



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİKOMPLEKS-KOMPLEKS LEONARDO SAYILARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nimet PARLAK AKKURT

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

AKSARAY, 2024

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 222342702 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Nimet PARLAK AKKURT tarafından hazırlanan **“BİKOMPLEKS-KOMPLEKS LEONARDO SAYILARI”** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hasan ARSLAN

Erciyes Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Efruz Özlem MERSİN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 27 / 06 / 2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Mehmet Ali HINIS

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinalliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Nimet PARLAK AKKURT

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam süresince bana bilgi ve tecrübeleriyle yol gösteren, destek olan, her adımda yanımda olan çok kıymetli ve saygıdeğer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR'a teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme, ağabeyime ve kardeşlerime teşekkür ederim. Çalışmalarım boyunca emeğini ve sevgisini esirgemeyen kıymetli eşim Emrah AKKURT'a, sevgili oğlum Tuğberk AKKURT'a ve sevgili kızım Tuğdem AKKURT'a tüm kalbimle teşekkür ederim.

Nimet PARLAK AKKURT

AKSARAY, 2024

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI	3
2.1 Kompleks ve Bikompleks Sayılar	3
2.2 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri.....	5
2.3 Fibonacci ve Lucas Sayılarının Bazı Uygulamaları	6
2.4 Leonardo Sayı Dizisi	7
2.5 Leonardo Sayılarının Bazı Uygulamaları.....	8
3. BİKOMPLEKS-KOMPLEKS LEONARDO SAYILARI	11
3.1 Bikompleks-Kompleks Leonardo Sayıları ve Bazı Temel Özellikleri.....	11
3.2 Bikompleks-Kompleks Leonardo Sayıları İçin Bazı Özdeşlikler	20
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	38
KAYNAKLAR	39
ÖZGEÇMİŞ.....	41

YÜKSEK LİSANS TEZİ
BİKOMPLEKS-KOMPLEKS LEONARDO SAYILARI

Nimet PARLAK AKKURT

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Tülay YAĞMUR

ÖZET

Bu tezin amacı, bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını tanıtmak ve bu sayıların bazı özelliklerini incelemektir.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışmamıza ışık tutan bazı çalışmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, çalışmamızın temelini oluşturan bazı önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, ilk olarak bikompleks-kompleks Leonardo sayıları tanımlanmış ve bu sayıların bazı temel özellikleri elde edilmiştir. Daha sonrasında ise bikompleks-kompleks Leonardo sayıları için rekürans (yineleme) bağıntıları, Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri verilmiştir. Ayrıca, bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını ilgilendiren Catalan özdeşliği, Cassini özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği, Honsberger özdeşliği ve Vajda özdeşliği üretilmiştir. Bunlara ek olarak, bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını ilgilendiren diğer bazı özdeşlikler elde edilmiştir. Son bölümde, tezden elde edilen sonuçlar ve bazı öneriler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Bikompleks sayılar, Leonardo sayıları, kompleks Leonardo sayıları, bikompleks-kompleks Leonardo sayıları.

Haziran, 2024; 41 sayfa

M.Sc. THESIS

BICOMPLEX-COMPLEX LEONARDO NUMBERS

Nimet PARLAK AKKURT

**Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Tülay YAĞMUR

ABSTRACT

The purpose of this thesis is to introduce bicomplex-complex Leonardo numbers and to examine some properties of these numbers.

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, some studies that shed light on our study are mentioned. In the second chapter, some essential definitions and theorems that form the basis of our study are given. In the third chapter, at first, bicomplex-complex Leonardo numbers are defined and some fundamental properties of these numbers are obtained. Then, recurrence relations, Binet's formula, generating function and some summations formulas for bicomplex-complex Leonardo numbers are given. Catalan's identity, Cassini's identity, d'Ocagne's identity, Honsberger's identity and Vajda's identity involving bicomplex-complex Leonardo numbers are derived. In addition, some other identities involving bicomplex-complex Leonardo numbers are obtained. In the last chapter, some results obtained from the thesis and some suggestions are presented.

Keywords: Bicomplex numbers, Leonardo numbers, complex Leonardo numbers, bicomplex-complex Leonardo numbers.

June, 2024; 41 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{B}F_n$	n 'inci Bikompleks Fibonacci Sayısı
$\mathbb{B}L_n$	n 'inci Bikompleks Lucas Sayısı
$\mathbb{B}CF_n$	n 'inci Bikompleks-Kompleks Fibonacci Sayısı
$\mathbb{B}Le_n$	n 'inci Bikompleks Leonardo Sayısı
$\mathbb{B}CLe_n$	n 'inci Bikompleks-Kompleks Leonardo Sayısı
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{C}F_n$	n 'inci Kompleks Fibonacci Sayısı
$\mathbb{C}L_n$	n 'inci Kompleks Lucas Sayısı
$\mathbb{C}Le_n$	n 'inci Kompleks Leonardo Sayısı
F_n	n 'inci Fibonacci Sayısı
L_n	n 'inci Lucas Sayısı
Le_n	n 'inci Leonardo Sayısı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar



1. GİRİŞ

Fibonacci sayılarının keşfi 1202 yılına dayanmaktadır. Leonardo Fibonacci olarak bilinen İtalyan matematikçi Pisalı Leonardo, Liber Abaci adlı eserinde tavşan problemi olarak adlandırılan bir probleme yer vermiş ve bu problemle ortaya çıkan Fibonacci sayı dizisi bugün birçok araştırmacının ilgi odağı olmuştur [1]. Bu dizide üçüncü terimden itibaren her terim kendinden önceki iki terimin toplanmasıyla elde edilmektedir. Bu dizideki her terim bir öncekine bölündüğünde ise sayılar büyüdükçe bölüm sonucu altın orana yaklaşmaktadır [1, 2].

İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton [3], kompleks sayıların bir genellemesi olan kuaterniyonları 1843 yılında keşfetmiştir. Daha sonra Horadam [4], bileşenleri Fibonacci sayılarından alınan kompleks Fibonacci sayılarını ve Fibonacci kuaterniyonlarını tanıtmıştır. Yıllar sonra Halıcı [5], Fibonacci kuaterniyonların bir takım özelliklerini incelemiştir ve daha sonra yapılacak olan birçok çalışmaya ilham kaynağı olmuştur. Aynı zamanda, Halıcı [6] kompleks Fibonacci kuaterniyonlar üzerine de çalışmıştır.

Kompleks sayıların bir diğer genellemesi olan bikompleks sayılar ise ilk olarak 1892 yılında Corrado Segre [7] tarafından tanımlanmıştır. Diğer yandan, Price [8]'ın ve Luna-Elizarraras vd. [9]'nın çalışmaları bikompleks sayılar üzerine yapılan kapsamlı çalışmalar arasında yer almaktadır. Bikompleks sayılar ile kuaterniyonlar arasında bazı temel farklılıklar bulunmaktadır. Bikompleks sayıların çarpımı değişmeli iken kuaterniyonların çarpımı değişmeli değildir. Üstelik, kuaterniyonlar bir bölüm cebiri oluştururken bikompleks sayılar bölüm cebiri oluşturmazlar. Fibonacci kuaterniyonlara benzer şekilde, Nurkan ve Güven [10] bikompleks Fibonacci sayılarını tanımlamış ve bazı özelliklerini incelemişlerdir. Ayrıca, Halıcı ve Çürük [11] bileşenleri kompleks Fibonacci sayı dizisinin elemanlarından oluşan bikompleks sayıları incelemişlerdir.

Fibonacci sayı dizisi ile yakından ilişkili pek çok sayı dizisi mevcuttur. Bunlardan biri de Leonardo sayı dizisidir. Catarino ve Borges [12] çalışmalarında Leonardo sayılarını incelemişler ve bu sayıların bir takım özelliklerini elde etmişlerdir. Ayrıca, Alp ve Koçer [13] ise Catarino ve Borges [12]'in çalışmasında yer almayan Leonardo sayılarının yeni bir takım özelliklerini çalışmışlar ve oldukça kullanışlı

yeni formüller elde etmişlerdir. Bunlardan başka, Leonardo sayıları üzerine yapılan farklı çalışmalara Shannon [14], Vieira vd. [15], Alp ve Koçer [16, 17], Halıcı ve Çürük [18], Karataş [19, 20] ve Turan vd. [21] örnek olarak verilebilir. Karataş [19] çalışmasında kompleks Fibonacci sayılarına benzer şekilde kompleks Leonardo sayılarını tanımlamıştır. Turan vd. [21] ise bikompleks Leonardo sayılarını tanımlamışlar ve bu sayıların bazı özelliklerini incelemişlerdir.

Bu çalışmada, Halıcı ve Çürük [11] tarafından yapılan çalışmadan esinlenerek Karataş [19] tarafından tanımlanan kompleks Leonardo sayılarını kat sayı kabul eden yeni bikompleks sayılar tanımlanacak ve bu sayılar bikompleks-kompleks Leonardo sayıları olarak adlandırılacaktır. Üstelik bu yeni bikompleks sayı ailesinin bazı cebirsel özellikleri incelenecektir.

2. ÖN BİLGİLER VE LİTERATÜR ÇALIŞMASI

Bu bölümde, bir sonraki bölümde faydalanılacak bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1 Kompleks ve Bikompleks Sayılar

Bu kısımda, kompleks ve bikompleks sayıların tanımları ve bazı temel özellikleri üzerine kısa bir bilgi verilecektir.

Tanım 2.1.1 x ile y reel sayılar ve i ise $i^2 = -1$ şartını sağlayan imajiner birim olmak üzere, z kompleks sayılarının kümesi

$$\mathbb{C} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\} \quad (2.1)$$

şeklinde gösterilir. Üstelik, $z = x + iy$ kompleks sayısının reel kısmı $Re(z) = x$ ve imajiner kısmı $Im(z) = y$ şeklinde ifade edilir [22].

Bir $z = x + iy$ kompleks sayısının eşleniği

$$\bar{z} = x - iy \quad (2.2)$$

dir. Ayrıca, $z_1 = x_1 + iy_1$ ve $z_2 = x_2 + iy_2$ olmak üzere kompleks sayılarda toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (2.3)$$

ve

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \quad (2.4)$$

dir [22].

Bikompleks sayılar kompleks sayıların bir genellemesi olup bikompleks sayılar ilk olarak 1892 yılında Segre [7] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca Luna-Elizarraras vd. [9] bikompleks sayıların bir takım özelliklerini incelemişlerdir.

Tanım 2.1.2 z_1, z_2 kompleks sayılar ve $j, j^2 = -1$ şartını sağlayan imajiner birim olmak üzere, bir x bikompleks sayısı

$$x = z_1 + jz_2 \quad (2.5)$$

şeklinde ifade edilir [9].

Ayrıca, açık olarak, bir x bikompleks sayısı

$$\begin{aligned} x &= (x_1 + ix_2) + j(x_3 + ix_4) \\ &= x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4 \end{aligned} \quad (2.6)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada x_1, x_2, x_3, x_4 reel sayılar ve i, j ise

$$i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji, (ij)^2 = 1 \quad (2.7)$$

şartlarını sağlayan imajiner birimlerdir [9].

Diğer taraftan, iki bikompleks sayı $x = x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4$ ve $y = y_1 + iy_2 + jy_3 + i jy_4$ olsun. Bikompleks sayılarda toplama işlemi

$$x + y = (x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) + ij(x_4 + y_4) \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bikompleks sayılarda çarpma işlemi ise

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (x_1 + ix_2 + jx_3 + ijx_4)(y_1 + iy_2 + jy_3 + i jy_4) \\ &= (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4) \\ &\quad + i(x_1y_2 + x_2y_1 - x_3y_4 - x_4y_3) \\ &\quad + j(x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 - x_4y_2) \\ &\quad + ij(x_1y_4 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_1) \end{aligned} \quad (2.9)$$

şeklindedir. Bununla birlikte $ij = ji$ olduğundan $xy = yx$ dir.

