T.C.

BATMAN ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Bİ-ÜNİVALENT FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI

Veysi MEHMETOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK Anabilim Dalını

Temmuz-2016
BATMAN

TEZ KABUL VE ONAYI

Veysi MEHMETOĞLU tarafından hazırlanan ‘‘ **Bi-Ünivalent Fonksiyonların Yeni Bir Alt Sınıfı** ‘’ adlı tez çalışması 03/07/2016 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oy birliğiyle Batman Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalın’da YÜKSEK LİSANS olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Başkan Unvanı Adı SOYADI	Doç.Dr. Sevtap SÜMER EKER
Danışman Unvanı Adı SOYADI	Doç.Dr.Bilal ŞEKER
Üye Unvanı Adı SOYADI	Yrd.Doç. Meral SÜER

Yukarıdaki sonucu onaylarım.

Prof.. Dr. M. Tahir NALBANTÇILAR
FBE Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Bu tezdeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edildiğini ve tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Veysi MEHMETOĞLU
11.07.2016

DECLARATION PAGE

I hereby declare that all information in this document has been obtained and presented in accordance with academic rules and ethical conduct. I also declare that, as required by these rules and conduct, I have fully cited and referenced all materials and results that are not original to this work.

Veysi MEHMETOĞLU
11.07.2016

ÖZET

Bİ-ÜNIVALENT FONKSİYONLARIN YENİ BİR ALT SINIFI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Veysi MEHMETOĞLU

BATMAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
2016

Bu tezde, birim diskte tanımlanan bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfının yeni bir altsınıfı tanımlanacaktır. Salagean türev operatörü kullanılarak tanımlanacak bu yeni altsınıfın fonksiyonların karşılık geldiği Taylor-Maclaurin serilerinin ikinci ve üçüncü katsayılarına ilişkin üst sınırlar elde edilecektir. Bu tezde sunulan sonuçlar önceki birçok çalışmaların genelleştirilmişi niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Ünivalent Fonksiyonlar,bi-ünivalent Fonksiyonlar, Katsayı Sınırları, Katsayı tahminleri, SalageanTürev Operatörü

ABSTRACT

A NEW SUBCLASS OF BI- UNIVALENT FONCTİONS

MASTER THESIS

Veysi MEHMETOĞLU

UNIVERSTY OF BATMAN
INSTITUE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

In this thesis, introduction of new subclasses of bi-univalent functions in the open disk was defined. Moreover, by using Salagean operator, in these new subclasses for functions, upper bounds for the second and third coefficients were found. The results presented here would provide extensions of those given in earlier works.

Keywords: Univalent Functions, Bi-univalent Functions, Coefficient Bounds, Coefficient Estimates, Salagean Operator.

ÖNSÖZ

Titizliği, bilgeliği ve tecrübesi ile bana bu tezin yazım sürecinin en başından en sonuna kadar yardımcı olan sevgili hocam Doç.Dr. Bilal ŞEKER e ve matematik bölümdeki diğer hocalarıma,

İş arkadaşlarım ve vardiya ekibime, eğitimimin aksamaması için elini taşın altına koyan bana gerekli izni veren Arama Kurtarma Birimi şefi M. Emin AVCI ya

Her koşulda bana destek olan Aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

KISALTMA VE S İ M G E L E R

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}_0$: $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$: Gerçel Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar Kümesi

$\mathbb{U}$: $\{ z : |z| < 1 \}$, Birim disk

$k(z)$: $\dfrac{z}{(1-z)^2}$ Koebe Fonksiyonu

$f \prec g$: f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir

$D^n f$:. f fonksiyonunun n. mertebeden Salagean Türevi

$\mathcal{A}$: $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlanan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ analitik fonksiyonların sınıfı

S : Birim diskte analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{P}$: Pozitif gerçel kısma sahip fonksiyonlar sınıfı

$\mathcal{K}$: Konveks fonksiyonlar sınıfı

S^*	: Yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	: $\alpha -$mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{K}(\alpha)$	: $\alpha -$mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\tilde{\mathcal{S}}(\alpha)$	: α-mertebeli güçlü yıldızıl fonksiyonların sınıfını
$\tilde{\mathcal{K}}(\alpha)$	: α-mertebeli güçlü konveks fonksiyonların sınıfı
Σ	: Bi-ünivalent olan fonksiyonların sınıfını
$\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}[\alpha]$	: α - mertebeden güçlü bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$K_{\Sigma}[\alpha]$	: α - mertebeden güçlü bi-konveks fonksiyonlar sınıfı

1. GİRİŞ

Bir karmaşık fonksiyonun analitik özellikleri ve bu analitik fonksiyonun görüntüsünün geometrik özellikleri arasındaki ilişkiyi gösteren Karmaşık Analizin en önemli dallarindan biri, Geometrik Fonksiyonlar Kuramıdır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi, geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından biridir. Karmaşık analizde, karmasık düzlemin açık bir $\mathcal{D}$ altkümesi üzerinde tanımlanmış bir $f(z)$ fonksiyonu, kendi $f(\mathcal{D})$ resmi üzerine $1:1$ oluyorsa bu fonksiyona $\mathcal{D}$ bölgesinde **ünivalenttir** denir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisi çok geniş ve karmaşık olduğundan bazı kolaylaştırıcı kısıtlamalar yapmak gerekir. "Her basit bağlantılı $\mathcal{D}$ bölgesini, birim disk üzerine birebir olarak resmeden bir tek f analitik fonksiyonunun var olduğunu" ifade eden ünlü Riemann Dönüşüm Teoremindeki $\mathcal{D}$ bölgesi yerine $\mathbb{U}$ birim diskini alabiliriz.

Genel olarak, $\mathbb{U}=\{\, z : |z|<1 \,\}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve normalize edilmiş yani, $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir. Her $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu

$$f(z)=z+a_2z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$$

şeklinde bir Taylor-Maclaurin serisi ile ifade edilebilir.

Ünivalent Fonksiyonlar Teorisinin temelleri, Riemann Dönüşüm Teoremi ile atılmış olmakla birlikte, teorinin başlangıcı, Koebe'nin (1907) normalize edilmiş ünivalent bir fonksiyonun kendisinin ve birinci türevinin modülleri üzerindeki sınırların varlığını ispatladığı 1907 yılındaki çalışması ve Bieberbach'ın (1916) bu tür fonksiyonların ikinci katsayıları için 1916 yılında elde ettiği katsayı kestirimine dayanır.

Bieberbach, 1916 yılında normalize edilmiş bir ünivalent fonksiyonun katsayıları için ünlü $|a_n|\le n$ kestirimini yapmış olup, $n=2$ durumu için bu kestirimi ispatlamıştır. Bu önemli kestirim üzerinde pek çok matematikçi çalışmış olmakla beraber 1984 yılında Louis de Branges tarafından ispatlanıncaya kadar bir kestirim olarak kalmıştır.

Ünivalent fonksiyonlar $1:1$ olduğundan terslenebilirdir. Bi-ünivalent fonksiyon, kendisi ve tersi ünivalent olan fonksiyonlara denir. Genel olarak bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı Σ sembolü ile gösterilir. Ünivalent fonksiyonların katsayı tahminlerinde olduğu gibi bi-ünivalent fonksiyonların katsayı tahminlerinin elde edilmesi için çalışmalar yapılmıştır. Bi-ünivalent fonksiyonların sınıfı ile ilgili ilk çalışmaları yapmış olan Lewin (1967), bu sınıfa ait fonksiyonların a_2 katsayısı için

$|a_2| < 1,51$ olduğunu ispatlamıştır. Sonrasında, Brannan ve Clunie (1979), Netanyahu (1969) ve $|a_2|$ katsayısı için sırasıyla $|a_2| \leq \sqrt{2}$, $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ ve $|a_2| > \frac{4}{3}$ eşitsizliklerini göstermişlerdir. Bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfının $|a_2|$ katsayısı için bilinen en iyi tahmin 1985 yılında Taha (1981) tarafından yapılmış olan $|a_2| \leq 1.485$ katsayı tahminidir.Taylor-Maclaurin serisinin herbir

$$|a_n| \left(n \in N - \{1,2\}, N = \{1,2,...\}\right)$$

katsayıları için katsayı kestirimleri hala açık bir problem olarak durmaktadır. Brannan ve Taha (1986) ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflara benzer olarak Bi-ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıflarını bulmuşlardır. Bu sınıfa ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için kesin olmayan tahminler buldular. Bu çalışmamızda bi-ünivalent fonksiyonların bazı yeni alt sınıflarını tanımlayacağız. Oluşturulan bu alt sınıflar daha öncesinde yapılmış olan bir çok çalışmanın genellemesi olarak yapılması planlanmaktadır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilmiştir.

