

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS

BİLGİ UZAYLARI VE KABA KÜME
YAKLAŞIMLARI

Özge KURTYEMEZ

Danışman: Prof. Dr. Sadık BAYHAN

BURDUR, 2024

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca **Yüksek Lisans** Tezi olarak sunduğum “**Bilgi Uzayları ve Kaba Küme Yaklaşımları**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı, bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13/08/2024

(İmza)

Özge KURTYEMEZ

ÖNSÖZ

Tez çalışmam boyunca bilgi birikim ve tecrübeleri ile bana her açıdan yol gösteren, karşılaştığım her zorlukta destek olan ve çalışmamı titizlikle takip eden çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Sadık BAYHAN 'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos, 2024

Özge KURTYEMEZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	14
3.1. Biçimsel Bağlam ve Kavram Biçimlendirme Operatörleri.....	14
3.2. Genelleştirilmiş Kaba Kümeler.....	16
3.3. Bilgi Uzaylarının Kaba Küme Yaklaşımlarıyla Kondurulması	17
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	25
4.1. Örtü İndirgemenin Minimal Beceri Dönüşümlerine Uygulanması	25
4.2. Beceri Dönüşümlerinin Ayırıcı Modeli	29
4.3. Beceri Dönüşümlerinin Birleştirici Modeli	35
4.4. Çoklu Beceri Dönüşümleri	37
4.5. Çoklu Beceri Dönüşümlerinin Birleştirici Modeli.....	38
4.6. Çoklu Beceri Dönüşümlerinin Ayırıcı Modeli	41
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR	46

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.1. (Q, S, R) Biçimsel bağlamı	15
Çizelge 3.2. Biçimsel bağlam	20
Çizelge 4.1. Beceri-soru çizelgesi.....	30
Çizelge 4.2. İndirgenmiş ya da minimal beceri-soru çizelgesi	35
Çizelge 4.3. R_1 ve R_2 bağıntıları.....	39



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$A \Rightarrow B$	: A özellikler kümesi B özellikler kümesini gerektirir
$\mathcal{B}$	: Bilgi uzayının tabanı
$\square^\uparrow$ ve $\square^\downarrow$	: Kavram biçimlendirme operatörleri
Δ_Q	: Q kümesinin R bağıntısına göre köşegeni
2^Q	: Q kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi
$ K $	: K kümesinin eleman sayısı
$K^c = Q - K$	: K kümesinin Q kümesine göre tümleyeni
$\mathcal{K}_q$	: q sorusunu içeren tüm bilgi durumlarının ailesi
$\mathcal{K}_{DM}$	: Ayırıcı model ile belirlenen bilgi yapısı
$\mathcal{K}_{CM}$	: Birleştirici model ile belirlenen bilgi yapısı
M_R	: R bağıntısına karşılık gelen matris
R^{-1}	: R bağıntısının tersi
$\underline{R}$	: Genelleştirilmiş alt yaklaşım operatörü
$\underline{R}(Y)$	: Y kümesinin genelleştirilmiş alt yaklaşımı
$\overline{R}$	: Genelleştirilmiş üst yaklaşım operatörü
$\overline{R}(Y)$	: Y kümesinin genelleştirilmiş üst yaklaşımı
$(\underline{R}(Y), \overline{R}(Y))$	: Y kümesinin genelleştirilmiş kaba kümesi
$R \circ R$	: R bağıntısı ile R bağıntısının bileşkesi
qRs	: q elemanı R bağıntısı yoluyla s elemanı ile ilişkilidir
$r_R(q)$	: q elemanının R bağıntısına göre sağ komşuluğu
$l_R(q)$	: q elemanının R bağıntısına göre sol komşuluğu
$[q]$	: q elemanın denklik bölüğü
Q/R	: R bağıntısına göre bölüm kümesi
q^*	: q sorusuyla aynı bilgi durumlarını bulunduran sorular kümesi
q_{atom}	: q sorusunu içeren minimal bilgi durumu
$t(R)$	: R bağıntısının geçişli kapanışı
$(Q, \mathcal{K})$	: Bilgi uzayı
(Q, S, τ)	: Beceri dönüşümü

(Q, S, μ)	: Çoklu beceri dönüşümü
(Q, S, R)	: Biçimsel bağlam
p ve q	: Problem fonksiyonları
$Red(\mathcal{C})$	: $\mathcal{C}$ örtüsünün indirgemesi
$(i) \Rightarrow (ii)$	: (i) varsa (ii) vardır
$(i) \Leftarrow (ii)$	: (ii) varsa (i) vardır
$(i) \Leftrightarrow (ii)$	: (i) ve (ii) birbirine denktir
$(a) : \Leftrightarrow (b)$	: Eşitliğin sol tarafındaki ifade (a) , eşitliğin sağ tarafındaki ifade (b) ile tanımlanmıştır
$\preceq$	: Tahmin ya da öncelik bağıntısı
$\forall$	: Evrensel niceleyici
$\exists$	: Varlık niceleyicisi
$\cup$ -kapalı	: Küme ailesi birleşim işlemine göre kapalıdır
$\cap$ -kapalı	: Küme ailesi kesişim işlemine göre kapalıdır
$\ll \mathcal{C} \gg$	: $\mathcal{K}_{DM}$ ailesinin elemanları $\mathcal{C}$ ailesinin bazı elemanlarının bir birleşimidir
$\gg \mathcal{D} \ll$	: $\mathcal{K}_{CM}$ ailesinin elemanları $\mathcal{D}$ ailesinin bazı elemanlarının bir kesişimidir

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bilgi Uzayları ve Kaba Küme Yaklaşımları

Özge KURTYEMEZ

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Sadık BAYHAN

Ağustos, 2024

Kaba küme yaklaşımlarının bilgi yapılarının incelenmesinde önemli katkıları bulunmaktadır. Bilgi yapılarının özel bir durumu bilgi uzayı olarak bilinir ve bilgi uzayları kaba küme teorisinde alt yaklaşımlar kullanılarak elde edilebilir. Böylece bilgi uzayları ve kaba küme teorisi arasında önemli bir bağlantı kurulmuş olur. Kaba küme yaklaşımları kullanılarak beceri dönüşümlerinin birleştirici ve ayırıcı modelleri oluşturulur. Benzer şekilde, çoklu beceri dönüşümleri de kaba küme yaklaşımlarıyla karakterize edilir. Bu tez çalışmasının amacı; bilgi uzayları ile kaba küme yaklaşımlarının özelliklerini incelemek ve aralarındaki ilişkileri ayrıntılı olarak sunmaktır.

Anahtar Kelimeler: Bilgi uzayı, bilgi durumu, kaba küme

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Knowledge Spaces and Rough Set Approximations

Özge KURTYEMEZ

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Sadık BAYHAN

August, 2024

Rough set approximations make important contributions to the examination of knowledge structures. A special case of knowledge structures is known as knowledge space and knowledge spaces can be obtained using lower approximations in rough set theory. Thus, an important connection between knowledge spaces and rough set theory is established. Conjunctive and disjunctive models of skill maps are created using rough set approximations. Similarly, multi-skill maps are characterized by rough set approximations. The purpose of this thesis is to examine knowledge spaces with rough set approximations and to present the relations between them in detail.

Keywords: Knowledge space, information status, rough set

1. GİRİŞ

Bir dersin içeriğini oluşturan konuların öğrenilmesi ve değerlendirilmesi uzmanlık gerektiren süreçlerdir. Öğretmen ve öğrenci bu sürecin merkezinde yer alan iki önemli bileşendir. Öğretmenin uzmanlığında her konu alt birimlere ayrılarak soru paketleri oluşturulur. Öğrencinin bilgi durumu, her biri sorulardan oluşan bilgi paketine verdiği doğru yanıtlar sayesinde belirlenir. Bilgi durumları birbirleriyle ilgili olarak anlamlı bir sıralama oluşturur. Buraya kadar sözü edilen süreçler bilgi uzayları olarak bilinen teorinin temellerini oluşturmuştur. Jean-Paul Doignon ve Jean-Claude Falmagne teorinin kurucularıdır (Doignon ve Falmagne, 1999).

Bilgi uzayları teorik altyapısını oluşturmak için kümeler teorisine büyük oranda gereksinime duyar ve etkin olarak kullanır. Bilgi uzayları teorisinin özünde, öğrenme ve değerlendirmeye dayanan bir yaklaşım bulunmaktadır. Bunları gerçekleştirmek için herhangi bir ölçüme ya da istatistik bilgisine gereksinime duymaz. Bilgi uzayları teorisi, eğitimde bir uygulama alanının açılmasına olanak sağlamıştır. Matematiği ve bilgi uzayları teorisini kullanan bir bilgisayar yazılımı eğitim alanında yoğun olarak kullanılmaktadır.