Üstelik bir x bikompleks sayısının i, j ve ij birimlerine göre eşleniği sırasıyla

$$x^{ti} = (x_1 - ix_2) + j(x_3 - ix_4) \quad (2.10)$$

$$x^{tj} = (x_1 + ix_2) - j(x_3 + ix_4) \quad (2.11)$$

$$x^{tij} = (x_1 - ix_2) - j(x_3 - ix_4) \quad (2.12)$$

şeklindedir [9].

2.2 Fibonacci ve Lucas Sayı Dizileri

Bu kısımda, Fibonacci ve Lucas sayılarından kısaca bahsedilecektir.

Tanım 2.2.1 Başlangıç koşulları $F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere Fibonacci sayı dizisi

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.13)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır. Burada F_n , n 'inci Fibonacci sayısıdır [1, 2].

$n \geq 0$ için, ilk on Fibonacci sayısı: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34.

Tanım 2.2.2 Başlangıç koşulları $L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere için Lucas sayı dizisi

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, n \geq 2 \quad (2.14)$$

rekürans bağıntısıyla tanımlanır. Burada L_n , n 'inci Lucas sayısıdır [1, 2].

$n \geq 0$ için, ilk on Lucas sayısı: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76.

$n \geq 0$ olmak üzere, Fibonacci ve Lucas sayıları için Binet Formülleri sırasıyla

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad (2.15)$$

ve

$$L_n = \alpha^n + \beta^n \quad (2.16)$$

ile verilir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olup α ve β değerleri (2.13) ve (2.14) ile verilen rekürans bağıntılarının karakteristik denklemi olan $x^2 - x - 1 = 0$ denkleminin karakteristik kökleridir [1].

Ayrıca, $n \geq 0$ için F_n , n 'inci Fibonacci sayısı ve L_n , n 'inci Lucas sayısı olmak üzere, Fibonacci ve Lucas sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır [1]:

$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \quad (2.17)$$

$$F_n + L_n = 2F_n \quad (2.18)$$

$$F_n^2 - F_{n+r}F_{n-r} = (-1)^{n-r}F_r^2 = \frac{(\alpha\beta)^n}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^r\beta^{-r} + \alpha^{-r}\beta^r - 2) \quad (2.19)$$

$$\alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m = (-1)^mL_{n-m} \quad (2.20)$$

2.3 Fibonacci ve Lucas Sayılarının Bazı Uygulamaları

Bu kısımda, bileşenleri Fibonacci ve Lucas sayılarından oluşan kompleks ve bikompleks sayılar hakkında kısa bir bilgi verilecektir.

Tanım 2.3.1 F_n , n 'inci Fibonacci sayısı ve $i^2 = -1$ olmak üzere, n 'inci kompleks Fibonacci sayısı $\mathbb{C}F_n$

$$\mathbb{C}F_n = F_n + iF_{n+1} \quad (2.21)$$

dir [4].

$n \geq 0$ için, ilk beş kompleks Fibonacci sayısı: $i, 1 + i, 1 + 2i, 2 + 3i, 3 + 5i$.

Tanım 2.3.2 L_n , n 'inci Lucas sayısı ve $i^2 = -1$ olmak üzere n 'inci kompleks Lucas sayısı $\mathbb{C}L_n$

$$\mathbb{C}L_n = L_n + iL_{n+1} \quad (2.22)$$

dir [4].

$n \geq 0$ için, ilk beş kompleks Lucas sayısı: $2 + i, 1 + 3i, 3 + 4i, 4 + 7i, 7 + 11i$.

Tanım 2.3.3 n 'inci bikompleks Fibonacci sayısı $\mathbb{B}F_n$

$$\mathbb{B}F_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + ijF_{n+3} \quad (2.23)$$

dir. Burada F_n , n 'inci Fibonacci sayısı ve i, j ise $i^2 = j^2 = -1, ij = ji$ ve $(ij)^2 = 1$ şartlarını sağlayan imajiner birimlerdir [10].

$n \geq 0$ için, ilk beş bikompleks Fibonacci sayısı: $i + j + 2ij, 1 + i + 2j + 3ij, 1 + 2i + 3j + 5ij, 2 + 3i + 5j + 8ij, 3 + 5i + 8j + 13ij$.

Tanım 2.3.4 n 'inci bikompleks Lucas sayısı $\mathbb{B}L_n$

$$\mathbb{B}L_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + ijL_{n+3} \quad (2.24)$$

dir. Burada L_n, n 'inci Lucas sayısı ve i, j ise imajiner birimler olup $i^2 = j^2 = -1, ij = ji$ ve $(ij)^2 = 1$ şartlarını sağlar [10].

$n \geq 0$ için, ilk beş bikompleks Lucas sayısı: $2 + i + 3j + 4ij, 1 + 3i + 4j + 7ij, 3 + 4i + 7j + 11ij, 4 + 7i + 11j + 18ij, 7 + 11i + 18j + 29ij$.

2019 yılında Halıcı ve Çürük [11] katsayıları kompleks Fibonacci sayıları olan bikompleks sayıları tanımlamış ve bu sayıların bazı özelliklerini incelemişlerdir. Halıcı ve Çürük [11] tarafından tanımlanan bahsi geçen sayılar bu çalışmada bikompleks-kompleks Fibonacci sayıları olarak adlandırılacaktır.

Bikompleks-kompleks Fibonacci sayıları Halıcı ve Çürük [11] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 2.3.5 n 'inci kompleks Fibonacci katsayılı bikompleks sayı $\mathbb{B}CF_n$

$$\mathbb{B}CF_n = CF_n + iCF_{n+1} + jCF_{n+2} + ijCF_{n+3} \quad (2.25)$$

dir. Burada CF_n, n 'inci kompleks Fibonacci sayısı ve i, j ise $i^2 = j^2 = -1, ij = ji, (ij)^2 = 1$ şartlarını sağlayan imajiner birimlerdir [11].

$n \geq 0$ için, ilk üç bikompleks-kompleks Fibonacci sayısı: $-1 + 2i - 2j + 4ij, -1 + 2i - 3j + 6ij, -2 + 4i - 5j + 10ij$.

Ayrıca, $\mathbb{B}CF_n$ sayıları

$$\mathbb{B}CF_n + \mathbb{B}CF_{n+1} = \mathbb{B}CF_{n+2} \quad (2.26)$$

rekürans bağıntısına sahiptir [11].

2.4 Leonardo Sayı Dizisi

Bu kısımda, Fibonacci sayıları ile yakından ilişkili olan Leonardo sayıları hakkında bir takım temel özelliklere yer verilecektir.

Tanım 2.4.1 Başlangıç koşulları $Le_0 = Le_1 = 1$ olmak üzere Leonardo sayı dizisi

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, \quad n \geq 2 \quad (2.27)$$

veya

$$Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2}, \quad n \geq 2 \quad (2.28)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanır. Burada Le_n , n 'inci Leonardo sayısıdır [12].

$n \geq 0$ için ilk on Leonardo sayısı: 1, 1, 3, 5, 9, 15, 25, 41, 67, 109.

Üstelik n 'inci Leonardo sayısını doğrudan veren Leonardo sayılarının Binet formülü

$$Le_n = \frac{2\alpha^{n+1} - 2\beta^{n+1} - \alpha + \beta}{\alpha - \beta} \quad (2.29)$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\lambda^3 - 2\lambda^2 + 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleridir [12].

Le_n , n 'inci Leonardo sayısı ve F_n , n 'inci Fibonacci sayısı olmak üzere $n \geq m$ olacak şekildeki negatif olmayan m, n tam sayıları için aşağıdaki özellikler sağlanır [12, 13]:

$$Le_n = 2F_{n+1} - 1 \quad (2.30)$$

$$Le_{n+m} + (-1)^m Le_{n-m} = L_m(Le_n + 1) - 1 - (-1)^m \quad (2.31)$$

$$Le_{n+m} - (-1)^m Le_{n-m} = L_{n+1}(Le_{m-1} + 1) - 1 + (-1)^m \quad (2.32)$$

$$Le_{n+1} = Le_n + 2F_n \quad (2.33)$$

2.5 Leonardo Sayılarının Bazı Uygulamaları

Bu kısımda, kompleks Leonardo ve bikompleks Leonardo sayılarından kısaca söz edilecektir.

Tanım 2.5.1 $n \geq 1$ için n 'inci kompleks Leonardo sayısı $\mathbb{C}Le_n$

$$\mathbb{C}Le_n = Le_n + iLe_{n+1} \quad (2.34)$$

dir. Burada, Le_n , n 'inci Leonardo sayısı ve $i^2 = -1$ dir [19].

Karataş [19], (2.27) ile verilen Leonardo sayılarının rekürans bağıntısını ve (2.34) kompleks Leonardo sayılarının tanımını kullanarak $n \geq 2$ olmak üzere kompleks Leonardo sayıları için aşağıdaki eşitliği elde etmiştir:

$$\begin{aligned}\mathbb{C}Le_n &= (Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1) + i(Le_n + Le_{n-1} + 1) \\ &= \mathbb{C}Le_{n-1} + \mathbb{C}Le_{n-2} + \varepsilon\end{aligned}\quad (2.35)$$

dir. Burada $\varepsilon = 1 + i$ dir [19].

$n \geq 0$ için ilk on kompleks Leonardo sayısı: $1 + i, 1 + 3i, 3 + 5i, 5 + 9i, 9 + 15i, 15 + 25i, 25 + 41i, 41 + 67i, 67 + 109i, 109 + 177i$.

Üstelik, $n \geq 0$ için n 'inci kompleks Leonardo sayısı $\mathbb{C}Le_n$ için Binet formülü

$$\mathbb{C}Le_n = \frac{2\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \varepsilon \quad (2.36)$$

dir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ için $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ için $\underline{\beta} = 1 + i\beta$ şeklindedir [19].

Diğer yandan, Karataş [19] tarafından kompleks Leonardo sayılarının bazı toplam formülleri aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$\sum_{j=0}^n \mathbb{C}Le_j = \mathbb{C}Le_{n+2} - (n+2)\varepsilon - 2i, \quad (2.37)$$

$$\sum_{j=0}^n \mathbb{C}Le_{2j} = \mathbb{C}Le_{2n+1} - n\varepsilon - 2i, \quad (2.38)$$

$$\sum_{j=0}^n \mathbb{C}Le_{2j+1} = \mathbb{C}Le_{2n+2} - (n+2)\varepsilon. \quad (2.39)$$

Bikompleks Leonardo sayıları ise Turan vd. [21] tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 2.5.2 $n \geq 1$ için n 'inci bikompleks Leonardo sayısı $\mathbb{B}Le_n$

$$\mathbb{B}Le_n = Le_n + iLe_{n+1} + jLe_{n+2} + ijLe_{n+3} \quad (2.40)$$

şeklinde tanımlanır. Burada Le_n , n 'inci Leonardo sayısı ve i, j ise $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = ji, (ij)^2 = 1$ şartlarını sağlayan imajiner birimlerdir [21].

Leonardo sayısının rekürans bağıntısı (2.27) ve bikompleks Leonardo sayısının tanımı (2.40) kullanılarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\mathbb{B}Le_n = \mathbb{B}Le_{n-1} + \mathbb{B}Le_{n-2} + A \quad (2.41)$$

burada $A = 1 + i + j + ij$ dir [21].