2.1. Tanım (Disk) $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi , $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı **açık disk,**

$$\bar{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı disk,**

$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$$

kümesine z_0 merkezli r yarıçaplı **çember** denir.

2.2. Tanım (İç Nokta) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ için $D(z_{0,}r) \subset \mathrm{A}$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir **iç noktası** denir. A kümesinin bütün iç noktalarının kümesine A kümesinin **içi** denir.

2.3. Tanım (Açık Küme, Kapalı Küme) A kümesinin bütün noktaları bir iç nokta ise A kümesine **açık küme** denir. A kümesinin tümleyeni açık küme ise A kümesi **kapalı küme** olarak adlandırılır.

2.4. Tanım (Yığılma Noktası) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ olsun. $\mathrm{A} \neq \varnothing$ ve verilsin. z_0 noktasının her $\mathcal{D}(z_0, \varepsilon)$ komşuluğunda, A kümesinin z_0 dan farklı bir z noktası varsa z_0 noktasına A kümesinin bir **yığılma noktasıdır** denir.

2.5. Tanım (Bağlantılı Küme) $\mathrm{A} \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. A kümesi boştan farklı, ayrık iki açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa, bu kümeye **bağlantılıdır** denir. Yani,

$$\mathrm{A} \cap U \neq \varnothing, \ \mathrm{A} \cap V \neq \varnothing, \ \mathrm{A} \subset U \cup V, \ \mathrm{A} \cap U \cap V = \varnothing$$

olacak şekilde U ve V açık kümeleri bulunamıyorsa, A kümesi bağlantılıdır. Bağlantılı olmayan kümeye **bağlantısızdır** denir.

2.6. Tanım (Eğri) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$$

sürekli fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir eğri denir.

2.7. Tanım (Bölge) Karmaşık düzlemde boştan farklı açık ve bağlantılı bir kümeye **bölge** adı verilir.

2.8. Tanım (Basit Bağlantılı Bölge) $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}$ bir bölge olsun. Eğer hem $\mathcal{D}$ hem de $\mathbb{C}-\mathcal{D}$ bağlantılı bir küme ise $\mathcal{D}$ bölgesine **basit bağlantılı bölge** denir.

2.9. Tanım (Karmaşık Fonksiyon) A ,$\mathbb{C}$ nin herhangi bir altkümesi olsun. Her $z\in\mathrm{A}$ elemanına belli bir $f(z)\in\mathbb{C}$ elemanına karşılık getiren kurala **karmaşık konksiyon** denir. $f:\mathrm{A}\to\mathbb{C}$, $w=f(z)$ şeklinde yazılır.

2.10. Tanım (Fonksiyonun Limiti) $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f:\mathrm{A}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. $z_0\in\mathbb{C}$, A kümesinin bir yığılma noktası ve bir w_0 sayısı verilsin. Her $\varepsilon>0$ ve $0<|z-z_0|<\delta$ şartını sağlayan her $z\in\mathrm{A}$ için $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı varsa f nin z_0 daki **limiti** w_0 dır denir ve

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0$$

ile gösterilir.

2.11. Tanım (Süreklilik) $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ olmak üzere $f:\mathrm{A}\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0\in\mathrm{A}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$f\left(\mathrm{A}\cap D(z_0,\delta)\right)\subset D\left(f(z_0,\varepsilon)\right)$$

olacak şekilde bir $\delta=\delta(z_0,\varepsilon)>0$ sayısı varsa $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında süreklidir denir.

2.12. Tanım (Diferansiyellenebilirlik) $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ bir açık küme, $f:\mathrm{A}\to\mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.
Eğer $z_0\in\mathrm{A}$ noktasında

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

limiti mevcut ise, f fonksiyonuna z_0 noktasında **diferansiyellenebirdir** veya **türevlenebilirdir** denir. Bu limit $f'(z)$ veya $\frac{df}{dz}(z_0)$ şeklinde gösterilir.

2.13. Tanım (Analitik Fonksiyon) $\mathrm{A}\subset\mathbb{C}$ ve $f:\mathrm{A}\to\mathbb{C}$ fonksiyon ve z_0, A nın bir iç noktası olsun. Eğer f fonksiyonu , z_0 noktasında ve bu noktanın uygun bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında **analitiktir** denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ karmaşık değerli fonksiyonu analitik

$$\text{ise } \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

2.14. Teorem (Maksimum Modül Teoremi) f fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon bu bölgede sabit olmadıkça, $|f(z)|$ modülü maksimum değeri bu bölgenin sınırında alır (Duren, 1983).

2.15. Teorem (Schwarz Yardımcı Teoremi) f fonksiyonu $\mathbb{U} = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve $f(0) = 0$ olsun. Eğer $\mathbb{U}$ birim diskinde $|f(z)| \leq 1$ ise $|f'(0)| \leq 1$ ve $|f(z)| \leq |z|$ eşitsizlikleri sağlanır. Eşitlik sadece $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(z) = e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır.

2.16. Tanım (Argüment) Karmaşık düzlemde $z \in \mathbb{C}$ karmaşık sayısıyla belirtilen vektörün pozitif reel eksen ile yaptığı θ açısına z nin **argümenti** denir ve $\theta = \arg(z)$ ile gösterilir.

2.17. Tanım (Konform Dönüşüm) Karmaşık düzlemin bir $\mathcal{D}$ bölgesinde $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1, γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de $w_0 = f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında bir **konform dönüşümdür** denir. Eğer f fonksiyonu her $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında konform ise f fonksiyonu $\mathcal{D}$ bölgesinde konformdur.

Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilişkinin daha iyi belirlenebilmesi için herhangi bir karmaşık fonksiyon yerine konform dönüşüm göz önüne alınır.

2.18. Tanım Karmaşık düzlemin bir $\mathcal{D}$ bölgesinde $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ dönüşümü verilsin. f, bir $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında sürekli ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f, z_0 noktasında bir konform dönüşümdür.

2.19. Tanım (Dizi) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $f(n) = z_n$ olan fonksiyona $\mathbb{C}$ de bir karmaşık dizi denir.

2.20. Tanım (Yakınsaklık) (z_n), $\mathbb{C}$ de bir dizi ve $z_0 \in \mathbb{C}$ olsun. Verilen herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $n \geq n_0$ özelliğindeki bütün $n \in \mathbb{N}$ için $|z_n - z_0| < \varepsilon$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa, (z_n) dizisinin limiti z_0 dır denir.

Belli bir $z_0 \in \mathbb{C}$ limitine sahip olan (z_n) dizisine yakınsak dizi denir.

2.21. Tanım(Seri) (z_n), bir karmaşık dizi olmak üzere

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$$

ifadesine karmaşık seri denir ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

ile gösterilir. Bu serinin $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ olarak tanımlanan (s_n) dizisine kısmi toplamlar dizisi denir.

2.22. Tanım (Yakınsak Seri) $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ bir karmaşık seri ve (s_n) bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (s_n) dizisi bir s_0 değerine yakınsıyorsa verilen seri s_0 sayısına yakınsıyor denir.

