

**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**BİJEKTİF ESNEK CÜMLELER VE KARAR VERME  
METOTLARI**

**Emirhan TOKTAŞ**

**Tez Danışmanı  
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ**

**Yozgat 2018**



**T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Yüksek Lisans Tezi**

**BİJEKTİF ESNEK CÜMLELER VE KARAR VERME  
METOTLARI**

**Emirhan TOKTAŞ**

**Tez Danışmanı  
Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ**

**Yozgat 2018**

T.C.  
BOZOK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEZ ONAYI

Enstitümüzün Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Programı 70111314007 numaralı öğrencisi Emirhan TOKTAŞ'ın hazırladığı “**Bijektif Esnek Cümleler ve Karar Verme Metotları**” başlıklı tezi ile ilgili tez savunma sınavı, Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri gereğince 09/05/2018 Çarşamba günü saat 12.00'da yapılmış, tezin onayına oy birliği ile karar verilmiştir.

**Başkan** : Doç. Dr. Murat BABAARSLAN

**Jüri Üyesi (Danışman)** : Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ

**Jüri Üyesi** : Dr. Öğr. Üyesi Emin AYGÜN

**ONAY:**

Bu tezin kabulü, Enstitü Yönetim Kurulu'nun 09/05/2018 tarih ve 19-1 sayılı Enstitü Yönetim Kurulu Kararı ile onaylanmıştır.

09/05/2018

  
Prof. Dr. Fuat KÖKSAL  
Müdür

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ÖZET .....iii

ABSTRACT .....iv

TEŞEKKÜR.....v

KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ.....vi

1. GİRİŞ.....1

2. TEMEL BİLGİLER.....3

2.1. Esnek Cümle ..... 3

2.2. Esnek Cümle İşlemleri..... 5

2.3. Esnek Matris ve İşlemleri ..... 10

2.4. İndirgenmiş Esnek Matris ve Çarpımları..... 13

3. BİJEKTİF ESNEK CÜMLELER VE BİJEKTİF ESNEK KARAR

SİSTEMİ .....16

3.1. Bijektif Esnek Cümle..... 16

3.2. Bijektif Esnek Cümle İşlemleri..... 17

3.3. Bijektif Esnek Cümleler Arasındaki Yoğunluk Analizi ..... 18

3.4. Bijektif Esnek Cümle Üzerine Temellenmiş Karar Verme ..... 20

4. BİJEKTİF ESNEK MATRİSLER VE ÇOKLU-BİJEKTİF DİLSEL ESNEK KARAR SİSTEMİ 23

4.1. Bijektif Esnek Matris ..... 23

4.2. Bijektif Esnek Matris İşlemleri..... 26

4.3. Bijektif Esnek Karar Sistemi ..... 28

4.3. Çoklu-Bijektif Dilsel Esnek Karar Sistemi..... 31

**SONUÇ.....39**

**KAYNAKLAR.....40**

**ÖZGEÇMİŞ.....43**



# BİJEKTİF ESNEK CÜMLELER VE KARAR VERME METOTLARI

**Emirhan TOKTAŞ**

**Bozok Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
Yüksek Lisans Tezi**

**2018; Sayfa: 43**

**Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ**

## ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci ve ikinci bölümde, bu çalışmayla ilgili literatür ve temel bilgiler sunulur. Üçüncü bölümde, bijektif esnek cümle ve işlemleri kapsamlı olarak incelenir. Ayrıca, bu işlemler kullanılarak inşa edilmiş bir bijektif esnek karar sistemi verilir.

Dördüncü bölümde, bijektif esnek cümlelerin matris gösterimi olan bijektif esnek matrisler tanımlanır. Bu matrislerin kısıtlanmış Ve çarpımı ve genişletilmiş Ve çarpımı gibi bazı işlemleri türetilir ve daha sonra onların özellikleri ve cebirsel yapıları araştırılır. Ayrıca esnek max-satır fonksiyonu ve bir esnek matrisin yoğunluk ölçüm fonksiyonu tanımlanır. Bu fonksiyonlar yardımıyla bijektif esnek matrisler üzerine temellenmiş bir bijektif esnek karar sistemi oluşturulur. Dilsel cümle kavramı verilir ve daha sonra dilsel-değerli fonksiyon tanımlanır. Son olarak, bu kavramlar kullanılarak çoklu- bijektif dilsel esnek karar sistemi oluşturulur ve onun bir uygulaması verilir.

**Anahtar Kelimeler:** Esnek cümle, Bijektif esnek cümle, Bijektif esnek matris ve işlemleri, Bijektif esnek karar sistemi, Çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi.

# **BIJECTIVE SOFT SETS AND THEIR DECISION MAKING METHODS**

**Emirhan TOKTAŞ**

**Bozok University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
Master of Science Thesis**

**2018; Page: 43**

**Thesis Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hürmet Fulya AKIZ**

## **ABSTRACT**

This thesis consists of four sections. In first and second sections, the literature and basic information about this work are presented. In third section, the bijective soft set and its operations are extensively reviewed. In addition, it is given a soft decision system created by employing these operations.

In fourth section, the bijective soft matrices which are matrix representations of the bijective soft sets are defined. Some operations such as restricted-And product and relaxed-And product of these matrices are derived, and then their related properties and algebraic structures are investigated. Also, it is introduced the soft max-row function and the density measurement function of a soft matrix. With these functions, a soft decision system based on the bijective soft matrices is created. The concept of linguistic set is given and then the linguistic-valued function is described. Lastly, using these concepts, a multi-bijective linguistic soft decision system is constructed and its application is given.

**Keywords:** Soft set, Bijective soft set, Bijective soft matrix and operations, Bijective soft decision system, Multi-bijective linguistic soft decision system.

## TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini esirgemeyen danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ'a saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Yine çalışmamda konu, kaynak ve yöntem açısından bana sürekli yardımda bulunarak yol gösteren ve her sorun yaşadığımda kendisine çekinmeden ulaşabildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen kıymetli hocam Arş. Gör. Hüseyin KAMACI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Teşekkürlerin yetersiz kalacağı başta Akın Osman ATAGÜN ve diğer üniversite hocalarımın bana 4 yıllık üniversite hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum. Beni bugünlere sevgi ve saygı kelimelerinin anlamlarını bilecek şekilde yetiştirerek getiren ve benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürler.

## KISALTMALAR VE SEMBOLLER LİSTESİ

|                      |                                                             |
|----------------------|-------------------------------------------------------------|
| $E$                  | : Parametrelerin cümlesi                                    |
| $U$                  | : Seçeneklerin cümlesi                                      |
| $\mathcal{P}(U)$     | : $U$ cümlesinin kuvvet cümlesi                             |
| $(F, X)$             | : $U$ üzerinde (bijektif) esnek cümle                       |
| $S(U)$               | : $U$ üzerindeki esnek cümlelerin cümlesi                   |
| $BS(U)$              | : $U$ üzerindeki bijektif esnek cümlelerin cümlesi          |
| $[x_{ij}]$           | : $(F, X)$ cümlesinin (bijektif) esnek matrisi              |
| $SM_{m \times n}$    | : $m \times n$ tipindeki esnek matrislerin cümlesi          |
| $BSM_{m \times n}$   | : $m \times n$ tipindeki bijektif esnek matrislerin cümlesi |
| $\wedge$             | : Esnek ‘ve’ işlemi                                         |
| $\bar{\wedge}$       | : Esnek ‘kısıtlanmış ve’ işlemi                             |
| $\tilde{\wedge}$     | : Esnek ‘genişletilmiş ve’ işlemi                           |
| $\wedge$             | : Esnek ‘genelleştirilmiş ve’ işlemi                        |
| $\vee$               | : Esnek ‘veya’ işlemi                                       |
| $\vee$               | : Esnek ‘genelleştirilmiş veya’ işlemi                      |
| $ x_{ij} _q$         | : $[x_{ij}]$ esnek matrisinin $q$ . sütunu                  |
| $\kappa_i([x_{ij}])$ | : $[x_{ij}]$ nin $i$ . satırındaki değerlerin toplamı       |
| $\cong$              | : Esnek alt-sütun                                           |
| $\cong$              | : Esnek eşit-sütun                                          |
| $\tau$               | : Bijektif esnek karar sistem yoğunluk oranı                |
| $M_s$                | : Esnek max-satır fonksiyonu                                |
| $d_f$                | : Yoğunluk ölçüm fonksiyonu                                 |
| $f_L$                | : $\mathcal{T}$ ye bağlı dilsel değerli fonksiyon           |
| $[\alpha]$           | : $\alpha$ nın tam değeri                                   |
| $\mathfrak{R}$       | : Çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistem yoğunluk oranı   |

- $\eta_r$  : Bijektif esnek matrisin  $r$ . sütun için negatif karar bileşeni etki oranı
- $\sigma_r$  : Bijektif esnek matrisin  $r$ . sütun için pozitif karar bileşeni etki oranı
- $\mathcal{P}_r$  : Bijektif esnek matrisin  $r$ . sütun için belirleyici etki etki oranı



## 1. GİRİŞ

Gündelik hayatta karşılaşılan belirsizlikleri tarif etmek ve bu belirsizliklerin üstesinden gelmek için bulanık cümle, kaba cümle, belirsiz cümle, aralık matematiği gibi birçok matematiksel yapı geliştirildi. Son yıllarda, belirsizlik içeren yapılarda bir çözüm elde etmek veya çözümün elde edilemediği durumlarda basite indirgemek için Rus matematikçi Molodtsov [1] tarafından esnek cümle teorisi önerildi. Bu cümle yapısında nesnelerin belirlenmesinde herhangi bir şartın bulunmaması bu cümlelerin kısa sürede birçok araştırmacının ilgisini çekmesini sağladı. Ayrıca oyun teorisi, karar verme, bilgi sistemleri ve olasılık gibi matematiksel yapıların kullanıldığı çeşitli alanlarda uygulanmasına olanak sundu. Örneğin, karar verme problemlerinin bulundurduğu belirsizliğin çeşidine göre birçok esnek karar verme metodu geliştirildi [2-11]. Ayrıca, [12] da tanımlanan dilsel değerli parametreler, seçeneklerden en uygun olanını veya seçeneklerin seçim sırasını belirlemeyi amaçlamış karar verme metodları ile uğraşan araştırmacıların dikkatini çekti. Dilsel değerli parametre cümleleri kullanılarak birçok karar verme metodu inşa edildi [13-18].

Maji ve ark. [19] esnek cümlelerin ikili tablo gösterimini verdi ve daha sonra Çağman ve Enginoğlu [20] bu yapıyı geliştirerek esnek matrisleri tanımladı. Ayrıca onlar aynı boyuttaki esnek matrislerin bazı işlemlerini sundu ve bu işlemleri kullanarak bir esnek karar verme metodu oluşturdu. [21] de esnek matrislerde toplama ve çıkarma işlemleri türetildi. Atagün ve ark. [22] farklı boyuttaki esnek matrisler için bazı esnek çarpımları genelleştirdi ve bu çarpımlar yardımıyla yeni bir karar metodu önerdi.

Bu çalışmada, [6] da tanımlanan bijektif esnek cümlelerin matris gösterimleri üzerine çalışılmıştır. Ayrıca, bijektif esnek cümleler için türetilen bazı işlemler yardımıyla elde edilen bijektif esnek karar verme sistemini geliştirerek birden fazla karar verici için kullanılabilecek bir çoklu-bijektif esnek karar sistemi oluşturulması amaçlanmıştır. Gong ve ark. [6] tarafından oluşturulan bijektif esnek karar sisteminde “yüksek satış” ve “düşük satış” gibi iki parametre kullanılmıştır. Bu çalışmada ise dilsel değerli cümle yardımıyla bu parametre sayı sınırlamasını ortadan kaldırılması hedeflenmiştir.

Bu amaçlar doğrultusunda, biyektif esnek matrisler ve bu matrislerin “*kısıtlanmış ve çarpım*” ve “*genişletilmiş ve çarpım*” gibi işlemleri tanımlanmıştır. Ayrıca bu işlemlerin temel özelliklerini araştırılmıştır. Daha sonra max-satır fonksiyonu, yoğunluk ölçüm fonksiyonu ve dilsel cümle yardımıyla dilsel değerli fonksiyon kavramları tanıtılmıştır. Son olarak bu kavramlar kullanılarak bir çoklu-biyektif dilsel esnek karar sistemi oluşturulmuştur.



## 2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde temel bilgi niteliğinde olan ve tezin diğer bölümlerinde sıkça kullanılan esnek cümle ve esnek matris kavramları verilecektir. Ayrıca bu kavramların bazı işlemleri ve özellikleri incelenecektir.

### 2.1. Esnek Cümle

Esnek cümle kavramı ilk kez 1999 yılında Molodtsov tarafından tanımlanmıştır. Molodtsov, tanım cümlesi parametreler ve değer cümlesi seçeneklerin kuvvet cümlesi olan bir fonksiyon ile oluşturduğu bu cümle yapısının belirsizlik içeren birçok alana katkı sağlayacağını ileri sürmüştür.

$U$  başlangıç evrensel cümlesi,  $E$  parametrelerin cümlesi,  $P(U)$  ise  $U$  başlangıç evrensel cümlesinin kuvvet cümlesi ve  $X \subseteq E$  olsun.

**Tanım 2.1.1.** ([1])  $U$  evrensel cümlesi üzerinde bir  $F_X = (F, X)$  esnek cümlesi,  $F: E \rightarrow P(U)$ ,  $e \notin X \Rightarrow F(e) = \emptyset$  olmak üzere,

$$F_X = \{(e, F(e)): e \in E, F(e) \in P(U)\}$$

sıralı ikililerinin cümlesidir. Burada  $F$  fonksiyonu  $F_X$  esnek cümlesinin yaklaşım fonksiyonu olarak adlandırılır.

**Gösterim:**  $U$  üzerinde tüm esnek cümlelerin cümlesi  $S(U)$  ile gösterilecektir.

**Örnek 2.1.1.** Kabul edelim ki bir şirket boş olan bir pozisyon için bir personel işe almayı planlıyor.  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$  bu iş için başvuran adayların cümlesi yani evrensel cümle olsun.  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  de bu adayların değerlendirilmesinde yararlanılacak parametrelerin cümlesi olsun. Burada  $e_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) parametreleri sırasıyla “tecrübeli”, “dış görünüş”, “genç”, “üniversite mezunu”, “sağlıklı” olsun.

Varsayalım ki şirketin müdürü parametrelerini  $X = \{e_1, e_3, e_4\}$  şeklinde seçerek, bu parametreler altında uygun adayları  $F(\text{tecrübeli}) = \{h_2, h_4\}$ ,  $F(\text{genç}) = U$ ,  $F(\text{üniversite mezunu}) = \{h_1, h_3, h_5\}$  olarak belirlesin. O halde, müdürün esnek cümlesi

$$F_X = \{(e_1, \{h_2, h_4\}), (e_3, U), (e_4, \{h_1, h_3, h_5\})\}$$

dir.

Varsayalım ki şirketin müdür yardımcısı parametrelerini  $Y = E$  şeklinde seçerek, bu parametreler altında uygun adayları  $G(\text{tecrübeli}) = \{h_2, h_4, h_5\}$ ,  $G(\text{dış görünüş}) = \{h_1, h_2, h_3, h_5\}$ ,  $G(\text{genç}) = U$ ,  $G(\text{üniversite mezunu}) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ,  $G(\text{sağlıklı}) = U$  olarak belirlesin. O halde, müdür yardımcısının esnek cümlesi

$$G_Y = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_5\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3, h_5\}), (e_3, U), (e_4, \{h_1, h_3, h_5\}), (e_5, U)\}$$

dir.