$n \geq 0$ için ilk beş bikompleks Leonardo sayısı: $1 + i + 3j + 5ij, 1 + 3i + 5j + 9ij, 3 + 5i + 9j + 15ij, 5 + 9i + 15j + 25ij, 9 + 15i + 25j + 41ij$ dir.

Ayrıca Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı (2.28) dikkate alınarak

$$\mathbb{B}Le_{n+1} = 2\mathbb{B}Le_n - \mathbb{B}Le_{n-2} \quad (2.42)$$

rekürans bağıntısı elde edilir [21].

$n \geq 0$ için n 'inci bikompleks Leonardo sayısını veren Binet formülü

$$\mathbb{B}Le_n = \frac{2\bar{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\bar{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - A \quad (2.43)$$

olup burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \bar{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + ij\alpha^3, \bar{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + ij\beta^3$, ve $A = 1 + i + j + ij$ dir [21].

Üstelik, $(n + 1)$ 'inci bikompleks Fibonacci sayısı $\mathbb{B}F_{n+1}$ ve n 'inci bikompleks Leonardo sayısı $\mathbb{B}Le_n$ arasında

$$\mathbb{B}Le_n = 2\mathbb{B}F_{n+1} - A \quad (2.44)$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur [21].

3. BİKOMPLEKS-KOMPLEKS LEONARDO SAYILARI

Bu bölümde ilk olarak bir önceki bölümde bahsedilen bikompleks sayıların ve kompleks Leonardo sayılarının birlikte düşünülmesiyle elde edilecek olan bikompleks-kompleks Leonardo sayıları tanımlanacaktır. Daha sonra ise bu sayıların bazı özellikleri incelenecektir.

3.1 Bikompleks-Kompleks Leonardo Sayıları ve Bazı Temel Özellikleri

Bu kısımda ilk olarak bikompleks-kompleks Leonardo sayıları tanımlanacak ve devamında bu sayıların toplamı, çarpımı ve eşleniklerinden söz edilecektir. Ardından bikompleks-kompleks Leonardo sayıları için iki rekürans (yineleme) bağıntısı, Binet formülü, üreteç fonksiyonu ve bazı toplam formülleri verilecektir.

Tanım 3.1.1 n negatif olmayan bir tamsayı olmak üzere n 'inci bikompleks-kompleks Leonardo sayısı

$$\mathbb{B}CLe_n = CLe_n + iCLe_{n+1} + jCLe_{n+2} + ijCLe_{n+3} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır. Burada CLe_n , n 'inci kompleks Leonardo sayısı ve i, j ise $i^2 = j^2 = -1, ij = ji$ şartlarını sağlayan imajiner birimlerdir.

$\mathbb{B}CLe_m$ ve $\mathbb{B}CLe_n$ iki bikompleks-kompleks Leonardo sayısı olsun. Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının toplama ve çarpma işlemleri sırasıyla

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_m + \mathbb{B}CLe_n &= (CLe_m + iCLe_{m+1} + jCLe_{m+2} + ijCLe_{m+3}) \\ &\quad + (CLe_n + iCLe_{n+1} + jCLe_{n+2} + ijCLe_{n+3}) \\ &= (CLe_m + CLe_n) + i(CLe_{m+1} + CLe_{n+1}) \\ &\quad + j(CLe_{m+2} + CLe_{n+2}) + ij(CLe_{m+3} + CLe_{n+3}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_m \mathbb{B}CLe_n &= (CLe_m + iCLe_{m+1} + jCLe_{m+2} + ijCLe_{m+3}) \\ &\quad (CLe_n + iCLe_{n+1} + jCLe_{n+2} + ijCLe_{n+3}) \\ &= (CLe_m CLe_n - CLe_{m+1} CLe_{n+1} - CLe_{m+2} CLe_{n+2} + CLe_{m+3} CLe_{n+3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i(\mathbb{C}Le_m\mathbb{C}Le_{n+1} + \mathbb{C}Le_{m+1}\mathbb{C}Le_n - \mathbb{C}Le_{m+2}\mathbb{C}Le_{n+3} - \mathbb{C}Le_{m+3}\mathbb{C}Le_{n+2}) \\
& +j(\mathbb{C}Le_m\mathbb{C}Le_{n+2} - \mathbb{C}Le_{m+1}\mathbb{C}Le_{n+3} + \mathbb{C}Le_{m+2}\mathbb{C}Le_n - \mathbb{C}Le_{m+3}\mathbb{C}Le_{n+1}) \\
& +ij(\mathbb{C}Le_m\mathbb{C}Le_{n+3} + \mathbb{C}Le_{m+1}\mathbb{C}Le_{n+2} + \mathbb{C}Le_{m+2}\mathbb{C}Le_{n+1} + \mathbb{C}Le_{m+3}\mathbb{C}Le_n) \quad (3.3)
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca belirtmelidir ki $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_m\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = \mathbb{B}\mathbb{C}Le_n\mathbb{B}\mathbb{C}Le_m$ dir.

Diğer yandan $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n$, n 'inci bikompleks-kompleks Leonardo sayısı olmak üzere; $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n$ sayısının i, j ve ij birimlerine göre eşlenikleri sırasıyla

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n^{t_i} = (\mathbb{C}Le_n - i\mathbb{C}Le_{n+1}) + j(\mathbb{C}Le_{n+2} - i\mathbb{C}Le_{n+3}) \quad (3.4)$$

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n^{t_j} = (\mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1}) - j(\mathbb{C}Le_{n+2} + i\mathbb{C}Le_{n+3}) \quad (3.5)$$

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n^{t_{ij}} = (\mathbb{C}Le_n - i\mathbb{C}Le_{n+1}) - j(\mathbb{C}Le_{n+2} - i\mathbb{C}Le_{n+3}) \quad (3.6)$$

şeklinde dir. Üstelik; $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n$ bikompleks-kompleks Leonardo sayısı sırasıyla (3.4), (3.5) ve (3.6) ile verilen eşlenikleri ile çarpıldığında

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n^{t_i} &= (\mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
& \quad (\mathbb{C}Le_n - i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} - ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
&= \mathbb{C}Le_n^2 + \mathbb{C}Le_{n+1}^2 - \mathbb{C}Le_{n+2}^2 - \mathbb{C}Le_{n+3}^2 \\
& \quad + 2j(\mathbb{C}Le_n\mathbb{C}Le_{n+2} + \mathbb{C}Le_{n+1}\mathbb{C}Le_{n+3}), \quad (3.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n^{t_j} &= (\mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
& \quad (\mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} - j\mathbb{C}Le_{n+2} - ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
&= \mathbb{C}Le_n^2 - \mathbb{C}Le_{n+1}^2 + \mathbb{C}Le_{n+2}^2 - \mathbb{C}Le_{n+3}^2 \\
& \quad + 2i(\mathbb{C}Le_n\mathbb{C}Le_{n+1} + \mathbb{C}Le_{n+2}\mathbb{C}Le_{n+3}) \quad (3.8)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n^{t_{ij}} &= (\mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
& \quad (\mathbb{C}Le_n - i\mathbb{C}Le_{n+1} - j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
&= \mathbb{C}Le_n^2 + \mathbb{C}Le_{n+1}^2 + \mathbb{C}Le_{n+2}^2 + \mathbb{C}Le_{n+3}^2 \\
& \quad + 2ij(\mathbb{C}Le_n\mathbb{C}Le_{n+3} - \mathbb{C}Le_{n+1}\mathbb{C}Le_{n+2}) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

Şimdi bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ve i, j birimlerinin çarpımı yardımıyla ilk üç bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını belirleyelim:

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C}Le_0 &= \mathbb{C}Le_0 + i\mathbb{C}Le_1 + j\mathbb{C}Le_2 + ij\mathbb{C}Le_3 \\ &= 1 + i + i(1 + 3i) + j(3 + 5i) + ij(5 + 9i) \\ &= -2 + 2i - 6j + 10ij,\end{aligned}\tag{3.10}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C}Le_1 &= \mathbb{C}Le_1 + i\mathbb{C}Le_2 + j\mathbb{C}Le_3 + ij\mathbb{C}Le_4 \\ &= 1 + 3i + i(3 + 5i) + j(5 + 9i) + ij(9 + 15i) \\ &= -4 + 6i - 10j + 18ij,\end{aligned}\tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C}Le_2 &= \mathbb{C}Le_2 + i\mathbb{C}Le_3 + j\mathbb{C}Le_4 + ij\mathbb{C}Le_5 \\ &= 3 + 5i + i(5 + 9i) + j(9 + 15i) + ij(15 + 27i) \\ &= -6 + 10i - 16j + 30ij.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Şimdi ise bikompleks-kompleks Leonardo sayıları için iki farklı rekürans (yineleme) bağıntısını verecek teoremlere yer verilecektir.

Teorem 3.1.1 Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} = 2\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n - \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n-2}, n \geq 2\tag{3.13}$$

şeklindedir. Burada başlangıç koşulları

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C}Le_0 &= -2 + 2i - 6j + 10ij, \\ \mathbb{B}\mathbb{C}Le_1 &= -4 + 6i - 10j + 18ij, \\ \mathbb{B}\mathbb{C}Le_2 &= -6 + 10i - 16j + 30ij\end{aligned}$$

dır.

İspat: (3.1) ile verilen bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı ve (2.34) ile verilen kompleks Leonardo sayılarının tanımından

$$\begin{aligned}\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} &= \mathbb{C}Le_{n+1} + i\mathbb{C}Le_{n+2} + j\mathbb{C}Le_{n+3} + ij\mathbb{C}Le_{n+4} \\ &= Le_{n+1} + iLe_{n+2} + i(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) \\ &\quad + j(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) + ij(Le_{n+4} + iLe_{n+5})\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.28) ile verilen Leonardo sayılarının rekürans bağıntısından

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} &= (2Le_n - Le_{n-2}) + 2i(2Le_{n+1} - Le_{n-1}) \\
&\quad - (2Le_{n+2} - Le_n) + j(2Le_{n+2} - Le_n) \\
&\quad + 2ij(2Le_{n+3} - Le_{n+1}) - j(2Le_{n+4} - Le_{n+2}) \\
&= 2(Le_n + iLe_{n+1}) + 2i(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) \\
&\quad + 2j(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) + 2ij(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) \\
&\quad - (Le_{n-2} + iLe_{n-1}) - i(Le_{n-1} + iLe_n) \\
&\quad - j(Le_n + iLe_{n+1}) - ij(Le_{n+1} + Le_{n+2})
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Yeniden (2.34) ve (3.1) eşitliklerinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} &= 2(\mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3}) \\
&\quad - (\mathbb{C}Le_{n-2} + i\mathbb{C}Le_{n-1} + j\mathbb{C}Le_n + ij\mathbb{C}Le_{n+1}) \\
&= 2\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n - \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.1.2 $\omega = 2i + 2ij$ olsun. $n \geq 2$ tamsayısı için bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n-1} + \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n-2} + \omega \quad (3.14)$$

dır.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ve kompleks Leonardo sayılarının tanımı (2.34) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= \mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3} \\
&= (Le_n + iLe_{n+1}) + i(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) \\
&\quad + j(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) + ij(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) \\
&= Le_n + 2iLe_{n+1} - Le_{n+2} + jLe_{n+2} + 2ijLe_{n+3} - jLe_{n+4}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Ayrıca, Leonardo sayılarının (2.27) ile verilen rekürans bağıntısından faydalanılarak

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = (Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1) + 2i(Le_n + Le_{n-1} + 1)$$

$$\begin{aligned}
& -(Le_{n+1} + Le_n + 1) + j(Le_{n+1} + Le_n + 1) \\
& + 2ij(Le_{n+2} + Le_{n+1} + 1) - j(Le_{n+3} + Le_{n+2} + 1) \\
& = (Le_{n-1} + iLe_n) + i(Le_n + iLe_{n+1}) + j(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) + n \\
& + ij(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) + (Le_{n-2} + iLe_{n-1}) + i(Le_{n-1} + iLe_n) \\
& + j(Le_n + iLe_{n+1}) + ij(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) + 2i + 2ij \\
& = (\mathbb{C}Le_{n-1} + i\mathbb{C}Le_n + j\mathbb{C}Le_{n+1} + ij\mathbb{C}Le_{n+2}) \\
& + (\mathbb{C}Le_{n-2} + i\mathbb{C}Le_{n-1} + j\mathbb{C}Le_n + ij\mathbb{C}Le_{n+1}) + \omega \\
& = \mathbb{B}CLe_{n-1} + \mathbb{B}CLe_{n-2} + \omega
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise istenen sonuçtur.