Bilgi uzayı özel bir bilgi yapısıdır ve kısaca ALEKS (Assessment and LEarnig in Knowledge Spaces) adı verilen web tabanlı yazılımın çekirdeğini oluşturur. Öğrenciler matematik, fizik, kimya, istatistik ve muhasebe gibi birçok alanda ALEKS yazılım sistemini etkin olarak kullanmaktadır. ALEKS yazılım için bilgi uzayları teorisinin uygulama alanı olduğunu söylemek yerinde olacaktır. Yazılım ile aynı adı taşıyan ALEKS şirketi 1996 yılında kurulmuş ve aynı yıl web tabanlı ALEKS yazılımı K-12 ve üniversite öğrencilerinin kullanımına sunulmuştur. Yakın zamanda yaşadığımız Covid pandemisi, uzaktan eğitimin gerekliliğini ve önemini ortaya koymuştur. Bu durumun doğal bir yansıması olarak, ALEKS yazılımının öğrenciler tarafından daha etkin bir şekilde kullanıldığı görülmüştür. Günümüzde binlerce öğrenci tarafından, 100 den fazla derste etkin olarak kullanılmaktadır. Sayısal başarı ve yetenek ölçümleriyle standart hale getirilen çoktan seçmeli testlerin aksine, ALEKS yazılımının değerlendirilmesinin üstünlükleri iki başlıkta toplanabilir. Birincisi, bir öğrencinin bir konudaki yeterliliği, yetkin olduğu tüm problem türlerini tanımlayan bilgi durumunun kesin ve kapsamlı bir şekilde tanımlanmasıdır. İkincisi, öğrencinin öğrenmeye hazır olduğu konuların kapsamlı bir listesinin oluşturulmasıdır (Düntsche ve Gediga, 1995). Bu durum bilgi uzayları

teorisinde öğrencinin bilgi durumunun dış kenarı olarak bilinir. Bir bilgi durumunun dış kenarı, bilgi durumuna bir soru eklediğinde yeni bir bilgi durumu olacak biçimdeki soruların kümesidir. Dış kenar olarak tanımlanan kümenin eğitim anlamındaki karşılığı, öğrencinin durumunun öğrenmeye hazır olduğu sorular kümesinden oluşması olarak yorumlanabilir (Düntsche ve Gediga, 1996). ALEKS yazılımı için gerekli olan bir diğer kavram da bilgi yapısının iç sınırıdır. Bir bilgi durumunun iç sınırı, bilgi durumundan bir soru çıkarıldığında yine bir bilgi durumu olacak biçimdeki soruların kümesi olarak tanımlanır. Bir bilgi durumunun iç kenarı, öğrenci yeterliliğinin yüksek olduğunu gösteren soruları bulundurur.

Günümüzde bilgi uzayları teorisini referans gösteren çok sayıda akademik çalışma bulunmaktadır. Avusturya Graz Üniversitesi öğretim üyelerinden Cord Hockemeyer, bilgi uzayları teorisini kullanan yayınlamış makaleler için bibliyografik bir veri tabanı oluşturmuştur (Hockemeyer, 2022).

Bilgi uzaylarının teorik ve pratik nedenlerden dolayı diğer alanlarla olan etkileşiminden söz edilebilir. Bunlar arasında biçimsel kavram analizi, kaba küme teorisi, gizli sınıf analizi ve madde tepki teorisi gibi yaklaşımlar sayılabilir. Biçimsel kavram analizi verileri nesneler ve özellikler arasındaki ilişkiyi belirleyerek analiz eder. Bu analizin iki tür çıktısı vardır. Birincisi kavram örgüleri, ikincisi özellik gerektirmeleri olarak bilinir. Kaba küme teorisinin başlangıcını bilgi sistemleri adı verilen çizelgeler oluşturur. Bu çizelgede satırlar nesnelerden, sütunlar nesnelerin sahip olduğu özellik değerlerinden oluşur ve teori yaklaşımında bulunma esasına dayanır. Kaba küme teorisi; nesneler kümesinin kesin olmayan bilgiyle donatılmış bir alt kümesini daha kesin bilgiyle donatılmış alt ve üst yaklaşım kümeleriyle tanımlanması olarak özetlenebilir. Gizli sınıf analizi, verilerin sınıflandırılmasına ve istatistiksel çıkarımlara olanak tanıyan bir modelleme algoritmasıdır. Gizli yanıt teorisi olarak da bilinen madde yanıt teorisi, gözlemlenemeyen özellikler ile bunların gözlemlenen sonuçları arasındaki ilişkiyi açıklamaya çalışan bir matematiksel model olarak bilinir.

Temel bir bilim olan matematiğin bilgi uzayları teorisine yaptığı katkı bilinmektedir. Bunun doğal bir sonucu olarak; ön-topolojiyi olarak bilinen genelleştirilmiş kuvvetli topolojik uzayların aslında bir bilgi uzayı olduğu görülür (Császár, 2002). Ön-topolojide kullanılan birçok kavram bilgi uzayları terminolojisinde farklı adlar altında kullanılmaktadır. Örneğin ön-topolojide açık küme, bilgi uzayları için

bilgi durumuna, yine ön topolojide T_0 uzayı ise bilgi uzayının ayırt edici olmasına karşılık gelmektedir (Lin vd., 2022; Liu, 2010b). Her topolojik uzay bir bilgi yapısıdır ancak tersi doğru değildir. Bilgi uzaylarına göre daha ilkel ya da zayıf olan bilgi yapısının topoloji oluşturabilmesi için bilgi uzayı olması ve öğelerinin sonlu küme kesişime göre kapalı olması gerekir. Ancak bir bilgi alanı üzerindeki bilgi yapısının aynı bilgi alanı üzerindeki topoloji için bir alt taban oluşturduğunu ifade etmek yerinde olur.

Bu çalışmada beş bölüm bulunmaktadır. Giriş olarak adlandıran ilk bölümde tez konusunun anlaşılması, önemi ve diğer disiplinlerle olan ilişkisi tarihsel süreç bağlamında verilmiştir. İkinci bölümde; çalışmanın tamamında gereksinme duyulan temel tanım ve teoremler örnek destekli olarak sunulmuştur. Biçimsel bağlam, kavram biçimlendirme operatörleri, genelleştirilmiş kaba kümeler ve bilgi uzaylarının kaba küme yaklaşımlarıyla kondurulmasının teorik yönleri üçüncü bölümün bileşenlerini oluşturmuştur. Dördüncü bölümde; örtü indirgeme algoritması ile bir uygulaması olarak minimal beceri dönüşümleri, beceri dönüşümlerinin ayrık ve birleştirici modelleri, çoklu-beceri dönüşümlerinin birleştirici ve ayrık modelleri incelenmiş ve ayrıntılı olarak verilmiştir. Son bölümde ise, çalışmanın genel bir değerlendirilmesi yapılarak gelecekteki araştırmalar için esin kaynağı olması sağlanmıştır.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışma boyunca gerekli olan temel kavram ve teoremler, anlamlı bir bütün oluşturacak biçimde (Acar, 2000; Birkhoff, 1937; Doignon ve Falmagne, 1985a,b; Yao, 1988a,b) kaynaklarından yararlanılarak verilmiştir. Verilen örnekler yardımıyla kavramların iyi anlaşılabilmesi sağlanmıştır.

Tanım 2.1. Boş olmayan herhangi Q ve S kümeleri verilsin.

(1) $q \in Q$ ve $s \in S$ olmak üzere bütün (q, s) sıralı ikililerinin kümesine Q ve S kümelerinin kartezyen çarpımı ya da dik çarpımı adı verilir. Q ile S nin kartezyen çarpımı için $Q \times S$ simgesi kullanılır ve

$$Q \times S = \{(q, s) : q \in Q \text{ ve } s \in S\}$$

dir.

(2) $Q \times S$ çarpım kümesinin her R alt kümesine Q kümesinden S kümesine bir bağıntı denir ve $R \subseteq Q \times S$ ile gösterilir,

Özel olarak $S = Q$ olarak alınırsa, R ye Q kümesi üzerinde bir bağıntı denir ve kısaca $R \subseteq Q \times Q$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, q elemanının R bağıntısı yoluyla s elemanı ile ilişkili olması $(q, s) \in R$ veya qRs gösterimi ile ifade edilir.