**Tanım 2.1.2.** ([23,24])  $F_X = (F, X) \in S(U)$  olsun. Eğer  $\forall e \in X$  için  $F(e) = \emptyset$  ise  $F_X$  esnek cümlesine *relatif boş (relative null) esnek cümle* denir ve  $\Phi_X$  ile gösterilir. Eğer  $X = E$  ise  $F_X$  esnek cümlesine *boş (null) esnek cümle* denir ve  $\Phi$  ile gösterilir.

**Tanım 2.1.3.** ([23,24])  $F_X = (F, X) \in S(U)$  olsun. Eğer  $\forall e \in X$  için  $F(e) = U$  ise  $F_X$  esnek cümlesine *relatif tam (relative whole) esnek cümle* denir ve  $\mathfrak{U}_X$  şeklinde gösterilir. Eğer  $X = E$  ise  $F_X$  esnek cümlesine *mutlak (absolute) esnek cümle* denir ve  $\mathfrak{U}$  ile gösterilir.

**Örnek 2.1.4.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  bir evrensel cümle ve  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  tüm parametrelerin cümlesi olsun.

Eğer  $X = \{e_1, e_3\}$  ve  $F(e_1) = \emptyset$ ,  $F(e_3) = \emptyset$  ise bu takdirde  $F_X$  esnek cümlesi bir *relatif boş esnek cümledir*, yani  $F_X = \Phi_X$  dir.

Eğer  $Y = E$  ve  $i = 1, 2, 3, 4$  için  $F(e_i) = \emptyset$  ise bu takdirde  $F_Y$  esnek cümlesi bir *boş esnek cümledir*, yani  $F_Y = \Phi$  dir.

Eğer  $Z = \{e_1, e_2\}$  ve  $F(e_1) = U$ ,  $F(e_2) = U$  ise bu takdirde  $F_Z$  esnek cümlesi bir *relatif tam esnek cümledir*, yani  $F_Z = \mathfrak{U}_Z$  dir.

Eğer  $W = E$  ve  $i = 1, 2, 3, 4$  için  $F(e_i) = U$  ise bu takdirde  $F_W$  esnek cümlesi bir *mutlak esnek cümledir*, yani  $F_W = \mathfrak{U}$  dur.

**Tanım 2.1.5.** ([25])  $F_X, G_Y \in S(U)$  olsun.

**a)** Eğer  $(F, X) = (\emptyset, \emptyset)$  veya  $X \subseteq Y$  ve  $\forall e \in X$  için  $F(e) \subseteq G(e)$  ise  $F_X$  esnek cümlesine  $G_Y$  esnek cümlesinin *esnek alt cümlesi* denir ve  $F_X \subseteq G_Y$  ile gösterilir.

**b)** Eğer  $F_X \subseteq G_Y$  ve  $G_Y \subseteq F_X$  ise bu esnek cümlelere eşit esnek cümle denir ve  $F_X = G_Y$  ile gösterilir.

## 2.2. Esnek Cümle İşlemleri

Klasik cümle teorisindeki birçok işlem esnek cümle teorisine aktarılmıştır. Fakat bu esnek işlemlerin klasik cümle işlemlerinden farklı özellikleri mevcuttur. Bu bölümde çeşitli esnek cümle işlemleri hatırlatılacaktır.

**Tanım 2.2.1.** ([23])  $F_X \in S(U)$  olsun.  $F_X$  esnek cümlesinin nispi tümleyeni (relative komplement)  $(F, X)^r = (F^r, X)$  şeklinde tanımlanır, burada  $F^r: X \rightarrow P(U)$  öyle ki  $\forall e \in X$  için  $F^r(e) = U \setminus F(e)$  dir.

**Tanım 2.2.2.** ([23,24])  $F_X, G_Y \in S(U)$  olsun.

a)  $Z = X \cup Y$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in X \setminus Y \\ G(e), & e \in Y \setminus X \\ F(e) \cup G(e), & e \in X \cap Y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z = (H, Z)$  esnek cümlesine,  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *genişletilmiş birleşimi* denir ve  $F_X \sqcup G_Y$  ile gösterilir.

b)  $X \cap Y = Z \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = F(e) \cup G(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z = (H, Z)$  esnek cümlesine  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *kısıtlanmış birleşimi* denir ve  $F_X \mathbb{U} G_Y$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.3.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  evrensel cümle,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  parametrelerin cümlesi olmak üzere  $X = \{e_1, e_3, e_4\}$  ve  $Y = \{e_1, e_2, e_3\}$  alalım. Ayrıca,  $F_X = \{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_3, \{h_2\}), (e_4, \emptyset)\}$  ve  $G_Y = \{(e_1, U), (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_3, \{h_3, h_4, h_5\})$  olsun.

$F_X \sqcup G_Y = H_Z$  alalım, burada  $\forall e \in Z = X \cup Y = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in X \setminus Y = \{e_4\} \\ G(e), & e \in Y \setminus X = \{e_2\} \\ F(e) \cup G(e), & e \in X \cap Y = \{e_1, e_3\} \end{cases}$$

dir. Bu durumda,

$$H(e_1) = F(e_1) \cup G(e_1) = \{h_1, h_3\} \cup U = U,$$

$$H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_2, h_3\},$$

$$H(e_3) = F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_2\} \cup \{h_3, h_4, h_5\} = \{h_2, h_3, h_4, h_5\},$$

$$H(e_4) = F(e_4) = \emptyset$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin genişletilmiş birleşimi

$$F_X \sqcup G_Y = H_{X \cup Y} = \{(e_1, U), (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \emptyset)\} \text{ dir.}$$

$F_X \sqcup G_Y = H_Z$  alalım, burada  $\forall e \in Z = X \cap Y = \{e_1, e_3\}$  için

$$H(e) = F(e) \cup G(e)$$

dir. Bu durumda,

$$H(e_1) = F(e_1) \cup G(e_1) = \{h_1, h_3\} \cup U = U,$$

$$H(e_3) = F(e_3) \cup G(e_3) = \{h_2\} \cup \{h_3, h_4, h_5\} = \{h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin kısıtlanmış birleşimi

$$F_X \sqcup G_Y = H_{X \cap Y} = \{(e_1, U), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\})\} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.2.4.** ([23,26, 27])  $F_X, G_Y \in S(U)$  olsun.

**a)**  $Z = X \cup Y$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in X \setminus Y \\ G(e), & e \in Y \setminus X \\ F(e) \cap G(e), & e \in X \cap Y \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z = (H, Z)$  esnek cümlesine  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *genişletilmiş kesişimi* denir ve  $F_X \sqcup G_Y$  ile gösterilir.

**b)**  $Z = X \cap Y \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = F(e) \cap G(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z = (H, Z)$  esnek cümlesine  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *kısıtlanmış kesişimi* denir ve  $F_X \sqcap G_Y$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.5.** Örnek 2.2.3 deki esnek cümleleri göz önüne alalım.

$F_X \sqcap G_Y = H_Z$  alalım, burada  $\forall e \in Z = X \cup Y = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  için

$$H(e) = \begin{cases} F(e), & e \in X \setminus Y = \{e_4\} \\ G(e), & e \in Y \setminus X = \{e_2\} \\ F(e) \cap G(e), & e \in X \cap Y = \{e_1, e_3\} \end{cases}$$

dir. Bu durumda,

$$H(e_1) = F(e_1) \cap G(e_1) = \{h_1, h_3\} \cap U = \{h_1, h_3\},$$

$$H(e_2) = G(e_2) = \{h_1, h_2, h_3\},$$

$$H(e_3) = F(e_3) \cap G(e_3) = \{h_2\} \cap \{h_3, h_4, h_5\} = \emptyset,$$

$$H(e_4) = F(e_4) = \emptyset$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin genişletilmiş kesişimi

$$F_X \sqcap G_Y = H_{X \cup Y} = \{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_2, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_3, \emptyset), (e_4, \emptyset)\} \text{ dir.}$$

$F_X \sqcap G_Y = H_Z$  alalım, burada  $\forall e \in Z = X \cap Y = \{e_1, e_3\}$  için

$$H(e) = F(e) \cap G(e)$$

dir. Bu durumda,

$$H(e_1) = F(e_1) \cap G(e_1) = \{h_1, h_3\} \cap U = \{h_1, h_3\},$$

$$H(e_3) = F(e_3) \cap G(e_3) = \{h_2\} \cap \{h_3, h_4, h_5\} = \emptyset$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin kısıtlanmış kesişimi

$$F_X \sqcap G_Y = H_{X \cap Y} = \{(e_1, \{h_1, h_3\}), (e_3, \emptyset)\} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.2.6.** ([23])  $F_X, G_Y \in S(U)$  olsun.  $Z = X \cap Y \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = F(e) \setminus G(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z = (H, Z)$  esnek cümlesine  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *kısıtlanmış farkı* denir ve  $F_X \sim_{\mathfrak{R}} G_Y$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.7.** ([28])  $F_X, G_Y \in S(U)$  olsun.  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *kısıtlanmış simetrik farkı*

$$F_X \tilde{\Delta} G_Y = (F_X \sqcup G_Y) \sim_{\mathfrak{R}} (F_X \sqcap G_Y)$$

şeklinde tanımlanan esnek cümledir.

**Örnek 2.2.8.** Örnek 2.2.3 deki esnek cümleleri göz önüne alalım.

$F_X \sim_{\mathfrak{R}} G_Y = H_Z$  alalım, burada  $\forall e \in Z = X \cap Y = \{e_1, e_3\}$  için

$$H(e) = F(e) \setminus G(e)$$

dir. Bu durumda,

$$H(e_1) = F(e_1) \setminus G(e_1) = \{h_1, h_3\} \setminus U = \emptyset,$$

$$H(e_3) = F(e_3) \setminus G(e_3) = \{h_2\} \setminus \{h_3, h_4, h_5\} = \{h_2\}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin kısıtlanmış farkı

$$F_X \sim_{\mathfrak{R}} G_Y = H_Z = \{(e_1, \emptyset), (e_3, \{h_2\})\} \text{ dir.}$$

Ayrıca,  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin kısıtlanmış simetrik farkı

$$F_X \tilde{\Delta} G_Y = (F_X \sqcup G_Y) \sim_{\mathfrak{R}} (F_X \sqcap G_Y) = \{(e_1, \{h_2, h_4, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_4, h_5\})\} \text{ dir.}$$

**Tanım 2.2.9.** ([24])  $F_X, G_Y \in S(U)$  olsun.

a)  $Z = X \times Y$  olmak üzere  $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (e_j, e_k) \in Z$  için

$$H(\alpha) = H(e_j, e_k) = F(e_j) \cap G(e_k)$$

şeklinde yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesine  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *esnek VE çarpımı* denir ve  $F_X \wedge G_Y$  ile gösterilir.

b)  $Z = X \times Y$  olmak üzere  $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (e_j, e_k) \in Z$  için

$$H(\alpha) = H(e_j, e_k) = F(e_j) \cup G(e_k)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesine,  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin *esnek VEYA çarpımı* denir ve  $F_X \vee G_Y$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.10.** Varsayalım ki  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$  satın almak için düşünülen evlerin cümlesi,  $E = \{u = ucuz, g = güzel, m = modern, b = bahçeli\}$  de bu evleri değerlendirmede kullanacağımız parametrelerin cümlesi olsun.  $X = \{u, g\}$  ve  $Y = \{g, m, b\}$  için sırasıyla  $F_X = \{(u, \{h_1, h_3\}), (g, \{h_2, h_4, h_5, h_6\})\}$  ve  $G_Y = \{(g, \{h_2, h_3, h_4\}), (m, \{h_1, h_4, h_6\}), (b, \{h_6\})\}$  iki esnek cümle olsun.

Bu durumda,  $X \times Y = \{(u, g), (u, m), (u, b), (g, g), (g, m), (g, b)\}$  olmak üzere  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin esnek  $\wedge$  çarpımı

$$F_X \wedge G_Y = \{((u, g), \{h_3\}), ((u, m), \{h_1\}), ((u, b), \emptyset), ((g, g), \{h_2, h_4\}), ((g, m), \{h_4, h_6\}), ((g, b), \{h_6\})\},$$

$F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin esnek  $\vee$  çarpımı

$$F_X \vee G_Y = \{((u, g), \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), ((u, m), \{h_1, h_3, h_4, h_6\}), ((u, b), \{h_1, h_3, h_6\}), ((g, g), \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}), ((g, m), \{h_1, h_2, h_4, h_5, h_6\}), ((g, b), \{h_2, h_4, h_5, h_6\})\}$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi bu işlemlerden bazılarının esnek cümlelerin boştan farklı bir ailesi için genelleştirmelerini verelim.

**Tanım 2.2.11.**  $([26,30])$   $(F_i, X_i)_{i \in I}$   $U$  üzerinde esnek cümlelerin boştan farklı bir ailesi olsun.

a) Bu ailenin *genişletilmiş birleşimi*  $Z = \bigcup_{i \in I} A_i$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = \bigcup_{i \in I} F_i(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesidir ve bu birleşim  $\bigsqcup_{i \in I} (F_i, X_i)$  ile gösterilir.

**b)** Bu ailenin *kısıtlanmış birleşimi*  $Z = \cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = \cup_{i \in I} F_i(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesidir ve bu birleşim  $\cup_{i \in I} (F_i, X_i)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.12.** ([26,29,30])  $(F_i, X_i)_{i \in I}$   $U$  üzerinde esnek cümlelerin boştan farklı bir ailesi olsun.

**a)** Bu ailenin *genişletilmiş kesişimi*  $Z = \cup_{i \in I} A_i$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = \cap_{i \in I} F_i(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesidir ve bu kesişim  $\cap_{i \in I} (F_i, X_i)$  ile gösterilir.

**b)** Bu ailenin *kısıtlanmış kesişimi*  $Z = \cap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$  olmak üzere  $\forall e \in Z$  için

$$H(e) = \cap_{i \in I} F_i(e)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesidir ve bu kesişim  $\cap_{i \in I} (F_i, X_i)$  ile gösterilir.

**Tanım 2.2.13.** ([26])  $(F_i, X_i)_{i \in I}$   $U$  üzerinde esnek cümlelerin boştan farklı bir ailesi olsun.

**a)** Bu ailenin *esnek VE çarpımı*  $Z = \prod_{i \in I} A_i$  olmak üzere  $\forall \alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in Z$  için

$$H(\alpha) = \cap_{i \in I} F_i(\alpha_i)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesidir ve bu çarpım  $\cap_{i \in I} (F_i, X_i)$  ile gösterilir.