Uyarı 3.1.1 Tüm alışma boyunca $\omega = 2i + 2ij$ olarak dikkate alınacaktır.

şimdi ise n 'inci bikompleks-kompleks Leonardo sayısını doğrudan verecek olan Binet formülü aşağıda ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.1.3 Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü

$$\mathbb{B}CLe_n = \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \quad (3.15)$$

şeklindedir. Burada $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \hat{\alpha} = 1 + 2i\alpha + (j-1)\alpha^2 + 2ij\alpha^3 - j\alpha^4$ ve $\hat{\beta} = 1 + 2i\beta + (j-1)\beta^2 + 2ij\beta^3 - j\beta^4$ dir.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ve kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (2.36) den

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_n &= \mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3} \\
&= \left(\frac{2\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \varepsilon \right) + i \left(\frac{2\underline{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\underline{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \varepsilon \right) \\
&+ j \left(\frac{2\underline{\alpha}\alpha^{n+3} - 2\underline{\beta}\beta^{n+3}}{\alpha - \beta} - \varepsilon \right) + ij \left(\frac{2\underline{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\underline{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

dir. Elde edilen bu son eşitlikte, (2.36) ile birlikte verilen $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha, \underline{\beta} = 1 + i\beta,$ $\varepsilon = 1 + i$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= \left(\frac{2(1+i\alpha)\alpha^{n+1} - 2(1+i\beta)\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - (1+i) \right) \\
&+ i \left(\frac{2(1+i\alpha)\alpha^{n+2} - 2(1+i\beta)\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - (1+i) \right) \\
&+ j \left(\frac{2(1+i\alpha)\alpha^{n+3} - 2(1+i\beta)\beta^{n+3}}{\alpha - \beta} - (1+i) \right) \\
&+ ij \left(\frac{2(1+i\alpha)\alpha^{n+4} - 2(1+i\beta)\beta^{n+4}}{\alpha - \beta} - (1+i) \right) \\
&= \frac{2\alpha^{n+1}(1+i\alpha)[1+i\alpha+j\alpha^2+ij\alpha^3]}{\alpha - \beta} \\
&- \frac{2\beta^{n+1}(1+i\beta)[1+i\beta+j\beta^2+ij\beta^3]}{\alpha - \beta} - (1+i)(1+i+j+ij) \\
&= \frac{2\alpha^{n+1}[1+2i\alpha+(j-1)\alpha^2+2ij\alpha^3-j\alpha^4]}{\alpha - \beta} \\
&- \frac{2\beta^{n+1}[1+2i\beta+(j-1)\beta^2+2ij\beta^3-j\beta^4]}{\alpha - \beta} - (2i+2ij)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\hat{\alpha} = 1 + 2i\alpha + (j-1)\alpha^2 + 2ij\alpha^3 - j\alpha^4$, $\hat{\beta} = 1 + 2i\beta + (j-1)\beta^2 + 2ij\beta^3 - j\beta^4$ ve $\omega = 2i + 2ij$ şeklinde ifade edildiğinde

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.1.4 $n \geq 0$ için bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının toplam formülleri için aşağıda verilmiştir:

$$1. \sum_{k=0}^n \mathbb{B}\mathbb{C}Le_k = \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+2} - (n+2)\omega + 2(2-2i+5j-8ij) \quad (3.16)$$

$$2. \sum_{k=0}^n \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2k} = \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2n+1} - n\omega + 2(1-2i+2j-4ij) \quad (3.17)$$

$$3. \sum_{k=0}^n \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2k+1} = \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2n+2} - (n+1)\omega + 2(1-i+3j-5ij) \quad (3.18)$$

İspat:

1. Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ve kompleks Leonardo sayılarının (2.37) ile verilen toplam formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbb{B}CLe_k &= \sum_{k=0}^n CLe_k + i \sum_{k=0}^n CLe_{k+1} + j \sum_{k=0}^n CLe_{k+2} + ij \sum_{k=0}^n CLe_{k+3} \\
&= CLe_{n+2} - (n+2)\varepsilon - 2i + i(CLe_{n+3} - (n+3)\varepsilon - (1+3i)) \\
&\quad + j(CLe_{n+4} - (n+4)\varepsilon - (2+6i)) \\
&\quad + ij(CLe_{n+5} - (n+5)\varepsilon - (5+11i))
\end{aligned}$$

bulunur. Kompleks Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı (2.35) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbb{B}CLe_k &= (CLe_{n+2} + iCLe_{n+3} + jCLe_{n+4} + ijCLe_{n+5}) \\
&\quad - (n+2)(1+i)(1+i+j+ij) + (4-4i+10j-16ij) \\
&= \mathbb{B}CLe_{n+2} - (n+2)\omega + 2(2-2i+5j-8ij)
\end{aligned}$$

elde edilir.

2. Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ile kompleks Leonardo sayılarının (2.38) ve (2.39) ile verilen toplam formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbb{B}CLe_{2k} &= \sum_{k=0}^n CLe_{2k} + i \sum_{k=0}^n CLe_{2k+1} + j \sum_{k=0}^n CLe_{2k+2} + ij \sum_{k=0}^n CLe_{2k+3} \\
&= CLe_{2n+1} - n\varepsilon - 2i + i(CLe_{2n+2} - (n+2)\varepsilon) \\
&\quad + j(CLe_{2n+3} - (n+1)\varepsilon - (1+3i)) \\
&\quad + ij(CLe_{2n+4} - (n+3)\varepsilon - (1+3i))
\end{aligned}$$

olup burada kompleks Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı (2.35) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbb{B}CLe_{2k} &= (CLe_{2n+1} + iCLe_{2n+2} + jCLe_{2n+3} + ijCLe_{2n+4}) \\
&\quad - n(1+i)(1+i+j+ij) - (-2+4i-4j+8ij) \\
&= \mathbb{B}CLe_{2n+1} - n\omega + 2(1-2i+2j-4ij)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3. Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ile kompleks Leonardo sayılarının (2.38) ve (2.39) ile verilen toplam formülleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2k+1} &= \sum_{k=0}^n \mathbb{C}Le_{2k+1} + i \sum_{k=0}^n \mathbb{C}Le_{2k+2} + j \sum_{k=0}^n \mathbb{C}Le_{2k+3} + ij \sum_{k=0}^n \mathbb{C}Le_{2k+4} \\
&= \mathbb{C}Le_{2n+2} - (n+2)\varepsilon + i(\mathbb{C}Le_{2n+3} - (n+1)\varepsilon - (1+3i)) \\
&\quad + j(\mathbb{C}Le_{2n+4} - (n+3)\varepsilon - (1+3i)) \\
&\quad + ij(\mathbb{C}Le_{2n+5} - (n+2)\varepsilon - (4+8i))
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada kompleks Leonardo sayılarının rekürans bağıntısı (2.35) yardımıyla

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2k+1} &= (\mathbb{C}Le_{2n+2} + i\mathbb{C}Le_{2n+3} + j\mathbb{C}Le_{2n+4} + ij\mathbb{C}Le_{2n+5}) \\
&\quad - (n+1)(1+i)(1+i+j+ij) - (-2+2i-6j+10ij) \\
&= \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{2n+2} - (n+1)\omega + 2(1-i+3j-5ij)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının üreteç fonksiyonu aşağıdaki teoremden verilecektir.

Teorem 3.1.5 $g(t)$ bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının üreteç fonksiyonunu göstermek üzere bu üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \frac{(-2+2i-6j+10ij) + 2(i+j-ij)t + 2(1-i+2j-3ij)t^2}{1-2t+t^3} \quad (3.19)$$

şeklindedir.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının üreteç fonksiyonu

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{B}\mathbb{C}Le_n t^n$$

şeklinde olup buradan

$$g(t) = \mathbb{B}CLe_0 + \mathbb{B}CLe_1 t + \mathbb{B}CLe_2 t^2 + \cdots + \mathbb{B}CLe_n t^n + \cdots \quad (3.20)$$

yazılabilir. (3.20) eşitliğin her iki tarafı $(1 - 2t + t^3)$ ile çarpılırsa

$$(1 - 2t + t^3)g(t) = (1 - 2t + t^3)(\mathbb{B}CLe_0 + \mathbb{B}CLe_1 t + \mathbb{B}CLe_2 t^2 + \cdots + \mathbb{B}CLe_n t^n + \cdots)$$

elde edilir. Buradan işlemlere devam edildiğinde

$$\begin{aligned} (1 - 2t + t^3)g(t) &= \mathbb{B}CLe_0 + \mathbb{B}CLe_1 t + \mathbb{B}CLe_2 t^2 + \cdots + \mathbb{B}CLe_n t^n + \cdots \\ &\quad - 2\mathbb{B}CLe_0 t - 2\mathbb{B}CLe_1 t^2 - \cdots - 2\mathbb{B}CLe_{n-1} t^n - \cdots \\ &\quad + \mathbb{B}CLe_0 t^3 + \mathbb{B}CLe_1 t^4 + \cdots + \mathbb{B}CLe_{n-3} t^n + \cdots \\ &= \mathbb{B}CLe_0 + (\mathbb{B}CLe_1 - 2\mathbb{B}CLe_0)t + (\mathbb{B}CLe_2 - 2\mathbb{B}CLe_1)t^2 \\ &\quad + (\mathbb{B}CLe_3 - 2\mathbb{B}CLe_2 + \mathbb{B}CLe_0)t^3 + \cdots \\ &\quad + (\mathbb{B}CLe_n - 2\mathbb{B}CLe_{n-1} + \mathbb{B}CLe_{n-3})t^n + \cdots \\ &= \mathbb{B}CLe_0 + (\mathbb{B}CLe_1 - 2\mathbb{B}CLe_0)t + (\mathbb{B}CLe_2 - 2\mathbb{B}CLe_1)t^2 \\ &\quad + \sum_{n=3}^{\infty} (\mathbb{B}CLe_n - 2\mathbb{B}CLe_{n-1} + \mathbb{B}CLe_{n-3})t^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının (3.13) ile verilen rekürans bağıntısından yararlanılarak yukarıda elde edilen son ifade

$$(1 - 2t + t^3)g(t) = \mathbb{B}CLe_0 + (\mathbb{B}CLe_1 - 2\mathbb{B}CLe_0)t + (\mathbb{B}CLe_2 - 2\mathbb{B}CLe_1)t^2$$

