1} \\ -\frac{1}{\tau} [(n-1)(1 + (n-1)\lambda)] a_n &= d_{n-1}. \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitliklerde a_n çekilip her iki yanın mutlak değeri alınırsa,

$$|a_n| = \frac{|c_{n-1}||\tau|}{|(n-1)[1+(n-1)\lambda]|} = \frac{|d_{n-1}||\tau|}{|-(n-1)[1+(n-1)\lambda]|}$$

elde edilir. Son olarak Lemma 4.3 gereğince $|c_n| \leq m(1-\beta)$ ve $|d_n| \leq m(1-\beta)$, ($n \geq 1$) yazılabileceğinden

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{(n-1)[1+(n-1)\lambda]} \quad (n \geq 4)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece Teorem 4.7 nin ispatı tamamlanmış olur.

Vyas ve Kant, 2017 deki çalışmasında $f \in S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfına ait fonksiyonun $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarını hesaplamışlardır. Biz de bu çalışmamızda daha önceden yapılan bu hesaplamayı daha da hassaslaştırıp katsayı sınırlarını hesapladık.

Teorem 4.8 $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfına ait ise aşağıdaki katsayı eşitsizlikleri sağlanır.

$$|a_2| \leq \begin{cases} \sqrt{\frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\lambda+\lambda^2}} & , \quad 0 \leq \beta < 1 - \frac{(1+\lambda)^2}{\tau m(1+2\lambda+\lambda^2)} \\ \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+\lambda} & , \quad 1 - \frac{(1+\lambda)^2}{\tau m(1+2\lambda+\lambda^2)} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (4.1.36)$$

$$|a_3| \leq \begin{cases} \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\lambda+\lambda^2} & , \quad 0 \leq \beta \leq 1 - \frac{(1+\lambda)^4}{\tau m[2(1+2\lambda)(1+2\lambda-\lambda^2)]} \\ \frac{|\tau|m(1-\beta)}{2(1+2\lambda)} + \frac{|\tau|^2 m^2 (1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} & , \quad 1 - \frac{(1+\lambda)^4}{\tau m[2(1+2\lambda)(1+2\lambda-\lambda^2)]} \leq \beta < 1 \end{cases} \quad (4.1.37)$$

İspat: (4.1.34) ve (4.1.35) denklemlerinde sırasıyla $n = 2$ ve $n = 3$ yazılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\frac{1}{\tau}(1+\lambda)a_2 = c_1 \quad (4.1.38)$$

$$\frac{1}{\tau}[2(1+2\lambda)a_3 - (1+\lambda)^2 a_2^2] = c_2 \quad (4.1.39)$$

$$-\frac{1}{\tau}(1+\lambda)a_2 = d_1 \quad (4.1.40)$$

$$\frac{1}{\tau}\{[4(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2]a_2^2 - 2(1+2\lambda)a_3\} = d_2. \quad (4.1.41)$$

(4.1.38) ve (4.1.40) denklemlerinden a_2 katsayısı çekilirse,

$$a_2 = \frac{\tau c_1}{1+\lambda} = \frac{\tau d_1}{-(1+\lambda)} \quad (4.1.42)$$

elde edilir. Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_2| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+\lambda}$$

bulunur.

Şimdi de (4.1.39) ve (4.1.41) denklemleri taraf tarafa toplanır,

$$\frac{2}{\tau}[2(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2]a_2^2 = c_2 + d_2 \quad (4.1.43)$$

bulunur. Bu son denklemde a_2^2 çekilip, Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_2| \leq \sqrt{\frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\lambda+\lambda^2}} \quad (4.1.44)$$

elde edilir. Böylece (4.1.42) ve (4.1.44) denklemleri karşılaştırıldığında (4.1.36) denklemindeki $|a_2|$ katsayı tahmini bulunmuş olur. Şimdi ise (4.1.39) denkleminde (4.1.41) denklemini çıkarırsak,

$$\frac{1}{\tau}[4(1+2\lambda)(a_3 - a_2^2)] = c_2 - d_2$$

bulunur. Bu denklemde a_3 çekilirse,

$$a_3 = a_2^2 + \frac{\tau(c_2 - d_2)}{4(1+2\lambda)} \quad (4.1.45)$$

yazılabilir. a_2^2 nin değeri (4.1.42) denkleminde bulunup (4.1.45) denkleminde yerine yazılırsa aşağıdaki denklem bulunur.

$$a_3 = \frac{\tau^2 c_1^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{\tau(c_2 - d_2)}{4(1+2\lambda)} .$$

Bu denkleme Lemma 4.3 uygulanır ve her iki tarafın mutlak değeri alınır $|a_3|$ katsayısı,

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{2(1+2\lambda)} + \frac{|\tau|^2 m^2 (1-\beta)^2}{(1+\lambda)^2} \quad (4.1.46)$$

olarak bulunur. Şimdi de a_2^2 yi (4.1.43) denkleminde çekip (4.1.45) denkleminde yerine yazarsak

$$a_3 = \frac{\tau(c_2 + d_2)}{2(1+2\lambda-\lambda^2)} + \frac{\tau(c_2 - d_2)}{4(1+2\lambda)}$$

denklemini elde edilir ve Lemma 4.3 uygulanıp ve her iki tarafın mutlak değeri alınır

$$|a_3| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+2\lambda+\lambda^2} \quad (4.1.47)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece (4.1.46) ve (4.1.47) denklemlerinden (4.1.37) deki $|a_3|$ katsayı tahmini bulunmuş olur ki bu da Teorem 4.8 in ispatını tamamlar.

5. $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ VE $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ ALT SINIFLARININ TANIMI VE CHEBSYHEV POLİNOMLARI YARDIMIYLA BULUNAN KATSAYI TAHMİNLERİ

Önceki kısımda tanımladığımız $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ ve $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıflarının $P_m(\beta)$ sınıfına ait olduklarını gösterdik. Ayrıca verdiğimiz tanımlar ve lemmayı kullanarak Faber polinomları yardımıyla $|a_n|$, $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminlerinde bulunduk. Bu bölümde ise $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ ve $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ sınıflarının aşağıda tanımlayacağımız bağıntıları kullanarak Chebsyhev polinomları yardımıyla katsayı tahminlerinde bulunacağız. Ayrıca daha önceden çalışılmış olan bazı çalışmalara değinerek ve bu çalışmaların da bizim çalışmamızı destekler nitelikte olduğunu göstereceğiz.

Chebyshev polinomlarının hem pratik hem de teorik yaklaşımlarla, nümerik analizde önemi artmıştır. Dört çeşit Chebyshev polinomları vardır. Bu çalışmamızda özellikle iki çeşit Chebyshev polinomuna değinerek bunların tanımlarına ve arasındaki ilişkiye yer verilmiştir. Chebyshev polinomlarını kullanarak birçok araştırmacı tanımladıkları sınıflar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarını hesaplamışlardır. Bu çalışmalardan bazıları Bulut ve ark. (2017), Dziok ve ark. (2015), Altınkaya ve Yalçın (2018), Dansu ve Olantuji (2018) dir.

Tanım 5.1 Polinom derecesi $n \geq 0$ ve $t \in [-1,1]$ olmak üzere,

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t)$$

ile tanımlanan polinoma **birinci çeşit Chebyshev polinomu** denir (Suli ve Mayers, 2003).