**b)** Bu ailenin *esnek VEYA çarpımı*  $Z = \prod_{i \in I} A_i$  olmak üzere  $\forall \alpha = (\alpha_i)_{i \in I} \in Z$  için

$$H(\alpha) = \cup_{i \in I} F_i(\alpha_i)$$

şeklinde tanımlanan yaklaşım fonksiyonuna karşılık gelen  $H_Z$  esnek cümlesidir ve bu çarpım  $\cup_{i \in I} (F_i, X_i)$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.14.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  bir evrensel cümle,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$  parametrelerin cümlesi olmak üzere  $X_1 = \{e_1, e_4, e_5\}$ ,  $X_2 = \{e_1, e_4\}$  ve  $X_3 = \{e_1, e_4, e_6\}$  alınsın. Bu parametre cümlelerine göre  $U$  üzerindeki esnek cümleler sırasıyla aşağıdaki gibi verilsin.

$$(F_1, X_1) = \{(e_1, \{h_1, h_3, h_5\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_5, \{h_4, h_5\})\},$$

$$(F_2, X_2) = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_4, \{h_1, h_2, h_3\})\},$$

$$(F_3, X_3) = \{(e_1, \{h_3, h_5\}), (e_4, \{h_1, h_3, h_4\}), (e_6, U)\}.$$

Bu durumda,  $I = \{1, 2, 3\}$  için

$$\sqcup_{i \in I} (F_i, X_i) = \{(e_1, U), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (e_5, \{h_4, h_5\}), (e_6, U)\},$$

$$\wp_{i \in I} (F_i, X_i) = \{(e_1, U), (e_4, \{h_1, h_2, h_3, h_4\})\},$$

$$\prod_{i \in I} (F_i, X_i) = \{(e_1, \{h_3\}), (e_4, \{h_1, h_3\}), (e_5, \emptyset), (e_6, \emptyset)\},$$

$$\mathfrak{M}_{i \in I} (F_i, X_i) = \{(e_1, \{h_3\}), (e_4, \{h_1, h_3\})\},$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (F_i, X_i) = & \{((e_1, e_1, e_1), \{h_3\}), ((e_1, e_1, e_4), \{h_1, h_3\}), ((e_1, e_1, e_6), \{h_1, h_3\}), \\ & ((e_1, e_4, e_1), \{h_3\}), ((e_1, e_4, e_4), \{h_1, h_3\}), ((e_1, e_4, e_6), \{h_1, h_3\}), ((e_4, e_1, e_1), \{h_3\}), \\ & ((e_4, e_1, e_4), \{h_1, h_3, h_4\}), ((e_4, e_1, e_6), \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), ((e_4, e_4, e_1), \{h_3\}), \\ & ((e_4, e_4, e_4), \{h_1, h_3\}), ((e_4, e_4, e_6), \{h_1, h_2, h_3\}), ((e_5, e_1, e_1), \emptyset), ((e_5, e_1, e_4), \{h_4\}), \\ & ((e_5, e_1, e_6), \{h_4\}), ((e_5, e_4, e_1), \emptyset), ((e_5, e_4, e_4), \emptyset), ((e_5, e_4, e_6), \emptyset)\} \end{aligned}$$

dir.

### 2.3. Esnek Matris ve İşlemleri

Esnek matrisler, esnek cümleleri ifade etmenin farklı yöntemlerinden birisidir. Özellikle karmaşık yapıları anlamlandırmak için çok kullanışlı bir metottur. Bu bölümde esnek matrisler ve bu matrislerin bazı işlemleri verilecektir.

**Tanım 2.3.1.** ([20])  $F_X = (F, X) \in S(U)$  olsun. Bu durumda

$$R_X = \{(h_i, e_j) : e_j \in X, h_i \in F(e_j)\} \subseteq U \times E$$

cümlesine  $F_X = (F, X)$  esnek cümlesinin *bağıntı formu* denir.  $R_X$  bağıntı formunun karakteristik fonksiyonu

$$\chi_{R_X} : U \times E \rightarrow \{0, 1\}, \chi_{R_X}(h_i, e_j) = \begin{cases} 1, & (h_i, e_j) \in R_X \\ 0, & (h_i, e_j) \notin R_X \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.  $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  bir evrensel cümle (seçeneklerin cümlesi),  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  parametrelerin cümlesi ve  $X \subseteq E$  olmak üzere  $R_X$  aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir:

| $R_X$    | $e_1$                  | $e_2$                  | $\dots$  | $e_n$                  |
|----------|------------------------|------------------------|----------|------------------------|
| $h_1$    | $\chi_{R_X}(h_1, e_1)$ | $\chi_{R_X}(h_1, e_2)$ | $\dots$  | $\chi_{R_X}(h_1, e_n)$ |
| $h_2$    | $\chi_{R_X}(h_2, e_1)$ | $\chi_{R_X}(h_2, e_2)$ | $\dots$  | $\chi_{R_X}(h_2, e_n)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$               | $\vdots$               | $\ddots$ | $\vdots$               |
| $h_m$    | $\chi_{R_X}(h_m, e_1)$ | $\chi_{R_X}(h_m, e_2)$ | $\dots$  | $\chi_{R_X}(h_m, e_n)$ |

Bu durumda,  $x_{ij} = \chi_{R_X}(h_i, e_j)$  alınarak tanımlanan

$$[x_{ij}]_{m \times n} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

matrisine  $F_X = (F, X)$  esnek cümlesinin  $U$  üzerinde  $m \times n$  *esnek matrisi* denir. Bu tanımla, bir esnek cümle bir esnek matrise ve bir esnek matris de bir esnek cümleye dönüştürülebilir.

**Gösterim:**  $U$  üzerinde tüm  $m \times n$  esnek matrislerinin cümlesi  $SM_{m \times n}$  ile gösterilecektir.

**Örnek 2.3.2.** Kabul edelim ki  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  bir evrensel cümle,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$  parametrelerin cümlesi ve  $X = \{e_1, e_3, e_4, e_5, e_8\}$  olsun. Ayrıca, bu cümleler düşünülerek oluşturulan bir esnek cümle  $F_X = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_5\}), (e_3, \{h_2, h_3, h_5\}), (e_4, \{h_4\}), (e_5, \emptyset), (e_8, \{h_1, h_3, h_5\})\}$  olsun. Bu durumda, bu esnek cümleye karşılık gelen esnek matris

$$[x_{ij}]_{5 \times 9} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dir.

**Tanım 2.3.3.** ([20])  $[x_{ij}], [y_{ij}] \in SM_{m \times n}$  olsun. Bu durumda,

- a) Eğer  $\forall i, j$  için  $x_{ij} = 0$  ise  $[x_{ij}]$  esnek matrisine *sıfır esnek matris* denir ve  $[0]$  ile gösterilir.
- b) Eğer  $\forall i, j$  için  $x_{ij} = 1$  ise  $[x_{ij}]$  esnek matrisine *evrensel esnek matris* denir ve  $[1]$  ile gösterilir.
- c) Eğer  $\forall i, j$  için  $x_{ij} \leq y_{ij}$  ise  $[x_{ij}]$  esnek matrisine  $[y_{ij}]$  esnek matrisinin *esnek alt-matrisi* denir ve  $[x_{ij}] \preceq [y_{ij}]$  ile gösterilir.
- d) Eğer  $\forall i, j$  için  $x_{ij} \leq y_{ij}$  ve en az bir terim için  $x_{ij} < y_{ij}$  ise  $[x_{ij}]$  esnek matrisine  $[y_{ij}]$  matrisinin *esnek öz alt-matrisi* denir ve  $[x_{ij}] \preceq [y_{ij}]$  ile gösterilir.
- e) Eğer  $\forall i, j$  için  $x_{ij} = y_{ij}$  ise  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ij}]$  esnek matrislerine *eşit esnek matrisler* denir ve  $[x_{ij}] = [y_{ij}]$  ile gösterilir.

f)  $[x_{ij}], [y_{ij}] \in SM_{m \times n}$  olsun. Bu durumda  $[z_{ij}]$  esnek matrisine  $\forall i, j$  için  $z_{ij} = \max\{x_{ij}, y_{ik}\}$  ise  $[z_{ij}] \in SM_{m \times n}$  matrisine  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ij}]$  matrislerinin *esnek birleşimi* denir ve  $[x_{ij}] \tilde{\cup} [y_{ij}]$  ile gösterilir.

g)  $\forall i, j$  için  $z_{ij} = \min\{x_{ij}, y_{ij}\}$  ise  $[z_{ij}] \in SM_{m \times n}$  matrisine  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ij}]$  matrislerinin *esnek kesişimi* denir ve  $[x_{ij}] \tilde{\cap} [y_{ij}]$  ile gösterilir.

h)  $\forall i, j$  için  $z_{ij} = 1 - x_{ij}$  ise bu durumda  $[z_{ij}]$  esnek matrisi  $[x_{ij}]$  esnek matrisinin *tümleyeni* olarak isimlendirilir ve  $[z_{ij}] = [x_{ij}]^c$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 2.3.4.**  $U = \{h_1, h_2, h_3\}$  bir evrensel cümle ve  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  parametrelerin cümlesi olmak üzere  $X = \{e_1, e_2\}$  ve  $Y = \{e_1, e_2, e_4\}$  alalım. Bu cümleler göre oluşturulan  $F_X$  ve  $G_Y$  esnek cümlelerinin esnek matrisleri sırasıyla

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda

$$[x_{ij}] \tilde{\cup} [y_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, [x_{ij}] \tilde{\cap} [y_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve ayrıca}$$

$$[x_{ij}]^c = 1 - [x_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [y_{ij}]^c = 1 - [y_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 2.3.5.** ([20])  $[x_{ij}], [y_{ik}] \in SM_{m \times n}$  iki esnek matris olsun. Bu durumda,

a)  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  esnek matrislerinin *ve çarpımı*

$$\wedge: SM_{m \times n} \times SM_{m \times n} \rightarrow SM_{m \times n^2}, [x_{ij}] \wedge [y_{ik}] = [z_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır, burada  $z_{ip} = \min\{x_{ij}, y_{ik}\}$  öyle ki  $p = n(j - 1) + k$  dır.

b)  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  esnek matrislerinin *veya çarpımı*

$$\vee: SM_{m \times n} \times SM_{m \times n} \rightarrow SM_{m \times n^2}, [x_{ij}] \vee [y_{ik}] = [z_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır, burada  $z_{ip} = \max\{x_{ij}, y_{ik}\}$  öyle ki  $p = n(j - 1) + k$  dır.

**Örnek 2.3.6.** Kabul edelim ki  $[x_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  ve  $[y_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  olsun. Bu

durumda

$$[z_{ip}] = [x_{ij}] \wedge [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[z_{ip}] = [x_{ij}] \vee [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

#### 2.4. İndirgenmiş Esnek Matrisler ve Çarpımları

Esnek matrislerin boyutlarını minimize etmek özellikle yüksek boyutlu esnek matrislerin işlemlerini oldukça kolaylaştırmaktadır. Bu bölümde, bu amaç doğrultusunda tanımlanmış indirgenmiş esnek matris kavramı hatırlatılacaktır. Ayrıca bir önceki kısımda aynı tipteki esnek matrisler için verilen esnek çarpımların farklı tiplerdeki esnek matrisler için genelleştirmeleri verilecektir.

**Tanım 2.4.1.** ([22])  $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  evrensel cümle,  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  parametrelerin cümlesi,  $X \subseteq E$  ve  $n_1$  de  $X$  cümlesinin eleman sayısı ve  $F_X \in S(U)$  olsun.

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & e_j \in X \text{ ve } h_i \in F(e_j) \\ 0, & e_j \in X \text{ ve } h_i \notin F(e_j) \end{cases}$$

ise bu takdirde  $[x_{ij}]_{m \times n_1}$  matrisine  $U$  üzerindeki  $F_X$  esnek cümlesinin indirgenmiş esnek matrisi denir. Buradaki  $1 \leq n_1 \leq n$  dir.

Ayrıca  $U$  nun eleman sayısı  $m$ ,  $E$  nin eleman sayısı  $n$  ve  $X$  nın eleman sayısı  $n_1$  olsun.  $e_j \notin X$  iken  $F(e_j) = \emptyset$  olduğundan  $E \setminus X$  cümlesindeki bu parametreleri göz ardı ederek,  $F_X$  esnek cümlesine karşılık gelen esnek matrisi oluşturabiliriz. Ayrıca bu esnek matrisin tipi  $m \times n_1$  olur. Böylelikle daha küçük boyutta bir esnek matris elde etmiş oluruz.

**Örnek 2.4.2.** Örnek 2.3.2 de verilen  $F_X$  esnek cümlesini düşünelim. O halde bu esnek cümleye karşılık gelen indirgenmiş esnek matris

$$[x_{ij}]_{5 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Bir önceki bölümde tanımlanan aynı tipteki esnek matrislerin “ve” ve “veya” çarpımları indirgenmiş esnek matrisler için kullanılamaz. Bu kavramlar farklı tiplerde olan (indirgenmiş) esnek matrisler için genelleştirilmiştir. Şimdi bu genelleştirilmiş çarpımları tanıtalım.

**Tanım 2.4.3.** ([22])  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in SM_{m \times n_2}$  iki (indirgenmiş) esnek matris olsun. Bu durumda,

**a)**  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  matrislerinin *genelleştirilmiş VE çarpımı*

$$\wedge: SM_{m \times n_1} \times SM_{m \times n_2} \rightarrow SM_{m \times n_1 n_2}, [x_{ij}] \wedge [y_{ik}] = [z_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır, burada  $z_{ip} = \min\{x_{ij}, y_{ik}\}$  öyle ki  $j = \lambda$ ,  $p = (\lambda - 1)n_2 + k$  ve  $\lambda, p \leq \lambda n_2$  yi sağlayan en küçük pozitif tam sayı değeridir.

**b)**  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  matrislerinin *genelleştirilmiş VEYA çarpımı*

$$\vee: SM_{m \times n_1} \times SM_{m \times n_2} \rightarrow SM_{m \times n_1 n_2}, [x_{ij}] \vee [y_{ik}] = [z_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır, burada  $z_{ip} = \max\{x_{ij}, y_{ik}\}$  öyle ki  $j = \lambda$ ,  $p = (\lambda - 1)n_2 + k$  ve  $\lambda, p \leq \lambda n_2$  yi sağlayan en küçük pozitif tam sayı değeridir.

**Örnek 2.4.4.** Kabul edelim ki  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$  bir evrensel cümle,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$  parametrelerin cümlesi ve  $X = \{e_1, e_2, e_4, e_6\}$ ,  $Y = \{e_3, e_5, e_7\}$  olsun. Ayrıca,  $F_X = \{(e_1, \{h_1, h_2, h_3\}), (e_2, \{h_3, h_4, h_5\}), (e_4, \{h_4\}), (e_6, \emptyset)\}$  ve  $G_Y = \{(e_3, \{h_2, h_4\}), (e_5, \{h_2, h_5\}), (e_7, \{h_1, h_3, h_4\})\}$  alalım. Bu esnek cümlelerin indirgenmiş esnek matrisleri  $[x_{ij}] \in SM_{5 \times 4}$  ve  $[y_{ik}] \in SM_{5 \times 3}$  sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Bu iki indirgenmiş esnek matrisin *genelleştirilmiş ve* ve *genelleştirilmiş veya* çarpımları sırasıyla

$$[z_{ip}] = [x_{ij}] \wedge [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[z_{ip}] = [x_{ij}] \vee [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

**Teorem 2.4.7.** ([22])  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}, [y_{ik}] \in SM_{m \times n_2}, [z_{il}] \in SM_{m \times n_3}$  olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler sağlanır.

- i)  $([x_{ij}] \wedge [y_{ik}]) \wedge [z_{il}] = [x_{ij}] \wedge ([y_{ik}] \wedge [z_{il}])$
- ii)  $([x_{ij}] \vee [y_{ik}]) \vee [z_{il}] = [x_{ij}] \vee ([y_{ik}] \vee [z_{il}])$

**İspat.** Tanım 2.3.5. den ispat aşıkardır.

### 3. BİJEKTİF ESNEK CÜMLELER VE BİJEKTİF ESNEK KARAR SİSTEMİ

Esnek cümlelerin özel bir hali olan bijektif esnek cümle kavramı ilk kez 2010 yılında Gong ve ark. [6] tarafından ortaya atılmıştır. Aynı zamanda, onlar bu kavramdan yararlanarak bir bijektif esnek karar sistemi oluşturmuş ve bu sistem üzerine temellenmiş bir karar verme algoritması sunmuştur.