şeklindedir. Buradan

$$g(t) = \frac{\mathbb{B}CLe_0 + (\mathbb{B}CLe_1 - 2\mathbb{B}CLe_0)t + (\mathbb{B}CLe_2 - 2\mathbb{B}CLe_1)t^2}{1 - 2t + t^3}$$

olup (3.10), (3.11) ve (3.12) ile verilen başlangıç koşulları dikkate alındığında

$$g(t) = \frac{(-2 + 2i - 6j + 10ij) + 2(i + j - ij)t + 2(1 - i + 2j - 3ij)t^2}{1 - 2t + t^3}$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

3.2 Bikompleks-Kompleks Leonardo Sayıları İçin Bazı Özdeşlikler

Bu kısımda bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını ilgilendiren bazı özdeşlikler verilecektir. İlk olarak, bikompleks-kompleks Leonardo sayıları için Cassini özdeşliği ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.2.1 $n \geq 3$ tam sayısı için bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Cassini özdeşliği

$$\mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-1}\mathbb{B}CLe_{n+1} = 12(-1)^n(3j + 4ij) + \mathbb{B}CLe_{n-3}\omega + \omega^2 \quad (3.21)$$

şeklindedir.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (3.15) dikkate alınır

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-1}\mathbb{B}CLe_{n+1} &= \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^n - 2\hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\ &= \left(\frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2n+2} - 8\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{2n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &\quad - \left(\frac{4\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 4\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) + \omega^2 \\ &\quad - \left(\frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2n+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^n\beta^{n+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+2}\beta^n + 4\hat{\beta}^2\beta^{2n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} \omega \right) + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^n - 2\hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \omega \right) - \omega^2 \\ &= \frac{-8\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^n\beta^{n+2} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+2}\beta^n}{(\alpha - \beta)^2} \\ &\quad - \frac{4\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 4\hat{\beta}\beta^{n+1} - 2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} + 2\hat{\beta}\beta^{n+2} - 2\hat{\alpha}\alpha^n + 2\hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \omega \\ &= \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^n\beta^n(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\hat{\alpha}\alpha^n(\alpha^2 - 2\alpha + 1) - 2\hat{\beta}\beta^n(\beta^2 - 2\beta + 1)}{\alpha - \beta} \omega$$

elde edilir. Üstelik $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$, $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \beta^2$, $\beta^2 - 2\beta + 1 = \alpha^2$ ve $\alpha\beta = -1$ olmasından faydalanarak

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-1}\mathbb{B}CLe_{n+1} &= 4(-1)^n \hat{\alpha}\hat{\beta} + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n-2} - 2\hat{\beta}\beta^{n-2}}{\alpha - \beta} - \omega + \omega \right) \omega \\ &= 4(-1)^n \hat{\alpha}\hat{\beta} + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n-2} - 2\hat{\beta}\beta^{n-2}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \omega + \omega^2 \end{aligned}$$

şeklindedir. (3.15) Binet formülü ve $\hat{\alpha}\hat{\beta} = 9j + 12ij$ eşitliği kullanılarak

$$\mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-1}\mathbb{B}CLe_{n+1} = 12(-1)^n(3j + 4ij) + \mathbb{B}CLe_{n-3}\omega + \omega^2$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sıradaki teorem bize bikompleks-kompleks Leonardo sayıları için Catalan özdeşliğini vermektedir.

Teorem 3.2.2 $n \geq r$ olmak üzere n ve r negatif olmayan tam sayıları için bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Catalan özdeşliği

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-r}\mathbb{B}CLe_{n+r} &= 12(-1)^{n-r+1}(3j + 4ij)F_r^2 \\ &\quad - (2\mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+r} - \mathbb{B}CLe_{n-r})\omega \quad (3.22) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada F_r , r 'inci Fibonacci sayısıdır.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (3.15) kullanılarak

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-r}\mathbb{B}CLe_{n+r} &= \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right)^2 \\ &\quad - \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n-r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n-r+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+r+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2n+2} - 8\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{2n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - \left(\frac{4\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 4\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) + \omega^2 \\
&\quad - \left(\frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2n+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+r+1}\beta^{n-r+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n-r+1}\beta^{n+r+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{2n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&\quad + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+r+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n-r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n-r+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) - \omega^2 \\
&= \left(\frac{-8\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+r+1}\beta^{n-r+1} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n-r+1}\beta^{n+r+1}}{(\alpha - \beta)^2} \right) \\
&\quad - \left(\frac{4\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 4\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+r+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) \\
&\quad + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n-r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n-r+1}}{\alpha - \beta} \omega \right) \\
&= \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1}(\alpha^r\beta^{-r} - 2 + \alpha^{-r}\beta^r)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - 2 \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega + \omega \right) \omega \\
&\quad + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+r+1}}{\alpha - \beta} - \omega + \omega \right) \omega \\
&\quad + \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n-r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n-r+1}}{\alpha - \beta} - \omega + \omega \right) \omega
\end{aligned}$$

olduğu görülür. (3.15) Binet formülünden

$$\begin{aligned}
&\mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-r}\mathbb{B}CLe_{n+r} \\
&= \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1}(\alpha^r\beta^{-r} - 2 + \alpha^{-r}\beta^r)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - 2(\mathbb{B}CLe_n + \omega)\omega + (\mathbb{B}CLe_{n+r} + \omega)\omega + (\mathbb{B}CLe_{n-r} + \omega)\omega \\
&= 4\hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha\beta)^{n-r+1} \left(\frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha - \beta} \right)^2 \\
&\quad - (2\mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+r} - \mathbb{B}CLe_{n-r})\omega
\end{aligned}$$

dir. Fibonacci sayılarının Binet formülü (2.15) ve $\hat{\alpha}\hat{\beta} = 9j + 12ij$ eşitliği yardımıyla

$$\begin{aligned}\mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-r}\mathbb{B}CLe_{n+r} &= 12(-1)^{n-r+1}(3i + 4ij)F_r^2 \\ &\quad - (2\mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+r} - \mathbb{B}CLe_{n-r})\omega\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 3.2.1 Bikompleks-kompleks Leonardo sayıları için (3.22) denklemi ile verilen Catalan özdeşliğinde özel olarak $r = 1$ alınırsa, (3.21) denklemi ile verilen Cassini özdeşliği elde edilir.

Gerçekten, (3.22) denkleminde $r = 1$ alınırsa ve bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının (3.13) ve (3.14) ile verilen rekürans bağıntıları dikkate alındığında

$$\begin{aligned}\mathbb{B}CLe_n^2 - \mathbb{B}CLe_{n-1}\mathbb{B}CLe_{n+1} &= 12(-1)^n(3j + 4ij)F_1^2 - (2\mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega \\ &= 12(-1)^n(3j + 4ij) - (\mathbb{B}CLe_{n+1} + \mathbb{B}CLe_{n-2} - \mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega \\ &= 12(-1)^n(3j + 4ij) - (\mathbb{B}CLe_{n-2} - \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega \\ &= 12(-1)^n(3j + 4ij) - (\mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n-1} - \mathbb{B}CLe_{n-1} - \omega)\omega \\ &= 12(-1)^n(3j + 4ij) - (\mathbb{B}CLe_n - 2\mathbb{B}CLe_{n-1} - \omega)\omega \\ &= 12(-1)^n(3j + 4ij) - (-\mathbb{B}CLe_{n-3} - \omega)\omega \\ &= 12(-1)^n(3j + 4ij) + \mathbb{B}CLe_{n-3}\omega + \omega^2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuçtur.

Aşağıdaki teoremden bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının d'Ocagne özdeşliği verilecektir.

Teorem 3.2.3 $m > 0$ ve $n \geq m$ olacak şekildeki m ve n tam sayıları için bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının d'Ocagne özdeşliği

$$\begin{aligned}\mathbb{B}CLe_m\mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_{m+1} &= 12(-1)^m(3j + 4ij)F_{n-m} \\ &\quad + (\mathbb{B}CLe_{m-1} - \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega\end{aligned}\quad (3.23)$$

şeklindedir. Burada F_{n-m} , $(n - m)$ 'inci Fibonacci sayısıdır.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (3.15) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_m \mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_n \mathbb{B}CLe_{m+1} \\
&= \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
&\quad - \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+2} - 2\hat{\beta}\beta^{m+2}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
&= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+3} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+1}\beta^{n+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+2}\beta^{m+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+3}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta}\omega + \omega^2 \\
&\quad - \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{n+m+3} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{m+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+2}\beta^{n+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+3}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\omega + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+2} - 2\hat{\beta}\beta^{m+2}}{\alpha - \beta}\omega - \omega^2 \\
&= - \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+1}\beta^{n+2} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+2}\beta^{m+1} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{m+2} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+2}\beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad + \frac{-2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} + 2\hat{\beta}\beta^{m+1} + 2\hat{\alpha}\alpha^{m+2} - 2\hat{\beta}\beta^{m+2}}{\alpha - \beta}\omega \\
&\quad + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1} - 2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} + 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta}\omega \\
&= \frac{-4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+1}\beta^{n+1}(\alpha - \beta) + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{m+1}(\alpha - \beta)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^m(\alpha^2 - \alpha) - 2\hat{\beta}\beta^m(\beta^2 - \beta)}{\alpha - \beta}\omega \\
&\quad - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^n(\alpha^2 - \alpha) - 2\hat{\beta}\beta^n(\beta^2 - \beta)}{\alpha - \beta}\omega \\
&= 4\hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha\beta)^m \frac{(\alpha^{n-m} - \beta^{n-m})}{\alpha - \beta} + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^m - 2\hat{\beta}\beta^m}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^n - 2\hat{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta}\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, Fibonacci sayılarının Binet formülü (2.15) ve bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (3.15) ile birlikte $\alpha\beta = -1$ ve $\hat{\alpha}\hat{\beta} = 9j + 12ij$ değerleri göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_m \mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_n \mathbb{B}CLe_{m+1} &= 12(-1)^m(3j + 4ij)F_{n-m} \\
&\quad + (\mathbb{B}CLe_{m-1} - \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sıradaki teoremdе bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını ilgilendiren Honsberger özdeşliği verilecektir.

Teorem 3.2.4 $m \geq 1, n \geq 0$ olacak şekilde m ve n tam sayıları için bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Honsberger özdeşliği

$$\mathbb{B}CLe_{m-1}\mathbb{B}CLe_n + \mathbb{B}CLe_m\mathbb{B}CLe_{n+1} = \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+2} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+2}}{\alpha - \beta} + (\mathbb{B}CLe_{m+1} + \mathbb{B}CLe_{n+2})\omega \quad (3.24)$$

şeklindedir.