Eğer $t = \cos \theta$ alınırsa

$$T_n(t) = \cos(n\theta)$$

elde edilir (Mason ve Handscomb, 2003).

Birinci çeşit Chebyshev polinomu $T_n(t)$ nin üretici fonksiyonu, $t \in (-1,1)$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) z^n = \frac{1 - tz}{1 - 2tz + z^2} \quad (z \in \mathbb{U})$$

yazılabilir.

Tanım 5.2 $t \in [-1,1]$ ve $t = \cos\theta$ olsun.

$$U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

şeklinde tanımlanan polinoma **ikinci çeşit Chebyshev polinomu** denir (Mason ve Handscomb, 2003).

İkinci çeşit Chebyshev polinomlarında n doğal sayısı için ilk birkaç terim aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$U_1(t) = 2t, U_2(t) = 4t^2 - 1, U_3(t) = 8t^3 - 4t, U_4(t) = 16t^4 - 12t^2 + 1 \quad (5.1.1)$$

Whittaker ve Watson 1996'daki çalışmalarında $t = \cos\alpha$ ve $\alpha \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ olmak üzere $H(z, t)$ fonksiyonunu,

$$H(z, t) = \frac{1}{1 - 2\cos\alpha z + z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} z^n \quad (z \in \mathbb{U})$$

şeklinde tanımlamışlardır. Böylece

$$H(z, t) = 1 + 2\cos\alpha z + (3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)z^2 + \dots \quad (z \in \mathbb{U})$$

ya da

$$H(z, t) = 1 + U_1(t)z + U_2(t)z^2 \dots \quad (t \in (-1,1), z \in \mathbb{U})$$

yazılabilir. Bu fonksiyonu ileride Chebyshev polinomları yardımı ile hesaplayacağımız katsayı tahminlerinde kullanacağız.

Tanım 5.3 f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ sınıfına ait ve $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olsun. Her $z, w \in \mathbb{U}$ için aşağıdaki subordinasyon koşulları yazılabilir.

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] < H(z, t) := \frac{1}{1 - 2tz + z^2} \quad (5.1.2)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{g(w)}{w} + \alpha g'(w) + \gamma w g''(w) - 1 \right] < H(w, t) := \frac{1}{1 - 2tw + w^2}. \quad (5.1.3)$$

Burada $g = f^{-1}$ dir.

Yukarıdaki subordinasyon koşullarının yazılabileceğini daha önceden yapılmış olan aşağıdaki çalışmalardan yararlanarak söyleyebiliriz.

(i) $f \in R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ fonksiyonunda $\tau = 1, \alpha = \lambda, \gamma = 0$ alınırsa $R_{\Sigma}(1, \lambda, 0; t) = B_{\Sigma}(\lambda, t)$ sınıfı elde edilir. Yani,

$$(1 - \lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) < H(z, t) := \frac{1}{1 - 2tz + z^2}$$

ve

$$(1 - \lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) < H(w, t) := \frac{1}{1 - 2tw + w^2}$$

yazılabilir. Burada $g = f^{-1}$ dir (Bulut ve ark. 2017).

(ii) $f \in R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ fonksiyonunda $\tau = 1, \alpha = 1, \gamma = 0$ alınırsa $R_{\Sigma}(1, 1, 0; t) = B_{\Sigma}(t)$ sınıfı elde edilir. Yani,

$$f'(z) < H(z, t) := \frac{1}{1 - 2tz + z^2}$$

ve

$$g'(w) < H(w, t) := \frac{1}{1 - 2tw + w^2}$$

yazılabilir. Burada $g = f^{-1}$ dir (Bulut ve ark. 2017).

Teorem 5.4 f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ sınıfına ait ise, $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırları aşağıdaki şekildedir.

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{|4[\tau(1 + 2\alpha + 6\gamma) - (1 + \alpha + 2\gamma)^2]t^2 + (1 + \alpha + 2\gamma)^2|}} \quad (5.1.4)$$

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1 + \alpha + 2\gamma)^2} + \frac{2|\tau|t}{1 + 2\alpha + 6\gamma}. \quad (5.1.5)$$

$\eta \in \mathbb{R}$ için;

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|\tau|t}{1 + 2\alpha + 6\gamma}, & |\eta - 1| \leq \frac{|(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - \tau(1 + 2\alpha + 6\gamma)]t^2|}{4(1 + 2\alpha + 6\gamma)t^2} \\ \frac{8|\tau|^2|\eta - 1|t^3}{|(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - \tau(1 + 2\alpha + 6\gamma)]t^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - \tau(1 + 2\alpha + 6\gamma)]t^2|}{4(1 + 2\alpha + 6\gamma)t^2} \end{cases} \quad (5.1.6)$$

İspat: (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ sınıfına ait olsun. (5.1.2) ve (5.1.3) denklemleri gereğince,

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] = 1 + U_1(t)p(z) + U_2(t)p^2(z) + \dots \quad (5.1.7)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{g(w)}{w} + \alpha g'(w) + \gamma w g''(w) - 1 \right] = 1 + U_1(t)q(w) + U_2(t)q^2(w) + \dots \quad (5.1.8)$$

yazılabilir.

Bazı analitik fonksiyonlar için,

$$p(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, (z \in \mathbb{U}) \quad (5.1.9)$$

$$q(w) = d_1 w + d_2 w^2 + d_3 w^3 + \dots, (w \in \mathbb{U}) \quad (5.1.10)$$

olduğundan $p(0) = q(0) = 0$, $|p(z)| < 1$ ($z \in \mathbb{U}$) ve $|q(w)| < 1$ ($w \in \mathbb{U}$) dır.

(5.1.9) ve (5.1.10) denklemleriyle verilen ve yukarıdaki özellikleri sağlayan $p(z)$ ve $q(z)$ iyi bilinen Schwarz fonksiyonlarıdır. (bkz: Tanım 2.1.1). Böylelikle,

$$|c_j| \leq 1 \text{ ve } |d_j| \leq 1 \quad (5.1.11)$$

yazılabilir.

(5.1.7), (5.1.8), (5.1.9) ve (5.1.10) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{f(z)}{z} + \alpha f'(z) + \gamma z f''(z) - 1 \right] = 1 + U_1(t) c_1 z + [U_1(t) c_2 + U_2(t) c_1^2] z^2 + \dots \quad (5.1.12)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[(1 - \alpha) \frac{g(w)}{w} + \alpha g'(w) + \gamma w g''(w) - 1 \right] = 1 + U_1(t) d_1 w + [U_1(t) d_2 + U_2(t) d_1^2] w^2 + \dots \quad (5.1.13)$$

elde edilir. Katsayıları (5.1.12) ve (5.1.13) denklemleri cinsinden ifade edersek

$$\frac{1}{\tau} (1 + \alpha + 2\gamma) a_2 = U_1(t) c_1 \quad (5.1.14)$$

$$\frac{1}{\tau} (1 + 2\alpha + 6\gamma) a_3 = U_1(t) c_2 + U_2(t) c_1^2 \quad (5.1.15)$$