#### 3.1. Bijektif Esnek Cümle

Bu bölümde, bijektif esnek cümle kavramı tanımlanacak ve bu kavramla ilgili bazı teorik sonuçlar verilecektir.

**Tanım 3.1.1.** ([6])  $X$  boştan farklı bir cümle ve  $F, X$  den  $P(U)$  ya bir fonksiyon olmak üzere  $(F, X)$ ,  $U$  evrensel cümlesi üzerinde bir esnek cümle olsun. Eğer  $(F, X)$  esnek cümlesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu cümleye bijektif esnek cümle denir.

i)  $\cup_{e \in X} F(e) = U$

ii)  $e_i, e_j \in X$  ve  $e_i \neq e_j$  iken  $F(e_i) \cap F(e_j) = \emptyset$  dur.

**Gösterim:**  $U$  üzerindeki tüm bijektif esnek cümlelerin cümlesi  $BS(U)$  ile gösterilir.

**Örnek 3.1.2.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$  bir evrensel cümle,  $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  parametrelerin cümlesi olmak üzere  $(F, E)$ ,  $U$  üzerinde bir esnek cümle öyle ki  $F(e_1) = \{h_1, h_2, h_3\}$ ,  $F(e_2) = \{h_4, h_5, h_6\}$ ,  $F(e_3) = \{h_7\}$ ,  $F(e_4) = \{h_4, h_5, h_6, h_7\}$  olsun. Bu durumda, aynı  $F$  fonksiyonu altında  $X = \{e_1, e_2, e_3\}$  ve  $Y = \{e_1, e_4\}$  için sırasıyla  $(F, X)$  ve  $(F, Y)$  birer bijektif esnek cümle, fakat  $Z = \{e_1, e_3\}$  için  $(F, Z)$  bir bijektif esnek cümle değildir.

**Teorem 3.1.3.** ([6])  $(F, X)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  evrensel cümlesi üzerinde iki bijektif esnek cümle olsun. Bu durumda  $(H, Z) = (F, X) \wedge (G, Y)$  esnek cümlesi bir bijektif esnek cümledir.

**İspat:** Tanım 2.2.9 dan biliyoruz ki  $(H, X \times Y) = (F, X) \wedge (G, Y)$  öyle ki  $\forall(\alpha, \beta) \in X \times Y$  için  $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$  dir. Varsayalım ki  $e = (\alpha, \beta) \in X \times Y$   $(H, Z)$  nin bir parametresi olsun. Bu durumda,  $H(e) = F(\alpha) \cap G(\beta)$  olduğundan

$$\cup_{e \in X \times Y} H(e) = \cup_{\alpha \in X} \cup_{\beta \in Y} F(\alpha) \cap G(\beta) = \cup_{\alpha \in X} F(\alpha) \cap \cup_{\beta \in Y} G(\beta) = U$$

elde edilir. Kabul edelim ki  $e_i, e_j \in Z$  ve  $e_i \neq e_j$  olsun. Ayrıca  $e_i, a \in X$  ve  $b \in Y$  nin kartezyen çarpımı ve  $e_j, c \in X$  ve  $d \in Y$  nin kartezyen çarpımı olsun. Bu durumda,  $H(e_i) \cap H(e_j) = (F(a) \cap G(b)) \cap (F(c) \cap G(d)) = \emptyset$  dur. Dolayısıyla, buradan görülür ki  $(H, Z) = (F, X) \wedge (G, Y)$  bir bijektif esnek cümledir.

**Teorem 3.1.4.** ([6])  $(F, X), U$  evrensel cümlesi üzerinde bir bijektif esnek cümle ve  $(G, Y)$  bir boş esnek cümle olsun. Bu durumda  $(H, Z) = (F, X) \tilde{\cup} (G, Y)$  esnek cümlesi bir bijektif esnek cümledir.

**İspat:** Tanım 2.2.2 den

$$(H, Z) = (F, X) \tilde{\cup} (G, Y) = \begin{cases} F(e), & e \in X - Y \\ \emptyset, & e \in Y - X \\ F(e) \cup \emptyset, & e \in X \cap Y \end{cases}$$

yazabiliriz. Böylelikle açıktır ki  $(H, Z) = (F, X) \tilde{\cup} (G, Y)$  bir bijektif esnek cümledir.

### 3.2. Bijeaktif Esnek Cümle İşlemleri

Bu bölümde, bazı bijektif esnek cümle işlemleri tanıtılacak ve çeşitli özellikleri incelenecektir.

**Tanım 3.2.1.** ([6])  $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  bir evrensel cümle  $A, U$  nun bir esnek alt cümlesi ve  $(F, X), U$  üzerinde bir bijektif esnek cümle olsun.  $'(F, X)$  *kısıtlanmış*  $VE A'$  işlemi  $\cup_{e \in X} \{F(e) : F(e) \subseteq A\}$  şeklinde tanımlanır ve  $(F, X) \bar{\wedge} A$  ile gösterilir. Aynı zamanda, bu işlem bir esnek cümle ile bir cümlenin *kısıtlanmış*  $Ve$  *çarpımı* olarak da isimlendirilir.  $\{h_2,$

**Örnek 3.2.2.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$  bir evrensel cümle ve  $(F, X) = \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_2\}), (e_2, \{h_2, h_3\}), (e_3, \{h_4\})\}$   $U$  cümlesi üzerinde bir bijektif esnek cümle olsun. Ayrıca  $A = \{h_2, h_3\}$  alalım. Bu durumda  $(F, X)$  ve  $A$  nın *kısıtlanmış*  $Ve$  *çarpımı*  $(F, X) \bar{\wedge} A = \{h_2, h_3\}$  şeklinde elde edilir.

**Tanım 3.2.3.** ([6])  $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  bir esnek cümle  $A, U$  nun bir esnek alt cümlesi ve  $(F, X), U$  üzerinde bir bijektif esnek cümle olsun.  $'(F, X)$  *genişletilmiş*  $VE A'$  işlemi  $\cup_{e \in X} \{F(e) : F(e) \cap A \neq \emptyset\}$  şeklinde tanımlanır ve  $(F, X) \tilde{\wedge} A$  ile gösterilir. Aynı zamanda, bu işlem bir esnek cümle ile bir cümlenin *genişletilmiş*  $Ve$  *çarpımı* olarak da isimlendirilir.

**Örnek 3.2.4.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$  bir evrensel cümle ve  $(F, X) = \{(e_1, \{h_1\}), (e_2, \{h_2, h_3, h_4\})\}$ ,  $U$  cümlesi üzerinde bir bijektif esnek cümle olsun. Ayrıca  $A = \{h_2, h_3\}$  alalım. Bu durumda  $(F, X)$  ve  $A$  nın genişletilmiş *Ve çarpımı*  $(F, X) \tilde{\wedge} A = \{h_2, h_3, h_4\}$  şeklinde elde edilir.

### 3.3 Bijektif Esnek Cümleler Arasındaki Yoğunluk Analizi

Bu bölümde, ilk olarak bir bijektif esnek cümlelerin belirli bir bijektif esnek cümle üzerindeki yoğunluğu tanımlanacaktır. Ayrıca, bu yoğunluk kavramı üzerine temellenmiş bazı tanımlar verilecektir.

**Tanım 3.3.1.** ([6])  $(F, X)$  ve  $(G, Y)$ ,  $U$  evrensel cümlesi üzerinde iki bijektif esnek cümle olsun.  $X \cap Y = \emptyset$  olsun.  $|\cdot|$  bir cümlelerin eleman sayısını göstermek üzere,  $(F, X)$  nin  $(G, Y)$  üzerinde yoğunluk oranı  $\tau$  aşağıdaki gibi gösterilir ve tanımlanır:

$$\tau = \gamma((F, X); (G, Y)) = \left( \frac{|\cup_{y \in Y} ((F, X) \tilde{\wedge} G(y))|}{|U|} \right).$$

Burada  $0 \leq \tau \leq 1$  dir. Eğer;

$\tau = 1$  ise  $(F, X)$  bijektif esnek cümlesi  $(G, Y)$  bijektif esnek cümlesi üzerinde tam yoğunudur denir.

$\tau = 0$  ise  $(F, X)$  bijektif esnek cümlesinin  $(G, Y)$  bijektif esnek cümlesi üzerinde yoğun değildir denir.

**Örnek 3.3.2.**  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$  cümlesi mağazaların cümlesi olsun.  $E_1, E_2, E_3$  ve  $Y$  parametrelerin cümlesi ve ayrıca  $E = E_1 \times E_2 \times E_3$  olsun.  $E_1$  satış personelinin ürün pazarlama yeteneğinin,  $E_2$  mağazada satılan ürünlerin kalitesinin,  $E_3$  mağazanın bulunduğu bölgedeki yüksek trafik yoğunluğunun ve  $Y$  kar ve zarar durumunun parametre cümleleri olsun.

$E_1 = \{yüksek, orta, düşük\}$  için  $F_1(yüksek) = \{h_1, h_6\}$ ,  $F_1(orta) = \{h_2, h_3, h_5\}$  ve  $F_1(düşük) = \{h_4\}$  olmak üzere  $(F_1, E_1)$  bijektif esnek cümlesini,

$E_2 = \{iyi, normal\}$  için  $F_2(iyi) = \{h_1, h_2, h_3\}$  ve  $F_2(normal) = \{h_4, h_5, h_6\}$  olmak üzere  $(F_2, E_2)$  bijektif esnek cümlesini,

$E_3 = \{hayır, evet\}$  için  $F_3(evet) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$  ve  $F_3(hayır) = \{h_5, h_6\}$  olmak üzere  $(F_3, E_3)$  bijektif esnek cümlesini,

$Y = \{kar, zarar\}$  için  $G(kar) = \{h_1, h_3, h_6\}$  ve  $G(zarar) = \{h_2, h_4, h_5\}$  olmak üzere  $(G, Y)$  bijektif esnek cümlesini düşünelim. Bu durumda,

$$(F_1, E_1) \bar{\wedge} G(kar) = \{h_1, h_6\} \text{ ve } (F_1, E_1) \bar{\wedge} G(zarar) = \{h_4\}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla Tanım 3.4 den

$$\tau = \gamma((F_1, E_1); (G, Y)) = \left( \frac{|((F_1, E_1) \bar{\wedge} G(kar)) \cup ((F_1, E_1) \bar{\wedge} G(zarar))|}{|U|} \right) = \frac{1}{2}$$

dir. Yani  $(F_1, E_1)$  nin  $(G, Y)$  biyektif esnek cümlesi üzerinde yoğunluk oranı  $\frac{1}{2}$  dir.

Şu andan itibaren  $U$  evrensel cümlesi üzerinde ( $r$  tane) biyektif esnek cümle  $(F_i, E_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) ile gösterilecektir. Ayrıca, burada  $i, j = 1, 2, \dots, r$  ve  $i \neq j$  için  $E_i \cap E_j = \emptyset$  olmak üzere  $(F, E) = (F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2) \wedge \dots \wedge (F_r, E_r) = \bigwedge_{i=1}^r (F_i, E_i)$  dir.

**Tanım 3.3.3.** ([6])  $(G, Y)$ ,  $U$  evrenseli üzerinde bir biyektif esnek cümle öyle ki  $\forall i = 1, 2, 3, \dots, r$  için  $Y \cap E_i = \emptyset$  olsun. Bu durumda  $((F, E); (G, Y): U)$  üçlüsüne  $U$  evrensel cümlesi üzerinde bir biyektif esnek karar sistemi denir. Burada,  $(G, Y)$  cümlesi bir karar esnek cümlesi olarak isimlendirilir.

Örnek 3.3.2 de verilen biyektif esnek cümleler altında  $(\bigwedge_{i=1}^3 (F_i, E_i); (G, Y): U)$  biyektif esnek karar sistemini göz önüne alalım. Bu biyektif esnek karar sistemini verilen parametrelerin (kriterlerin), mağazaların kar veya zarar durumlarındaki etkisini belirtir.

**Tanım 3.3.4.** ([6])  $((F, E); (G, Y): U)$  bir biyektif esnek karar sistemi olsun.  $(F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2) \wedge \dots \wedge (F_r, E_r)$  nin  $(G, Y)$  biyektif esnek cümlesi üzerindeki yoğunluğuna  $((F, E); (G, Y): U)$  biyektif esnek karar sisteminin yoğunluğu denir ve bu yoğunluk oranı

$$\tau = \gamma((F, E); (G, Y))$$

şeklinde hesaplanır.

**Örnek 3.3.5.** Örnek 3.3.2 deki biyektif esnek cümleleri düşünelim. Kabul edelim ki  $(G, Y)$  bir karar esnek cümlesi olmak üzere  $(\bigwedge_{i=1}^3 (F_i, E_i); (G, Y): U)$  bir biyektif esnek karar sistemi olsun. Bu durumda,  $G(kar) = \{h_1, h_3, h_6\}$ ,  $G(zarar) = \{h_2, h_4, h_5\}$  ve  $(F, E) = (F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2) \wedge (F_3, E_3) = \{((yüksek, iyi, hayır), \{h_1\}), ((orta, iyi, hayır), \{h_2, h_3\}), ((düşük, normal, hayır), \{h_4\}), ((orta, normal, evet), \{h_5\}), ((yüksek, normal, evet), \{h_6\})\}$

olmak üzere  $(F, E) \bar{\wedge} G(kar) = \{h_1, h_6\}$  ve  $(F, E) \bar{\wedge} G(zarar) = \{h_4, h_5\}$  şeklinde elde edilir. O halde,

$$\tau = \gamma((F, E); (G, Y)) = \left( \frac{|((F, E) \bar{\wedge} G(kar)) \cup ((F, E) \bar{\wedge} G(zarar))|}{|U|} \right) = \frac{2}{3}$$

dür. Yani,  $(F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2) \wedge (F_3, E_3)$  nın  $(G, Y)$  biyektif esnek cümlesi üzerinde yoğunluk oranı  $\frac{2}{3}$  dür.

**Tanım 3.3.6.** ([6])  $((F, E); (G, Y): U)$  bir biyektif esnek karar sistemi ve  $\tau$ , bu sisteminin yoğunluk oranı olsun. Eğer  $l \in \Omega \subset \{1, 2, \dots, r\}$  için  $\gamma(\bigwedge_{l \in \Omega} (F_l, E_l); (G, Y)) = \tau$  ise bu takdirde  $(\bigwedge_{l \in \Omega} (F_l, E_l); (G, Y): U)$  sistemine indirgenmiş biyektif esnek karar sistemi denir. Ayrıca,  $(H, Z) = \bigwedge_{l \in \Omega} (F_l, E_l)$  bütün indirgenmiş biyektif esnek karar sistemlerinde mevcut ve  $\gamma((H, Z); (G, Y)) = \tau$  ise bu sistem maksimum indirgenmiş biyektif esnek karar sistemi olarak isimlendirilir.

**Örnek 3.3.7.** Örnek 3.3.2 ve 3.3.5 den  $(\bigwedge_{i=1}^3 (F_i, E_i); (G, Y): U)$  sisteminin bir biyektif esnek karar sistemi ve bu sistemin yoğunluk oranının  $\tau = \gamma((F, E); (G, Y)) = \frac{2}{3}$  olduğunu biliyoruz. Ayrıca,  $l \in \Omega = \{1, 2\}$  için  $\gamma((F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2); (G, Y)) = \frac{2}{3} = \tau$  elde edilir. Dolayısıyla söyleyebiliriz ki  $((F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2); (G, Y): U)$  sistemi bir indirgenmiş biyektif esnek karar sistemi ve aynı zamanda bir maksimum indirgenmiş biyektif esnek karar sistemidir.