İspat: (3.15) ile verilen Binet formülü dikkate alındığında

$$\begin{aligned} & \mathbb{B}CLe_{m-1}\mathbb{B}CLe_n + \mathbb{B}CLe_m\mathbb{B}CLe_{n+1} \\ &= \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^m - 2\hat{\beta}\beta^m}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\ &+ \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\ &= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^m\beta^{n+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^m + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &- \frac{2\hat{\alpha}\alpha^m - 2\hat{\beta}\beta^m}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\omega + \omega^2 \\ &+ \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{n+m+3} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+1}\beta^{n+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+2}\beta^{m+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+3}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &- \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+2} - 2\hat{\beta}\beta^{n+2}}{\alpha - \beta}\omega + \omega^2 \\ &= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+1}(1 + \alpha^2) + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+1}(1 + \beta^2)}{(\alpha - \beta)^2} \\ &- \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^m\beta^{n+1}(1 + \alpha\beta) + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^m(1 + \alpha\beta)}{(\alpha - \beta)^2} \\ &- \frac{2\hat{\alpha}\alpha^m(1 + \alpha) - 2\hat{\beta}\beta^m(1 + \beta)}{\alpha - \beta}\omega \\ &- \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1}(1 + \alpha) - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}(1 + \beta)}{\alpha - \beta}\omega + 2\omega^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Üstelik, $1 + \alpha^2 = \alpha(\alpha - \beta)$, $1 + \beta^2 = -\beta(\alpha - \beta)$, $1 + \alpha = \alpha^2$ ve $1 +$

$\beta = \beta^2$ gerçeğinden faydalanılarak

$$\begin{aligned} & \mathbb{B}CLe_{m-1}\mathbb{B}CLe_n + \mathbb{B}CLe_m\mathbb{B}CLe_{n+1} \\ &= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+2} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+2}}{\alpha - \beta} \\ & \quad - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+2} - 2\hat{\beta}\beta^{m+2}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+3} - 2\hat{\beta}\beta^{n+3}}{\alpha - \beta}\omega + 2\omega^2 \end{aligned}$$

dır. O halde, (3.15) den

$$\begin{aligned} & \mathbb{B}CLe_{m-1}\mathbb{B}CLe_n + \mathbb{B}CLe_m\mathbb{B}CLe_{n+1} \\ &= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+2} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+2}}{\alpha - \beta} - (\mathbb{B}CLe_{m+1} + \mathbb{B}CLe_{n+2})\omega \end{aligned}$$

olup böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi ise bikompleks-kompleks Leonardo sayılarını ilgilendiren Vajda özdeşliği ifade ve ispat edilecektir.

Teorem 3.2.5 k, m ve n negatif olmayan tam sayılar olmak üzere bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Vajda özdeşliği

$$\begin{aligned} & \mathbb{B}CLe_{n+m}\mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_{n+m+k} \\ &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}F_mF_k \\ & \quad - (\mathbb{B}CLe_{n+m} + \mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+m+k})\omega \quad (3.25) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Burada F_m ve F_k , sırasıyla m 'inci ve k 'inci Fibonacci sayılarıdır.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülünü (3.15) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & \mathbb{B}CLe_{n+m}\mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_{n+m+k} \\ &= \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+m+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+k+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+k+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+m+k+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+m+k+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
& = \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2n+m+k+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+m+1}\beta^{n+k+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+k+1}\beta^{n+m+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{2n+m+k+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
& \quad - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+m+1}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+k+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+k+1}}{\alpha - \beta}\omega + \omega^2 \\
& \quad + \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+m+k+1} - 4\hat{\alpha}^2\alpha^{2n+m+k+2} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+m+k+1}\beta^{n+1} - 4\hat{\beta}^2\beta^{2n+m+k+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
& \quad + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\omega + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+m+k+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+m+k+1}}{\alpha - \beta}\omega - \omega^2 \\
& = - \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+m+1}\beta^{n+k+1} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+k+1}\beta^{n+m+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
& \quad + \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+m+k+1} + 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+m+k+1}\beta^{n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \\
& \quad - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+m+1}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+k+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+k+1}}{\alpha - \beta}\omega \\
& \quad + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\omega + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+m+k+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+m+k+1}}{\alpha - \beta}\omega
\end{aligned}$$

dir. Burada bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (3.15) dikkate alınır ve bazı düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_{n+m}\mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_{n+m+k} \\
& = \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+m+1}\beta^{n+1}(\alpha^k - \beta^k) - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+m+1}(\alpha^k - \beta^k)}{(\alpha - \beta)^2} \\
& \quad - (\mathbb{B}CLe_{n+m} + \mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+m+k})\omega \\
& = \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{n+1}(\alpha^m - \beta^m)(\alpha^k - \beta^k)}{(\alpha - \beta)^2} \\
& \quad - (\mathbb{B}CLe_{n+m} + \mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+m+k})\omega
\end{aligned}$$

bulunur. Fibonacci sayılarının Binet formülü (2.15) kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_{n+m}\mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_{n+m+k} \\
& = 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}F_mF_k \\
& \quad - (\mathbb{B}CLe_{n+m} + \mathbb{B}CLe_{n+k} - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{n+m+k})\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2.2 (3.25) ile verilen Vajda özdeşliğinde m ve k tam sayılarının özel durumları için daha önce ifade ve ispatları verilen Cassini, Catalan ve d'Ocagne özdeşlikleri elde edilmektedir. Gerçekten;

- (3.25) eşitliğinde $m = 1, k = -1$ alınırsa:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}CLe_{n+1}\mathbb{B}CLe_{n-1} - \mathbb{B}CLe_n^2 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}F_1F_{-1} \\
 &\quad - (\mathbb{B}CLe_{n+1} + \mathbb{B}CLe_{n-1} - 2\mathbb{B}CLe_n)\omega \\
 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1} - (\mathbb{B}CLe_{n-3} + \omega)\omega \\
 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1} - \mathbb{B}CLe_{n-3}\omega - \omega^2
 \end{aligned}$$

elde edilir ki bu sonuç (3.21) ile verilen Cassini özdeşliğine denktir. Burada bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının (3.13) ve (3.14) ile verilen rekürans bağıntıları kullanılmıştır.

- (3.25) eşitliğinde $m \rightarrow r, k \rightarrow -r$ alınırsa:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}CLe_{n+r}\mathbb{B}CLe_{n-r} - \mathbb{B}CLe_n^2 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}F_rF_{-r} \\
 &\quad - (\mathbb{B}CLe_{n+r} + \mathbb{B}CLe_{n-r} - 2\mathbb{B}CLe_n)\omega \\
 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}(-1)^{r+1}F_r^2 \\
 &\quad - (\mathbb{B}CLe_{n+r} + \mathbb{B}CLe_{n-r} - 2\mathbb{B}CLe_n)\omega \\
 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+r}F_r^2 \\
 &\quad - (\mathbb{B}CLe_{n+r} + \mathbb{B}CLe_{n-r} - 2\mathbb{B}CLe_n)\omega
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan sonuç (3.22) ile verilen Catalan özdeşliğine denktir. Burada Fibonacci sayılarına ait (2.17) bağıntısı kullanılmıştır.

- (3.25) eşitliğinde $m \rightarrow m - n$ ve $k = 1$ alınırsa:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{B}CLe_m\mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_{m+1} &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}F_{m-n}F_1 \\
 &\quad - (\mathbb{B}CLe_m + \mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{m+1})\omega \\
 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}F_{-(n-m)} \\
 &\quad - (\mathbb{B}CLe_m + \mathbb{B}CLe_{n+1} - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_{m+1})\omega \\
 &= 12(3j + 4ij)(-1)^{n+1}(-1)^{n-m+1}F_{n-m}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-\mathbb{B}CLe_{m-1} + \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega \\
& = 12(3j + 4ij)(-1)^m F_{n-m} \\
& \quad + (\mathbb{B}CLe_{m-1} - \mathbb{B}CLe_{n-1})\omega
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu sonuç (3.23) ile verilen d'Ocagne özdeşliğidir. Burada (3.14) rekürans bağıntısı ve (2.17) bağıntısı kullanılmıştır.

Şimdi, bikompleks-kompleks Leonardo sayıları ile literatürde var olan Fibonacci, Lucas, kompleks Fibonacci, kompleks Lucas, bikompleks Fibonacci, bikompleks Leonardo ve bikompleks-kompleks Fibonacci sayıları arasındaki ilişki incelenecektir.

Aşağıdaki teoremden Bikompleks-kompleks Leonardo sayıları ile Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi veren bir sonuç yer almaktadır.

Teorem 3.2.6 $r \leq m, s \leq m$ olacak şekilde negatif olmayan m, r ve s tam sayıları için bikompleks-kompleks Leonardo sayıları ile Fibonacci sayıları arasında

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_{m+r}\mathbb{B}CLe_{m-r} - \mathbb{B}CLe_{m+s}\mathbb{B}CLe_{m-s} \\
& = 12(3i + 4ij)((-1)^{m-r}F_r^2 + (-1)^{m-s+1}F_s^2) \\
& \quad + (\mathbb{B}CLe_{m+s} + \mathbb{B}CLe_{m-s} - \mathbb{B}CLe_{m+r} - \mathbb{B}CLe_{m-r})\omega \quad (3.26)
\end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Burada F_r ve F_s , sırasıyla r 'inci ve s 'inci Fibonacci sayılarıdır.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülü (3.15) dikkate alındığında

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_{m+r}\mathbb{B}CLe_{m-r} - \mathbb{B}CLe_{m+s}\mathbb{B}CLe_{m-s} \\
& = \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+r+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m-r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m-r+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
& \quad - \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+s+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+s+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m-s+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m-s+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
& = \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2m+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+r+1}\beta^{m-r+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m-r+1}\beta^{m+r+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{2m+2}}{(\alpha - \beta)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+r+1}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m-r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m-r+1}}{\alpha - \beta}\omega + \omega^2 \\
& - \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{2m+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+s+1}\beta^{m-s+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m-s+1}\beta^{m+s+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{2m+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
& + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+s+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+s+1}}{\alpha - \beta}\omega + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m-s+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m-s+1}}{\alpha - \beta}\omega - \omega^2 \\
& = \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha\beta)^m}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^r\beta^{-r} + \alpha^{-r}\beta^r - \alpha^s\beta^{-s} - \alpha^{-s}\beta^s) \\
& + (\mathbb{B}CLe_{m+s} + \mathbb{B}CLe_{m-s} - \mathbb{B}CLe_{m+r} - \mathbb{B}CLe_{m-r})\omega \\
& = 12(3j + 4ij)\frac{(\alpha\beta)^m}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^r\beta^{-r} + \alpha^{-r}\beta^r - 2 - \alpha^s\beta^{-s} - \alpha^{-s}\beta^s + 2) \\
& + (\mathbb{B}CLe_{m+s} + \mathbb{B}CLe_{m-s} - \mathbb{B}CLe_{m+r} - \mathbb{B}CLe_{m-r})\omega \\
& = 12(3j + 4ij)\left(\frac{(\alpha\beta)^m}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^r\beta^{-r} + \alpha^{-r}\beta^r - 2)\right) \\
& - 12(3j + 4ij)\left(\frac{(\alpha\beta)^m}{(\alpha - \beta)^2}(\alpha^s\beta^{-s} + \alpha^{-s}\beta^s - 2)\right) \\
& + (\mathbb{B}CLe_{m+s} + \mathbb{B}CLe_{m-s} - \mathbb{B}CLe_{m+r} - \mathbb{B}CLe_{m-r})\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.19) denklemi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_{m+r}\mathbb{B}CLe_{m-r} - \mathbb{B}CLe_{m+s}\mathbb{B}CLe_{m-s} \\
& = 12(3i + 4ij)((-1)^{m-r}F_r^2 + (-1)^{m-s+1}F_s^2) \\
& + (\mathbb{B}CLe_{m+s} + \mathbb{B}CLe_{m-s} - \mathbb{B}CLe_{m+r} - \mathbb{B}CLe_{m-r})\omega
\end{aligned}$$

olup ispat tamamlanır.

Sıradaki teoremden bikompleks-kompleks Leonardo sayıları ile Lucas sayıları arasındaki bağıntı incelenmektedir.