2.23. Tanım (Kuvvet Serisi) $z_0, a_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

biçimindeki serilere kuvvet serileri denir.

2.24. Tanım (Taylor Teoremi)

$f(z)$ fonksiyonu bir z_0 noktasında analitik ise bu noktanın bir komşuluğunda

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

şeklinde bir kuvvet serisi açılımı vardır.Yukarıda belirtilen kuvvet serisine $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktası komşuluğundaki **Taylor serisi** denir. Taylor serisinde $z_0 = 0$ alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

elde edilir. Bu seriye **Maclauren serisi** adı verilir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu başlık altında tezin oluşturulmasında kullanılacak temel tanım ve teoremler verilmektedir.

3.1. Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda ünivalent fonksiyonları tanımlayarak önemli özelliklerini vereceğiz.

3.1.1. Tanım (Ünivalent Fonksiyon) $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere, $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu aynı değeri iki defa alamıyorsa f fonksiyonuna $\mathcal{D}$ bölgesinde **ünivalent fonksiyon** denir. Yani $\mathcal{D}$ bölgesindeki $z_1 \neq z_2$ özelliğindeki tüm nokta çiftleri için $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir. Diğer bir deyişle $\mathcal{D}$ bölgesinde bire-bir dönüşüme ünivalent fonksiyon denir.

.

3.1.2. Tanım (Yerel Ünivalent Fonksiyon) Bir $\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı herhangi bir f fonksiyonu, herhangi bir $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f fonksiyonuna $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında **yerel ünivalent fonksiyon** denir.

3.1.3. Teorem f, $\mathcal{D}$ bölgesinde analitik olsun. Bu durumda $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında $f^{'}(z_0) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul f nin $z_0 \in \mathcal{D}$ noktasında yerel ünivalent olmasıdır.

$\mathcal{D}$ bölgesinde tanımlı f fonksiyonu $z_0 \in \mathcal{D}$ için yerel ünivalent ise $f'(z_0)$ türevi z_0 noktasında f fonksiyonunun yerel olarak geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ sırasıyla bize uzunlukların yerel büyüme çarpanı ve yerel dönme çarpanını verir.

Yerel ünivalent fonksiyonu, açıları ve dönmeyi korur. Bu nedenden dolayı ünivalent bir fonksiyon, konform bir dönüşümle denk görülür.

Diğer yandan, bir $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ bölgesinde $f'(z_0) \neq 0$ olması koşulu $\mathcal{D}$ bölgesinin tümünde ünivalent olması için gerek koşul iken yeterli koşul olamaz. Örneğin $f(z) = z^2$ fonksiyonu $\mathcal{D} = \left\{ z : 1 < |z| < 2,\ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$ bölgesinde yerel ünivalenttir. Ancak ünivalent değildir.

Tek değişkenli ünivalent fonksiyonlar teorisinin en önemli temel sonuçlardan biri Riemann dönüşüm teoremidir.

3.1.4. Teorem (Riemann Dönüşüm Teoremi) $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bölgesini $\mathbb{U}$ birim diski üzerine birebir ve konform olarak resmeden $z_0 \in \mathcal{D}$ için $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ olacak şekilde bir tek f fonksiyonu vardır. (Duren, 1983).

Riemann Dönüşüm Teoremiyle keyfi basit bağlantılı bölgelerde tanımlanan ünivalent fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskindeki ünivalent fonksiyonlara dönüştürür. Bundan dolayı birim diskteki ünivalent fonksiyonları çalışacağız.

$\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olan $f(z)$ fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalize edilebilir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent ise o zaman

$$g(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{f'(0)}$$

fonksiyonuda $f(z)$ fonksiyonu ile aynı özellikleri taşır. Böylece yapılan bu normalizasyon sınıfın genelliğini sınırlamaz.

Bu tezde çalışmalarımızı, $\mathbb{U}$ birim diskinde tanımlanan

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklindeki Taylor serisi açılımına sahip analitik fonksiyonların sınıflarıyla sınırlayacağız. Bu fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ sembolü ile göstereceğiz.

3.1.5. Tanım ($\mathcal{S}$ sınıfı) $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonların sınıfına **normalize edilmiş ünivalent fonksiyonlar sınıfı** denir. Bu sınıfı $\mathcal{S}$ ile göstereceğiz.

$\mathcal{S}$ sınıfına ait en önemli fonksiyonlardan biri

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \ldots \quad , \ (z \in \mathbb{U})$$

şeklinde verilen Koebe fonksiyonudur. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ diskini $-\frac{1}{4}$ den ∞ çıkarılmış negatif reel eksen hariç tüm karmaşık düzleme konform olarak dönüştürür. Koebe fonksiyonu, ünivalent fonksiyonlar teorisinde birçok problem için extremal bir rol oynar.

$$f(z)=\frac{z}{1-z}$$

şeklinde verilen fonksiyona lineer kesirsel dönüşüm denir. Bu fonksiyon $\mathbb{U}$ birim diskini $\operatorname{Re}\{w\}>-\frac{1}{2}$ yarı düzlem üzerine dönüştürür. Bu fonksiyon normalize edildiğinde $\mathcal{S}$ sınıfına ait olur. Benzer olarak,

$$f(z)=\frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskini $\operatorname{Re}\{w\}>0$ yarı düzlemi üzerine birebir olarak dönüştüren bir diğer lineer kesirsel dönüşümdür.

Bieberbach, ilk kez $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonların a_n katsayıları için bir üst sınır oluşturmaya çalışmıştır. 1946 yılında $|a_2|\leq 2$ eşitsizliğini ispatlamıştır.

3.1.6. Teorem (Bieberbach Teoremi) $f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots\in\mathcal{S}$ ise $|a_2|\leq 2$ dir.

Bieberbach, $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir fonksiyonunun a_n katsayılarının $|a_n|\leq n$ eşitsizliğini sağladığına dair bir kestirimde bulundu. Bieberbach kestirimi olarak bilinen bu zor problem 1985 yılında L. De Branges tarafından ispatlandı.

3.1.7. Teorem (Bieberbach Kestirimi-De Branges teoremi)
$f(z)=z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots\in\mathcal{S}$ ise her $n\geq 2$ için $|a_n|\leq n$ olur.(Bieberbach 1916).

$f\in\mathcal{S}$ ünivalent fonksiyonları için en önemli temel geometrik sonuç 1907 yılında Koebe tarafından verilen ve Koebe dörtte bir teoremi olarak bilinen meşhur teoremdir. Her bir $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $f(0)=0$ özelliğinde bir açık dönüşüm olduğundan dolayı bu dönüşümlerin görüntüsü, orjin merkezli bazı diskleri kapsar. Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfındaki tüm fonksiyonların görüntülerinin ρ bir mutlak sabit olmak üzere ortak bir $|w|<\rho$ diskini kapsadığını ortaya çıkarmıştır. Koebe fonksiyonu, ρ mutlak sabitinin $|\rho|\leq\frac{1}{4}$ eşitsizliğini sağlar. Daha sonra, Bieberbach ρ mutlak sabitinin $\frac{1}{4}$ olarak alınabileceğini belirten Koebe kestirimini oluşturdu.

3.1.8. Teorem (Koebe Dörtte Bir Teoremi) $\mathcal{S}$ sınıfındaki her fonksiyonun görüntüsü $\left\{w:|w|<\frac{1}{4}\right\}$ diskini kapsar (Duren, 1983).

Bieberbachın ispatlamış olduğu $|a_2|\leq 2$ katsayı eşitsizliği, konform dönüşümlerin geometrisinde büyüme teoremi ve bükülme teoremi gibi daha ileri uygulamalara sahiptir. büyüme teoremi ve bükülme teoremi, tüm $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonları üzerinde sırası ile $|f(z)|$ ve $|f'(z)|$ için sınırlar oluşturur.