$$-\frac{1}{\tau} (1 + \alpha + 2\gamma) a_2 = U_1(t) d_1 \quad (5.1.16)$$

$$\frac{1}{\tau} (1 + 2\alpha + 6\gamma) (2a_2^2 - a_3) = U_1(t) d_2 + U_2(t) d_1^2 \quad (5.1.17)$$

denklemleri sırasıyla yazılabilir. Öte yandan

$$c_1 = -d_1 \quad (5.1.18)$$

olduğunu da biliyoruz. Şimdi ise (5.1.14) ve (5.1.16) denklemlerinin ayrı ayrı karelerini alıp taraf tarafa toplarsak

$$\frac{2}{\tau^2} (1 + \alpha + 2\gamma)^2 a_2^2 = U_1^2(t) (c_1^2 + d_1^2) \quad (5.1.19)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca (5.1.15) ve (5.1.17) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\frac{2}{\tau} (1 + 2\alpha + 6\gamma) a_2^2 = U_1(t) (c_2 + d_2) + U_2(t) (c_1^2 + d_1^2) \quad (5.1.20)$$

eşitliği elde edilir $c_1^2 + d_1^2$ ifadesi (5.1.19) denkleminde çekilip (5.1.20) denkleminde yerine yazılarak eşitliğin sol tarafına atılırsa,

$$\left[\frac{2}{\tau} (1 + 2\alpha + 6\gamma) - \frac{2U_2(t)}{\tau^2 U_1^2(t)} (1 + \alpha + 2\gamma)^2 \right] a_2^2 = U_1(t) (c_2 + d_2) \quad (5.1.21)$$

bulunur. (5.1.21) denkleminde payda eşitlenirse

$$\left[\frac{2\tau U_1^2(t)(1+2\alpha+6\gamma) - 2U_2(t)(1+\alpha+2\gamma)^2}{\tau^2 U_1^2(t)} \right] a_2^2 = U_1(t)(c_2 + d_2)$$

bulunur ve a_2^2 yalnız bırakılırsa

$$a_2^2 = \frac{\tau^2 U_1^3(t)(c_2 + d_2)}{2\tau U_1^2(t)(1+2\alpha+6\gamma) - 2U_2(t)(1+\alpha+2\gamma)^2}$$

denklemini yazılabilir. (5.1.1) denkleminde tanımladığımız $U_1(t) = 2t$ ve $U_2(t) = 4t^2 - 1$ değerleri yerine yazılıp payda düzenlenirse,

$$a_2^2 = \frac{8\tau^2 t^3(c_2 + d_2)}{8\tau t^2(1+2\alpha+6\gamma) - 2(4t^2 - 1)(1+\alpha+2\gamma)^2}$$

olur. Buradan da payda t^2 ye göre yeniden düzenlenirse

$$a_2^2 = \frac{8\tau^2 t^3(c_2 + d_2)}{8[\tau(1+2\alpha+6\gamma) - (1+\alpha+2\gamma)^2]t^2 + 2(1+\alpha+2\gamma)^2}$$

denklemini elde edilir. Burada her iki tarafın mutlak değeri alınıp (5.1.11) denkleminde verilen $|c_j| \leq 1$ ve $|d_j| \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$|a_2^2| \leq \frac{8|\tau|^2 t^3}{|4[\tau(1+2\alpha+6\gamma) - (1+\alpha+2\gamma)^2]t^2 + (1+\alpha+2\gamma)^2|}$$

denklemini elde edilir. Son denklemde eşitsizliğin her iki yanının karekökü alındığında

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{|4[\tau(1+2\alpha+6\gamma) - (1+\alpha+2\gamma)^2]t^2 + (1+\alpha+2\gamma)^2|}}$$

bulunur. Böylece (5.1.4) ile verilen $|a_2|$ katsayısının ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise (5.1.15) denkleminde (5.1.17) denklemini çıkarılırsa

$$\frac{2}{\tau}(1+2\alpha+6\gamma)(a_3 - a_2^2) = U_1(t)(c_2 - d_2) + U_2(c_1^2 - d_1^2) \quad (5.1.22)$$

denklemini bulunur. Burada (5.1.18) denkleminde $c_1 = -d_1$ olduğunu biliyoruz. O zaman $c_1^2 - d_1^2 = 0$ dır. Bulduğumuz bu eşitlik (5.1.22) denkleminde yerine yazılıp a_3 yalnız bırakılırsa

$$a_3 = a_2^2 + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{2(1+2\alpha+6\gamma)} \quad (5.1.23)$$

denklemini elde edilir. (5.1.19) denkleminde a_2^2 çekilip (5.1.23) denkleminde yerine yazılırsa

$$a_3 = \frac{\tau^2 U_1^2(t)(c_1^2 + d_1^2)}{2(1+\alpha+2\gamma)^2} + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{2(1+2\alpha+6\gamma)}$$

denklemini bulunur. (5.1.1) denkleminde tanımladığımız $U_1(t) = 2t$ ve $U_2(t) = 4t^2 - 1$ değerleri yerine yazılırsak

$$a_3 = \frac{2\tau^2 t^2 (c_1^2 + d_1^2)}{(1 + \alpha + 2\gamma)^2} + \frac{\tau t (c_2 - d_2)}{1 + 2\alpha + 6\gamma}$$

bulunur. Bu son denklemde her iki tarafın mutlak değerini alarak (5.1.11) denklemine verilen $|c_j| \leq 1$ ve $|d_j| \leq 1$ eşitsizliklerini kullandığımızda

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1 + \alpha + 2\gamma)^2} + \frac{2|\tau|t}{1 + 2\alpha + 6\gamma}$$

katsayı eşitsizliği bulunur ki bu da (5.1.5) denklemine verilen $|a_3|$ katsayısının tahminini verir.

Şimdi bazı $\eta \in \mathbb{R}$ değerleri için (5.1.23) denkleminin her iki tarafına $-\eta a_2^2$ değerini ekleyelim:

$$a_3 - \eta a_2^2 = (1 - \eta) a_2^2 + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)}$$

(5.1.21) denklemde a_2^2 çekilerek bu son denklemde yerine yazılırsa

$$a_3 - \eta a_2^2 = (1 - \eta) \left[\frac{\tau^2 U_1^3(t)(c_2 + d_2)}{2\tau U_1^2(t)(1 + 2\alpha + 6\gamma) - 2U_2(t)(1 + \alpha + 2\gamma)^2} \right] + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)} \quad (5.1.24)$$

denklemini elde edilir. Burada

$$h(\eta) = \frac{\tau U_1^2(t)(1 - \eta)}{2\tau U_1^2(t)(1 + 2\alpha + 6\gamma) - 2U_2(t)(1 + \alpha + 2\gamma)^2} \quad (5.1.25)$$

fonksiyonu tanımlanıp (5.1.24) denklemi buna göre yeniden düzenlenirse

$$a_3 - \eta a_2^2 = \tau U_1(t) \left[\left(h(\eta) + \frac{1}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)} \right) c_2 + \left(h(\eta) - \frac{1}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)} \right) d_2 \right]$$

denklemini elde edilir. Böylece

$$|a_3 - \eta a_2^2| = \begin{cases} \frac{2|\tau|t}{1 + 2\alpha + 6\gamma}, & 0 \leq |h(\eta)| \leq \frac{1}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)} \\ 4|\tau||h(\eta)|t, & |h(\eta)| \geq \frac{1}{2(1 + 2\alpha + 6\gamma)} \end{cases} \quad (5.1.26)$$

olarak bulunur. $h(\eta)$ fonksiyonun (5.1.25) deki eşiti (5.1.26) denklemine yerine yazılırsa

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|\tau|t}{1 + 2\alpha + 6\gamma}, & |\eta - 1| \leq \frac{|(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - \tau(1 + 2\alpha + 6\gamma)]t^2|}{4(1 + 2\alpha + 6\gamma)t^2} \\ \frac{8|\tau|^2|\eta - 1|t^3}{|(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - \tau(1 + 2\alpha + 6\gamma)]t^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(1 + \alpha + 2\gamma)^2 - \tau(1 + 2\alpha + 6\gamma)]t^2|}{4(1 + 2\alpha + 6\gamma)t^2} \end{cases}$$

bulunur. Böylece Teorem 5.4 ün ispatı tamamlanmış olur.