Teorem 3.2.7 $n \geq m, s \geq r$ ve $n + m = s + r$ olacak şekildeki negatif olmayan n, m, r, s tam sayıları için bikompleks-kompleks Leonardo sayıları ile Lucas sayıları arasında

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_n\mathbb{B}CLe_m - \mathbb{B}CLe_s\mathbb{B}CLe_r & = \frac{12}{5}(3j + 4ij)((-1)^mL_{n-m} - (-1)^rL_{s-r}) \\
& + (\mathbb{B}CLe_s + \mathbb{B}CLe_r - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_m)\omega \quad (3.27)
\end{aligned}$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Burada L_{n-m} ve L_{s-r} sırasıyla $(n-m)$ 'inci ve $(s-r)$ 'inci Lucas sayılarıdır.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının (3.15) ile verilen Binet formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}CLe_n \mathbb{B}CLe_m - \mathbb{B}CLe_s \mathbb{B}CLe_r \\
&= \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
&\quad - \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{s+1} - 2\hat{\beta}\beta^{s+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \left(\frac{2\hat{\alpha}\alpha^{r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{r+1}}{\alpha - \beta} - \omega \right) \\
&= \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{m+n+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{n+1}\beta^{m+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{m+1}\beta^{n+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{m+n+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{n+1} - 2\hat{\beta}\beta^{n+1}}{\alpha - \beta}\omega - \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{m+1} - 2\hat{\beta}\beta^{m+1}}{\alpha - \beta}\omega + \omega^2 \\
&\quad - \frac{4\hat{\alpha}^2\alpha^{s+r+2} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{s+1}\beta^{r+1} - 4\hat{\alpha}\hat{\beta}\alpha^{r+1}\beta^{s+1} + 4\hat{\beta}^2\beta^{s+r+2}}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{s+1} - 2\hat{\beta}\beta^{s+1}}{\alpha - \beta}\omega + \frac{2\hat{\alpha}\alpha^{r+1} - 2\hat{\beta}\beta^{r+1}}{\alpha - \beta}\omega - \omega^2 \\
&= \frac{4\hat{\alpha}\hat{\beta}(\alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m - \alpha^r\beta^s - \alpha^s\beta^r)}{(\alpha - \beta)^2} \\
&\quad + (\mathbb{B}CLe_s + \mathbb{B}CLe_r - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_m)\omega
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (2.20) denklemi göz önüne alındığında

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_n \mathbb{B}CLe_m - \mathbb{B}CLe_s \mathbb{B}CLe_r &= \frac{12}{5}(3j + 4ij)((-1)^m L_{n-m} - (-1)^r L_{s-r}) \\
&\quad + (\mathbb{B}CLe_s + \mathbb{B}CLe_r - \mathbb{B}CLe_n - \mathbb{B}CLe_m)\omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.8 $n \geq m$ olacak şekildeki negatif olmayan n ve m tam sayıları için bikompleks-kompleks Leonardo sayıları, Lucas sayıları ve bikompleks Leonardo sayıları arasında

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= \mathbb{B}Le_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} + iL_m \mathbb{B}Le_{n+1} \\
&\quad + iA(L_m - 1 - (-1)^m)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur. Burada L_m , m 'inci Lucas sayısı, $\mathbb{B}Le_{n+1}, (n+1)$ 'inci bikompleks Leonardo sayısı ve $A = 1 + i + j + ij$ 'dir.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) den

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= CLe_{n+m} + iCLe_{n+m+1} + jCLe_{n+m+2} + ijCLe_{n+m+3} \\
&\quad + (-1)^m (CLe_{n-m} + iCLe_{n-m+1} + jCLe_{n-m+2} + ijCLe_{n-m+3}) \\
&= CLe_{n+m} + (-1)^m CLe_{n-m} + i(CLe_{n+m+1} + (-1)^m CLe_{n-m+1}) \\
&\quad + j(CLe_{n+m+2} + (-1)^m CLe_{n-m+2}) + ij(CLe_{n+m+3} + (-1)^m CLe_{n-m+3})
\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.31) ve (2.34) denklemlerinden faydalanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= Le_{n+m} + iLe_{n+m+1} + (-1)^m (Le_{n-m} + iLe_{n-m+1}) \\
&\quad + i(Le_{n+m+1} + iLe_{n+m+2}) + (-1)^m i(Le_{n-m+1} + iLe_{n-m+2}) \\
&\quad + j(Le_{n+m+2} + iLe_{n+m+3}) + (-1)^m j(Le_{n-m+2} + iLe_{n-m+3}) \\
&\quad + ij(Le_{n+m+3} + iLe_{n+m+4}) + (-1)^m ij(Le_{n-m+3} + iLe_{n-m+4}) \\
&= Le_{n+m} + iLe_{n+m+1} + jLe_{n+m+2} + ijLe_{n+m+3} \\
&\quad + (-1)^m (Le_{n-m} + iLe_{n-m+1} + jLe_{n-m+2} + ijLe_{n-m+3}) \\
&\quad + i(Le_{n+m+1} + (-1)^m Le_{n-m+1}) + i^2(Le_{n+m+2} + (-1)^m Le_{n-m+2}) \\
&\quad + ij(Le_{n+m+3} + (-1)^m Le_{n-m+3}) + i^2j(Le_{n+m+4} + (-1)^m Le_{n-m+4})
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.40) denkleminde

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}CLe_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= \mathbb{B}Le_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} \\
&\quad + i(L_m(Le_{n+1} + 1) - 1 - (-1)^m) \\
&\quad + i^2(L_m(Le_{n+2} + 1) - 1 - (-1)^m) \\
&\quad + ij(L_m(Le_{n+3} + 1) - 1 - (-1)^m) \\
&\quad + i^2j(L_m(Le_{n+4} + 1) - 1 - (-1)^m) \\
&= \mathbb{B}Le_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} \\
&\quad + iL_m(Le_{n+1} + iLe_{n+2} + jLe_{n+3} + ijLe_{n+4}) \\
&\quad + iL_m(1 + i + j + ij) - i(1 + i + j + ij) \\
&\quad - (-1)^m i(1 + i + j + ij) \\
&= \mathbb{B}Le_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} + iL_m \mathbb{B}Le_{n+1}
\end{aligned}$$

$$+iA(L_m - 1 - (-1)^m)$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.9 $n \geq m$ olacak şekilde negatif olmayan n ve m tam sayıları için, bikompleks-kompleks Leonardo sayıları ile bikompleks Lucas sayıları ve bikompleks Leonardo sayıları arasında mevcut olan bir diğer bağıntı ise

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= \mathbb{B}Le_{n+m} + (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} + iL_m \mathbb{B}Le_{n+1} \\ &\quad + iA(L_m - 1 - (-1)^m) \end{aligned} \quad (3.29)$$

dir. Burada $A = 1 + i + j + ij$ 'dir.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) dikkate alınır

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= \mathbb{C}Le_{n+m} + i\mathbb{C}Le_{n+m+1} + j\mathbb{C}Le_{n+m+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+m+3} \\ &\quad - (-1)^m (\mathbb{C}Le_{n-m} + i\mathbb{C}Le_{n-m+1} + j\mathbb{C}Le_{n-m+2} + ij\mathbb{C}Le_{n-m+3}) \\ &= \mathbb{C}Le_{n+m} - (-1)^m \mathbb{C}Le_{n-m} + i(\mathbb{C}Le_{n+m+1} - (-1)^m \mathbb{C}Le_{n-m+1}) \\ &\quad + j(\mathbb{C}Le_{n+m+2} - (-1)^m \mathbb{C}Le_{n-m+2}) \\ &\quad + ij(\mathbb{C}Le_{n+m+3} - (-1)^m \mathbb{C}Le_{n-m+3}) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan (2.32) denklemi göz önüne alınır

$$\begin{aligned} \mathbb{B}CLe_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}CLe_{n-m} &= Le_{n+m} + iLe_{n+m+1} - (-1)^m (Le_{n-m} + iLe_{n-m+1}) \\ &\quad + i(Le_{n+m+1} + iLe_{n+m+2} - (-1)^m (Le_{n-m+1} + iLe_{n-m+2})) \\ &\quad + j(Le_{n+m+2} + iLe_{n+m+3} - (-1)^m (Le_{n-m+2} + iLe_{n-m+3})) \\ &\quad + ij(Le_{n+m+3} + iLe_{n+m+4} - (-1)^m (Le_{n-m+3} + iLe_{n-m+4})) \\ &= Le_{n+m} + iLe_{n+m+1} + jLe_{n+m+2} + ijLe_{n+m+3} \\ &\quad - (-1)^m (Le_{n-m} + iLe_{n-m+1} + jLe_{n-m+2} + ijLe_{n-m+3}) \\ &\quad + i(Le_{n+m+1} - (-1)^m Le_{n-m+1}) + i^2(Le_{n+m+2} - (-1)^m Le_{n-m+2}) \\ &\quad + ij(Le_{n+m+3} - (-1)^m Le_{n-m+3}) + i^2j(Le_{n+m+4} - (-1)^m Le_{n-m+4}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (2.24), (2.34) ve (2.40) denklemlerinden yararlanarak

$$\begin{aligned}
& \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n-m} \\
&= \mathbb{B}Le_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} + i(L_{n+2}(Le_{m-1} + 1) - 1 + (-1)^m) \\
&\quad + i^2(L_{n+3}(Le_{m-1} + 1) - 1 + (-1)^m) \\
&\quad + ij(L_{n+4}(Le_{m-1} + 1) - 1 + (-1)^m) \\
&\quad + i^2j(L_{n+5}(Le_{m-1} + 1) - 1 + (-1)^m) \\
&= \mathbb{B}Le_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} \\
&\quad + iLe_{m-1}(L_{n+2} + iL_{n+3} + jL_{n+4} + ijL_{n+5}) \\
&\quad + i(L_{n+2} + iL_{n+3} + jL_{n+4} + ijL_{n+5}) \\
&\quad - i(1 + i + j + ij) + (-1)^m i(1 + i + j + ij) \\
&= \mathbb{B}Le_{n+m} - (-1)^m \mathbb{B}Le_{n-m} + i\mathbb{B}L_{n+2}(Le_{m-1} + 1) \\
&\quad - iA(1 - (-1)^m)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.10 $n \geq 0$ tam sayısı için n 'inci bikompleks-Kompleks Leonardo sayısı $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n$ ve $(n + 1)$ 'inci bikompleks-kompleks Fibonacci sayısı $\mathbb{B}\mathbb{C}F_{n+1}$ arasında

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = 2\mathbb{B}\mathbb{C}F_{n+1} - \omega \quad (3.30)$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur.

İspat: Bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı (3.1) ve (2.34) ile verilen denklem kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= \mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3} \\
&= Le_n + iLe_{n+1} + i(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) \\
&\quad + j(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) + ij(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) \\
&= Le_n + 2iLe_{n+1} - Le_{n+2} + jLe_{n+2} + 2ijLe_{n+3} - jLe_{n+4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Fibonacci sayıları ve Leonardo sayıları arasındaki ilişkiyi veren (2.30) denkleminin yardımıyla

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= (2F_{n+1} - 1) + 2i(2F_{n+2} - 1) - (2F_{n+3} - 1) \\
&\quad + j(2F_{n+3} - 1) + 2ij(2F_{n+4} - 1) - j(2F_{n+5} - 1)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (2.21) ile verilen kompleks Fibonacci sayılarının tanımından

yararlanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= 2(F_{n+1} + iF_{n+2}) + 2i(F_{n+2} + iF_{n+3}) + 2j(F_{n+3} + iF_{n+4}) \\
&\quad + 2ij(F_{n+4} + iF_{n+5}) - 2i - 2ij \\
&= 2(\mathbb{C}F_{n+1} + i\mathbb{C}F_{n+2} + j\mathbb{C}F_{n+3} + ij\mathbb{C}F_{n+4}) - (2i + 2ij) \\
&= 2\mathbb{B}\mathbb{C}F_{n+1} - \omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.2.11 $n \geq 0$ tam sayısı için n 'inci bikompleks-kompleks Leonardo sayısı $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n$ ile n 'inci kompleks Fibonacci sayısı $\mathbb{C}F_n$ ve n 'inci kompleks Lucas sayısı $\mathbb{C}L_n$ arasında

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = \mathbb{C}F_n + \mathbb{C}L_n + i(\mathbb{C}F_{n+1} + \mathbb{C}L_{n+1}) - \omega \quad (3.31)$$

bağıntısı mevcuttur.