Bükülme teoremi, $f \in \mathcal{S}$ dönüşümü altında yay uzunluğunun sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|$ nin geometrik açıklamasından veya alanın sonsuz küçük büyüme çarpanı olarak $|f'(z)|^2$ jakobiyeninden gelmektedir. Aşağıda verilen teorem, bükülme teoremi ve onun sonuçlarına ilişkin öncül bir tahmin verir.

3.1.9. Teorem Her bir $f \in \mathcal{S}$ için

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leq \frac{4r}{1-r^2} \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman 1983).

3.1.10. Teorem (Bükülme Teoremi) Her bir $f \in \mathcal{S}$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leq |f'(z)| \leq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman,1983).

3.1.11. Teorem (Büyüme Teoremi) Her bir $f \in \mathcal{S}$ ve $|z| = r < 1$ için,

$$\frac{r}{(1+r)^2} \leq |f(z)| \leq \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği sağlanır (Goodman,1983).

Bükülme ve Büyüme teoremlerinden aşağıdaki teoremi elde etmek kolaydır.

3.1.12. Teorem $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir f fonksiyonu için

$$\frac{1-r}{(1+r)} \leq \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leq \frac{1+r}{(1-r)} \quad |z| = r < 1$$

eşitsizliği sağlanır (Duren,1983).

3.2 Subordinasyon İlkesi

Subordinasyon kavramı, ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu kavram ilk olarak Lindelöf (1909) tarafından kullanılmıştır. Ancak Littlewood (1925) ve Rogosinski (1943) tarafından bu kavram tanıtılmış ve temel özellikleri ortaya çıkarılmıştır.

3.2.1. Tanım (Schwarz Fonksiyonu) $\mathbb{U}$ birim diski içinde analitik ve

$$w(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

şeklinde ifade edilen $w(z)$ fonksiyonu $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona **Schwarz Fonksiyonu** denir. Schwarz fonksiyonlarının sınıfı Ω ile gösterilir.

3.2.2. Tanım (Subordinasyon Prensibi) f ve g fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik fonksiyonlar olsun. $\mathbb{U}$ birim diski $f(z)=g(w(z))$ olacak şekilde $w(z)\in\Omega$ Schwarz fonksiyonu varsa f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir denir ve bu durum $f \prec g$ olarak gösterilir.

f fonksiyonunun ünivalent olmasına gerek yoktur. Özellikle, $g(z)$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ise

$$f \prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0) \text{ ve } f(\mathbb{U})\subseteq g(\mathbb{U})$$

olur (Duren,1983).

3.3. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Bu kısımda ünivalent fonksiyonların önemli bazı alt sınıflarını vereceğiz

3.3.1. Tanım (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyonlar Sınıfı)

$$P(z)=1+p_1z+p_2z^2+...+p_nz^n+...=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n$$

formuna sahip , $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik olan ve $\mathbb{U}$ birim diskindeki herbir z noktası için
$\operatorname{Re}\{p(z)\}>0$ koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına **pozitif reel kısımlı fonksiyonlar sınıfı** denir ve bu sınıf $\mathcal{P}$ ile gösterilir. $P(z)$ fonksiyonunun ünivalent olmasına gerek yoktur.

Örneğin; $P(z)=1+z^n$ fonksiyonu herhangi bir $n\geq 0$ tamsayısı için $\mathcal{P}$ sınıfına aittir. Ancak $n\geq 2$ alırsak bu fonksiyon ünivalent olmaz.

$$L_0(z)=\frac{1+z}{1-z}=1+2z+2z^2+...=1+2\sum_{n=1}^{\infty}z^n$$

şeklinde ifade edilen Mobius fonksiyonu, $\mathcal{S}$ sınıfındaki Koebe fonksiyonunun rolü gibi $\mathcal{P}$ sınıfında önemli yer tutar. Bu fonksiyon, $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve ünivalent olup $\mathbb{U}$ birim diskini, sağ yarı düzleme konform olarak dönüştürür. Sonuç olarak, herhangi bir $f\in\mathcal{P}$ fonksiyonu için

$$f\in\mathcal{P}\Rightarrow f\prec P$$

dir.

3.3.2. Tanım (Carathedory Yardımcı Önermesi) $f\in\mathcal{P}$ ve

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}p_nz^n \quad (z\in\mathbb{U})$$

olsun. Bu durumda

$$|p_n|\leq 2 \quad n=2,3,4...$$

dir (Goodman, 1983).

3.3.3. Tanım (Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) $\mathcal{D}$, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. $\mathcal{D}$ bölgesindeki sabit $z=0$ noktasını $\mathcal{D}$ nin herhangi bir noktasına birleştiren doğru parçası tamamen

$\mathcal{D}$ bölgesinde kalıyorsa $\mathcal{D}$ bölgesine **orijine göre yıldızıl** veya kısaca **yıldızıl bölge** adı verilir.

Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu $\mathcal{D}$ birim diskini yıldızıl bir bölgeye resmediyorsa , $f(z)$ fonksiyonuna **yıldızıl fonksiyon** denir.

Birim diskte analitik ve ünivalent yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Duren 1983).

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

Koebe fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyondur. Aşağıda verilen teorem yıldızıl fonksiyonların analitik tanımını verir.

3.3.4. Tanım $f\in\mathcal{A}$ ve $f(0)=f'(0)-1=0$ olsun. Bu durumda $f\in\mathcal{S}^*$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0$$

eşitsizliği sağlamasıdır. Bu koşul 1921 de Nevanlinna tarafından verilmiştir.

Yıldızıl fonksiyonların kümesini kısaca

$$\mathcal{S}^*=\left\{f\in\mathcal{A}:\quad \operatorname{Re}\frac{zf'(z)}{f(z)};\ z\in\mathbb{U}\right\}$$

şeklinde belirtilebilir.

Robertson (1936) tarafından tanımlanan ve $\mathcal{S}^*$ sınıfının bir alt sınıfı olan $\alpha-$mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfının analitik tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{S}^*=\left\{f\in\mathcal{A}:\quad \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha;\ z\in\mathbb{U},0\le\alpha<1\right\}.$$

3.3.5. Tanım (Güçlü Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı) $f\in\mathcal{A}$ olsun.

$$\left|\arg\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|<\alpha\frac{\pi}{2}\quad,\ (z\in\mathbb{U},0\le\alpha<1)$$

veya bu eşitsizliğe denk olan

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}\quad,\ (z\in\mathbb{U},0\le\alpha<1)$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonuna, α **-mertebeden güçlü yıldızıl (strongly starlike of order α) fonksiyonu** denir. Güçlü yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\tilde{\mathcal{S}}(\alpha)$ ile gösterilir. $\alpha=1$ için $\tilde{\mathcal{S}}(1)=\mathcal{S}^*$ olur. $\tilde{\mathcal{S}}(\alpha)$ sınıfı, Brannan ve Kirwan (1969) ve Stankiewicz (1966) tarafından tanıtılmış ve çalışılmıştır.

3.3.6. Tanım (Konveks Fonksiyonlar Sınıfı) $\mathcal{D}$, $\mathbb{C}$ de bir bölge olsun. $\mathcal{D}$ bölgesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen $\mathcal{D}$ içinde kalıyorsa yani

$z_1, z_2 \in \mathcal{D}$ ve $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere $\lambda z_1 + (1-\lambda) z_2 \in \mathcal{D}$ koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{D}$ bölgesine **konveks bölge** denir. $f(\mathcal{D})$ konveks bir bölge ise f fonksiyonuna **konveks fonksiyon** denir.

Konveks ünivalent fonksiyonların normalize edilmiş sınıfı, görüntüsü konveks olan $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonlarından oluşur. Normalize edilmiş ünivalent konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir.