Tanım 5.5 f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ sınıfına ait ve $0 \leq \lambda \leq 1$, $0 \leq \beta < 1$, $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olsun. Her $z, w \in \mathbb{U}$ için aşağıdaki subordinasyon koşulları yazılabilir.

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1 - \lambda)f(z)} - 1 \right] < H(z, t) := \frac{1}{1 - 2tz + z^2} \quad (5.1.27)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1 - \lambda)g(w)} - 1 \right] < H(w, t) := \frac{1}{1 - 2tw + w^2}. \quad (5.1.28)$$

Burada $g = f^{-1}$ dir.

Yukarıdaki subordinasyon koşullarının yazılabileceğini aşağıdaki çalışmalardan yararlanarak söyleyebiliriz.

(i) $f \in S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ fonksiyonunda $\tau = 1$, $\lambda = 0$ alınırsa $S_{\Sigma}(0, 1; t) = S_{\Sigma}^*(t)$ sınıfı elde edilir. Yani,

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} < H(z, t) := \frac{1}{1 - 2tz + z^2}$$

ve

$$\frac{wg'(w)}{g(w)} < H(w, t) := \frac{1}{1 - 2tw + w^2}$$

yazılabilir. Burada $g = f^{-1}$ dir (Bulut ve ark. 2017).

Teorem 5.6 f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ sınıfına ait ise $0 \leq \lambda \leq 1$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı eşitsizlikleri aşağıdaki şekildedir.

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{|4[2\tau(1 + 2\lambda) - (\tau + 1)(1 + \lambda)^2]t^2 + (1 + \lambda)^2|}} \quad (5.1.29)$$

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1 + \lambda)^2} + \frac{|\tau|t}{1 + 2\lambda}. \quad (5.1.30)$$

$\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_3 - \eta a_2^2|$$

$$\leq \begin{cases} \frac{|\tau|t}{1 + 2\lambda}, & |\eta - 1| \leq \frac{|4[2\tau(1 + 2\lambda) - (\tau + 1)(1 + \lambda)^2]t^2 + (1 + \lambda)^2|}{8|\tau|(1 + 2\lambda)t^2} \\ \frac{8|\tau|^2|\eta - 1|t^3}{|4[2\tau(1 + 2\lambda) - (\tau + 1)(1 + \lambda)^2]t^2 + (1 + \lambda)^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|4[2\tau(1 + 2\lambda) - (\tau + 1)(1 + \lambda)^2]t^2 + (1 + \lambda)^2|}{8|\tau|(1 + 2\lambda)t^2} \end{cases} \quad (5.1.31)$$

İspat: (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ sınıfına ait olsun. (5.1.27) ve (5.1.28) denklemleri gereğince,

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda)f(z)} - 1 \right] = 1 + U_1(t)p(z) + U_2(t)p^2(z) + \dots \quad (5.1.32)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1-\lambda)g(w)} - 1 \right] = 1 + U_1(t)q(w) + U_2(t)q^2(w) + \dots \quad (5.1.33)$$

yazılabilir.

Bazı analitik fonksiyonlar için,

$$p(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, (z \in \mathbb{U}) \quad (5.1.34)$$

$$q(w) = d_1 w + d_2 w^2 + d_3 w^3 + \dots, (w \in \mathbb{U}) \quad (5.1.35)$$

olduğundan $p(0) = q(0) = 0$, $|p(z)| < 1$ ($z \in \mathbb{U}$) ve $|q(w)| < 1$ ($w \in \mathbb{U}$) dir.

(5.1.34) ve (5.1.35) denklemleriyle verilen ve yukarıdaki özellikleri sağlayan $p(z)$ ve $q(z)$ iyi bilinen Schwarz fonksiyonlarıdır (bkz: Tanım 2.1.1). Böylelikle,

$$|c_j| \leq 1 \text{ ve } |d_j| \leq 1 \quad (5.1.36)$$

yazılabilir.

(5.1.32), (5.1.33), (5.1.34) ve (5.1.35) denklemleri karşılaştırılırsa,

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{zf'(z) + \lambda z^2 f''(z)}{\lambda z f'(z) + (1-\lambda)f(z)} - 1 \right] = 1 + U_1(t)c_1 z + [U_1(t)c_2 + U_2(t)c_1^2]z^2 + \dots \quad (5.1.37)$$

ve

$$1 + \frac{1}{\tau} \left[\frac{wg'(w) + \lambda w^2 g''(w)}{\lambda w g'(w) + (1-\lambda)g(w)} - 1 \right] = 1 + U_1(t)d_1 w + [U_1(t)d_2 + U_2(t)d_1^2]w^2 + \dots \quad (5.1.38)$$

elde edilir. Katsayıları (5.1.37) ve (5.1.38) denklemleri cinsinden ifade edersek

$$\frac{1}{\tau} (1 + \lambda)a_2 = U_1(t)c_1 \quad (5.1.39)$$

$$\frac{1}{\tau} [2(1 + 2\lambda)a_3 - (1 + \lambda)^2 a_2^2] = U_1(t)c_2 + U_2(t)c_1^2 \quad (5.1.40)$$

$$-\frac{1}{\tau} (1 + \lambda)a_2 = U_1(t)d_1 \quad (5.1.41)$$

$$\frac{1}{\tau} \{[4(1 + 2\lambda) - (1 + \lambda)^2]a_2^2 - 2(1 + 2\lambda)a_3\} = U_1(t)d_2 + U_2(t)d_1^2 \quad (5.1.42)$$

sırasıyla denklemleri yazılabilir. Öte yandan

$$c_1 = -d_1 \quad (5.1.43)$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi ise (5.1.39) ve (5.1.41) denklemlerinin ayrı ayrı karelerini alıp taraf tarafa toplarsak

$$\frac{2}{\tau^2}(1+\lambda)^2 a_2^2 = U_1^2(t)(c_1^2 + d_1^2) \quad (5.1.44)$$

denklemini elde edilir. Ayrıca (5.1.39) ve (5.1.41) denklemlerini taraf tarafa toplarsak

$$\frac{2}{\tau}[2(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2]a_2^2 = U_1(t)(c_2 + d_2) + U_2(t)(c_1^2 + d_1^2) \quad (5.1.45)$$