Tanım 2.2. Q kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin. R bağıntısı sahip olduğu özelliklere göre aşağıdaki gibi adlandırılır.

- (1) Her $q \in Q$ için qRq ise R bağıntısı yansımalıdır.
- (2) Her $q, s \in Q$ için $qRs \Rightarrow sRq$ ise R bağıntısı simetriktir.
- (3) Her $q, s \in Q$ için $(qRs \text{ ve } sRq) \Rightarrow q = s$ ise R bağıntısı ters-simetriktir.
- (4) Her $q, s, t \in Q$ için $(qRs \text{ ve } sRt) \Rightarrow qRt$ ise R bağıntısı geçişlidir.
- (5) Her $q \in Q$ için qRs olacak biçimde bir $s \in Q$ varsa R bağıntısı serialdır.

Bağıntıların Matris Gösterimleri

Bir $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ kümesinden $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümesine tanımlı bir R bağıntısını ifade etmenin kolay bir yolu matris kavramından yararlanmaktır. Bunu uygulayabilmek için R bağıntısına $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, aşağıda tanımlandığı gibi $m \times n$ türünde bir $M_R = [m_{ij}]_{m \times n}$ matrisi karşılık getirilir.

$m_{ij} \in \{0,1\}$ olmak üzere

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (q_i, s_j) \in R \text{ ise} \\ 0, & (q_i, s_j) \notin R \text{ ise} \end{cases}$$

dir. $M_R = [m_{ij}]$ matrisine Boole Matrisi adı verilir.

Matrislerin Boole Çarpımı

Bir $M = [m_{ik}]_{m \times n}$ matrisi ile bir $N = [n_{kj}]_{n \times p}$ matrisinin Boole çarpımı $D = [d_{ij}]_{m \times p}$ türünde bir Boole Matrisi olmak üzere $D = M.N$ dir. D matrisin elemanları

$$d_{ij} = \bigvee_{k=1}^n (m_{ik} \wedge n_{kj}), i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p.$$

eşitliği ile hesaplanır. Eşitlikte yer alan $\vee$ gösterimi maksimumu, $\wedge$ ise minimumu ifade etmektedir ve $\{0,1\}$ kümesi üzerinde alınmaktadır.

Q Kümesi Üzerinde Tanımlı Bir Bağıntının Geçişli Kapanışı

Q kümesi üzerinde geçişme özelliğine sahip olmayan bir R bağıntısı verilsin. R yi içeren en küçük geçişli bağıntıya R nin geçişli kapanışı adı verilir ve $t(R)$ ile gösterilir.

Örnek 2.1. $Q = \{a, b, c\}$ kümesi üzerinde bir $R = \{(a, a), (b, c), (c, a)\}$ bağıntısı verilsin. R geçişli değildir. R nin geçişli kapanışı $t(R) = \{(a, a), (b, c), (c, a), (b, a)\}$ olur. Bunu Boole Matrisi yardımıyla bulalım. Öncelikle R ye karşılık gelen M_R matrisi oluşturulur.

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ dir. Bir sonraki adımda } R^2 = R \circ R \text{ bileşke bağıntısı}$$

$$R^2 = M_R \cdot M_R = M_{R^2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^2 = \{(a, a), (b, a), (c, a)\}$$

ve $R^3 = R^2 \circ R$ bileşke bağıntısı

$$R^3 = M_{R^2} \cdot M_R = M_{R^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = M_{R^2}$$

olarak hesaplanır. Q kümesinin eleman sayısı 3 olduğundan,

$$t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \{(a, a), (b, c), (c, a), (b, a)\}$$

bulunur. $t(R)$ nin matris karşılığı

$$M_{t(R)} = M_R \vee M_{R^2} \vee M_{R^3} \\ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. O halde, $t(R)$ bağıntısı $R \subseteq t(R)$ koşulunu sağlayan en küçük geçişli bağıntıdır ve R bağıntısının geçişli kapanışıdır.

Tanım 2.3. Q kümesi üzerinde bir R bağıntısı verilsin ve $q \in Q$ olsun.

- (1) R nin yansıma, simetri ve geçişme özellikleri varsa, R ye denklik bağıntısı denir.
- (2) R bağıntısına göre q elemanı ile ilişkili olan tüm elemanların oluşturduğu kümeye q nun denklik bölümü denir ve $[q] = \{s \in Q : qRs\}$ ile gösterilir.
- (3) R denklik bağıntısının denklik bölüklerinden oluşan $\{[q] : q \in Q\}$ kümeler ailesine bölüm kümesi denir ve Q/R ile gösterilir. Q/R bölüm kümesi Q nun bir ayrışımıdır.
- (4) R nin yansıma ve geçişme özellikleri varsa, yarı-sıralama bağıntısıdır.
- (5) R nin yansıma, ters-simetri ve geçişme özellikleri varsa, kısmi sıralama bağıntısı olarak adlandırılır.
- (6) $\Delta_Q = \{(q, q) : q \in Q\}$ kümesine Q nun R bağıntısına göre köşegeni denir.

Tanım 2.4. Q kümesi üzerinde kısmi sıralı bir R bağıntısı verilsin ve $q \in Q$ olsun.

- (1) Q kümesinin q elemanından kesinlikle daha küçük olan hiçbir elemanı yoksa, q ya Q nun bir minimal ya da küçükçe elemanı denir.
- (2) Q kümesinin q elemanından kesinlikle daha büyük olan hiçbir elemanı yoksa, q ya Q nun bir maksimal ya da büyükçe elemanı adı verilir.
- (3) Q kümesinin bütün elemanlarından küçük ya da eşit olan bir elemanı varsa, Q nun en küçük elemanı ya da ilk elemanı denir.
- (4) Q kümesinin bütün elemanlarından büyük ya da eşit olan bir öge varsa, Q nun en büyük elemanı ya da son elemanı denir.

Tanım 2.5. Q kümesi üzerinde bir R kısmi sıralama bağıntısı ve bir $X \subseteq Q$ alt kümesi verilsin.

- (1) Her $q \in X$ için qRr olacak biçimde bir $r \in Q$ elemanına X kümesinin bir üst sınırı denir.
- (2) Her $q \in X$ için sRq olacak biçimde bir $s \in Q$ elemanına X kümesinin bir alt sınırı denir.

Tanım 2.6. Q kümesi üzerinde bir R kısmi sıralama bağıntısı ile bir $X \subseteq Q$ alt kümesi verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $q \in Q$ elemanına, X kümesinin en küçük üst sınırıdır denir ve $q = eküs(X)$ yazılır.

- (1) q , X kümesinin bir üst sınırıdır: $\forall x \in X$ için xRq sağlanır.
- (2) q , X kümesinin üst sınırlar kümesinin en küçük elemanıdır; yani r, X kümesinin bir üst sınırı ise, qRr dir.

Yukarıda verilen tanıma benzer biçimde aşağıdaki koşulları sağlayan bir $s \in Q$ ögesine, X kümesinin en büyük alt sınırıdır denir ve $s = ebas(X)$ ile gösterilir.

- (1) s , X kümesinin bir alt sınırıdır: $\forall x \in X$ için sRx dir.
- (2) s , X kümesinin alt sınırlar kümesinin en büyük elemanıdır; yani r, X kümesinin bir alt sınırı ise, rRs sağlanır.

Tanım 2.7. Q kümesi üzerinde bir R kısmi sıralama bağıntısı verilsin. Her $q, s \in Q$ için $eküs(\{q, s\})$ ve $ebas(\{q, s\})$ varsa, R ye bir örgü ya da latis adı verilir. Her alt kümesinin $eküs$ 'ü ve $ebas$ 'ı var olan örgü tam örgü olarak adlandırılır.

Genel olarak bir örgü verildiğinde; $q, s \in Q$ olmak üzere $eküs(\{q, s\})$ için $q \vee s$ ve $ebas(\{q, s\})$ için $q \wedge s$ kısaltmalarına başvurulur.

Q kümesinin bütün alt kümelerinin $2^Q = \{T : T \subseteq Q\}$ ile gösterilen ailesi üzerinde tanımlı alt küme olma bir kısmi sıralama bağıntısı ve $(2^Q, \subseteq)$ ikilisi kısmi sıralı kümedir. Ayrıca $(2^Q, \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi bir örgüdür ve kümeler örgüsü olarak bilinir. Bu çalışmanın bütününde minimal, maksimal, en küçük ve en büyük eleman kavramları $(2^Q, \subseteq)$ kısmi sıralı kümesi özelinde düşünülecektir.