**Tanım 3.3.8.** ([6])  $((F, E); (G, Y): U)$  bir biyektif esnek karar sistemi ve  $(\bigwedge_{l \in \Omega} (F_l, E_l); (G, Y): U)$  bir maksimum indirgenmiş biyektif esnek karar sistemi olsun. Ayrıca,  $(H, Z) = \bigwedge_{l \in \Omega} (F_l, E_l)$  alalım. Eğer bir  $e_i \in Z$  için  $H(e_i) \subseteq G(y)$  olacak şekilde bir  $y$  var ise bu takdirde  $e_i$  ye  $(H, Z)$  biyektif esnek cümlesi altında bir karar bileşeni denir ve  $|H(e_i)| / |G(y)|$  değeri  $e_i$  karar bileşeninin etki oranı olarak isimlendirilir.

### 3.4. Biyektif Esnek Cümle Üzerine Temellenmiş Karar Verme

Bu bölümde, çeşitli karar verme problemlerinin çözümünde kullanılabilen ve biyektif esnek karar sistem yoğunluğu kavramından yararlanılarak oluşturulmuş bir karar verme algoritması [6] tanıtılacak ve onun bir uygulaması sunulacaktır.

**Algoritma:**

**Adım 1.**  $(\bigwedge_{i=1}^r (F_i, E_i); (G, Y): U)$  bijektif esnek karar sistemini oluşturulur.

**Adım 2.**  $0 \leq j \leq 3$  için  $\bigwedge (F_j, E_j)$  ve  $(G, Y)$  arasındaki yoğunluğu hesaplanır.

**Adım 3.**  $(\bigwedge_{i=1}^r (F_i, E_i); (G, Y): U)$  bijektif esnek karar sisteminin yoğunluk oranını hesaplanır.

**Adım 4.** Eğer mümkünse  $(\bigwedge_{i=1}^r (F_i, E_i); (G, Y): U)$  bijektif esnek karar sistemi için bir maksimum indirgenmiş bijektif esnek karar sistemi bul ve yoğunluk oranını hesaplanır.

**Adım 5.** Bijektif esnek karar sisteminden veya varsa maksimum indirgenmiş bijektif esnek karar sisteminden yararlanarak karar bileşenlerini elde et ve etki oranlarını hesaplanır.

**Örnek 3.4.1.** Kabul edelim ki  $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}\}$  cümlesi satın almak için alternatif otomobillerin cümlesini gösterebilir.

$E_1, E_2, E_3$  ve  $Y$  parametrelerin cümlesi olmak üzere  $E = E_1 \times E_2 \times E_3$  olsun.  $E_1 = \{\text{çok yüksek, biraz yüksek, normal}\}$  otomobillerin fiyatının,  $E_2 = \{\text{iyi, kötü}\}$  otomobillerin güvenlik seviyesinin,  $E_3 = \{\text{hoş, sıradan}\}$  otomobillerin dış görünüşünün ve  $Y = \{\text{yüksek, düşük}\}$  otomobillerin satış oranının parametre cümleleri olsun.

**Adım 1.** Bijektif esnek cümleler sırasıyla  $(F_1, E_1) =$

$\{(\text{çok yüksek}, \{h_2, h_4, h_9\}), (\text{biraz yüksek}, \{h_3, h_5, h_8, h_{10}\}),$   
 $(\text{normal}, \{h_1, h_6, h_7, h_{11}, h_{12}\})\},$

$(F_2, E_2) = \{(\text{iyi}, \{h_1, h_2, h_3, h_7, h_8, h_{12}\}), (\text{kötü}, \{h_4, h_5, h_6, h_9, h_{10}, h_{11}\})\},$

$(F_3, E_3) = \{(\text{hoş}, \{h_1, h_3, h_8, h_{10}, h_{11}, h_{12}\}), (\text{sıradan}, \{h_2, h_4, h_5, h_6, h_7, h_9\})\}$

ve karar esnek cümlesi (aynı zamanda bir bijektif esnek cümledir)

$(G, Y) = \{(\text{yüksek}, \{h_1, h_3, h_6, h_7, h_8, h_{10}, h_{11}, h_{12}\}), (\text{düşük}, \{h_2, h_4, h_5, h_9\})\}$

şeklinde verilsin.

**Adım 2.**

$$\gamma((F_1, E_1); (G, Y)) = \frac{8}{12},$$

$$\gamma((F_2, E_2); (G, Y)) = 0$$

$$\gamma((F_3, E_3); (G, Y)) = \frac{6}{12}$$

$$\gamma((F_1, E_1) \wedge (F_3, E_3); (G, Y)) = 1$$

$$\gamma((F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2); (G, Y)) = \frac{10}{12}$$

$$\gamma((F_2, E_2) \wedge (F_3, E_3); (G, Y)) = \frac{6}{12}$$

**Adım 3.**  $\bigwedge_{i=1}^3 (F_i, E_i)$  nin  $(G, Y)$  üzerinde yoğunluk oranı

$$\tau = \gamma(\bigwedge_{i=1}^3 (F_i, E_i); (G, Y)) = 1$$

olarak bulunur.

Buradan  $\gamma((F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2); (G, Y)) = 1$  yani  $\tau = \gamma(\bigwedge_{i=1}^2 (F_i, E_i); (G, Y))$  olduğundan  $((F_1, E_1) \wedge (F_2, E_2); (G, Y): U)$  bir maksimum indirgenmiş bijektif karar sistemidir.

**Adım 4.**  $\gamma((F_1, E_1) \wedge (F_3, E_3); (G, Y)) = 1$  yani  $\tau = \gamma((F_1, E_1) \wedge (F_3, E_3); (G, Y))$  olduğundan  $((F_1, E_1) \wedge (F_3, E_3); (G, Y): U)$  bir maksimum indirgenmiş bijektif karar sistemidir.

**Adım 5.** Bu durumda,  $((F_1, E_1) \wedge (F_3, E_3); (G, Y): U)$  maksimum indirgenmiş bijektif karar sisteminden yararlanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir.

1. Otomobilin fiyatı normal ve dış görünüş hoş ise satış oranı  $\left(\frac{3}{8}\right)$  oranında yüksek beklenmektedir.
2. Otomobilin fiyatı normal ve dış görünüş sıradan ise satış oranı  $\left(\frac{2}{8}\right)$  oranında düşük beklenmektedir.
3. Otomobilin fiyatı çok yüksek ve dış görünüş sıradan ise satış oranı  $\left(\frac{3}{4}\right)$  oranında düşük beklenmektedir.
4. Otomobilin fiyatı biraz yüksek ve dış görünüş hoş ise satış oranı  $\left(\frac{3}{8}\right)$  oranında yüksek beklenmektedir.
5. Otomobilin fiyatı biraz yüksek ve dış görünüş sıradan ise eğer satış oranı  $\left(\frac{1}{4}\right)$  oranında düşük beklenmektedir.

## 4. BİJEKTİF ESNEK MATRİSLER VE ÇOKLU-BİJEKTİF DİLSEL ESNEK KARAR SİSTEMİ

Evrensel cümlelerin veya parametre cümlesinin eleman sayısı arttıkça esnek cümle işlemlerini uygulamak zorlaşır. Fakat [20] de esnek cümle işlemleri matrislere aktarıldığında bu zorlukların ortadan kalktığı belirtilir. Esnek cümlelere karşılık gelen matrisler bilgisayar ortamına kolaylıkla aktarılabilir olduğundan daha pratik ve kullanışlıdır. Bu sebepten, bu bölümde bijektif esnek cümlelerin matris yapıları oluşturulur ve bu matris yapıları üzerine bir dilsel esnek karar sistemi kurulur.

### 4.1. Bijektif Esnek Matris

Bu bölümde, bijektif esnek matris kavramını tanıtlacak ve bu kavramla ilgili bazı teorik sonuçlar verilecektir.

**Gösterim:**  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n}$  bir esnek matris olsun.  $[x_{ij}]$  nin  $i$ . satırındaki değerlerin toplamı  $\kappa_i([x_{ij}])$  şeklinde gösterilecektir.

**Lemma 4.1.1.**  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in SM_{m \times n_2}$  iki esnek matris olsun. Bu durumda  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  için  $\min \{x_{ij}, y_{ik}\} = x_{ij} \cdot y_{ik}$  dir.

**İspat:**  $x_{ij}$  ve  $y_{ik}$  esnek matrisinin bileşenleri 0 ve 1 sayılarından olduğundan ispat açıktır.

**Teorem 4.1.2.**  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in SM_{m \times n_2}$  iki esnek matris olsun. Eğer  $[x_{ij}] \wedge [y_{ik}] = [z_{ip}]$  ise bu takdirde  $\kappa_i([x_{ij}]) \cdot \kappa_i([y_{ik}]) = \kappa_i([z_{ip}])$  dir.

**İspat:**  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in SM_{m \times n_2}$  iki esnek matris ve  $[x_{ij}] \wedge [y_{ik}] = [z_{ip}]$  olsun. Bu durumda,  $i = 1$  için

$$\begin{aligned} \kappa_1([z_{ip}]) &= \sum_{p=1}^{n_1 n_2} z_{1p} = z_{11} + z_{12} + \dots + z_{1(n_1 n_2)} \\ &= \min\{x_{11}, y_{11}\} + \min\{x_{11}, y_{12}\} + \dots + \min\{x_{11}, y_{1n_2}\} + \min\{x_{12}, y_{11}\} \\ &\quad + \min\{x_{12}, y_{12}\} + \dots + \min\{x_{12}, y_{1n_2}\} + \dots + \min\{x_{1n_1}, y_{11}\} \\ &\quad + \min\{x_{1n_1}, y_{12}\} + \dots + \min\{x_{1n_1}, y_{1n_2}\} \\ &= x_{11} \cdot y_{11} + x_{11} \cdot y_{12} + \dots + x_{11} \cdot y_{1n_2} + x_{12} \cdot y_{11} + x_{12} \cdot y_{12} + \dots \\ &\quad + x_{11} \cdot y_{1n_2} + \dots + x_{1n_1} \cdot y_{11} + x_{1n_1} \cdot y_{12} + \dots + x_{1n_1} \cdot y_{1n_2} \\ &= x_{11}(y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n_2}) + x_{12}(y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n_2}) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + x_{1n_1}(y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n_2}) \\
& = (x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n_1})(y_{11} + y_{12} + \dots + y_{1n_2}) \\
& = \sum_{j=1}^{n_1} x_{1j} \sum_{k=1}^{n_2} y_{1k} \\
& = \kappa_1([x_{ij}]) \cdot \kappa_1([y_{ik}])
\end{aligned}$$

dir.  $i = 2, \dots, m$  için  $\kappa_i([z_{ip}]) = \kappa_i([x_{ij}]) \cdot \kappa_i([y_{ik}])$  eşitliği benzer şekilde gösterilebilir. Böylelikle ispat tamamlanır.

**Tanım 4.1.3.**  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$  bir esnek matris olsun. Eğer  $\forall i \in 1, 2, \dots, m$  için

$$\kappa_i([x_{ij}]) = \sum_{j=1}^{n_1} x_{ij} = 1$$

ise  $[x_{ij}]_{m \times n}$  esnek matrisine bir biyektif esnek matris denir.

**Örnek 4.1.4.** Varsayalım ki

$$[x_{ij}]_{4 \times 5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bir esnek matris olsun. Bu durumda  $\kappa_1([x_{ij}]) = \kappa_2([x_{ij}]) = \kappa_3([x_{ij}]) = \kappa_4([x_{ij}]) = 1$  olduğundan  $[x_{ij}]_{4 \times 5}$  bir biyektif esnek matristir.

**Gösterim:**  $BSM(U)$ ,  $BS(U)$  daki biyektif esnek cümlelere karşılık gelen biyektif esnek matrislerin cümlesini gösterir.

**Gösterim:**  $(F, X)$  esnek cümlesine karşılık gelen esnek matris  $[F, X]$  şeklinde gösterilecektir.

**Teorem 4.1.5.**  $(F, X)$ ,  $U$  üzerindeki biyektif esnek cümledir  $\Leftrightarrow [F, X]$  bir biyektif esnek matristir.

**İspat:** Varsayalım ki  $[F, X] = [x_{ij}]_{m \times n}$  bir esnek matris olsun. Tanım 2.3.1. ve Tanım 2.4.1 den  $x_{ij} = 1 \Leftrightarrow h_i \in f(e_j)$  dir. Tanım 4.1.3 den,  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  için  $\kappa_i([x_{ij}]) = 1 \Leftrightarrow h_i \in f(e_j)$  ve  $j \neq k$  için  $h_i \notin f(e_k)$  dir. Diğer taraftan, görülür ki  $\forall i = 1, 2, \dots, m$  için  $\kappa_i([x_{ij}]) = 1 \Leftrightarrow$  her bir  $h_i \in U$  için  $\exists e_j \in X$  öyle ki  $h_i \in f(e_j) \Leftrightarrow \cup_{e_j \in X} f(e_j) = U$  dur. Böylelikle Tanım 3.1.1 ve 4.1.3 den ispat aşıkardır.

**Teorem 4.1.6.**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n}$  bir biyektif esnek matris ve  $[0], [1] \in SM_{m \times n}$  olsun.

i)  $[x_{ij}] \tilde{\sim} [1]$  bir bijektif esnek matristir.

ii)  $[x_{ij}] \tilde{\sim} [0]$  bir bijektif esnek matristir.

**İspat:** Tanım 2.3.3. den ispat aşıkardır.

**Teorem 4.1.7.**  $[x_{ij}] \in SM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in SM_{m \times n_2}$  bijektif iki esnek matris olsun. Bu durumda,  $[x_{ij}] \wedge [y_{ik}]$  bir bijektif esnek matristir.

**İspat:** Teorem 4.1.2 den ispat kolaylıkla görülür.

**Lemma 4.1.8.**  $U = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$  bir evrensel cümle olsun. Bu durumda,  $[x_{ij}] \in BSM(U)$  için  $[x_{ij}] \wedge [1]_{m \times 1} = [1]_{m \times 1} \wedge [x_{ij}] = [x_{ij}]$  dir.

**Teorem 4.1.9.** Ve çarpım işlemine göre,  $BSM(U)$  bir monoiddir.

**İspat:** Teorem 2.4.7 ve 4.1.7 den  $(BSM(U), \wedge)$  bir yarıgruptur. O halde, Lemma 4.1.8 den görülür ki  $(BSM(U), \wedge)$  bir monoiddir.

Esnek çarpım işlemlerine giriş yapmadan önce bijektif esnek matrislerin sütunlarını kullanarak matrislerin karşılaştırılmasına olanak sağlayacak bazı yeni tanımlar verelim.

**Gösterim:**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n}$  bir bijektif esnek matris olsun.  $[x_{ij}]$  matrisinin  $q$ . sütunu  $|x_{ij}|_q$  şeklinde gösterilecektir. Burada  $(1 \leq q \leq j)$  dir.