$f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun $\mathcal{K}$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \quad z \in \mathbb{U}$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik Study (1913) tarafından verilmiştir.

$$f(z) = \frac{z}{1-z}$$

fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yarı düzleme dönüştüren ve $\mathcal{K}$ sınıfında önemli rol oynayan fonksiyondur.

$\mathcal{K}$ sınıfının bir altsınıfını oluşturan $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonlar sınıfının analitik tanımı aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha, \ \ z \in \mathbb{U}, 0 \le \alpha < 1 \right\}.$$

Aşağıda verilen teoremde yıldızıl ve konveks fonksiyonlarının birbirleriyle olan ilişkisini ifade edilmiştir.

Teorem 3.3.7 (Alexander Teoremi) $f(z) \in \mathcal{A}$ ve $z \in \mathbb{U}$ verilsin. $f(z) \in \mathcal{K}$ olması için gerek yeter koşul $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır(Alexander,1915).

Ayrıca Strohhacker (1933)tarafından

$$\text{“ } f \in \mathcal{K} \text{ ise } f \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{2}\right)\text{“}$$

olduğu ispatlanmıştır. $\mathcal{S}$ sınıfının yıldızıl ve konveks fonksiyonları kapsayan altsınıfları için

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$$

şeklinde bir ilişki vardır.

Tanım 3.3.8 (Güçlü Konveks Fonksiyonlar Sınıfı) $f \in \mathcal{A}$ olsun.

$$\left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \alpha\frac{\pi}{2} \quad (z \in \mathbb{U}, \ 0 \le \alpha < 1)$$

eşitsizliğini sağlayan f fonksiyonuna α**-mertebeden güçlü konveks fonksiyon (strongly convex of order** α **) fonksiyon** denir. Güçlü konveks fonksiyonların sınıfını $\tilde{\mathcal{K}}(\alpha)$ ile tanımlarız. $\alpha = 1$ için $\tilde{\mathcal{K}}(1) = \mathcal{K}$ elde edilir.

3.4. Salagean Türev Operatörü

Bu kısımda daha sonraki çalışmalarımızda kullanacağımız Salagean türev operatörünün tanımını vereceğiz.

3.4.1. Tanım (Salagean Türev Operatörü) $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

formundaki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}$ olsun. $\mathcal{A}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için G.S Salagean tarafından

$$D^0 f(z) = f(z)$$
$$D^1 f(z) = zf'(z)$$
$$\vdots$$
$$D^n f(z) = D(D^{n-1} f(z)) \qquad (n \in \mathbb{N} = 1,2,3...)$$

şeklinde bir operatör oluşturulmuştur (Salagean 1983).

Bazı basit hesaplamalar ile $\mathcal{A}$ sınıfına ait bir $f(z)$ fonksiyonu için

$$D^n f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n a_k z^k \ \left(n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}\right)$$

olduğu tanımdan kolayca elde edilir.

3.5. Bi-ÜnivalentFonksiyonlar

Bu kısımda, bi-ünivalent fonksiyonların tanımı ve bu fonksiyonlara ait katsayı tahminleri ile ilgili bilgiler verilecektir.

3.5.1. Tanım (Bi-Ünivalent Fonksiyon)

$f \in \mathcal{A}$ olmak üzere hem f hem de f^{-1} fonksiyonları $\mathbb{U}$ birim diskinde ünivalent ise $f(z)$ fonksiyonuna **bi-ünivalent fonksiyon** denir.

$$f(z) = z + a_2 z^2 + ... = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

formunda gösterilen $\mathcal{S}$ sınıfına ait her $f(z)$ fonksiyonu

$$f\left(f^{-1}(z)\right) = z \ \left(z \in \mathbb{U}\right)$$

$$f\left(f^{-1}(w)\right) = w \ \left(|w| < r_0(f); r_0(f) \geq \frac{1}{4}\right)$$

özellliklerini sağlayan bir f^{-1} ters fonksiyonuna sahiptir.

Gerçekte, f^{-1} ters fonksiyonu

$$f^{-1}(w) = w - a_2 w^2 + \left(2a_2^2 - a_3\right) w^3 - \left(5a_2^3 - 5a_2 a_3 + a_4\right) w^4 + ...$$

şeklinde elde edilir.

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

şeklinde Taylor-Maclaurin seri açılımı ile verilen ve $\mathbb{U}$ birim diskinde bi-ünivalent olan fonksiyonların sınıfını Σ ile göstereceğiz. Σ sınıfı, ilk olarak 1967 yılında Lewin (1967) tarafından tanımlanmıştır.

Σ sınıfına ait bazı fonksiyonlara örnek olarak

$$\frac{z}{1-z},\ -\log(1-z),\ \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

şeklinde verilebilir. Ancak meşhur Koebe fonksiyonu, Σ sınıfına ait değildir. Çünkü görüntü bölgesi $\mathbb{U}$ birim diskini içermez.

Ünivalent fonksiyonlarda olduğu gibi bi-ünivalent fonkasiyonların katsayıları ile ilgili özellikle $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için katsayı tahminleri yapılmıştır.

Lewin, Σ sınıfına ait fonksiyonları ikinci katsayısı için $|a_2| < 1.51$ eşitsizliğini göstermiştir. İlk zamanlar $f \in \Sigma$ fonksiyonlarına ait katsayı sınırının $|a_n| \leq 1(n \in \mathbb{N}/\{1\})$ olduğu düşünülüyordu. Sonrasında, Brannan ve Clunie (1979) $|a_2| \leq \sqrt{2}$ katsayı tahminini yapmıştır. Diğer taraftan Netanyahu (1969) $\max|a_2| = \frac{4}{3}$ olduğunu ispatlamıştır. 1981 yılında Styer ve Wright'in (1981) yapmış olduğu çalışmalarında $|a_2| > \frac{4}{3}$ eşitsizliğini sağlayan $f \in \Sigma$ fonksiyonların var olduğunu göstermişlerdir. Σ sınıfındaki fonksiyonlara ait $|a_2|$ katsayısı için yapılan en iyi tahmin, 1985 yılında Taha (1981) tarafından gösterilmiş olan $|a_2| \leq 1.485$ eşitsizliğidir.

Bi-ünivalent fonksiyonlara ait

$$|a_n|,\ \left(n \in \mathbb{N}/\{1,2\};\mathbb{N} = \{1,2,3...\}\right)$$

Taylor-Maclauren katsayıları için katsayı tahmini hala açık bir problem olarak durmaktadır.

3.6. Bi-ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları

Ünivalent fonksiyonlarda olduğu gibi bi-ünivalent fonksiyonların bazı önemli alt sınıfları bu kısımda ele alınacaktır. Son yıllarda bu alt fonksiyonlardan yola çıkarak Srivastava ve ark. (2010), Frasin ve Aouf (2011), Çağlar ve ark. (2013) gibi birçok araştırmacı yeni alt sınıflar oluşturmuşlardır.

3.6.1. Tanım (α-Mertebeden Güçlü Bi-Yıldızıl Fonksiyonların Sınıfı) $\mathcal{S}$ sınıfının α-mertebeden olan yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfına benzer olarak Brannan ve Taha (1986) tarafından Bi-ünivalent fonksiyonlar sınıfının bir altsınıfı olan α-**mertebeden güçlü bi-yıldızıl fonksiyonlar sınıfı** tanımlamıştır. Bu sınıf $\mathcal{S}_\Sigma^*[\alpha]$ olarak gösterilir. $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonun, $\mathcal{S}_\Sigma^*[\alpha]$ sınıfında olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

$$f \in \Sigma \text{ ve} \left|\arg\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z \in \mathbb{U};\ 0 < \alpha \leq 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(\frac{wg'(w)}{g(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w \in \mathbb{U};\ 0 < \alpha \leq 1).$$

Burada g fonksiyonu, f^{-1} fonksiyonun $\mathbb{U}$ birim diskine genişlemesidir.