Bilgi Yapıları ve Bilgi Uzayları

Tanım 2.8. Q boş olmayan bir küme olsun. Q nun alt kümelerinden en az $\emptyset$ ve Q yu bulunduran bir ailesi $\mathcal{K}$ olmak üzere, $(Q, \mathcal{K})$ ikilisine bir bilgi yapısı denir. Q kümesi bilgi yapısının bilgi alanı olarak adlandırılır. Q bilgi alanının elemanlarına sorular ya da

maddeler, $\mathcal{K}$ ailesinin elemanlarına ise etiketlenmiş bilgi paketleri ya da bilgi durumları denir ve K ile gösterilir.

$K = \emptyset \in \mathcal{K}$ olması, öğrencinin hiçbir soruyu doğru yanıtlayamadığı anlamına gelir. Başka bir ifadeyle, öğrencinin konu hakkında bilgisi bulunmamaktadır. $K = Q$ olması durumu, öğrencinin her soruyu doğru yanıtladığı anlamına gelir. Bu durumda öğrencinin konuyu tamamen öğrendiği söylenebilir. Bilgi durumunun $K \neq \emptyset$ olması durumunda, öğrencinin K da bulunan tüm soruları doğru yanıtladığı anlaşılır.

Bir Q kümesi üzerinde $\mathcal{K}$ nın bir bilgi yapısı olduğunu söylemek $(Q, \mathcal{K})$ ikilisinin bir bilgi yapısı olduğu anlamına gelecektir.

Örnek 2.2. Bir Q bilgi alanı 5 sorudan oluşsun ve $Q = \{a, b, c, d, e\}$ ile ifade edilsin.

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{b\}, \{e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{a, e\}, \{c, d, e\}, \{a, d, e\}, \{a, b, e\}, \{a, c, d, e\}, Q\}$$

ailesi ile $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı ve $K = \{c, d, e\} \in \mathcal{K}$ bir bilgi durumudur.

Tanım 2.9. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısının duali ya da eşleği, $\mathcal{K}^c = \{K : K^c = Q - K \in \mathcal{K}\}$ olmak üzere $(Q, \mathcal{K}^c)$ ikilisi bilgi yapısıdır.

Tanım 2.10. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı olsun. Bir $q \in Q$ sorusunu içeren bütün bilgi durumları $\mathcal{K}_q$ ile gösterilir ve $\mathcal{K}_q = \{K \in \mathcal{K} : q \in K\}$ ailesidir.

Örnek 2.3. Örnek 2.2 de verilen bilgi yapısı için $c \in Q$ sorusunu içeren bütün bilgi durumlarının ailesi $\mathcal{K}_c = \{\{c, d\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d, e\}, Q\}$ olur.

Tanım 2.11. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı olsun. Bir $q \in Q$ sorusuyla aynı bilgi durumlarını bulunduran bütün soruların kümesi kavram olarak adlandırılır ve q^* ile gösterilir.

Böylece bir $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı ve bir $q \in Q$ sorusu için kavram

$$q^* = \{r \in Q : \mathcal{K}_q = \mathcal{K}_r\}$$

kümesidir. $q, r \in Q$ olmak üzere q ve r sorularının aynı kavram içinde bulunduğunu varsayalım. Bu durumda q ve r sorularına eşit derecede bilgilendiricidir denir. Ayrıca bütün kavramların ailesi Q^* ile gösterilir ve bilgi alanı olan sorular kümesi Q nun bir ayrışımıdır.

Örnek 2.4. $Q = \{a, b, c, d, e\}$ bilgi alanı üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, e\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, Q\}$$

ailesi ile $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı verilsin. Her $q \in Q$ için bilgi durumlarını belirleyelim:

$$\mathcal{K}_a = \{\{a\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_b = \{\{b\}, \{b, e\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_c = \{\{c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_d = \{\{c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_e = \{\{b, e\}, \{c, d, e\}, Q\}.$$

$\mathcal{K}_c = \mathcal{K}_d$ olduğundan c ve d soruları eşit derecede bilgilendiricidir. Ayrıca kavramlar: $a^* = \{a\}, b^* = \{b\}, c^* = \{c, d\} = d^*$ ve $e^* = \{e\}$ dir. $Q^* = \{a^*, b^*, c^*, e^*\}$ kümesi Q nun bir ayrışımıdır.

Tanım 2.12. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı olsun. Her kavramı sadece bir sorudan oluşan bir bilgi yapısına ayırt edicidir denir.

$(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı ayırt edicidir : $\Leftrightarrow \forall q \in Q$ için $q^* = \{q\}$ dir.

Örnek 2.5. (1) $Q = \{a, b, c, d\}$ bilgi alanı üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{b, c, d\}, Q\}$$

ailesi verilsin. Her kavram sadece bir sorudan oluştuğu için $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı ayırt edicidir.

(2) Örnek 2.4 de verilen $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı ayırt edici değildir.

Tanım 2.13. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı olsun.

- (1) $\mathcal{K}$ küme ailesi birleşim işlemine göre kapalı (kısaca $\cup$ -kapalı) ise, $(Q, \mathcal{K})$ ikilisine bir bilgi uzayı,
- (2) $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayı ve kesişim işlemine göre kapalı (kısaca $\cap$ -kapalı) ise yarı-nicelik uzayı,
- (3) $(Q, \mathcal{K})$ ayırt edici bir yarı-nicelik uzayı ise nicelik uzayı

olarak adlandırılır.

$(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayı olsun. $\mathcal{K}$ küme ailesinin $\cup$ -kapalı olması, bilgi durumlarının sayısını önemli ölçüde azaltmaktadır.

Bir bilgi uzayının duali yarı-nicelik uzayıdır. Bir yarı-nicelik uzayının duali de bir bilgi uzayıdır.

Örnek 2.6. $Q = \{a, b, c, d\}$ bilgi alanı üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, Q\}$$

ailesi ile verilen $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısını düşünelim. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayıdır ve 8 bilgi durumundan oluşmuştur. Q bilgi alanının bütün bilgi durumlarının sayısı 16'dır. $\mathcal{K}$ ailesinin $\cup$ -kapalı olmasının bilgi durumlarının sayısını yarı yarıya azalttığı görülmektedir. Ayrıca $(Q, \mathcal{K})$ bir yarı-nicelik uzayı değildir. Gerçekten, $\{a, c, d\}, \{b, c, d\} \in \mathcal{K}$ olmasına karşın $\{a, c, d\} \cap \{b, c, d\} = \{c, d\} \notin \mathcal{K}$ dir. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayının duali

$$\mathcal{K}^c = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, Q\}$$

olmak üzere $(Q, \mathcal{K}^c)$ ikilisi bir yarı-nicelik uzayıdır.

Örnek 2.7. Örnek 2.2 de verilen bilgi yapısını tekrar ele alalım. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı olmasına karşın bir bilgi uzayı değildir. Gerçekten $\{b\}, \{e\} \in \mathcal{K}$ olmasına karşın $\{b\} \cup \{e\} = \{b, e\} \notin \mathcal{K}$ olmaktadır. Beklenen, bir öğrencinin b ve e sorularını doğru yanıtladığında $\{b, e\}$ bilgi durumunda olmasıdır.

Bilgi Uzayları ve Tabanlar

Tanım 2.14. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayı olsun. Her $q \in Q$ için, q sorusunu içeren bir minimal $K \in \mathcal{K}$ bilgi durumuna q da bir atom ya da kısaca atom adı verilir ve q_{atom} ile gösterilir.

Bu çalışmada bilgi yapıları sonlu olarak düşünüldüğünden, her soru için en az bir atom vardır. Ayrıca atom kavramı, örgü teorisindeki anlamından farklı anlamda kullanılmıştır. Gerçekten, $(2^Q, \subseteq)$ kümeler örgüsünü ele alalım. Bu örgünün en küçük elemanı boş kümedir. Bir $K \in 2^Q$ elemanının atom olması $\emptyset \subset K$ ve $\emptyset \subset Y \subset K$ olacak biçimde bir $Y \in 2^Q$ elemanın var olmaması ile tanımlanır. O halde her $q \in Q$ için $\{q\}$ tek nokta kümeleri kümeler örgüsünde birer atomdur.