**Tanım 4.1.10.**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in BSM_{m \times n_2}$  bijektif esnek matrisler olsun.

a)  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve herhangi bir  $1 \leq q \leq n_1, 1 \leq r \leq n_2$  için  $|x_{ij}|_q \leq |y_{ik}|_r$  ise  $|x_{ij}|_q$  ye  $|y_{ik}|_r$  nin bir alt-sütunu denir ve  $|x_{ij}|_q \lesssim |y_{ik}|_r$  şeklinde gösterilir. Her bir  $1 \leq q \leq n_1$  için  $|x_{ij}|_q \leq |y_{ik}|_r$  olacak şekilde  $\exists r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$  ise  $[x_{ij}]$  ye  $[y_{ik}]$  nin bir bijektif esnek alt-sütun matrisi denir ve  $[x_{ij}] \preceq [y_{ik}]$  şeklinde gösterilir.

b)  $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$  ve herhangi bir  $1 \leq q \leq n_1, 1 \leq r \leq n_2$  için  $x_{iq} = y_{ik}$  ise  $|x_{ij}|_q$  ye  $|y_{ik}|_r$  nin eşit-sütunu denir ve  $|x_{ij}|_q = |y_{ik}|_r$  şeklinde gösterilir. Her bir  $1 \leq q \leq n_1$  için  $|x_{ij}|_q = |y_{ik}|_r$  olacak şekilde  $\exists r \in \{1, 2, \dots, n_2\}$  ise  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  ye bijektif esnek eşit-sütun matrisler denir ve  $[x_{ij}] \cong [y_{ik}]$  şeklinde gösterilir.

**Örnek 4.1.11.** i) Varsayalım ki

$$[x_{ij}]_{5 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{ik}]_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bijektif esnek matrisleri verilsin. Bu durumda, kolaylıkla görülür ki  $|x_{ij}|_1 < |y_{ik}|_1$ ,  $|x_{ij}|_2 < |y_{ik}|_1$  ve  $|x_{ij}|_3 = |y_{ik}|_2$  dir. Bu durumda,  $[x_{ij}]$  matrisi  $[y_{ik}]$  matrisinin bijektif esnek alt-sütun matrisidir.

ii) Varsayalım ki

$$[x_{ij}]_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{ik}]_{5 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

bijektif esnek matrisleri verilsin. Bu durumda,  $|x_{ij}|_1 = |y_{ik}|_2$ ,  $|x_{ij}|_2 = |y_{ik}|_1$  olduğundan  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  matrislerine bijektif esnek eşit-sütun matrisler denir.

## 4.2. Bijektif Esnek Matris İşlemleri

Bu bölümde, bijektif esnek matrislerin kısıtlanmış Ve ve genişletilmiş Ve çarpımları tanımlanacaktır.

**Tanım 4.2.1.**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in BSM_{m \times n_2}$  iki bijektif esnek matris olsun.

Bu durumda,  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  matrislerinin *kısıtlanmış Ve* çarpımı ( $\bar{\lambda}$ )

$$\bar{\lambda} : BSM_{m \times n_1} \times BSM_{m \times n_2} \rightarrow SM_{m \times n_1 n_2}, [x_{ij}] \bar{\lambda} [y_{ik}] = [z_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,  $[z_{ip}]$  esnek matrisinin  $r$ . sütunu

$$|z_{ip}|_r = \begin{cases} |x_{ij}|_s; & |x_{ij}|_s \leq |y_{ik}|_t \\ |0|; & |x_{ij}|_s \not\leq |y_{ik}|_t \end{cases} \text{ öyle ki } \lambda, r \leq \lambda n_2 \text{ şartını sağlayan en küçük pozitif}$$

tam sayı olmak üzere  $s = \lambda$ ,  $t = r - (\lambda - 1) n_2$  dir.

**Tanım 4.2.2.**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  ve  $[y_{ik}] \in BSM_{m \times n_2}$  iki bijektif esnek matris olsun.

Bu durumda  $[x_{ij}]$  ve  $[y_{ik}]$  matrislerinin *genişletilmiş Ve* çarpımı ( $\tilde{\lambda}$ )

$$\tilde{\lambda} : BSM_{m \times n_1} \times BSM_{m \times n_2} \rightarrow SM_{m \times n_1 n_2}, [x_{ij}] \tilde{\lambda} [y_{ik}] = [z_{ip}]$$

şeklinde tanımlanır. Burada,  $[z_{ip}]$  esnek matrisinin  $r$ . sütunu

$$|z_{ip}|_r = \begin{cases} |0|; |x_{ij}|_s \leq (|y_{ik}|_t)^c \\ |x_{ij}|_s; |x_{ij}|_s \not\leq (|y_{ik}|_t)^c \end{cases} \text{ öyle ki } \lambda, r \leq \lambda n_2 \text{ şartını sağlayan en küçük}$$

pozitif tam sayı olmak üzere  $s = \lambda$ ,  $t = r - (\lambda - 1) n_2$  dir.

**Örnek 4.2.3.** Varsayalım ki

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda, bu biyektif esnek matrislerin kısıtlanmış Ve çarpımı ve genişletilmiş Ve çarpımı sırasıyla

$$[z_{ip}] = [x_{ij}] \bar{\wedge} [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$[v_{ip}] = [x_{ij}] \tilde{\wedge} [y_{ik}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Burada elde edilen  $[z_{ip}]$  ve  $[v_{ip}]$  matrislerinin tipi  $4 \times 6$  dir.

**Önerme 4.2.4.**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  bir biyektif esnek matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşitlikler sağlanır.

- i)  $[x_{ij}] \bar{\wedge} [1]_{m \times 1} = [x_{ij}]$ .
- ii)  $[x_{ij}] \tilde{\wedge} [1]_{m \times 1} = [x_{ij}]$ .
- iii)  $[x_{ij}] \bar{\wedge} [x_{ij}] = [x_{ij}] \tilde{\wedge} [x_{ij}]$ .
- iv)  $[x_{ij}] \bar{\wedge} [x_{ij}]^c = [x_{ij}] \tilde{\wedge} [x_{ij}]^c$ .

**İspat: i)**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  ve  $[z_{ip}] = [x_{ij}] \bar{\wedge} [1]_{m \times 1}$  olsun.  $\forall s \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|x_{ij}|_s \leq 1$  olduğundan Tanım 4.2.1 den  $|z_{ip}|_r = |x_{ij}|_s$  elde edilir. Ayrıca  $n_2 = 1$  ve  $t = 1$  olduğundan  $r = s$  dir. Dolayısıyla  $\forall r \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|z_{ip}|_r = |x_{ij}|_r$  olduğundan  $[z_{ip}] = [x_{ij}]$  elde edilir.

**ii)**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  ve  $[z_{ip}] = [x_{ij}] \bar{\wedge} [1]_{m \times 1}$  olsun. Bu durumda Tanım 4.2.2 den

$|z_{ip}|_r = \begin{cases} |0|; & |x_{ij}|_s = |0| \\ |x_{ij}|_s; & |x_{ij}|_s \neq |0| \end{cases}$  yazılır, böylelikle  $|z_{ip}|_r = |x_{ij}|_s$  elde edilir. Ayrıca

$n_2 = 1$  ve  $t = 1$  olduğundan  $r = s$  dir. Dolayısıyla  $\forall r \in \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|z_{ip}|_r = |x_{ij}|_r$  olduğundan  $[z_{ip}] = [x_{ij}]$  elde edilir.

**iii)**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  bir bijektif esnek matris ve  $[z_{ip}] = [x_{ij}] \bar{\lambda} [x_{ij}]$  ve  $[v_{ip}] = [x_{ij}] \tilde{\lambda} [x_{ij}]$  olsun.  $\forall s, t = \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|x_{ij}|_s \leq |x_{ij}|_t$  ise bu takdirde  $[x_{ij}]$  bijektif esnek matris olduğundan  $|x_{ij}|_s \leq (|x_{ij}|_t)^c$  dir. Dolayısıyla

$$|z_{ip}|_r = |v_{iq}|_r = |x_{ij}|_s \quad (4.1)$$

dir. Ayrıca  $\forall s, t = \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|x_{ij}|_s \not\leq |x_{ij}|_t$  ise bu takdirde  $|x_{ij}|$  bijektif esnek matris olduğundan  $|x_{ij}|_s \leq (|x_{ij}|_t)^c$  dir. Dolayısıyla

$$|z_{ip}|_r = |v_{iq}|_r = |0| \quad (4.2)$$

dir. O halde (4.1) ve (4.2) den  $[x_{ij}] \bar{\lambda} [x_{ij}] = [x_{ij}] \tilde{\lambda} [x_{ij}]$  elde edilir.

**iv)**  $[x_{ij}] \in BSM_{m \times n_1}$  bir bijektif esnek matris ve  $[z_{ip}] = [x_{ij}] \bar{\lambda} ([x_{ij}])^c$  ve  $[v_{ip}] = [x_{ij}] \tilde{\lambda} ([x_{ij}])^c$  olsun.  $\forall s, t = \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|x_{ij}|_s \leq (|x_{ij}|_t)^c$  ise bu takdirde  $|x_{ij}|$  bijektif esnek matris olduğundan  $|x_{ij}|_s \leq |x_{ij}|_t$  dir. Dolayısıyla

$$|z_{ip}|_r = |v_{iq}|_r = |x_{ij}|_s \quad (4.3)$$

dir. Ayrıca  $\forall s, t = \{1, 2, \dots, n_1\}$  için  $|x_{ij}|_s \not\leq (|x_{ij}|_t)^c$  ise bu takdirde  $|x_{ij}|$  bijektif esnek matris olduğundan  $|x_{ij}|_s \leq |x_{ij}|_t$  dir. Dolayısıyla

$$|z_{ip}|_r = |v_{iq}|_r = |0| \quad (4.4)$$

dir. O halde (4.3) ve (4.4) den  $[x_{ij}] \bar{\lambda} [x_{ij}]^c = [x_{ij}] \tilde{\lambda} [x_{ij}]^c$  elde edilir.

### 4.3. Bijeaktif Esnek Karar Sistemi

Bu bölümde, ilk olarak yoğunluk ölçüm fonksiyonu tanımlanacak ve daha sonra bu fonksiyon yardımıyla bir bijektif esnek karar sisteminin yoğunluk oranı hesaplanacaktır.

**Tanım 4.3.1.**  $[z_{ij}] \in SM_{m \times n}$  esnek matris olsun. Bu durumda, esnek max-satır fonksiyonu  $M_s$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$M_s: SM_{m \times n} \rightarrow SM_{m \times 1}, \quad M_s([z_{ij}]) = [v_{i1}]$$

öyle ki  $v_{i1} = \max_{j \in \{1,2,\dots,n\}} z_{ij}$  dir.

Tek sütunlu  $M_s([z_{ij}])$  esnek matris max-satır esnek matris olarak isimlendirilir.

**Örnek 4.3.2.** Örnek 4.2.3 de verilen  $[z_{ip}]$  esnek matrisini düşünelim. Bu matrisin max-satır esnek matrisi

$$M_s([z_{ip}]) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.3.3.**  $(F, X)$  ve  $(G, Y)$  iki bijektif esnek cümle ve  $[F, X]$  ve  $[G, Y]$  de sırasıyla bu cümlelere karşılık gelen esnek matrisler olsun. Ayrıca,  $M_s([z_{ij}]) = [v_{i1}]$  de  $[z_{ij}] = [F, X] \tilde{\wedge} [G, Y]$  nin bir max-satır esnek matrisi olsun. Bu durumda,  $[G, Y]$  esnek matrisi üzerinde  $[F, X]$  esnek matrisinin yoğunluk ölçüm fonksiyonu  $d_f$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$d_f: SM_{m \times 1} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$[v_{i1}] \rightarrow d_f([v_{i1}]) = \sum_{i=1}^n v_{i1}$$

**Tanım 4.3.4.**  $(F, X)$  ve  $(G, Y)$  iki bijektif esnek cümle,  $[F, X]$  ve  $[G, Y]$  de sırasıyla bu cümlelere karşılık gelen esnek matrisler ve  $X \cap Y = \emptyset$  olsun.  $[F, X]$  bijektif esnek matrisinin  $[G, Y]$  bijektif esnek matrisi üzerinde yoğunluk oranı  $\tau$  aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\tau = \delta([F, X]; [G, Y]) = \frac{d_f(M_s([F, X] \tilde{\wedge} [G, Y]))}{|U|}$$

Burada  $0 \leq \tau \leq 1$  dir. Eğer

$\tau = 1$  ise  $[F, X]$  bijektif esnek matrisi  $[G, Y]$  bijektif esnek matrisi üzerinde tam yoğunudur denir.

$\tau = 0$  ise  $[F, X]$  bijektif esnek matrisi  $[G, Y]$  bijektif esnek matrisi üzerinde yoğun değildir denir.

Ayrıca buradaki yoğunluk oranı kavramı bir bijektif esnek matrisin diğer bir bijektif esnek matris üzerindeki etki derecesi anlamına da gelmektedir.

Şimdi, bu kavram için bir örnek verelim.

**Örnek 4.3.5.** Örnek 4.2.3 deki  $[F, X] = [x_{ij}]$  ve  $[G, Y] = [y_{ik}]$  bijektif esnek matrislerini düşünelim. Bu durumda,

$$\tau = \delta([F, X]; [G, Y]) = \frac{d_f(M_s([z_{ip}]))}{|U|} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

Şu andan itibaren  $U$  evrensel cümlesi üzerinde  $i = 1, 2, \dots, r$  için  $(F_i, E_i)$  biyektif esnek cümlelerine karşılık gelen ( $r$  tane) biyektif esnek matrisleri  $[F_i, E_i]$  ile göstereceğiz. Ayrıca, burada  $i, j = 1, 2, \dots, r$  ve  $i \neq j$  olmak üzere  $E_i \cap E_j = \emptyset$  ve  $[F, E] = [F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2] \wedge \dots \wedge [F_r, E_r] = \bigwedge_{i=1}^r [F_i, E_i]$  dir.

**Tanım 4.3.6.**  $U$  evrensel cümlesi üzerinde  $(G, Y)$  ye karşılık gelen biyektif esnek matris  $[G, Y]$  olsun. Ayrıca,  $i = 1, 2, \dots, r$  için  $Y \cap E_i = \emptyset$  olsun. Bu durumda,  $([F, E]; [G, Y] : U)$  üçlüsü  $U$  evrensel cümlesi üzerinde bir biyektif esnek karar sistemi ve  $[G, Y]$  de bir karar esnek matrisi olarak isimlendirilir.

**Tanım 4.3.7.**  $[F, E]$  nin  $[G, Y]$  üzerinde yoğunluk oranı  $([F, E]; [G, Y] : U)$  nin biyektif esnek karar sistem yoğunluğu olarak isimlendirilir ve bu yoğunluğun oranı

$$\tau = \delta([F, E]; [G, Y])$$

şeklinde elde edilir.

**Tanım 4.3.8.**  $\tau, ([F, E]; [G, Y] : U)$  sisteminin biyektif esnek karar yoğunluk oranı olsun. Eğer  $l \in \Omega \subset \{1, 2, \dots, r\}$  için  $\delta(\bigwedge_{l \in \Omega} [F_l, E_l]; [G, Y]) = \tau$  ise bu takdirde  $(\bigwedge_{l \in \Omega} [F_l, E_l]; [G, Y] : U)$  sistemine indirgenmiş biyektif esnek karar sistemi denir. Ayrıca,  $[H, Z] = \bigwedge_{l \in \Omega} [F_l, E_l]$  bütün indirgenmiş biyektif esnek karar sistemlerinde mevcut ve  $\delta([H, Z]; [G, Y]) = \tau$  ise bu sistem maksimum indirgenmiş biyektif esnek karar sistemi olarak isimlendirilir.