3.6.2. Tanım (α**-Mertebeden Güçlü Bi-Konveks Fonksiyonlar Sınıfı)** $\mathcal{S}_{\Sigma}^{*}[\alpha]$ sınıfına benzer olarak bi-ünivalent fonksiyonların bir altsınıfı olan α**-mertebeden güçlü bi-konveks fonksiyonların sınıfı** da tanımlanmıştır. Bu sınıf $K_{\Sigma}[\alpha]$ olarak gösterilir. $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonun $K_{\Sigma}[\alpha]$ sınıfında olması için aşağıdaki koşulları sağlaması gerekmektedir:

$$f \in \Sigma \text{ ve } \left|\arg\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (z \in \mathbb{U};\ 0 < \alpha \leq 1)$$

ve

$$\left|\arg\left(1+\frac{wg''(w)}{g'(w)}\right)\right| < \frac{\alpha\pi}{2} \qquad (w \in \mathbb{U};\ 0 < \alpha \leq 1).$$

4. BÖLÜM

Bu bölümde, açık birim diskte bi-ünivalent fonksiyonların yeni bir altsınıfını Salagean operatörü yardımıyla tanımlayarak, bu altsınıfa ait fonksiyonlar için Taylor-

Maclaurin serisinin ikinci ve üçüncü katsayıları için üst sınırlar elde edeceğiz. Bu bölümde elde edilen sonuçlarla oluşturulan çalışma New Trends in Mathematics dergisinde kabul edilmiş olup basım aşamasındadır.

4.1. $N_{\Sigma}^{n,\mu}\left(\alpha,\lambda\right)$ Sınıfı

Son yıllarda Srivastava ve ark. (2010), Frasin ve Aouf (2011), Çağlar ve ark. (2013) bi-ünivalentlı fonksiyonların Σ sınıfının altsınıflarına ait fonksiynlar için $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı tahminleri geliştirmişlerdir.

Biz de bu kısımda Salagean Türev Operatörü kullanarak,aşağıda tanımını vereceğimiz Σ sınıfının yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırlarını oluşturacağız. Elde edilecek bu sonuçlar Σ sınıfının bir çok altsınıfı için elde edilen sonuçları genelleştirmiş olacaktır.

4.1.1. Tanım $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonları ele alalım. $0<\alpha\le 1$, $\lambda\ge 1,\mu\ge 0$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $z,w\in\mathbb{U}$ olmak üzere

$$f\in\Sigma\ ,\ \left|\arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (4.1.1)$$

ve

$$\left|\arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2} \qquad (4.1.2)$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $N_{\Sigma}^{n,\mu}\left(\alpha,\lambda\right)$ şeklinde tanımlayacağız. Burada $g(w)$ fonksiyonu $f(z)$ fonksiyonunun tersi olup

$$g(w)=f^{-1}(w)=w-a_2w^2+\left(2a_2-a_3\right)w^3-\left(5a_2^3-5a_2a_3+a_4\right)w^4+\dots\ .$$

şeklindedir.

4.2. $N_{\Sigma}^{n,\mu}\left(\alpha,\lambda\right)$ Sınıfının Bazı Katsayı Sınırları

Aşağıdaki teoremde, $N_{\Sigma}^{n,\mu}\left(\alpha,\lambda\right)$ sınıfınına ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarına ilişkin üst sınırları vereceğiz.

4.2.1. Teorem $0<\alpha\le 1$, $\lambda\ge 1$, $\mu\ge 0$, $n\in\mathbb{N}_0$ ve $z,w\in\mathbb{U}$ olmak üzere $N_{\Sigma}^{n,\mu}\left(\alpha,\lambda\right)$ sınıfına ait $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonları ele alalım. Bu durumda

$$|a_2|\le\frac{2\alpha}{\sqrt{2^{2n}\left((\mu+\lambda)^2-\alpha\left(\lambda(2+\lambda)+\mu\right)+2\alpha 3^n(\mu+2\lambda)\right)}} \qquad (4.2.1)$$

ve

$$|a_3| \le \frac{2\alpha}{3^n(\mu+2\lambda)} + \frac{4\alpha^2}{2^n(\mu+\lambda)^2} \tag{4.2.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (4.1.1) ve (4.1.2) ile verilen eşitsizlikler aşağıdaki verilen eşitliklere denk olacak şekilde yeniden yazılabilir:

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda \frac{D^{n+1} f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1} = \left[p(z)\right]^{\alpha} \tag{4.2.3}$$

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu} + \lambda \frac{D^{n+1} g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1} = \left[q(w)\right]^{\alpha}. \tag{4.2.4}$$

Burada $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları $\mathcal{P}$ sınıfında olup aşağıda verilen formlara sahiptir:

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + ... \tag{4.2.5}$$

ve

$$q(w) = 1 + q_1 w + q_2 w^2 + q_3 w^3 + ... \tag{4.2.6}$$

Şimdi, (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerindeki z ve z^2 değişkenlerine ait katsayılar arasında birebir eşleme yapılırsa

$$2^n(\mu+\lambda)a_2 = \alpha p_1 \tag{4.2.7}$$

$$2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)a_2^2 + 3^n(\mu+2\lambda)a_3 = \alpha p_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p_1^2 \tag{4.2.8}$$

$$-2^n(\mu+\lambda)a_2 = \alpha q_1 \tag{4.2.9}$$

ve

$$2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)a_2^2 + 3^n(\mu+2\lambda)(2a_2^2 - a_3) = \alpha q_2 + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}q_1^2 \tag{4.2.10}$$

bağıntıları elde edilir. (4.2.7) ve (4.2.9) bağıntılarından

$$p_1 = -q_1 \tag{4.2.11}$$

ve

$$2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2 a_2^2 = \alpha^2\left(p_1^2 + q_1^2\right) \tag{4.2.12}$$

eşitliklerini buluruz. Ayrıca (4.2.8), (4.2.10) ve (4.2.12) bağıntılarını kullanarak

$$\begin{aligned}\left[2^{2n}(\mu-1)(\mu+2\lambda) + 2.3^n(\mu+2\lambda)\right]a_2^2 &= \alpha(p_2+q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(p_1^2+q_1^2\right)\\ &= \alpha(p_2+q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2 a_2^2}{\alpha^2}\end{aligned}$$

eşitliğine sahip olunur. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$a_2^2 = \frac{\alpha^2 (p_2 + q_2)}{2^{2n}\left((\mu+\lambda)^2 - \alpha(\lambda(2+\lambda)+\mu)\right) + 2\alpha.3^n(\mu+2\lambda)}$$

(4.2.13)

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikteki p_2 ve q_2 katsayıları için 3.bölümde ifade edilen Caratheodory Yardımcı Önermesi uygulanırsa

$$a_2^2 \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{2^{2n}\left((\mu+\lambda)^2 - \alpha(\lambda(2+\lambda)+\mu)\right) + 2\alpha.3^n(\mu+2\lambda)}}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. $|a_2|$ katsayısı için elde edilen bu tahmin teoremde iddia edilen (4.2.1) eşitsizliği olup böylece istenilen katsayı eşitsizliği elde edilmiş olur.

Şimdi $|a_3|$ katsayısı için bir sınır elde etmeye çalışalım.(4.2.8) eşitliğinden (4.2.10) eşitliğini çıkartırsak

$$2.3^n(\mu+2\lambda)a_3 - 2.3^n(\mu+2\lambda)a_2^2 = \alpha(p_2 - q_2) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\left(p_1^2 - q_1^2\right),$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikten a_3 katsayısını yalnız bırakırsak

$$a_3 = \frac{\alpha(p_2 - q_2)}{2.3^n(\mu+2\lambda)} + \frac{\alpha^2\left(p_1^2 + q_1^2\right)}{2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2}$$

(4.2.14)

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.14) eşitliğindeki p_1, p_2 q_1 ve q_2 katsayılar için Caratheodory Yardımcı Önermesi uygulanırsa

$$|a_3| \leq \frac{2\alpha}{3^n(\mu+2\lambda)} + \frac{4\alpha^2}{2^n(\mu+\lambda)^2}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece 4.2.1 Teorem‘deki iddialar ispatlanmış olur.