eşitliği elde edilir. $c_1^2 + d_1^2$ ifadesi (5.1.44) denkleminde çekilip (5.1.45) denkleminde yerine yazılarak eşitliğin sol tarafına atılırsa,

$$\left\{ \frac{2}{\tau}[2(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2] - \frac{2U_2(t)}{\tau^2 U_1^2(t)}(1+\lambda)^2 \right\} a_2^2 = U_1(t)(c_2 + d_2) \quad (5.1.46)$$

bulunur. (5.1.46) denkleminde payda eşitlenirse

$$\left[\frac{2\tau U_1^2(t)[2(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2] - 2U_2(t)(1+\lambda)^2}{\tau^2 U_1^2(t)} \right] a_2^2 = U_1(t)(c_2 + d_2)$$

olur. a_2^2 yalnız bırakılırsa

$$a_2^2 = \frac{\tau^2 U_1^3(t)(c_2 + d_2)}{2\tau U_1^2(t)[2(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2] - 2U_2(t)(1+\lambda)^2}$$

eşitliği yazılabilir. (5.1.1) denkleminde tanımladığımız $U_1(t) = 2t$ ve $U_2(t) = 4t^2 - 1$ değerleri yerine yazılıp payda düzenlenirse,

$$a_2^2 = \frac{8\tau^2 t^3(c_2 + d_2)}{8\tau t^2[2(1+2\lambda) - (1+\lambda)^2] - 2(4t^2 - 1)(1+\lambda)^2}$$

olur. Buradan da payda t^2 ye göre yeniden düzenlenirse

$$a_2^2 = \frac{4\tau^2 t^3(c_2 + d_2)}{4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + 2(1+\lambda)^2}$$

denklemini elde edilir. Burada her iki tarafın mutlak değeri alıp (5.1.36) denkleminde verilen $|c_j| \leq 1$ ve $|d_j| \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılarak gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$|a_2^2| \leq \frac{8|\tau|^2 t^3}{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + 2(1+\lambda)^2|}$$

denklemini elde edilir. Son denkleminde eşitsizliğin her iki yanının karekökü alındığında

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + 2(1+\lambda)^2}}$$

bulunur. Böylece (5.1.29) verilen $|a_2|$ katsayısının ispatı tamamlanmış olur.

Şimdi ise (5.1.40) denkleminde (5.1.42) denklemini çıkarılırsa

$$\frac{4}{\tau}(1+2\lambda)(a_3 - a_2^2) = U_1(t)(c_2 - d_2) + U_2(c_1^2 - d_1^2) \quad (5.1.47)$$

denklemini bulunur. Burada (5.1.43) denkleminde $c_1 = -d_1$ olduğunu biliyoruz. O zaman $c_1^2 - d_1^2 = 0$ dır. Bulduğumuz bu eşitlik (5.1.47) denkleminde yerine yazılıp a_3 yalnız bırakılırsa

$$a_3 = a_2^2 + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{4(1 + 2\lambda)} \quad (5.1.48)$$

denklemini elde edilir. (5.1.44) denkleminde a_2^2 çekilip (5.1.48) denkleminde yerine yazılırsa

$$a_3 = \frac{\tau^2 U_1^2(t)(c_1^2 + d_1^2)}{2(1 + \lambda)^2} + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{4(1 + 2\lambda)}$$

denklemini bulunur. (5.1.1) denkleminde tanımladığımız $U_1(t) = 2t$ ve $U_2(t) = 4t^2 - 1$ değerleri yerine yazılırsa

$$a_3 = \frac{2\tau^2 t^2 (c_1^2 + d_1^2)}{(1 + \lambda)^2} + \frac{\tau t (c_2 - d_2)}{2(1 + 2\lambda)}$$

bulunur Bu son denklemde, her iki tarafın mutlak değeri alınarak (5.1.36) denkleminde verilen $|c_j| \leq 1$ ve $|d_j| \leq 1$ eşitsizlikleri kullanılırsa

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1 + \lambda)^2} + \frac{|\tau|t}{1 + 2\lambda}$$

eşitsizliği bulunur ki bu da (5.1.30) denkleminde verilen $|a_3|$ katsayısının ispatını verir.

Şimdi bazı $\eta \in \mathbb{R}$ değeri için (5.1.48) denkleminin her iki tarafına $-\eta a_2^2$ değerini ekleyelim.

$$a_3 - \eta a_2^2 = (1 - \eta)a_2^2 + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{4(1 + 2\lambda)}.$$

(5.1.46) denkleminde a_2^2 çekilip bu son denklemde yerine yazılırsa

$$a_3 - \eta a_2^2 = (1 - \eta) \left[\frac{\tau^2 U_1^3(t)(c_2 + d_2)}{2\tau U_1^2(t)[2(1 + 2\lambda) - (1 + \lambda)^2] - 2U_2(t)(1 + \lambda)^2} \right] + \frac{\tau U_1(t)(c_2 - d_2)}{4(1 + 2\lambda)} \quad (5.1.49)$$

denklemini elde edilir. Burada,

$$h(\eta) = \frac{\tau U_1^2(t)(1 - \eta)}{2\tau U_1^2(t)[2(1 + 2\lambda) - (1 + \lambda)^2] - 2U_2(t)(1 + \lambda)^2} \quad (5.1.50)$$

fonksiyonu tanımlanarak (5.1.49) denklemini buna göre yeniden düzenlenirse

$$a_3 - \eta a_2^2 = \tau U_1(t) \left[\left(h(\eta) + \frac{1}{4(1 + 2\lambda)} \right) c_2 + \left(h(\eta) - \frac{1}{4(1 + 2\lambda)} \right) d_2 \right]$$

denklemini elde edilir. Böylece,

$$|a_3 - \eta a_2^2| = \begin{cases} \frac{|\tau|t}{(1 + 2\lambda)}, & 0 \leq |h(\eta)| \leq \frac{1}{4(1 + 2\lambda)} \\ 4|\tau||h(\eta)|t, & |h(\eta)| \geq \frac{1}{4(1 + 2\lambda)} \end{cases} \quad (5.1.51)$$

olarak bulunur. $h(\eta)$ fonksiyonunun (5.1.50) deki eşiti (5.1.51) denkleminde yerine yazılırsa

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{|\tau|t}{1+2\lambda}, & |\eta - 1| \leq \frac{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}{8|\tau|(1+2\lambda)t^2} \\ \frac{8|\tau|^2|\eta - 1|t^3}{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}{8|\tau|(1+2\lambda)t^2} \end{cases}$$

bulunur. Böylece Teorem 5.6 nın ispatı tamamlanmış olur.

6. ARAŞTIRMA SONUÇLARI VE TARTIŞMA

Bu çalışmada ele aldığımız sınıflar $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$, $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$, $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ ve $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıflarıdır. Bu sınıflar için özellikle $\tau = 1$ durumunda ünivalent fonksiyonların farklı sınıfları elde edilir. Çalıştığımız sınıflardaki değişkenler yerine uygun değerler seçilirse daha önce yapılmış olan bazı çalışmalar elde edilebilir. Bulduğumuz sonuçların önceki çalışmaların bir genellemesi niteliğinde olduğunu söyleyebiliriz.