Tanım 2.15. Bir $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayının tabanı, $\mathcal{K}$ ailesini geren bilgi durumlarının minimal bir $\mathcal{B}$ ailesidir. Eğer $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$ olan ve $\mathcal{K}$ yı geren bilgi durumlarının bir başka ailesi ise, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$ olmalıdır.

Teorem 2.1. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayı ve bu uzayın bir tabanı $\mathcal{B} = \{q_{atom} : q \in Q\}$ ailesidir.

Örnek 2.8. $Q = \{a, b, c, d, e\}$ kümesi üzerinde verilen

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{e\}, \{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}, \{a, b, e\}, \{a, b, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \\ \{a, b, d, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c, d, e\}, Q\}$$

ailesi ile $(Q, \mathcal{K})$ ikilisi bir bilgi uzayıdır. $(Q, \mathcal{K})$ nın tabanını belirleyelim.

$$a_{atom} = \{\{a\}\}, b_{atom} = \{\{b\}\}, c_{atom} = \{\{a, b, c\}, \{a, c, d\}\},$$

$$d_{atom} = \{\{a, b, d\}, \{a, c, d\}\}, e_{atom} = \{\{e\}\}$$

olduğundan $\mathcal{B} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, d\}, \{e\}\}$ ailesi $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayının bir tabanıdır.

Tanım 2.16. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı olsun. Q üzerinde bir $\preceq$ bağıntısı $r, q \in Q$ olmak üzere

$$r \preceq q \Leftrightarrow r \in \cap \mathcal{K}_q$$

olarak tanımlansın. $\preceq$ bağıntısı, tahmin ya da öncelik bağıntısı olarak adlandırılır. $r \preceq q$ geçerli olduğunda, r sorusunun q sorusundan tahmin edilebilir olduğu veya r nin q dan önce geldiği (r nin q nun öncülü olduğu) anlaşılır. Bir başka yorum; r sorusunu bulunduran bir $K \in \mathcal{K}$ bilgi durumunun q sorusunu da bulundurmak zorunda olmasıdır. Ayrıca aşağıda verilen eşdeğerlik sağlanır.

$$r \preceq q \Leftrightarrow \mathcal{K}_r \supseteq \mathcal{K}_q$$

Bir bilgi yapısında tahmin bağıntısının yansıma ve geçişme özellikleri vardır. O halde Q kümesi $\preceq$ bağıntısıyla yarı-sıralıdır. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısının ayırt edici olması durumunda $\preceq$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı olur.

Teorem 2.2. Bir Q bilgi alanı üzerinde verilen bir $(Q, \mathcal{K})$ yarı-nicelik uzayı ile $(Q, \preceq)$ yarı-sıralama bağıntısı arasında bire-bir bir dönüşüm vardır. Bu dönüşüm aşağıda verilen iki denklikle tanımlanır:

$$p \preceq q \Leftrightarrow (\forall K \in \mathcal{K} : q \in K \Rightarrow p \in K) \Leftrightarrow \mathcal{K}_p \supseteq \mathcal{K}_q,$$

$$K \in \mathcal{K} \Leftrightarrow (\forall (p, q) \in \preceq : q \in K \Rightarrow p \in K).$$

Teorem 2.2 özetle; bir yarı-nicelik uzayının bir yarı-sıralama bağıntısından (tahmin bağıntısından) elde edildiğini ve benzer olarak bir yarı-sıralama bağıntısından da bir yarı-nicelik uzayının elde edildiğini ifade etmektedir (Birkhoff, 1937).

Örnek 2.9. $Q = \{a, b, c, d, e\}$ bilgi alanı üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{b, e\}, \{c, d, e\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}, Q\}$$

ailesi ile $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı verilsin. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı $\mathcal{K}_c = \mathcal{K}_d$ olduğundan ayırt edici değildir Q üzerinde yansımali ve geçişli $\preceq$ tahmin bağıntısının elemanları

$$\preceq = \Delta_Q \cup \{(c, d), (d, c)\}$$

olarak belirlenir. $c \preceq d$ olduğundan c sorusu d nin öncülüdür. Ancak c sorusu e nin öncülü değildir. Bu durumu belirtmek için $c \preceq e$ gösterimi kullanılır.

Örnek 2.10. $Q = \{a, b, c, d, e\}$ bilgi alanı üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, b, c, d\}, Q\}$$

olarak verilsin. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı, her $p, q \in Q$ ve $p \neq q$ için $\mathcal{K}_p \neq \mathcal{K}_q$ olduğundan ayırt edicidir. Buna ek olarak; $\cap \mathcal{K}_a = \{\{a\}\}, \cap \mathcal{K}_b = \{\{b\}\}, \cap \mathcal{K}_c = \{\{b, c\}\}, \cap \mathcal{K}_d = \{\{a, b, c, d\}\}$ ve $\cap \mathcal{K}_e = \{\{b, c, e\}\}$ kolayca belirlenir. Böylece elde edilen $\preceq$ tahmin bağıntısı yarı-sıralıdır ve aşağıda verilmiştir:

$$\preceq = \Delta_Q \cup \{(b, c), (a, d), (b, d), (c, d), (b, e), (c, e)\}.$$

Tanım 2.17. Q kümesinden S kümesine bir R bağıntısı verilsin.

- (1) $q \in Q$ olmak üzere, $r_R : Q \rightarrow 2^S, r_R(q) = \{s \in S : qRs\}$ ile tanımlanan kümeye q nun R -sağ komşuluğu (kısaca sağ komşuluğu),
- (2) $s \in S$ olmak üzere, $l_R : S \rightarrow 2^Q, l_R(s) = \{q \in Q : qRs\}$ ile tanımlanan kümeye s nin R -sol komşuluğu (kısaca sol komşuluğu) adları verilir.

Örnek 2.11. $Q = \{a, b, c, d, e\}$ bilgi alanı üzerinde $\preceq$ tahmin bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$\preceq = \Delta_Q \cup \{(c, b), (b, a), (c, d), (c, a), (e, a), (d, a), (e, d)\}.$$

$(Q, \preceq)$ tahmin bağıntısına karşılık gelen $(Q, \mathcal{K})$ yarı-nicelik uzayını belirleyelim. $\mathcal{K}$ ailesi

$$K \in \mathcal{K} : \Leftrightarrow (\forall (p, q) \in \preceq : q \in K \Rightarrow p \in K)$$

tanımı kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{c\}, \{e\}, \{c, e\}, \{b, c\}, \{b, c, e\}, \{c, d, e\}, \{b, c, d, e\}, Q\}.$$

$\mathcal{K}$ ailesinin hem $\cup$ -kapalı hem de $\cap$ -kapalı olduğu kolayca görülür. Böylece $(Q, \lesssim)$ tahmin bağıntısının belirlediği $(Q, \mathcal{K})$ bir yarı-nicelik uzayıdır. $K = \{b, c, e\} \in \mathcal{K}$ dir. Gerçekten, b sorusunun öncülleri ya da sol komşulukları $l_R(b) = \{b, c\}$ dir ve $b, c \in K$ dir. Benzer olarak, $l_R(c) = \{c\}$, $c \in K$ ve $l_R(e) = \{e\}$, $e \in K$ olur. Buna karşın, bilgi alanı Q nun $K = \{a, b, c\}$ alt kümesi bir bilgi durumu değildir, yani $K \notin \mathcal{K}$ dir. Bu durumu görmek için $l_R(a) = \{a, b, c, d, e\}$ ve $d \notin K$ olduğuna özen göstermek yeterlidir.



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Biçimsel Bağlam ve Kavram Biçimlendirme Operatörleri

Tanım 3.1.1. Bir $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$ kümesi ile $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümesi verilsin. R , Q kümesinden S ye bir bağıntı olmak üzere, (Q, S, R) üçlüsüne bir biçimsel bağlam adı verilir. Q kümesinin elemanlarını genellikle nesneler, S kümesinin elemanlarını ise özellikler oluşturur. R bağıntısı nesneler ile özellikler arasında kurulur (Ganter ve Wille, 1999).

Tanım 3.1.2. (Q, S, R) bir biçimsel bağlam, $X \subseteq Q$ ve $A \subseteq S$ olsun. Kavram biçimlendirme operatörleri olarak adlandırılan $\Box^\uparrow$ ve $\Box^\downarrow$ operatörleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

- (1) $\Box^\uparrow : 2^Q \rightarrow 2^S$, $X^\uparrow = \{s \in S : \forall q \in X, qRs\}$,
- (2) $\Box^\downarrow : 2^S \rightarrow 2^Q$, $A^\downarrow = \{q \in Q : \forall s \in A, qRs\}$.