İspat: (3.1) ve (2.34) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= \mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3} \\
&= Le_n + iLe_{n+1} + i(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) \\
&\quad + j(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) + ij(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) \\
&= Le_n + 2iLe_{n+1} - Le_{n+2} + jLe_{n+2} + 2ijLe_{n+3} - jLe_{n+4}
\end{aligned}$$

dir. (2.18) ve (2.30) kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= (2F_{n+1} - 1) + 2i(2F_{n+2} - 1) - (2F_{n+3} - 1) \\
&\quad + j(2F_{n+3} - 1) + 2ij(2F_{n+4} - 1) - j(2F_{n+5} - 1) \\
&= F_n + L_n + 2i(F_{n+1} + L_{n+1}) - (F_{n+2} + L_{n+2}) \\
&\quad + j(F_{n+2} + L_{n+2}) + 2ij(F_{n+3} + L_{n+3}) \\
&\quad - j(F_{n+4} + L_{n+4}) - (2i + 2ij)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) denklemleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= (F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + ijF_{n+3}) \\
&\quad + (L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + ijL_{n+3}) \\
&\quad + i(F_{n+1} + iF_{n+2} + jF_{n+3} + ijF_{n+4})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i(L_{n+1} + iL_{n+2} + jL_{n+3} + ijL_{n+4}) - (2i + 2ij) \\
& = \mathbb{C}F_n + \mathbb{C}L_n + i(\mathbb{C}F_{n+1} + \mathbb{C}L_{n+1}) - \omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2.12 $n \geq 0$ tam sayısı için $(n + 1)$ 'inci bikompleks-kompleks Leonardo sayısı $\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1}$ ile n 'inci bikompleks Leonardo sayısı $\mathbb{B}Le_n$ ve n 'inci bikompleks Fibonacci sayısı $\mathbb{B}F_n$ arasındaki ilişki

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} = \mathbb{B}Le_n + 2\mathbb{B}F_n + i\mathbb{B}Le_{n+1} + 2i\mathbb{B}F_{n+1} \quad (3.32)$$

şeklinde bir bağıntı mevcuttur.

İspat: (3.1) ve (2.34) ile verilen denklemler dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} &= \mathbb{C}Le_{n+1} + i\mathbb{C}Le_{n+2} + j\mathbb{C}Le_{n+3} + ij\mathbb{C}Le_{n+4} \\
&= Le_{n+1} + iLe_{n+2} + i(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) \\
&\quad + j(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) + ij(Le_{n+4} + iLe_{n+5})
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada (2.33) ile verilen denklem kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} &= Le_n + 2F_n + i(Le_{n+1} + 2F_{n+1}) \\
&\quad + i(Le_{n+1} + 2F_{n+1} + i(Le_{n+2} + 2F_{n+2})) \\
&\quad + j(Le_{n+2} + 2F_{n+2} + i(Le_{n+3} + 2F_{n+3})) \\
&\quad + ij(Le_{n+3} + 2F_{n+3} + i(Le_{n+4} + 2F_{n+4})) \\
&= Le_n + iLe_{n+1} + jLe_{n+2} + ijLe_{n+3} \\
&\quad + 2(F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + ijF_{n+3}) \\
&\quad + i(Le_{n+1} + iLe_{n+2} + jLe_{n+3} + ijLe_{n+4}) \\
&\quad + 2i(F_{n+1} + iF_{n+2} + jF_{n+3} + ijF_{n+4})
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.23) ve (2.40) denklemlerinden

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_{n+1} = \mathbb{B}Le_n + 2\mathbb{B}F_n + i\mathbb{B}Le_{n+1} + 2i\mathbb{B}F_{n+1}$$

olur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 3.2.13 $n \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere bikompleks-kompleks Leonardo

sayıları ile bikompleks Fibonacci sayıları arasında

$$\mathbb{B}\mathbb{C}Le_n = 2\mathbb{B}F_{n+1} + 2i\mathbb{B}F_{n+2} - \omega \quad (3.33)$$

şeklinde bir ilişki mevcuttur.

İspat: (3.1) ve (2.34) ile verilen denklemlerden

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= \mathbb{C}Le_n + i\mathbb{C}Le_{n+1} + j\mathbb{C}Le_{n+2} + ij\mathbb{C}Le_{n+3} \\ &= Le_n + iLe_{n+1} + i(Le_{n+1} + iLe_{n+2}) \\ &\quad + j(Le_{n+2} + iLe_{n+3}) + ij(Le_{n+3} + iLe_{n+4}) \end{aligned}$$

dir. (2.23) ve (2.30) ile verilen denklemlerden

$$\begin{aligned} \mathbb{B}\mathbb{C}Le_n &= (2F_{n+1} - 1 + i(2F_{n+2} - 1)) \\ &\quad + i(2F_{n+2} - 1 + i(2F_{n+3} - 1)) \\ &\quad + j(2F_{n+3} - 1 + i(2F_{n+4} - 1)) \\ &\quad + ij(2F_{n+4} - 1 + i(2F_{n+5} - 1)) \\ &= 2(F_{n+1} + iF_{n+2} + jF_{n+3} + ijF_{n+4}) \\ &\quad + 2i(F_{n+2} + iF_{n+3} + jF_{n+4} + ijF_{n+5}) - (2i + 2ij) \\ &= 2\mathbb{B}F_{n+1} + 2i\mathbb{B}F_{n+2} - \omega \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Son yıllarda, bileşenleri (katsayıları) farklı özel tam sayı dizilerinden seçilerek oluşturulan farklı hiper-kompleks sayılar araştırmacılar tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmalar arasında özel bikompleks sayı dizileri de yer almaktadır. Bu çalışmada, kompleks Leonardo sayıları ve bikompleks sayılar birlikte düşünülerek yeni bir bikompleks sayı ailesi tanıtılmıştır. Bu yeni sayı, bileşenleri kompleks Leonardo sayılarından oluşan bir bikompleks sayı olup bikompleks-kompleks Leonardo sayısı adı verilmiştir.

Bu çalışmada ilk olarak bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının tanımı yapılarak bu sayıların bazı temel özellikleri incelenmiştir. Bu temel özellikler arasında bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının rekürans bağıntıları, Binet formülü, bazı toplam formülleri ve üreteç fonksiyonu yer almaktadır. Ayrıca bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Binet formülünden faydalanarak bu sayıları ilgilendiren Cassini özdeşliği, Catalan özdeşliği, d'Ocagne özdeşliği, Honsberger özdeşliği ve Vajda özdeşliği elde edilmiştir. Üstelik yeni tanımlanan bikompleks-kompleks Leonardo sayılarının Fibonacci sayıları, Leonardo sayıları, bikompleks Fibonacci sayıları, bikompleks Leonardo sayıları gibi literatürde var olan sayılar ile ilişkili olduğu gösterilmiştir.

Özel sayı dizileri için yapılan farklı çalışmalar bikompleks-kompleks Leonardo sayıları açısından da incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications, John Wiley and Sons, New York, USA.
2. Vajda, S., 1989. Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section: Theory and applications, Ellis Horwood Limited, Chichester, UK.
3. Hamilton, W. R., 1866. Elements of Quaternions, Longmans, Green and Co., London, UK.
4. Horadam, A. F., 1963. Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions, The American Mathematical Monthly, 70, 3, 289-291.
5. Halıcı, S., 2012. On Fibonacci quaternions. Advances in Applied Clifford Algebras, 22, 321-327.
6. Halıcı, S., 2013. On complex Fibonacci quaternions. Advances in Applied Clifford Algebras, 23, 105-112.
7. Segre, C., 1892. Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici, Mathematiche Annalen, 40, 413-467.
8. Price, G. B., 1991. An Intoduction to multicomplex spaces and functions, Marcel Dekker Inc., New York, USA.
9. Luna-Elizarraras, M. E., Shapiro, M., Struppa, D. C. ve Vajiac, A., 2012, Bicomplex numbers and their elementary functions, CUBO A Mathematical Journal, 14, 2, 61-80.
10. Nurkan, S. K. ve Güven, İ. A., 2018. A note on bicomplex Fibonacci and Lucas numbers. International Journal of Pure and Applied Mathematics, 120, 3, 365-377.
11. Halıcı, S. ve Çürük, Ş., 2019. On bicomplex numbers with coefficients from the complex Fibonacci sequence, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 25, 3, 126-137.
12. Catarino, P. ve Borges, A., 2020. On Leonardo numbers, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 89, 1, 75-86.
13. Alp, Y. ve Koçer, E. G., 2021. Some properties of Leonardo numbers, Konuralp Journal of Mathematics, 9, 1, 183-189.
14. Shannon, A. G., 2019. A note on generalized Leonardo numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 25, 3, 97-101.
15. Vieira, R. P. M., Alves F. R. V. ve Catarino P. M., 2019. Relações bidimensionais e identidades da sequencia de Leonardo, Revista Sergipana De Matematica E Educação Matematica, 4, 2, 156-173.

16. Alp, Y. ve Koçer, E. G., 2021. Hybrid Leonardo numbers. *Chaos, Solitons and Fractals*, 150, 111128.
17. Alp, Y. ve Koçer, E. G., 2024. Leonardo and hyper-Leonardo numbers via Riordan arrays, *Ukrains'kyi Matematychnyi Zhurnal*, 76, 3, 326-340.
18. Halıcı, S. ve Çürük, Ş., 2024. On the Leonardo sequence via Pascal-type triangles, *Journal of Mathematics*, 2024, 9352986.
19. Karataş, A., 2022. On complex Leonardo numbers. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 28, 3, 458-465.
20. Karataş, A., 2023. Dual Leonardo numbers. *AIMS Mathematics*, 8, 12, 30527-30536.
21. Turan, M., Karakuş, S. Ö. ve Nurkan, S. K., 2023. A new perspective on bicomplex numbers with Leonardo number components, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 72, 2, 340-351.
22. Yaglom, I. M., 1968. *Complex numbers in geometry*, Academic Press, New York and London.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Nimet PARLAK AKKURT

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Selçuk Üniversitesi, İlköğretim Matematik
Öğretmenliği Bölümü, 2006-2010

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı,
2022-2024

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Nurettin Aydın İlköğretim Okulu/İlköğretim Matematik Öğretmeni, 2010-2012
2. Yavuz Selim Ortaokulu/ İlköğretim Matematik Öğretmeni, 2012-2014
3. Şehit Recep Bozdağ Ortaokulu / İlköğretim Matematik Öğretmeni, 2014-2017
4. Kutlu Ortaokulu/ İlköğretim Matematik Öğretmeni, 2017-

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Bildiriler

1. Parlak Akkurt, N. ve Yağmur, T., 2024. Bikompleks-Kompleks Leonardo Sayılarının Bazı Özellikleri Üzerine, 15. Ankara Matematik Günleri (AMG 2024), Ankara Hacı Bayram Veli Üniversitesi, 23-24 Mayıs 2024, Ankara, Türkiye.