6.1 $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfının Faber polinom sonucu ve diğer sınıflar ile karşılaştırılması

Teorem 4.4 de $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfının Faber polinomları yardımıyla $|a_n|$ katsayısı eşitsizliğinin

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1+(n-1)\alpha+\gamma n(n-1)} \quad (n \geq 4)$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştık. Burada $\tau = 1$, $m=2$, $\alpha = \lambda$, $\gamma = \delta$ ve $\beta = \alpha$ seçilirse $R_{\Sigma}(1, \lambda, \delta; \alpha) = \mathcal{N}_{\Sigma}(\alpha, \lambda, \delta)$ sınıfı elde edilir. Elde edilen bu sınıflar ve katsayı tahmini aşağıda verilmiştir.

Tanım 6.1.1 (Bulut, 2016) $\lambda \geq 1$, $\delta \geq 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere (2.1) denklemi ile verilen f fonksiyonu $\mathcal{N}_{\Sigma}(\alpha, \lambda, \delta)$ sınıfına ait ise aşağıdaki iki koşul sağlanır.

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-\lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) + \delta z f''(z) \right\} > \alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

ve

$$\operatorname{Re} \left\{ (1-\lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) + \delta w g''(w) \right\} > \alpha. \quad (w \in \mathbb{U})$$

Burada (2.2) denklemiyle verilen $g = f^{-1}$ fonksiyonudur.

Teorem 6.1.2 (Bulut, 2016) $\lambda \geq 1$, $\delta \geq 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{N}_{\Sigma}(\alpha, \lambda, \delta)$ fonksiyonu (2.1) denklemi ile verilmiş olsun. $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n-1$) için

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{1+(n-1)\lambda+n(n-1)\delta} \quad (n \geq 4)$$

bulunur.

Öte yandan $\tau = 1$, $m = 2$, $\alpha = \lambda$, $\gamma = 0$ ve $\beta = \alpha$ seçilirse $R_{\Sigma}(1, \lambda, 0; \alpha) = \mathcal{B}_{\Sigma}(\alpha, \lambda)$ sınıfı elde edilir. Elde edilen bu sınıflar ve katsayı tahmini aşağıda verilmiştir.

Tanım 6.1.3 (Jahangiri ve Hamidi, 2013) $\lambda \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere (2.1) denklemi ile verilen f fonksiyonu $\mathcal{B}_{\Sigma}(\alpha, \lambda)$ sınıfına ait ise aşağıdaki iki koşul sağlanır.

$$Re \left\{ (1 - \lambda) \frac{f(z)}{z} + \lambda f'(z) \right\} > \alpha \quad (z \in \mathbb{U})$$

ve

$$Re \left\{ (1 - \lambda) \frac{g(w)}{w} + \lambda g'(w) \right\} > \alpha. \quad (w \in \mathbb{U})$$

Burada (2.2) denklemiyle verilen $g = f^{-1}$ fonksiyonudur.

Teorem 6.1.4 (Jahangiri ve Hamidi, 2013) $\lambda \geq 1$ olmak üzere $f \in \mathcal{B}_{\Sigma}(\alpha, \lambda)$ fonksiyonu (2.1) denklemi ile verilmiş olsun. $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n - 1$) için

$$|a_n| \leq \frac{2(1 - \alpha)}{1 + (n - 1)\lambda} \quad (n \geq 4)$$

bulunur.

6.2 $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfının Faber polinom katsayısı tahmini ve diğer sınıflar ile karşılaştırılması

Teorem 4.7 de $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfının Faber polinomları yardımıyla bulunan $|a_n|$ katsayısı eşitliği

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1 - \beta)}{(n - 1)[1 + (n - 1)\lambda]} \quad (n \geq 4)$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştık. Burada $\tau = 1$, $m=2$, $\lambda = 0$ ve $\beta = \alpha$ seçilirse $S_{\Sigma}(0, 1; \alpha) = S_{\Sigma}^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir. Elde edilen bu sınıflar ve katsayı tahmini aşağıda verilmiştir.

Tanım 6.2.1 (Bulut, 2018) $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere (2.1) denklemi ile verilen f fonksiyonu $S_{\Sigma}^*(\alpha)$ sınıfına ait ise aşağıdaki iki koşul sağlanır.

$$Re \left\{ \frac{zf'(z)}{f(z)} \right\} > \alpha$$

ve

$$Re \left\{ \frac{wg'(w)}{g(w)} \right\} > \alpha .$$

Burada (2.2) denklemiyle verilen $g = f^{-1}$ fonksiyonudur.

Teorem 6.2.2 (Bulut, 2018) $f \in S_{\Sigma}^*(\alpha)$ fonksiyonu (2.1) denklemi ile verilmiş olsun. $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n-1$) için

$$|a_n| \leq \frac{2(1-\alpha)}{n-1} \quad (n \geq 4)$$

olur.

6.3 $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ sınıfının Chebyshev polinom katsayı tahmini ve diğer sınıflar ile karşılaştırılması

Teorem 5.4 de $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ sınıfının Chebyshev polinomları yardımıyla bulunan $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarının

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{|4[\tau(1+2\alpha+6\gamma) - (1+\alpha+2\gamma)^2]t^2 + (1+\alpha+2\gamma)^2|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1+\alpha+2\gamma)^2} + \frac{2|\tau|t}{1+2\alpha+6\gamma}$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için;

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{2|\tau|t}{1+2\alpha+6\gamma}, & |\eta - 1| \leq \frac{|(1+\alpha+2\gamma)^2 - 4[(1+\alpha+2\gamma)^2 - \tau(1+2\alpha+6\gamma)]t^2|}{4(1+2\alpha+6\gamma)t^2} \\ \frac{8|\tau|^2|\eta-1|t^3}{|(1+\alpha+2\gamma)^2 - 4[(1+\alpha+2\gamma)^2 - \tau(1+2\alpha+6\gamma)]t^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|(1+\alpha+2\gamma)^2 - 4[(1+\alpha+2\gamma)^2 - \tau(1+2\alpha+6\gamma)]t^2|}{4(1+2\alpha+6\gamma)t^2} \end{cases}$$

şeklinde olduğunu ispatlamıştık. Burada $\tau = 1$, $\alpha = \lambda$ ve $\gamma = 0$ seçilirse $R_{\Sigma}(1, \lambda, 0; t) = \mathcal{B}_{\Sigma}(\lambda, t)$ sınıfı elde edilir. Elde edilen bu sınıfa ait katsayı tahminleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 6.3.1 (Bulut ve ark. 2017) $\lambda \geq 1$ ve $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere, (2.1) denklemiyle verilmiş f fonksiyonu $\mathcal{B}_{\Sigma}(\lambda, t)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{2t\sqrt{2t}}{\sqrt{|(1+\lambda)^2 - 4\lambda^2 t^2|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{4t^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{2t}{1+2\lambda}$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_2 - \eta a_3| \leq \begin{cases} \frac{2t}{1+2\lambda} & , \quad |\eta - 1| \leq \frac{|(1+\lambda)^2 - 4\lambda^2 t^2|}{4(1+2\lambda)t^2} \\ \frac{8|\eta - 1|t^3}{|(1+\lambda)^2 - 4\lambda^2 t^2|} & , \quad |\eta - 1| \geq \frac{|(1+\lambda)^2 - 4\lambda^2 t^2|}{4(1+2\lambda)t^2} \end{cases}$$

olarak bulunur. Öte yandan $\tau = 1$, $\alpha = 1$ ve $\gamma = 0$ seçilirse $R_\Sigma(1, 1, 0; t) = \mathcal{B}_\Sigma(t)$ sınıfı elde edilir. Elde edilen bu sınıfa ait katsayı tahminleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 6.3.2 (Bulut ve ark. 2017) $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere (2.1) denklemiyle verilen f fonksiyonu $\mathcal{B}_\Sigma(t)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq \frac{t\sqrt{2t}}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$|a_3| \leq t^2 + \frac{2t}{3}$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_2 - \eta a_3| \leq \begin{cases} \frac{2t}{3} & , \quad |\eta - 1| \leq \frac{1-t^2}{3t^2} \\ \frac{2|\eta - 1|t^3}{1-t^2} & , \quad |\eta - 1| \geq \frac{1-t^2}{3t^2} \end{cases}$$

olarak bulunur.