■

4.3. $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta,\lambda)$ Sınıfı

Bu kısımda ,Σ sınıfının aşağıda tanımını vereceğimiz yeni bir alt sınıfını tanımlayarak, bu sınıfa ait $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayı sınırlarını oluşturacağız. Elde edilecek sonuçlar Σ sınıfının altsınıfına ait elde edilen bir çok sonucu genelleştirmiş olacaktır.

4.3.1. Tanım $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonları ele alalım. $0 \leq \beta < 1,\ \lambda \geq 1,\ \mu \geq 0,\ n \in \mathbb{N}_0$ ve $z, w \in \mathbb{U}$ olmak üzere

$$f \in \Sigma\ ,\ \operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu} + \lambda \frac{D^{n+1} f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\} > \beta \qquad (4.3.1)$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\}>\beta \qquad (4.3.2)$$

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyonlara $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta,\lambda)$ sınıfındadır denir. Burada $g(w)$ fonksiyonu $f(z)$ fonksiyonunun tersidir.

4.4. $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta,\lambda)$ Sınıfının Bazı Katsayı Sınırları

Aşağıdaki teoremde, $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta,\lambda)$ sınıfına ait fonksiyonların $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayılarına ilişkin üst sınırları vereceğiz.

4.4.1. Teorem $0\le\beta<1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0,\ n\in\mathbb{N}_0$ ve $z,w\in\mathbb{U}$ olmak üzere $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta,\lambda)$ sınıfına ait $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonları ele alalım. Bu durumda

$$|a_2|\le\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{2^{2n-1}\left((\mu-1)^2(\mu+2\lambda)+3^n(\mu+2\lambda)\right)}} \qquad (4.4.1)$$

ve

$$|a_3|\le\left(\frac{1-\beta}{2^n(\mu+\lambda)}\right)^2+\frac{2(1-\beta)}{3^n(\mu+2\lambda)} \qquad (4.4.2)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. (4.3.1) ve (4.3.2) ile verilen eşitsizlikler aşağıdaki verilen eşitliklere denk olacak şekilde yeniden yazılabilir:

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}=\beta+(1-\beta)p(z)$$

(4.4.3)

ve

$$(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}=\beta+(1-\beta)q(w) \qquad (4.4.4)$$

Burada $p(z)$ ve $q(w)$ fonksiyonları pozitif reel kısım fonksiyonların $\mathcal{P}$ sınıfında olup sırasıyla (4.2.5) ve (4.2.6) ile verilen formlara sahiptir. (4.4.3) ve (4.4.4) eşitliklerindeki z ve z^2 değişkenlerine ait katsayılar arasında birebir eşleme yapılırsa

$$2^n(\mu+\lambda)a_2=(1-\beta)p_1 \qquad (4.4.5)$$

$$2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)a_2^2+3^n(\mu+2\lambda)a_3=(1-\beta)p_2 \qquad (4.4.6)$$

$$-2^n(\mu+\lambda)a_2=(1-\beta)q_1 \qquad (4.4.7)$$

ve

$$2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)a_2^2+3^n(\mu+2\lambda)(2a_2^2-a_3)=(1-\beta)q_2 \qquad (4.4.8)$$

bağıntıları elde edilir. (4.4.5) ve (4.4.7) bağıntılarından

$$p_1 = -q_1 \tag{4.4.9}$$

ve

$$2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2 a_2^2 = (1-\beta)^2 \left(p_1^2 + q_1^2\right) \tag{4.4.10}$$

eşitliklerini buluruz. Ayrıca (4.4.6), (4.4.8) ve (4.4.10) bağıntılarını kullanarak

$$\left[2^{2n}(\mu-1)(\mu+2\lambda) + 2.3^n(\mu+2\lambda)\right] a_2^2 = (1-\beta)(p_2+q_2)$$

eşitliğini buluruz. Gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\left|a_2^2\right| \le \frac{(1-\beta)(|p_2|+|q_2|)}{2^n(\mu-1)(\mu+2\lambda)+2.3^n(\mu+2\lambda)}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikteki p_2 ve q_2 katsayıları için 3.bölümde ifade edilen Caratheodory Yardımcı Önermesi uygulanırsa

$$\left|a_2^2\right| \le \frac{2(1-\beta)}{2^{2n-1}(\mu-1)(\mu+2\lambda)+3^n(\mu+2\lambda)}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. $|a_2|$ katsayısı için elde edilen bu tahmin teoremde iddia edilen (4.4.1) eşitsizliği olup istenilen elde edilmiş olur.

Şimdi $|a_3|$ katsayısı için bir sınır elde edelim. (4.4.6) eşitliğinden (4.4.8) eşitliğini çıkartırsak

$$2.3^n(\mu+2\lambda)a_3 - 2.3^n(\mu+2\lambda)a_2^2 = (1-\beta)(p_2-q_2),$$

eşitliğini buluruz. Bu eşitlikten $|a_3|$ katsayısını yalnız bırakırsak

$$a_3 = \frac{(1-\beta)^2\left(p_1^2+q_1^2\right)}{2^{2n+1}(\mu+\lambda)^2} + \frac{(1-\beta)(p_2-q_2)}{2.3^n(\mu+2\lambda)} \tag{4.4.11}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.4.11) eşitliğindeki p_1, p_2 q_1 ve q_2 katsayılar için Caratheodory Yardımcı Önermesi uygulanırsa

$$|a_3| \le \left(\frac{1-\beta}{2^n(\mu+\lambda)}\right)^2 + \frac{2(1-\beta)}{3^n(\mu+2\lambda)}$$

eşitsizliğine ulaşırız. Böylece Teorem 4.4.1 in ispatı bitmiş olur.

■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmamızda, $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, olmak üzere

$$f\in\Sigma\ ,\ \left|\arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$(0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 1,\mu\ge 0,n\in\mathbb{N}_0 \text{ ve } z\in\mathbb{U})$$

ve

$$\left|\arg\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\}\right|<\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$(0<\alpha\le 1,\ \lambda\ge 1,\mu\ge 0,n\in\mathbb{N}_0 \text{ ve } w\in\mathbb{U})$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ sınıfı ve

$$f\in\Sigma\ ,\ \operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}f(z)}{z}\left(\frac{D^n f(z)}{z}\right)^{\mu-1}\right\}>\beta$$

$$(0\le\beta<1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0,n\in\mathbb{N}_0 \text{ ve } z\in\mathbb{U})$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{(1-\lambda)\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu}+\lambda\frac{D^{n+1}g(w)}{w}\left(\frac{D^n g(w)}{w}\right)^{\mu-1}\right\}>\beta$$

$$(0\le\beta<1,\ \lambda\ge 1,\ \mu\ge 0,n\in\mathbb{N}_0 \text{ ve } w\in\mathbb{U})$$

koşullarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu $N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta,\lambda)$ sınıflarını tanımlayarak, bu sınıfa ait fonksiyonların temel özelliklerini inceledik. Elde ettiğimiz bulgulardaki parametreler için bazı özel seçimler yapılırsa, daha önce çalışılmış olan önemli sınıflar ve onlara ait sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.2.1 ile elde ettiğimiz sonuçlar bir çok çalışmanın genellemesi niteliğinde olup bu sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Eğer Teorem 4.2.1 içinde $\mu=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.1. Sonuç $0<\alpha\leq 1,\ \lambda\geq 1$ ve $n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere $f(z)\in N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ eşitliğiyle verilsin. Bu durumda $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler bulunur:

$$a_2^2\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{2^{2n}\left((1+\lambda)^2-\alpha\left(\lambda(2+\lambda)+1\right)\right)+2\alpha.3^n(1+2\lambda)}}$$

ve

$$|a_3|\leq\frac{2\alpha}{3^n(1+2\lambda)}+\frac{4\alpha^2}{2^{2n}(1+\lambda)^2}.$$