Kavram biçimlendirme operatörü $\Box^\uparrow$ ile sağ komşuluklar arasındaki ilişki $q \in Q$ olmak üzere $r_R(q) = \{q\}^\uparrow$ eşitliği ile verilir. Benzer olarak, $\Box^\downarrow$ operatörü ile sol komşuluklar arasında $s \in S$ olmak üzere $l_R(s) = \{s\}^\downarrow$ eşitliği vardır (Ganter ve Wille, 1999).

Önerme 3.1.1. (Q, S, R) bir biçimsel bağlam, $X, X_1, X_2 \subseteq Q$ ve $A, A_1, A_2 \subseteq S$ olsun. Kavram biçimlendirme operatörlerinin sağladığı özellikler aşağıda verilmiştir (Ganter ve Wille, 1999).

- (i) $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_2^\uparrow \subseteq X_1^\uparrow$,
- (ii) $X \subseteq X^{\uparrow\downarrow}$,
- (iii) $X^\uparrow = X^{\uparrow\downarrow\uparrow}$,
- (iv) $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow A_2^\downarrow \subseteq A_1^\downarrow$,
- (v) $A \subseteq A^{\downarrow\uparrow}$,
- (vi) $A^\downarrow = A^{\downarrow\uparrow\downarrow}$,
- (vii) $X \subseteq A^\downarrow \Leftrightarrow A \subseteq X^\uparrow \Leftrightarrow X \times A \subseteq R$.

Tanım 3.1.3. (Q, S, R) bir biçimsel bağlam, $X \subseteq Q$ ve $A \subseteq S$ olsun. $X^\uparrow = A$ ve $A^\downarrow = X$ özelliklerini sağlayan bir (X, A) ikilisine biçimsel kavram denir. X kümesine biçimsel kavramın kapsamı, A kümesine de anlamı adları verilir. Bütün biçimsel kavramların oluşturduğu küme $\mathcal{L}$ ile gösterilir.

O halde

$$\mathcal{L} = \{(X, A) \in R : X^\uparrow = A \text{ ve } A^\downarrow = X\}$$

dir. $(X, A), (Y, B) \in \mathcal{L}$ olsun. $\mathcal{L}$ üzerinde meet ve join işlemleri, sırasıyla;

$$(X, A) \wedge (Y, B) = (X \cap Y, (A \cup B)^{\downarrow\uparrow}),$$

$$(X, A) \vee (Y, B) = ((X \cup Y)^{\downarrow\uparrow}, A \cap B)$$

olarak tanımlanır. Bu işlemlere göre $\mathcal{L}$ bir tam örgüdür. Bu örgü kavram örgüsü ya da Galois örgüsü olarak adlandırılır (Ganter ve Wille, 1999).

Tanım 3.1.4. (Q, S, R) bir biçimsel bağlam ve $A, B \subseteq S$ olsun. Her $q \in Q$ nesnesi için: “eğer $q \in Q$ nesnesi A kümesindeki bütün özellikleri sağlıyor ise, B kümesinde bulunan bütün özellikleri de sağlar” önermesi doğru oluyorsa, A özellikler kümesi B özellikler kümesini gerektiriyor denir ve bu durumu ifade etmek için $A \Rightarrow B$ gösterimi kullanılır (Ganter ve Wille, 1999).

Örnek 3.1.1. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ kümesi nesnelerden, $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ kümesi özelliklerden oluşturulsun. (Q, S, R) biçimsel bağlamı Çizelge 3.1 de verilmiş olsun.

Çizelge 3.1. (Q, S, R) Biçimsel Bağlamı

R	s_1	s_2	s_3	s_4
q_1	1	1	1	1
q_2	1	0	1	1
q_3	0	1	1	1
q_4	0	1	1	1
q_5	1	0	1	0

$X = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} \subseteq Q$ alt kümesi için $X^\uparrow = \{s_3, s_4\}$ ve $A = \{s_3, s_4\} \subseteq S$ için $A^\downarrow = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} = X$ olduğundan (X, A) ikilisi bir kavramdır. Özellikler kümesi S nin iki alt kümesi $A = \{s_2, s_3\}$ ve $B = \{s_4\}$ olsun. $A \Rightarrow B$ sağlanır. Buna karşın, $A = \{s_1\}$ ve $B = \{s_2\}$ özellik kümeleri için $A \Rightarrow B$ gerektirmesi sağlanmaz. Gerçekten, $s_1 \in A$ özelliğine sahip q_2 nesnesi s_2 özelliğine sahip değildir.

3.2. Genelleştirilmiş Kaba Kümeler

Kaba küme teorisinin temelleri Pawlak tarafından atılmıştır (Pawlak, 1982). Teorinin esas nesneler kümesi üzerinde kurulan denklik bağıntısına dayanır. Denklik bağıntısı koşulu uygulamalarda sınırlayıcı olabilmektedir. Kaba küme kavramının genelleştirilmesi üzerine çok sayıda çalışma yapılmıştır. İlk olarak denklik bağıntısı herhangi bir bağıntıyla değiştirilmiş, daha sonra iki evrensel küme üzerinde genelleştirmelere devam edilmiştir. Bu çalışmada, genelleştirilmiş kaba küme kavramı iki evrensel küme esas alınarak hazırlanmıştır (Liu, 2010a).

Tanım 3.2.1. R, Q kümesinden S kümesine bir bağıntı ve $Y \subseteq S$ olsun.

$$\underline{R} : 2^S \rightarrow 2^Q, \underline{R}(Y) = \{q \in Q : r_R(q) \subseteq Y\}$$

olarak tanımlanan $\underline{R}$ dönüşümüne genelleştirilmiş alt yaklaşım operatörü, $\underline{R}(Y)$ kümesine de Y nin genelleştirilmiş alt yaklaşımı denir (Liu, 2010a).

Tanım 3.2.2. R, Q kümesinden S kümesine bir bağıntı ve $Y \subseteq S$ olsun.

$$\overline{R} : 2^S \rightarrow 2^Q, \overline{R}(Y) = \{q \in Q : r_R(q) \cap Y \neq \emptyset\}$$

olarak tanımlanan $\overline{R}$ dönüşümüne genelleştirilmiş üst yaklaşım operatörü, $\overline{R}(Y)$ kümesine de Y nin genelleştirilmiş üst yaklaşımı, $(\underline{R}(Y), \overline{R}(Y))$ ikilisine de Y kümesinin genelleştirilmiş kaba kümesi adları verilir (Liu, 2010a).

Bu çalışmanın geri kalan kısmında; sadelik açısından genelleştirilmiş alt yaklaşım yerine alt yaklaşım, genelleştirilmiş üst yaklaşım yerine üst yaklaşım ve genelleştirilmiş kaba küme yerine ise kaba küme kısaltmaları kullanılacaktır.

Örnek 3.2.1. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ ve $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ kümeleri verilsin. Q dan S ye bir R bağıntısı

$$R = \{(q_1, s_2), (q_2, s_3), (q_2, s_2), (q_3, s_5), (q_4, s_4), (q_4, s_1), (q_5, s_2), (q_5, s_5)\}$$

olarak verilsin. $Y = \{s_1, s_3, s_5\} \subseteq S$ alt kümesi için kaba kümeyi belirleyelim. Öncelikle, her $q \in Q$ öğesinin sağ komşulukları $r_R(q_1) = \{s_2\}, r_R(q_2) = \{s_2, s_3\}, r_R(q_3) = \{s_5\}, r_R(q_4) = \{s_1, s_4\}, r_R(q_5) = \{s_2, s_5\}$ olarak verilen bağıntıdan kolayca elde edilir. Y kümesinin alt yaklaşımı $\underline{R}(Y) = \{q_3\}$, üst yaklaşımı $\overline{R}(Y) = \{q_2, q_3, q_4, q_5\}$ olur. O halde Y kümesinin kaba kümesi $(\underline{R}(Y), \overline{R}(Y)) = (\{q_3\}, \{q_2, q_3, q_4, q_5\})$ ikilisidir.

Bu çalışma boyunca Q ve S kümeleri ile damga kümesi $\Delta = \{1, 2, \dots, n\}$ sonlu olarak düşünülecektir.

Önerme 3.2.1. R, Q kümesinden S kümesine bir bağıntı ve $i \in \Delta$ olmak üzere $Y_i \subseteq S$ olsun. Aşağıda sıralanan özellikler sağlanır (Liu, 2010a).