6.4 $S_\Sigma(\lambda, \tau; t)$ sınıfının Chebyshev polinom katsayı tahminleri ve diğer sınıflar ile karşılaştırılması

Teorem 5.6 da $S_\Sigma(\lambda, \tau; t)$ sınıfının Chebyshev polinomları yardımıyla bulunan $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarının

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{|\tau|t}{1+2\lambda}$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{|\tau|t}{1+2\lambda} & , \quad |\eta - 1| \leq \frac{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}{8|\tau|(1+2\lambda)t^2} \\ \frac{8|\tau||\eta - 1|t^3}{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|} & , \quad |\eta - 1| \geq \frac{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}{8|\tau|(1+2\lambda)t^2} \end{cases}$$

olduğunu ispatlamıştık. Burada $\tau = 1$ ve $\lambda = 0$ seçilirse $S_\Sigma(0, 1; t) = S_\Sigma^*(t)$ sınıfı elde edilir. Elde edilen bu sınıfa ait katsayı tahminleri aşağıda verilmiştir.

Teorem 6.4.1 (Bulut ve ark. 2017) $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere f fonksiyonu (2.1)

denklemleriyle verilmiş f fonksiyonu $S_\Sigma^*(\alpha)$ sınıfına ait olsun. Bu durumda

$$|a_2| \leq 2t\sqrt{2t}$$

$$|a_3| \leq 4t^2 + t$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_2 - \eta a_3| \leq \begin{cases} t & , \quad |\eta - 1| \leq \frac{1}{8t^2} \\ 8|\eta - 1|t^3 & , \quad |\eta - 1| \geq \frac{1}{8t^2} \end{cases}$$

olarak bulunur.

Bu tezde, üzerinde çalıştığımız sınıflarımızdaki parametreler için seçtiğimiz bazı özel değerlerin başka sınıflardaki sonuçlar ile örtüşmesi bulduğumuz sonuçların doğruluğunu ispatlar niteliktedir. Böylece bulduğumuz sonuçların daha önce yapılmış olan bazı çalışmaların bir genellemesi niteliğinde olduğu sonucuna varabiliriz.

7. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

7.1 Sonuçlar

Bu tez çalışmamızda $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ ve $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfları için Faber polinomlarını kullanarak $|a_n|$ katsayılarını, ayrıca $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ ve $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ sınıfları içinde Chebyshev polinomları yardımıyla $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarının tahminlerinde bulunduk. Bulduğumuz sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Sonuç 7.1.1 $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, 0 \leq \beta < 1, \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $m \geq 2$ olmak üzere (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; \beta)$ sınıfında olsun. $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n-1$) ise

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{1 + (n-1)\alpha + \gamma n(n-1)} \quad (n \geq 4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 7.1.2 $0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \beta < 1$ ve $m \geq 2$ olmak üzere, (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; \beta)$ sınıfında olsun. $a_k = 0$ ($2 \leq k \leq n-1$) ise

$$|a_n| \leq \frac{|\tau|m(1-\beta)}{(n-1)[1 + (n-1)\lambda]} \quad (n \geq 4)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 7.1.3 $\alpha \geq 1, \gamma \geq 0, \tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere, (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $R_{\Sigma}(\tau, \alpha, \gamma; t)$ sınıfında ise $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırları aşağıdaki şekildedir.

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2t}}{\sqrt{|4[\tau(1+2\alpha+6\gamma) - (1+\alpha+2\gamma)^2]t^2 + (1+\alpha+2\gamma)^2|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1+\alpha+2\gamma)^2} + \frac{2|\tau|t}{1+2\alpha+6\gamma}$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq$$

$$\begin{cases} \frac{2|\tau|t}{1+2\alpha+6\gamma}, & |\eta - 1| \leq \frac{|(1+\alpha+2\gamma)^2 - 4[(1+\alpha+2\gamma)^2 - \tau(1+2\alpha+6\gamma)]t^2|}{4(1+2\alpha+6\gamma)t^2} \\ \frac{8|\tau|^2|\eta-1|t^3}{|(1+\alpha+2\gamma)^2 - 4[(1+\alpha+2\gamma)^2 - \tau(1+2\alpha+6\gamma)]t^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|(1+\alpha+2\gamma)^2 - 4[(1+\alpha+2\gamma)^2 - \tau(1+2\alpha+6\gamma)]t^2|}{4(1+2\alpha+6\gamma)t^2} \end{cases}$$

Sonuç 7.1.4 $0 \leq \lambda \leq 1$, $\tau \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ve $t \in (\frac{1}{2}, 1]$ olmak üzere (2.1) açılımına sahip f fonksiyonu $S_{\Sigma}(\lambda, \tau; t)$ sınıfında ise $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırları aşağıdaki şekildedir.

$$|a_2| \leq \frac{2|\tau|t\sqrt{2|\tau|t}}{\sqrt{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}}$$

$$|a_3| \leq \frac{4|\tau|^2 t^2}{(1+\lambda)^2} + \frac{|\tau|t}{1+2\lambda}$$

ve $\eta \in \mathbb{R}$ için,

$$|a_3 - \eta a_2^2| \leq \begin{cases} \frac{|\tau|t}{1+2\lambda}, & |\eta - 1| \leq \frac{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}{8|\tau|(1+2\lambda)t^2} \\ \frac{8|\tau||\eta - 1|t^3}{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}, & |\eta - 1| \geq \frac{|4[2\tau(1+2\lambda) - (\tau+1)(1+\lambda)^2]t^2 + (1+\lambda)^2|}{8|\tau|(1+2\lambda)t^2} \end{cases}$$

7.2 Öneriler

Bi-ünivalent fonsiyonlar üzerinde tanımlanan sınıflar için katsayı bulma problemi son dönemlerde üzerinde çalışılan bir konu olmuştur. Biz de bu çalışmada farklı sınıflar için Faber ve Chebyshev polinomlarını kullanarak katsayı tahminlerinde bulunduk. Ayrıca bulduğumuz sonuçları daha önce yapılmış olan bazı çalışmaların sonuçları ile ilişkilendirdik. Daha sonraki çalışmalarda farklı sınıflar için farklı polinomlar kullanılarak benzer sonuçlar hesaplanabilir. Bu konuyu araştırmak isteyen araştırmacılar bu çalışma ile farklı bir bakış açısına ve yorumlara sahip olabilirler.