5.1. Sonuçtan $n=0$ alınırsa Frasin ve Aouf (2011) çalışmasında elde edilen sonuçları daha da genelliştirir. Eğer 4.2.1. Teorem içinde $\lambda=\mu=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.2. Sonuç $0<\alpha\leq 1$ ve $n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere $f(z)\in N_{\Sigma}^{n,\mu}(\alpha,\lambda)$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ eşitliğiyle verilsin.Bu durumda $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler bulunur:

$$|a_2|\leq\frac{2\alpha}{\sqrt{2^{2n+2}(1-\alpha)+2\alpha.3^{n+1}}}$$

ve

$$|a_3|\leq\frac{2\alpha}{3^{n+1}}+\frac{\alpha^2}{2^{2n}}$$

5.2. sonuç taki elde edilen eşitsizlikler için $n=0$ alınırsa Srivastava ve ark.(2010) çalışmasında elde edilen sonuçları genelleştirir. Ayrıca 4.2.1. Teoremden $n=0$ alınarak elde edilen sonuçlar, Çağlar ve ark.(2013) çalışmasında bulunan sonuçlara indirgenir.

Bununla beraber, 4.2.1. Teorem ile elde ettiğimiz sonuçlar bir çok çalışmanın genellemesi niteliğinde olup bu sonuçlardan bazıları aşağıda verilmiştir. Eğer Teorem 4.4.1 içinde $\mu=1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3. Sonuç $0\leq\beta<1,\ \lambda\geq 1$ ve $n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ eşitliğiyle verilsin. Bu durumda $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler bulunur:

$$|a_2|\leq\sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3^n(1+2\lambda)}}$$

ve

$$|a_3|\leq\left(\frac{1-\beta}{2^{n-1}(1+\lambda)}\right)^2+\frac{2(1-\beta)}{3^n(1+2\lambda)}$$

5.3. Sonuçten $n = 0$ alınırsa Frasin ve Aouf (2011) çalışmasında elde edilen sonuçları daha da geliştirir. Eğer 4.2.1. Teorem içinde $\lambda = \mu = 1$ alınırsa aşğıdaki sonuç elde edilir.

5.4. Sonuç $0 \le \beta < 1$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $f(z) \in N_{\Sigma}^{n,\mu}(\beta, \lambda)$ fonksiyon $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ eşitliğiyle verilsin. Bu durumda $|a_2|$ ve $|a_3|$ katsayıları için aşağıdaki eşitsizlikler bulunur:

$$|a_2| \le \sqrt{\frac{2(1-\beta)}{3^{n+1}}}$$

ve

$$|a_3| \le \left(\frac{1-\beta}{2^n}\right)^2 + \frac{2(1-\beta)}{3^{n+1}}$$

Sonuç 5.4. te $n = 0$ alınırsa Srivastava ve ark. (2010) çalışmasında elde edilen sonuçları genelleştirir. Ayrıca 4.2.1. Teorem $n = 0$ alınarak elde edilen sonuçlar, Çağlar ve ark.(2013) çalışmasındaki sonuçlara indirgenir.

Yukarıda elde edilen sonuçlardan yola çıkarak, bu çalışmada elde edilen sonuçlar daha önceki bir çok çalışmanın genellemesi niteliğindedir.

KAYNAKLAR

Alexander J.W., 1915. Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions, Ann.of Math., 17, 12-22.

Bieberbach L., 1916. Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys-Math. Kl. pp. 940–955.

Branges L.de., 1985. A proof of the Bieberbach conjecture, Acta Mathematica 154 (1), 137-152.

Brannan D.A. ve Clunie J.G., 1979. Aspects of Contemporary Complex Analysis, (*Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at the University of Durham, Durham,* Academic Press), New York and London.

Brannan D. A. ve Kirwan, W. E., 1969. “On some classes of bounded univalent functions”, J. London Math. Soc., Vol. 1, No. 2, pp 431-443.

Brannan D.A. ve Taha T.S., 1986. On some classes of bi-univalent functions, pp.53-60.See also Studia Univ. Babeş-Bolyai Math. 31 (2) 70-77.

Çağlar M. Orhan H. Ve Yağmur N., 2013. Coefficient bounds for new subclasses of bi-univalent functions,Filomat 27(7) ,1165-1171.

Duren P L., 1983. Univalent Functions, Springer–Verlag, New York.

Frasin B.A. ve Aouf M.K., 2011. New subclasses of bi-univalent functions, Applied Mathematics Letters,24, 1569-1573.

Goodman A.W., 1983. Univalent Functions, Vols. I and II, Polygonal Publishing House, Washington, New Jersey.

Koebe P.,1907. Über die Uniformisierung beliebeger analytischer Kurven, Nach. Ges. Wiss. Gottingen 191-210.

Lewin M., 1967. On a coefficient problem for bi-univalent functions, Proc. Amer. Math. Soc. 18 ()63-68.

Lindelöf E., 1909. Mémoire sur certaines inegualités dans la théorie des fonctionsonogènes etsur quelques propriétes nouvelles de ces fonctions dans la voisinage d'un point singulier essentiel, Acta.Soc.Sci.Fenn., 35, 7, 1–35.

Littlewood J.E., 1925. On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math.Soc.23,481-519.

Netanyahu M.E., 1969. The minimal distance of the image boundary from the origin and the second coefficient of a univalent function in |z |< 1, Arch. Rational Mech. Anal. 32, 100-112.

Nevanlınna R., 1920-1921 *Über die Konforme Abbildung von Sterngebieten, Översiktav Finska Vetenskaps,* Societetens Förhandlingar, No. 6 **63** 1-21

Robertson M. S., 1936. On the theory of univalent functions, Ann. Math.,Vol. 37, pp 374-408.

Rogosinski W., 1943. On the coefficients of subordinate functions, Proc, London Math. Soc. 2, 48-82.

Salagean G.S.,1983. Subclasses of univalentfunctions, LectureNotes in MathSpringerVerlag 1013, 362-372

Srivastava H.M. Mishra A.K. and Gochhayat P., 2010. Certain subclasses of analytic and bi-univalent functions, Appl. Math. Lett. 23, 1188-1192.

Stankiewicz J., 1966. “Quelques problems extrémaux les classes des fonctions α- angulairement étoisées”, Ann. Univ. Marie Curie-Sfodowska,Sect. A, Vol. 20, pp 59-75.

Strohhacker E., 1933. Beitrage Zur Theorie der Schlichten Functionen, Math. Zeit., Vol. 37, pp 356-380.

Styer D. ve Wright D. J., 1981. Results on bi-univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 82, No. 2, 243-248.

Taha T.S., 1981. Topics in Univalent Function Theory, Ph.D. Thesis, University of London,

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	**:**	Veysi MEHMETOĞLU
Uyruğu	**:**	T.C
Doğum Yeri ve Tarihi	**:**	BATMAN 12.09.1987
Telefon	**:**	5427852120
Faks	**:**	
e-mail	**:**	mehmetogluv@gmail.com

EĞİTİM

Derece			**Bitirme Yılı**
Lise	:	Yahya Kemal Beyatlı, MERKEZ, BATMAN	2005
Üniversite	:	Sakarya Üniversitesi, SERDİVAN, SAKARYA	2011
Yüksek Lisans	:		
Doktora	:		

İŞ DENEYİMLERİ

Yıl	**Kurumu**	**Görevi**
2012	AFAD	Arama Kurtarma Ekibi

UZMANLIK ALANI

Kompleks Analiz, Geometrik Fonksiyonlar Teorisi

YABANCI DİLLER

İngilizce