Tanım 4.3.8 den karar verme üzerinde herhangi bir etkiye sahip olmayan esnek matrisler belirlenir ve böylece bu esnek matrislerin üretilmesinde kullanılan parametrelerin karar aşamasında kullanılmaması sağlanır. Böylelikle hesaplamalar gereksiz işlem kalabalığından arındırılır.

**Örnek 4.3.9.** Kabul edelim ki

$$[F_1, E_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [F_2, E_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [F_3, E_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [G, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde bijektif esnek matrisleri verilsin. Bu durumda  $\tau = \delta([F, E]; [G, Y]) = \frac{3}{5}$  ve  $\delta([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G, Y]) = \frac{3}{5}$  şeklinde elde edilir. Dolayısıyla,  $([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G, Y]: U)$  sistemi  $([F, E]; [G, Y]: U)$  nun bir maksimum indirgenmiş bijektif esnek karar sistemidir.

Örnek 4.3.9 dan görülür ki  $[F_3, E_3]$  bijektif esnek matrisi, sistemin yoğunluk oranına etkisi yoktur. Dolayısıyla söyleyebiliriz ki  $E_3$  parametre cümlesi karara etki etmez.

**Gösterim:**  $[G, Y]$  matrisinin  $t$ . sütunu ve  $[H, Z]$  matrisinin  $r$ . sütunu sırasıyla  $|G, Y|_t$  ve  $|H, Z|_r$  şeklinde gösterilir.

**Tanım 4.3.10.**  $[H, Z] = \wedge_{l \in \Omega} [F_l, E_l]$  ve  $([H, Z]; [G, Y]: U), ([F, E]; [G, Y]: U)$  nun bir maksimum indirgenmiş bijektif esnek karar sistemi olsun. Eğer  $|H, Z|_r \preceq |G, Y|_t$  ise bu takdirde  $d_f(|H, Z|_r)/d_f(|G, Y|_t)$  ye  $[H, Z]$  bijektif esnek matrisi altında bir karar bileşeni denir ve aynı zamanda karar bileşeninin etki oranını gösterir.

Burada,  $|Y|$  ve  $|Z|$  sırasıyla  $Y$  ve  $Z$  cümlelerinin eleman sayılarını göstermek üzere  $t \leq |Y|$  ve  $r \leq |Z|$  dir.

**Örnek 4.3.11.** Örnek 4.3.9 daki  $[F_1, E_1], [F_2, E_2], [F_3, E_3]$  ve  $[G, Y]$  bijektif esnek matrislerini göz önüne alalım. Ayrıca,  $[H, Z] = [F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]$  olsun. Bu durumda,  $|H, Z|_2 \preceq |G, Y|_1$  olduğundan  $d_f(|H, Z|_2)/d_f(|G, Y|_1) = \frac{1}{3}$  ve  $|H, Z|_6 \preceq |G, Y|_2$  olduğundan  $d_f(|H, Z|_6)/d_f(|G, Y|_2) = \frac{1}{2}$  elde edilir.

#### 4.4. Çoklu-Bijektif Dilsel Esnek Karar Sistemi

Bu bölümde, ilk olarak dilsel cümle ve dilsel-değerli fonksiyon kavramları tanıtılacaktır. Ayrıca, çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi oluşturulacaktır. Daha sonra maksimum indirgenmiş bijektif esnek matrisinin her bir sütunu için belirleyici etki oranını hesaplayan bir formül verilecektir. Son olarak, bu kavramlar kullanılarak yeni bir karar verme metodu oluşturulacaktır.

**Tanım 4.4.1.** ([17])  $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{\ell-1}, t_\ell, t_{\ell+1}, \dots, t_{2\ell}\}$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) sınırlı ve tam sıralı ayırık terimli bir cümle olsun. Bu cümleye bir dilsel cümle denir. Kısaca,  $\mathcal{T}$  cümlesi bir dilsel cümle ise aşağıdaki şartları sağlamalıdır:

1.  $i, j \in \{0, 1, \dots, 2\ell\}$  için  $t_i \leq t_j \Leftrightarrow i \leq j$ .

2.  $i \in \{0, 1, \dots, 2\ell\}$  için  $t_i$  elemanın değili  $t_{2\ell-i}$  elemanıdır.

3.  $t_i \geq t_j$  ise  $\max(t_i, t_j) = t_i$ .

4.  $t_i \leq t_j$  ise  $\min(t_i, t_j) = t_i$ .

Burada,  $t_\ell$  terimi  $\mathcal{T}$  cümlesinin ortanca terimi olarak isimlendirilir.

**Tanım 4.4.2.**  $\mathcal{T} = \{t_0, t_1, \dots, t_{\ell-1}, t_\ell, t_{\ell+1}, \dots, t_{2\ell}\}$  ( $\ell \in \mathbb{N}$ ) bir dilsel cümle olsun. Bu durumda,

$$f_L: [0,1] \rightarrow \mathcal{T}$$

$$\alpha \rightarrow f_L(\alpha) = \begin{cases} t_{\lfloor 2\ell\alpha \rfloor}, & 0 \leq \alpha < 0.5 \\ t_\ell, & \alpha = 0.5 \\ t_{(-\lfloor -2\ell\alpha \rfloor)}, & 0.5 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

fonksiyonuna  $\mathcal{T}$  ye bağlı bir dilsel-değerli fonksiyon denir.

**Örnek 4.4.3.**  $\ell = 2$  için  $\mathcal{T} = \{t_0 = \text{çok kötü}, t_1 = \text{kötü}, t_2 = \text{normal}, t_3 = \text{iyi}, t_4 = \text{çok iyi}\}$  olsun. Bu durumda  $\mathcal{T}$  bir dilsel cümledir. Ayrıca,  $t_2 = \text{normal}$   $\mathcal{T}$  cümlesinin ortanca terimidir.  $\mathcal{T}$  cümlesi için  $f_L$  dilsel-değerli fonksiyon düşünülürse bu takdirde  $f_L(0) = t_0$ ,  $f_L(0,2) = t_0$ ,  $f_L(0,43) = t_1$ ,  $f_L(0,5) = t_2$ ,  $f_L(0,625) = t_3$ ,  $f_L(0,75) = t_3$ ,  $f_L(1) = t_4$  şeklinde elde edilir.

**Gösterim:** Şu andan itibaren  $Y$  cümlesi bir dilsel cümleyi temsil edecektir.

**Tanım 4.4.4.**  $U$  evrensel cümlesi üzerindeki  $(G_1, Y), (G_2, Y), \dots, (G_k, Y)$  biyektif esnek cümlelerin matrisleri sırasıyla  $[G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]$  olsun. Ayrıca,  $i = 1, 2, \dots, r$  için  $Y \cap E_i = \emptyset$  olmak üzere  $([F, E]; [G_1, Y]: U), ([F, E]; [G_2, Y]: U), \dots, ([F, E]; [G_k, Y]: U)$  evrensel cümle üzerindeki biyektif dilsel esnek karar sistemler olsun. Bu durumda,  $[G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]$  matrisleri dilsel çoklu-karar esnek matrisleri ve  $([F, E], [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  sistemi  $U$  cümlesi üzerinde bir çoklu-biyektif dilsel esnek karar sistemi olarak isimlendirilir.

**Tanım 4.4.5.**  $\tau_1 = \delta([F, E]; [G_1, Y]), \tau_2 = \delta([F, E]; [G_2, Y]), \dots, \tau_k = \delta([F, E]; [G_k, Y])$  sırasıyla  $[G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]$  ye  $[F, E]$  nin biyektif dilsel esnek karar sistem yoğunluk oranları olsun.  $[G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]$  matrislerinin tamamı üzerinde  $[F, E]$  nin yoğunluğu  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  sisteminin bir çoklu-biyektif dilsel esnek karar sistem yoğunluğu olarak adlandırılır ve

$$\mathfrak{R} = \delta([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]) = \frac{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_k}{k}$$

şeklinde formüle edilir.

**Tanım 4.4.6.**  $([F, E], [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  bir çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi olsun.  $l \in \Omega \subset \{1, 2, \dots, r\}$  için sırasıyla  $\tau_1 = \delta([F, E]; [G_1, Y]) = \delta(\lambda_{l \in \Omega} [F_l, E_l]; [G_1, Y])$ ,  $\tau_2 = \delta([F, E]; [G_2, Y]) = \delta(\lambda_{l \in \Omega} [F_l, E_l]; [G_2, Y])$ ,  $\dots$ ,  $\tau_k = \delta([F, E]; [G_k, Y]) = \delta(\lambda_{l \in \Omega} [F_l, E_l]; [G_k, Y])$  ise bu takdirde  $(\lambda_{l \in \Omega} [F_l, E_l]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemine  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  sisteminin indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi denir. Ayrıca,  $[H, Z] = \lambda_{l \in \Omega} [F_l, E_l]$  bütün indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemlerinde mevcut ve sırasıyla  $\delta([H, Z]; [G_1, Y]) = \tau_1$ ,  $\delta([H, Z]; [G_2, Y]) = \tau_2$ ,  $\dots$ ,  $\delta([H, Z]; [G_k, Y]) = \tau_k$  ise bu indirgenmiş sistem maksimum indirgenmiş bijektif esnek karar sistemi olarak isimlendirilir.

**Örnek 4.4.7.** Örnek 4.3.9 daki  $[F_1, E_1], [F_2, E_2]$  ve  $[F_3, E_3]$  bijektif esnek matrislerini göz önüne alalım. Bu durumda,  $Y = \{t_0 = \text{küçük}, t_1 = \text{orta}, t_2 = \text{büyük}\}$  şeklinde verilen bir dilsel cümle olmak üzere  $[G_1, Y], [G_2, Y]$  bijektif esnek matrisleri

$$[G_1, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [G_2, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda  $\delta([F, E]; [G_1, Y]) = \delta([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_1, Y]) = \frac{3}{5}$  ve  $\delta([F, E]; [G_2, Y]) = \delta([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_2, Y]) = 1$  olduğundan söyleyebiliriz ki  $([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_1, Y], [G_2, Y]; U)$  sistemi  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y]; U)$  sisteminin maksimum indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemidir.

**Gösterim:**  $\mu \in \{1, 2, \dots, k\}$  için  $[G_\mu, Y]$  matrisinin  $t_{\varepsilon^\mu}$  uncu sütunu  $[G_\mu, Y]_{t_{\varepsilon^\mu}}$  şeklinde gösterilecektir.

**Tanım 4.4.8.**  $[H, Z] = \lambda_{i=1}^l [F_i, E_i]$  ve  $([H, Z], [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  sistemi  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  sisteminin maksimum indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi olsun.

$I_r = \{1 \leq \mu \leq k : 0 \leq \varepsilon^\mu \leq \ell \text{ için } |H, Z|_r \lesssim |G_\mu, Y|_{t_{\varepsilon^\mu}}\}$  ve  $\varepsilon^\mu$ ,  $\mu$  ye bağılı bir değişken olmak üzere  $\eta_r = \sum_{\mu \in I} (\ell - \varepsilon^\mu) d_f(|H, Z|_r) / d_f(|G_\mu, Y|_{t_{\varepsilon^\mu}})$  ye  $[H, Z]$  bijektif esnek matrisi altında  $r$ . sütun için negatif karar bileşeni etki oranı olarak isimlendirilir.

$J_r = \{1 \leq \mu \leq k : \ell < \varepsilon^\mu \leq 2\ell \text{ için } |H, Z|_r \gtrsim |G_\mu, Y|_{t_{\varepsilon^\mu}}\}$  ve  $\varepsilon^\mu$ ,  $\mu$  ye bağılı bir değişken olmak üzere  $\sigma_r = \sum_{\mu \in J} (\varepsilon^\mu - \ell) d_f(|H, Z|_r) / d_f(|G_\mu, Y|_{t_{\varepsilon^\mu}})$  ye  $[H, Z]$  bijektif esnek matrisi altında  $r$ . sütun için pozitif karar bileşeni etki oranı olarak isimlendirilir.

Burada  $|Y|$  ve  $|Z|$  sırasıyla  $Y$  ve  $Z$  nin eleman sayılarını göstermek üzere  $t_{\varepsilon^\mu} \leq |Y|$  ve  $r \leq |Z|$  dir.

**Tanım 4.4.9.**  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$ ,  $\eta_r$  ve  $\sigma_r$  göz önüne alalım. Bu durumda

$$\mathcal{P}_r = \frac{\sigma_r - \eta_r}{2\ell(|I_r| + |J_r|)}$$

değerine  $[H, Z]$  nin  $r$ . sütunu için belirleyici etki oranı denir. Burada  $|I_r|$  ve  $|J_r|$  sırasıyla  $I$  ve  $J$  nin  $r$ . sütun için eleman sayılarını gösterir.

Burada, dilsel karar değeri  $\alpha = \frac{1}{2} + \mathcal{P}_r$  için aşağıdaki durumlar ortaya çıkar:

- $\mathcal{P}_r > 0$  ise  $[H, Z]$  nin  $r$ . sütununu üreten parametreler  $f_L(\alpha) = t_{(-[2\ell\alpha])}$  karşılık gelen dilsel parametreleri etkiler.
- $\mathcal{P}_r = 0$  ise  $[H, Z]$  nin  $r$ . sütununu üreten parametreler  $f_L(\alpha) = t_\ell$  karşılık gelen dilsel parametreleri etkiler.
- $\mathcal{P}_r < 0$  ise  $[H, Z]$  nin  $r$ . sütununu üreten parametreler  $f_L(\alpha) = t_{[2\ell\alpha]}$  karşılık gelen dilsel parametreleri etkiler

**Örnek 4.4.10.** Örnek 4.3.9 daki  $[F_1, E_1], [F_2, E_2]$  ve  $[F_3, E_3]$  bijektif esnek matrislerini ve Örnek 4.4.7 de verilen  $[G_1, Y], [G_2, Y]$  bijektif esnek matrislerini düşünelim. Örnek 4.4.7 den biliyoruz ki  $([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_1, Y], [G_2, Y]: U)$  sistemi  $([F, E], [G_1, Y], [G_2, Y])$  sisteminin maksimum indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemidir. Ayrıca  $[H, Z] = [F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]$  alalım. Bu durumda

$|H, Z|_2 \lesssim |G_1, Y|_1$  olduğundan  $r = 2$  için negatif karar bileşeni etki oranı  $\eta_2 = d_f(|H, Z|_2)/d_f(|G_1, Y|_1) = \frac{1}{3}$  elde edilir. Benzer şekilde  $|H, Z|_2 \lesssim |G_2, Y|_3$  olduğundan  $r = 2$  için pozitif karar bileşeni etki oranı  $\sigma_2 = d_f(|H, Z|_2)/d_f(|G_2, Y|_3) = 1$  elde edilir. Dolayısıyla  $\mathcal{P}_2 = \frac{\sigma_2 - \eta_2}{2.1.2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{4} = \frac{1}{6}$  olarak elde edilir.

Tanım 4.4.9. dan söyleyebiliriz ki  $\mathcal{P}_2 > 0$  olduğu için  $[H, Z]$  nin 2. sütununu üreten parametreler  $\alpha = \frac{2}{3}$  dilsel karar değeri için  $t_{(-[-2.1\frac{2}{3}])} = t_2$  ye karşılık gelen dilsel parametreyi (büyük) etkiler.

Şimdi yeni bir karar metodu için bir algoritma verelim.

**Algoritma:**

**Adım 1.**  $i = 1, 2, \dots, r$  için  $(F_i, E_i)$  ve  $(G_1, Y), (G_2, Y), \dots, (G_k, Y)$  bijektif esnek cümleleri oluşturulur.