KAYNAKLAR

- Airault H., Bouali A., 2006, Differential calculus on the Faber polynomials. *Bull. Sci. Math.* 130(3): 179–222.
- Airault H., Ren J., 2002, An algebra of differential operators and generating functions on the set of univalent functions. *Bull. Sci. Math.* 126(5): 343–367.
- Alexander, J.W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, *Ann. of Math.*,(17): 12-22.
- Altınkaya S., Yalçın S., 2016, Coefficient problem for certain subclasses of bi-univalent functions defined by convolution, *Mathematica Moravica*, 20(2), 15-21.
- Altınkaya S., Yalçın S., 2018, Chebyshev polynomial coefficient bounds for a subclass of bi-univalent functions, *Department of Mathematics*. 42 (6): 2876-2884.
- Bieberbach, L., 1916, Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl.* pp. 940–955.
- Branges, L.de., 1984. A proof of the Bieberbach conjecture, preprint E-5-84, *Steklov Math. Inst., Leningrad Branch*, 1-21.
- Brannan DA., Clunie J., 1980, Aspects of Contemporary Complex Analysis. New York, NY, USA: *Academic Press* . 1-20.
- Brannan DA., and Taha TS., 1986, On some classes of bi-univalent functions. *Studia Univ. Babes-Bolyai Math.* 31(2): 70-77.
- Bulboaca T., Murugusundaramoorthy G., 2016, Estimate for initial MacLaurin coefficients of certain subclasses of bi-univalent functions of complex order associated with the Hohlov operator, *arXiv:1607.08285v1 [math. CV]*.
- Bulut S., 2018, Coefficient estimates for a subclass of analytic bi-univalent functions by means of Faber polynomial expansions. *Palestine Journal of Mathematics* 7(1): 53-59.
- Bulut S., Magesh N., and Abrami C., 2017, A comprehensive class of analytic bi-univalent functions by means of chebshev polynomials. *Journal of Fractional Calculus and Applications*. Vol. 8(2) : 32-39.

- Bulut S., Magesh N., and Balaji V:K., 2017 Initial bounds for analytic and bi-univalent functions by means of Chebyshev polynomials. *J. Class. Anal.* 11(1):83-89.
- Dansu E.J., Olantunji S.O., 2018, Applications of Chebyshev polynomials on a Sakaguchi type class of analytic functions associated with quasi-subordination, *Acta et commentationes universitatis tartuensis de mathematica*, 22(1): 49-56.
- Deniz E., 2013, Certain subclasses of bi-univalent functions satisfying subordinate conditions, *J. Class. Anal.*, 2(1), 49-60.
- Duren P., 1983, Univalent Function Springer Verlag New York Inc.
- Doha E.H., 1994, The first and second kind Chebyshev coefficients of the moments of the general order derivative of an infinitely differentiable function, *Int. J. Comput. Math.* 51, 21–35.
- Dziok J., Raina R.K., Sokół J., 2015, Application of Chebyshev polynomials to classes of analytic functions, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I.* 353(5): 433-438.
- Faber G., 1903, Über polynomische Entwicklungen. *Math. Ann* 57: 389-408.
- Goodman A.W., 1983, Univalent Functions, *Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey*. Vols. I and II.
- Goswami P., Alkahtani B.S., Bulboacă T., 2015, Estimate for initial MacLaurin coefficients of certain sub-classes of biunivalent functions, *arXiv:1503.04644v1 [math.CV]*.
- Graham I., Kohr G., 2003, Geometric function theory in one and higher dimensions. *Marcel Dekker. Inc. New York*. 255.
- Hamidi S.G., Jahangiri J.M., 2014, Faber polynomial coefficient estimates for analytic bi-close-to-convex functions. *C. R. Acad. Sci. Paris Ser.* 352: 17-20.
- Koebe P., 1907, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *Nach. Ges. Wiss. Göttingen*. 1907: 191-210.
- Lewy H., 1936, On a coefficient problem for bi-univalent functions. *Proceedings of the American Mathematical Society* 18: 63-68.
- Lindelöf E., 1909, Mémoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions onogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, *Acta.Soc.Sci.Fenn.*, 35: 1–35.
- Littlewood J.E., 1925 On inequalities in the theory of functions, *Proc. London Math. Soc.* 23: 481-519.

- Netanyahu ME., 1969, The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in. *Arch. Rational Mech. Anal.* 32: 100-112.
- Mason JC., 1967, Chebyshev polynomial approximations for the L-membrane eigenvalue problem, *SIAM J. Appl. Math.* 15: 172–186.
- Mason, J.C., Handscomb, D.C. 2003. Chebyshev Polynomials. Chapman and Hall/Crc, Washington.
- Padmanabhan K, Parvatham R., 1975; Properties of a class of functions with bounded boundary rotation. *Ann. Polon. Math.* 31: 311-323.
- Peng G., Murugusundaramoorthy G., Janani T., 2014, Coefficient estimate of bi-univalent functions of complex order associated with the Hohlov operator, *J. Complex Anal.*, Article ID 693908.
- Robertson, M.S., 1936. On the theory of univalent functions, *Ann. of Math.* (37): 374-408.
- Rogosinski W., 1943, On the coefficients of subordinate functions, *Proc, London Math. Soc.* 2, 48-82
- Sakar FM., Güney HÖ., 2017, Coefficient bounds for a new subclass of analytic bi-close-to-convex functions by making use Faber polynomial expansion, *Turk J. Math.* 41:888-895.
- Süli E., Mayers, D.F., 2003, An Introduction to Numerical Analysis, New York: Cambridge University Pres. 241-244.
- Todorov PG., 1991, On the Faber polynomials of the univalent functions of class Σ . *J. Math. Anal. Appl.* 162(1): 268–276.
- Vays PP., Kant S., 2017, Estimates on initial Coefficients of Cerain Subclasses of bi-univalent Functions Associated with the class $P_m(\beta)$. *International Journal of Mathematics Andits Applications.* 5(1-B): 165-169.
- Whittaker T ., Watson GN, 1996, A Course of Modern Analysis, reprint of the fourth edition, *Cambridge Mathematical Library, Cambridge Univ. Press*, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Ertuğrul DOĞAN
Uyruğu : T.C.
Doğum Yeri ve Tarihi : ELAZIĞ 14.08.1988
Telefon : 05393733428
e-mail : ertugruldogan23@gmail.com

EĞİTİM

Derece	Adı,	İlçe, İl	Bitirme Yılı
Lise	: Korg. Hulusi Sayın Lisesi	ELAZIĞ	10.06.2005
Üniversite	: Fırat Üniversitesi	ELAZIĞ	09.07.2010
Yüksek Lisans:	Batman Üniversitesi	BATMAN	Devam ediyor

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	Kurum	Görevi
2011-2012	Eksen Dersanesi	Öğretmen
2013-2018	Dünya Sağlık Koleji	Öğretmen
2018-...	GSB Sivrihisar Erkek Öğrenci Yurdu	Yurt Yön. Per.

UZMANLIK ALANI: ÜNİVALENT FONKSİYONLAR TEORİSİ

YABANCI DİLLER : İngilizce