- (i) Her $s \in S$ için $\overline{R}(\{s\}) = l_R(s)$ ve $\underline{R}(\{s\}^c) = (l_R(s))^c$ dir.
- (ii) $\underline{R}(\cap_{i \in \Delta} Y_i) = \cap_{i \in \Delta} \underline{R}(Y_i)$.
- (iii) $\overline{R}(\cup_{i \in \Delta} Y_i) = \cup_{i \in \Delta} \overline{R}(Y_i)$.
- (iv) $(\underline{R}(Y))^c = \overline{R}(Y^c)$, $(\overline{R}(Y))^c = \underline{R}(Y^c)$, $Y \subseteq S$.
- (v) R, Q kümesi üzerinde bir bağıntı ise, her $K \subseteq Q$ için $\overline{R^{-1}}(\underline{R}(Y)) \subseteq K \subseteq \underline{R}(\overline{R^{-1}}(K))$ dir.

3.3. Bilgi Uzaylarının Kaba Küme Yaklaşımlarıyla Kondurulması

Teorem 3.3.1. Q bir küme olmak üzere, aşağıda verilen önermeler denktir.

- (i) $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayıdır.
- (ii) Q dan bir S kümesine $\mathcal{K} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olacak şekilde serial bir R bağıntısı vardır.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayı ve $S = \mathcal{K}$ olsun. Q dan S kümesine R bağıntısını $q \in Q$ olmak üzere $r_R(q) = \mathcal{K}_q$ eşitliği ile tanımlayalım. Her $q \in Q$ için $Q \in \mathcal{K}_q$ olduğundan $r_R(q) \neq \emptyset$ dir. Bu R bağıntısının serial olmasını ifade eder. Aynı zamanda, her $K \in \mathcal{K}$ için $\overline{R}(\{K\}) = K$ sağlanır. Böylece $\mathcal{K} \subseteq \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olur. Şimdi kapsamanın diğer yönü için $Y \subseteq S$ olduğunu varsayalım. $\overline{R}(Y) = \cup_{K \in \mathcal{K}} \overline{R}(\{K\}) = \cup_{K \in \mathcal{K}} K \in \mathcal{K}$ olması gereğince $\{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\} \subseteq \mathcal{K}$ dir ve $\mathcal{K} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ eşitliği gösterilmiş olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Q dan S ye R bağıntısı serial ve $\mathcal{K} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. $\overline{R}(\emptyset) = \emptyset$ ve $\overline{R}(S) = Q$ olduğundan $\emptyset, Q \in \mathcal{K}$ dir. Önerme 3.2.1(iii) gereğince $\mathcal{K}$ ailesi $\cup$ -kapalıdır. O halde $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayıdır (Liu, 2021).

Teorem 3.3.2. Q bir küme olmak üzere, aşağıdaki önermeler denktir.

- (i) $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı $\cap$ -kapalıdır.
- (ii) Q dan bir S kümesine $\mathcal{K} = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olacak şekilde serial bir R bağıntısı vardır.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı $\cap$ -kapalı olsun. Q dan S kümesine R bağıntısını $q \in Q$ olmak üzere $r_R(q) = \mathcal{K} - \mathcal{K}_q$ ile tanımlayalım. $\emptyset \in r_R(q)$ olduğundan R bağıntısı serieldir. $K \in \mathcal{K}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \underline{R}(\mathcal{K} - \{K\}) &= \{q \in Q : r_R(q) \subseteq \mathcal{K} - \{K\}\} \\ &= \{q \in Q : \mathcal{K} - \{K\} \subseteq \mathcal{K} - \mathcal{K}_q\} \\ &= \{q \in Q : \{K\} \subseteq \mathcal{K}_q\} \\ &= \{q \in Q : K \in \mathcal{K}_q\} \\ &= \{q \in Q : q \in K\} = K \end{aligned}$$

dir. Bu ise $\mathcal{K} \subseteq \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olmasıdır. Gerçekten, $T \subseteq S = \mathcal{K}$ olmak üzere $T = \bigcap_{K \in S-T} (\mathcal{K} - \{K\})$ için

$$\underline{R}(T) = \bigcap_{K \notin T} \underline{R}(\mathcal{K} - \{K\}) = \bigcap_{K \notin T} \underline{R}(K)$$

sağlanır. Ayrıca $\mathcal{K}$ ailesi $\cap$ -kapalı olduğundan $\underline{R}(T) \in \mathcal{K}$ dir. Böylece istenen $\mathcal{K} = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ eşitliği elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) R bağıntısı serial olsun. $\mathcal{K} = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesinin $\cap$ -kapalı bir bilgi yapısı olduğu açıktır (Liu, 2021).

Örnek 3.3.1. $Q = \{a, b, c, d\}$ kümesi üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, Q\}$$

ailesi ile $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayını düşünelim. $S = \mathcal{K}$ olmak üzere $R \subseteq Q \times S = Q \times \mathcal{K}$ bağıntısı,

$$r_R(q) = \mathcal{K}_q, \text{ her } q \in Q$$

şeklinde tanımlansın. Öncelikle aşağıdaki aileleri oluşturalım.

$$\mathcal{K}_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, Q\}, \mathcal{K}_b = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_c = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}, Q\}, \mathcal{K}_d = \{Q\}.$$

Şimdi tanımlanan bağıntıya göre $q \in Q$ ögesinin sağ komşuluklarını ifade edelim:

$$\begin{aligned} r_R(q) &= \{q\}^\uparrow \\ &= \{s : s \in S, qRs\} \\ &= \{K : K \in \mathcal{K}, qRK\}. \end{aligned}$$

O halde

$$r_R(a) = \mathcal{K}_a = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, Q\},$$

$$r_R(b) = \mathcal{K}_b = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, Q\},$$

$$r_R(c) = \mathcal{K}_c = \{\{b, c\}, \{a, b, c\}, Q\},$$

$$r_R(d) = \mathcal{K}_d = \{Q\}$$

olur. Böylece serial R bağıntısının elemanları aşağıdaki gibi elde edilerek bağıntıya karşılık gelen M_R Boole Matrisi oluşturulur. M_R matrisinin satırları Q kümesinin elemanları, sütunları ise $\mathcal{K}$ ailesinin elemanları ile işaretlenmiştir.

$$\begin{aligned} R = \{ & (a, \{a\}), (a, \{a, b\}), (a, \{a, b, c\}), (a, Q), (b, \{a, b\}), (b, \{b, c\}), (b, \{a, b, c\}), (b, Q), \\ & (c, \{b, c\}), (c, \{a, b, c\}), (c, Q), (d, Q) \}. \end{aligned}$$

$$M_R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Son olarak $\overline{R}(Y) = \{q \in Q : r_R(q) \cap Y \neq \emptyset\}$ üst yaklaşım tanımını kullanarak

$$\mathcal{K} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$$

olduğu görülür.

Örnek 3.3.2. Nesneleri sayılardan oluşan $Q = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi ile özellikler kümesi s_1 : tek sayı, s_2 : çift sayı, s_3 : bileşik sayı (en az iki asal sayının çarpımı olan sayı), s_4 : asal sayı, s_5 : kare sayı kısaltmaları kullanılmak üzere $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$ verilsin. (Q, S, R) biçimsel bağlamı Çizelge 3.2 de sunulmuştur.

Çizelge 3.2. Biçimsel Bağlam (Liu, 2021)

R	s_1 : çift	s_2 : tek	s_3 : bileşik	s_4 : asal	s_5 : kare
1	0	1	0	0	1
2	1	0	0	1	0
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

(Q, S, R) biçimsel bağlamına karşılık gelen kavram örgüsü

$$\mathcal{L} = \{(\emptyset, S), (\{1\}, \{s_2, s_5\}), (\{2\}, \{s_1, s_4\}), (\{4\}, \{s_1, s_3, s_5\}), (\{1,4\}, \{s_5\}), (\{2,4\}, \{s_1\}), (\{3,5\}, \{s_2, s_4\}), (\{1,3,5\}, \{s_2\}), (\{2,3,5\}, \{s_4\}), (Q, \emptyset)\}$$

ailesidir. $\mathcal{L}$ nin Q üzerine izdüşümü biçimsel kavramların kapsamlarından oluşur.

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, Q\}$$

$\mathcal{K}$ ailesi $\cap$ -kapalı bir bilgi yapısı belirler. Şimdi Q dan $\mathcal{K}$ ya T bağıntısını tanımlayalım ve bağıntıya karşılık gelen Boole Matrisi M_T yi oluşturalım.