**Adım 2.** Bijektif esnek cümleler için sırasıyla  $[F, E] = \bigwedge_{i=1}^r [F_i, E_i]$  ve  $[G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]$  bijektif esnek matrislerini üreterek  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  bijektif esnek karar sistemi oluşturulur.

**Adım 3.** Her bir  $([F, E]; [G_1, Y]: U), ([F, E]; [G_2, Y]: U), \dots, ([F, E]; [G_k, Y]: U)$  bijektif dilsel esnek karar sistemlerinin yoğunluk oranlarını hesapla ve daha sonra  $([F, E]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  bijektif esnek karar sisteminin yoğunluk oranını bulunur.

**Adım 4.** Eğer mümkünse  $([F, E], [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_k, Y]: U)$  sisteminin maksimum indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel karar esnek sistemini bul ve yoğunluk oranını hesaplanır.

**Adım 5.** Pozitif ve negatif karar bileşenlerini elde et ve daha sonra belirleyici etki oranlarını ve dilsel karar değerlerini hesaplanır.

**Adım 6.** Dilsel karar değerleriyle birlikte dilsel parametreleri belirlenir.

**Örnek 4.4.11.** Varsayalım ki bir şirket cep telefonu üreterek  $K, L$  ve  $M$  ülkelerine ihraç etmek istiyor. Bu amaçla doğrultusunda şirket, hali hazırda bu ülkelere cep telefonu ihraç eden yedi şirketin son sürüm cep telefonlarının özelliklerini ve müşteri

memnuniyet oranlarını inceliyor. Bu incelemeden sonra şirket, bu memnuniyet oranlarını dikkate alarak yeni üreteceği modelin özelliklerini belirlemek istiyor.

$U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$  yedi şirketin bu ülkelere ihraç ettiği cep telefonlarının son sürümlerinin cümlesi olsun.  $E = E_1 \times E_2 \times E_3$  parametrelerin cümlesi öyle ki  $E_1$  cep telefonunun kamera kalitesinin,  $E_2$  cep telefonunun ağırlığı ve inceliğinin ve  $E_3$  ise cep telefonlarının işlemci hızının parametre cümlelerini gösterebilir. Bu parametre cümleleri sırasıyla  $E_1 = \{a_1 = normal, a_2 = iyi, a_3 = çok iyi\}$ ,  $E_2 = \{b_1 = hafif - ince, b_2 = ağır - kalın\}$  ve  $E_3 = \{c_1 = hızlı, c_2 = çok hızlı\}$  olsun.

Ayrıca,  $Y = \{t_0 = çok düşük, t_1 = düşük, t_2 = biraz düşük, t_3 = orta, t_4 = biraz yüksek, t_5 = yüksek, t_6 = çok yüksek\}$  dilsel cümle bu cep telefonların müşteri memnuniyet oranlarını gösterebilir.

**Adım 1.** Araştırmalar sonucunda şirketin aşağıdaki bijektif esnek cümlelere sahiptir.

$$(F_1, E_1) = \{(a_1, \{h_4, h_7\}), (a_2, \{h_3, h_6\}), (a_3, \{h_1, h_2, h_5\})\},$$

$$(F_2, E_2) = \{(b_1, \{h_1, h_4, h_5, h_6\}), (b_2, \{h_2, h_3, h_7\})\},$$

$$(F_3, E_3) = \{(c_1, \{h_1, h_2, h_5\}), (c_2, \{h_3, h_4, h_6, h_7\})\},$$

$K$  ülkesi için karar esnek cümlesi  $(G_1, Y) =$

$$\{(t_1, \{h_4\}), (t_3, \{h_3, h_7\}), (t_4, \{h_2, h_6\}), (t_5, \{h_1, h_5\})\},$$

$L$  ülkesi için karar esnek cümlesi  $(G_2, Y) =$

$$\{(t_1, \{h_7\}), (t_2, \{h_3, h_4\}), (t_3, \{h_2\}), (t_4, \{h_5\}), (t_5, \{h_6\}), (t_6, \{h_1\})\},$$

$M$  ülkesi için karar esnek cümlesi  $(G_3, Y) =$

$$\{(t_0, \{h_7\}), (t_3, \{h_4\}), (t_4, \{h_3, h_6\}), (t_6, \{h_1, h_2, h_5\})\}$$

dir.

**Adım 2.** Şirketin aşağıdaki bijektif esnek matrisleri oluşturur.

$$[F, E] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, (G_1, Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(G_2, Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } (G_3, Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Adım 3.** Şirket her bir bijektif dilsel karar esnek sisteminin bağıllığı

$$\tau_1 = \delta([F, E]; [G_1, Y]) = \frac{df(M_s([F, E] \bar{\wedge} [G_1, Y]))}{|U|} = 1,$$

$$\tau_2 = \delta([F, E]; [G_2, Y]) = \frac{df(M_s([F, E] \bar{\wedge} [G_2, Y]))}{|U|} = \frac{5}{7},$$

$$\tau_3 = \delta([F, E]; [G_3, Y]) = \frac{df(M_s([F, E] \bar{\wedge} [G_3, Y]))}{|U|} = 1,$$

şeklinde elde eder.

**Adım 4.**  $([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_1, Y]) = \delta([F, E]; [G_1, Y]) = 1$ ,  $\delta([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_2, Y]) = \delta([F, E]; [G_2, Y]) = \frac{5}{7}$  ve  $([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_3, Y]) = \delta([F, E]; [G_3, Y]) = 1$  olduğundan  $([F_1, E_1] \wedge [F_2, E_2]; [G_1, Y], [G_2, Y], \dots, [G_\mu, Y]: U)$  maksimum indirgenmiş çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemidir.

**Adım 5.**

$$\mathcal{P}_1 = \frac{-5}{36} \text{ ise bu takdirde } \alpha = \frac{13}{36} \text{ ve } t_{\lfloor 2.3, \frac{13}{36} \rfloor} = t_2.$$

$$\mathcal{P}_2 = \frac{-5}{18} \text{ ise bu takdirde } \alpha = \frac{2}{9} \text{ ve } t_{\lfloor 2.3, \frac{2}{9} \rfloor} = t_1.$$

$$\mathcal{P}_3 = \frac{1}{6} \text{ ise bu takdirde } \alpha = \frac{2}{3} \text{ ve } t_{(-\lfloor -2.3, \frac{2}{3} \rfloor)} = t_4.$$

$$\mathcal{P}_4 = 0 \text{ ise bu takdirde } \alpha = \frac{1}{2} \text{ ve } t_\ell = t_3.$$

$$\mathcal{P}_5 = \frac{1}{3} \text{ ise bu takdirde } \alpha = \frac{5}{6} \text{ ve } t_{(-\lfloor -2.3, \frac{5}{6} \rfloor)} = t_5.$$

$$\mathcal{P}_6 = \frac{1}{12} \text{ ise bu takdirde } \alpha = \frac{7}{12} \text{ ve } t_{(-\lfloor -2.3, \frac{7}{12} \rfloor)} = t_4.$$

**Adım 6.** Şirket yakın gelecekte üreteceği cep telefonlarının hangi özelliklerde olacağını aşağıdaki memnuniyet oranlarını kullanarak belirleyebilir.

1. Cep telefonunun kamera kalitesi normal ve ağırlık-kalınlığı hafif-ince ise biraz düşük müşteri memnuniyeti oranı  $\left(\frac{13}{36}\right)$  beklenmektedir.
2. Cep telefonunun kamera kalitesi normal ve ağırlık-kalınlığı ağır-kalın ise düşük müşteri memnuniyeti oranı  $\left(\frac{2}{9}\right)$  beklenmektedir.

3. Cep telefonunun kamera kalitesi iyi ve ağırlık-kalınlığı hafif-kalın ise biraz yüksek müşteri memnuniyeti oranı  $\left(\frac{2}{3}\right)$  beklenmektedir.

4. Cep telefonunun kamera kalitesi iyi ve ağırlık-kalınlığı ağır-kalın ise orta seviyede müşteri memnuniyeti oranı  $\left(\frac{1}{2}\right)$  beklenmektedir.

5. Cep telefonunun kamera kalitesi çok iyi ve ağırlık-kalınlığı hafif-ince ise yüksek müşteri memnuniyeti oranı  $\left(\frac{5}{6}\right)$  beklenmektedir.

6. Cep telefonunun kamera kalitesi çok iyi ve ağırlık-kalınlığı ağır-kalın ise biraz yüksek müşteri memnuniyeti oranı  $\left(\frac{7}{12}\right)$  beklenmektedir.

Örneğin,  $\left(\frac{5}{6}\right)$  oranı bize eğer şirket cep telefonunun kamera kalitesini çok iyi ve ağırlık-kalınlığını ise hafif-ince üretirse altı müşteriden beşinin memnuniyetini kazanabileceği öngörüsünü sunar.

## SONUÇ

Bu çalışmada, ilk olarak esnek cümle, esnek matris ve indirgenmiş esnek matris kavramları verildi. Daha sonra bijektif esnek cümle ve işlemleri detaylı olarak incelendi. Bu cümle yapısı üzerine temellenmiş bir karar sistemi ve onun uygulamaları verildi. Son bölümde ise, bijektif esnek matrisler ve çarpımları tanımlandı. Ayrıca, bu çarpımlar arasındaki ilişkiler detaylı olarak araştırıldı. Dilsel cümle ve dilsel-değerli fonksiyon tanımlandı ve bu yapılar yardımıyla çoklu-bijektif dilsel esnek karar sistemi oluşturuldu. Böylelikle hem bijektif esnek cümle işlemleri daha pratik hale dönüştürüldü hem de bijektif esnek karar sistemindeki dilsel değişken parametre ve karar verici sınırlaması ortadan kaldırıldı.

## KAYNAKLAR

1. Molodtsov, D., Soft set theory – first results, *Comput. Math. Appl.*, 37, 19–31, 1999.
2. Alcantud, J.C.R., Santos-Garcia, G., A new criterion for soft set based decision making problems under incomplete information, *Int. J. Comput. Int. Sys.*, 10, 394-404, 2007.
3. Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft set theory and uni-int decision making, *Eur. J. Oper. Res.*, 207, 848-855, 2010.
4. Chen, D., Tsang, E.C.C., Yeung, D.S., Wang, X., The parametrization reduction of soft sets and its applications, *Comput. Math. Appl.*, 49, 757-763, 2005.
5. Feng, F., Li, Y., Çağman, N., Generalized uni-int decision making schemes based on choice value soft sets, *Eur. J. Oper. Res.*, 220, 162-170, 2012.
6. Gong, K., Xiao, Z., Zhang, X., The bijective soft set with its operations, *Comput. Math. Appl.*, 60, 2270-2278, 2010.
7. Herawan, T., Deris, M.M., Soft decision making for patients suspected influenza, In Taniar D et al. (Eds): ICCSA 2010, Part 3, *Lect. Notes in Comput. Sc.*, 6018, 405-418, 2010.
8. Herawan, T., Soft set-based decision making for patient suspected influenza-like illness, *Int. J. Mod. Phys.: Conference Series*, 1, 1-5, 2010.
9. Kong, Z., Gao, L., Wang, L., Li, S., The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, *Comput. Math. Appl.*, 56, 3029–3037, 2008.
10. Qin, K., Yang, J., Zhang, X., Soft set approaches to decision making problems, *International Conference on Rough Sets and Knowledge Technology, RSKT-2012*, 456-464, 2012.
11. Xiao, Z., Gong, K., Xia, S., Zou, Y., Exclusive disjunctive soft sets, *Comput.*

Math. Appl., 59, 2128–2137, 2010.

12. Zadeh. L.A., The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning, Inform. Sci., Part I 8, 199-249; Part II 8, 301-357; Part III 9, 43-80, 1975.
13. Aiwu, Z., Hongjun, G., Fuzzy-valued linguistic soft set theory and multi-attribute decision-making application, Choas Solitons and Fractals, 89, 2-7, 2016.
14. Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila, M.A., Linguistic decision making models, Int. J. Intell. Syst., 7, 479-492, 1992.
15. Herrera, F., Viedma, E., Linguistic decision analysis: steps for solving decision problems under linguistic information, Fuzzy Set. Syst., 115, 67-82, 2000.
16. Herrera, F., Viedma, E., Verdegay, J.L., A sequential selection process in group decision making with a linguistic assessment approach, Inform. Sci., 85, 223-239, 1995.
17. Herrera, F., Viedma, E., Verdegay, J.L., A model of consensus in group decision making under linguistic assessment, Fuzzy Set. Syst., 78, 73-87, 1996.
18. Herrera-Viedma, E., Mata, F., Martinez, L., Chiclana, F., Perez, L.G., Measurements of consensus in multigranular linguistic group decision-making, MDAI: International Conference on Modeling Decisions for Artificial Intelligence, 194-204, 2004.
19. Maji, P.K., Roy, A.R., Biswas, R., An application of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl., 44, 1077–1083, 2002.
20. Çağman, N., Enginoğlu, S., Soft matrix theory and its decision making, Comput. Math. Appl., 59, 3308-3314, 2010.

21. Basu, T.M., Mahapatra, N.M., Mondal, S.K., Matrices in soft set theory and their applications in decision making problems, *South. Asian J. Math.*, 2, 126-143, 2012.
22. Atagün, A.O., Kamacı, H., Oktay, O., Reduced soft matrices and generalized products with applications in decision making, *Neural Comput. Appl.*, 29, 445-456, 2018.
23. Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K., Shabir, M., On some new operations in soft set theory, *Comput. Math. Appl.*, 57, 1547-1553, 2009.
24. Maji, P.K., Biswas, R., Roy, A.R., Soft set theory, *Comput. Math. Appl.*, 45, 555-562, 2003.
25. Zhu, P., Wen, Q., Operations of soft set revisited, *J. Appl. Math.*, 2013, 7 sayfa, 2013.
26. Feng, F., Jun, Y.B., Zhao, X., Soft semirings, *Comput. Math. Appl.*, 56, 2621-2628, 2008.
27. Pei, D., Miao, D., From sets to information systems, in: Hu, X., Liu, Q., Skowron, A., Lin, T.Y., Yager, R.R., Zhang B. (Eds.), *Proceedings of Granular Computing IEEE*, 2, 617-621, 2005.
28. Sezgin, A., Atagün, A.O., On operations of soft sets, *Comput. Math. Appl.*, 61, 1457-1467, 2011.
29. Sezgin, A., Atagün, A.O., Aygün, E., A note on soft near-rings and idealistic soft near-rings, *Filomat*, 25, 53-68, 2011.
30. Alshehri, N.O., Akram, M., Al-ghami, R.S., Applications of soft sets in K-algebras, *Adv. Fuzzy Syst.*, 2013, 8 sayfa, 2013.

## ÖZGEÇMİŞ

1991 yılında İstanbul’da dünyaya gelen Emirhan TOKTAŞ, ilköğretim ve lise öğrenimini sırasıyla Ergenekon İlköğretim Okulu ve İzzet Ünver Lisesinde tamamlamıştır. 2010 yılında kazandığı Bozok Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü 2014 yılında bitirmiştir.

2014 yılında Bozok Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başlamıştır. Dr. Öğr. Üyesi Hürmet Fulya AKIZ danışmanlığında hazırladığı “Bijektif Esnek Cümleler ve Karar Verme Metotları” başlıklı teziyle yüksek lisans öğrenimine devam etmektedir.

### İletişim Bilgileri

Adres: Merkez Mh. Bayrampaşa Cad. Hizal Sk. No:6 Daire:6

Güngören/İSTANBUL

Telefon: (554) 689 72 96

E-posta: toktasemirhan@gmail.com