$\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2, \mathcal{K}_3, \mathcal{K}_4$ ve $\mathcal{K}_5$ ailelerini belirleyelim.

$$\mathcal{K}_1 = \{\{1\}, \{1,4\}, \{1,3,5\}, Q\}, \mathcal{K}_2 = \{\{2\}, \{2,4\}, \{2,3,5\}, Q\}$$

$$\mathcal{K}_3 = \{\{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, Q\}, \mathcal{K}_4 = \{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_5 = \{\{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, Q\}.$$

Her $q \in Q$ için sağ komşuluk aileleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$r_T(1) = \mathcal{K} - \mathcal{K}_1 = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{2,3,5\}\},$$

$$r_T(2) = \mathcal{K} - \mathcal{K}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{4\}, \{1,4\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\},$$

$$r_T(3) = \mathcal{K} - \mathcal{K}_3 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}\},$$

$$r_T(4) = \mathcal{K} - \mathcal{K}_4 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}\},$$

$$r_T(5) = \mathcal{K} - \mathcal{K}_5 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}\}.$$

T bağıntısının elemanları

$$\begin{aligned} T = \{ & (1, \emptyset), (1, \{2\}), (1, \{4\}), (1, \{2,4\}), (1, \{3,5\}), (1, \{2,3,5\}), (2, \emptyset), (2, \{1\}), (2, \{4\}), \\ & (2, \{1,4\}), (2, \{3,5\}), (2, \{1,3,5\}), (3, \emptyset), (3, \{1\}), (3, \{2\}), (3, \{4\}), (3, \{1,4\}), (3, \{2,4\}), \\ & (4, \emptyset), (4, \{1\}), (4, \{2\}), (4, \{3,5\}), (4, \{1,3,5\}), (5, \emptyset), (5, \{1\}), (5, \{2\}), (5, \{4\}), \\ & (5, \{1,4\}), (5, \{2,4\}) \} \end{aligned}$$

olur. M_T Boole Matrisi

$$M_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Böylece $\underline{T}(Y) = \{q \in Q : r_T(q) \subseteq Y\}$ alt yaklaşım tanımı kullanılarak

$$\mathcal{K} = \{\underline{T}(Y) : Y \subseteq \mathcal{K}\}$$

olduğu görülür.

(Q, S, R) biçimsel bağlamına karşılık gelen $\mathcal{L}$ kavram örgüsünün S üzerine izdüşümü kavramların anlamlarından oluşan ve $\cap$ -kapalı olan bir bilgi yapısıdır. Bu aile aşağıdaki gibi

$$\mathcal{S} = \{S, \{s_1\}, \{s_2\}, \{s_4\}, \{s_5\}, \{s_2, s_4\}, \{s_2, s_5\}, \{s_1, s_4\}, \{s_1, s_3, s_5\}, \emptyset\}$$

oluşturulur. Önceki yapılan işlemler bu bilgi yapısı için de tekrarlanabilir.

Teorem 3.3.3. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı ve R de Q üzerinde tahmin bağıntısı olsun. Bu durumda $\mathcal{K} \subseteq \{K : K \subseteq Q, \overline{R}(K) = K\}$ dır.

Kanıt: Q üzerindeki tahmin bağıntısı, her $q \in Q$ için $l_R(q) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_q} K$ olarak tanımlanır. Kolaylık olması bakımından $\{K : K \subseteq Q, \overline{R}(K) = K\} = \mathcal{W}$ diyelim. İlk olarak $\emptyset = K \in \mathcal{K}$ alalım. $\overline{R}(\emptyset) = \emptyset$ olduğundan $\emptyset \in \mathcal{W}$ dir. Şimdi $K \in \mathcal{K}$ ve $K \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O halde

$$K = \bigcup_{q \in K} l_R(q) = \bigcup_{q \in K} \overline{R}(\{q\}) = \overline{R}\left(\bigcup_{q \in K} \{q\}\right) = \overline{R}(K)$$

eşitliği bize $K \in \mathcal{W}$ olduğunu ifade eder. Sonuç olarak, her $K \in \mathcal{K}$ için $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{W}$ gösterilerek kanıt tamamlanır (Liu, 2021).

$\mathcal{K} = \mathcal{W}$ eşitliğinin hangi durumda gerçekleşeceği Önerme 3.3.1 ile verilmiştir.

Önerme 3.3.1. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı ve R de Q üzerinde tahmin bağıntısı olsun. Bu durumda $\mathcal{K} = \mathcal{W}$ olması için gerek ve yeter koşul $(Q, \mathcal{K})$ nın bir yarı-nicelik uzayı olmasıdır.

Kanıt: $\Rightarrow$) $\mathcal{K} = \mathcal{W}$ olduğunu varsayalım. Δ damga kümesi ve $i \in \Delta$ olmak üzere $K_i \in \mathcal{K}$ ise, $\overline{R}(K_i) = K_i$ sağlanır. Önerme 3.2.1(iii) den $\overline{R}(\bigcup_{i \in \Delta} K_i) = \bigcup_{i \in \Delta} \overline{R}(K_i) = \bigcup_{i \in \Delta} K_i$ olur. Buradan $\bigcup_{i \in \Delta} K_i \in \mathcal{K}$ elde edilir ve $\mathcal{K}$ ailesinin $\cup$ -kapalı olduğu görülür. Ayrıca R bağıntısı yansımali olduğundan, $\bigcap_{i \in \Delta} K_i \subseteq \overline{R}(\bigcap_{i \in \Delta} K_i) \subseteq \bigcap_{i \in \Delta} \overline{R}(K_i) = \bigcap_{i \in \Delta} K_i$ sağlanır. Bu ise $\mathcal{K}$ ailesinin $\cap$ -kapalı olmasıdır. O halde $(Q, \mathcal{K})$ nın bir yarı-nicelik uzayıdır.

$\Leftarrow$) $(Q, \mathcal{K})$ bir yarı-nicelik uzayı olsun. O halde $\mathcal{K}$ ailesi hem $\cap$ -kapalı hem de $\cup$ -kapalıdır. Teorem 3.3.3 gereğince sadece $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ olduğunun gösterilmesi yeterlidir.

$\emptyset \neq K \in \mathcal{W}$ ve $\overline{R}(K) = K$ olduğunu varsayalım. Önce $\mathcal{K}$ ailesinin $\cap$ -kapalı olması nedeniyle $l_R(q) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_q} K \in \mathcal{K}$ sağlanır. Sonra $\mathcal{K}$ ailesinin $\cup$ -kapalı olmasını kullanarak $K = \overline{R}(K) = \bigcup_{q \in K} l_R(q) \in \mathcal{K}$ elde edilir. Böylece $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$ gösterilmiş olur (Liu, 2021).

NOT: Önerme 3.2.1(v) den aşağıdaki denklik vardır.

$$\begin{aligned} \overline{R}(K) = K &\Leftrightarrow \underline{R}^{-1}(K) = K, \\ \{K : K \subseteq Q, \quad \overline{R}(K) = K\} &= \{K : K \subseteq Q, \quad \underline{R}^{-1}(K) = K\}. \end{aligned}$$

Önerme 3.3.2. $(Q, \mathcal{K})$ bir yarı-nicelik uzayı ve R de Q üzerinde bir tahmin bağıntısı olsun. Aşağıda verilen özellikler sağlanır:

- (i) $(Q, \mathcal{K})$ nın bir tabanı $\{\overline{R}(\{q\}) : q \in Q\} = \{l_R(q) : q \in Q\}$ ailesidir.
- (ii) $(Q, \mathcal{K}^c)$ dual bilgi yapısı R^{-1} tahmin bağıntısı ile bir yarı-nicelik uzayıdır.

(iii) $\{r_R(q) : q \in Q\}$ ailesi $(Q, \mathcal{K}^c)$ nin bir tabanıdır.

Kanıt: (i) Önerme 3.3.1 gereğince $\mathcal{K} = \mathcal{W}$ olduğu açıktır. $K \in \mathcal{K}$ için $K = \overline{R}(K) = \bigcup_{q \in K} \overline{R}(\{q\}) = \bigcup_{q \in K} l_R(q)$ olur. Böylece $\{l_R(q) : q \in Q\}$ ailesi $(Q, \mathcal{K})$ nin bir tabanıdır.
(ii) $\mathcal{K}^c = \{K : K \subseteq Q, \underline{R}(K) = K\} = \{K : K \subseteq Q, \overline{R^{-1}}(K) = K\}$ olduğundan $(Q, \mathcal{K}^c)$ dual bilgi yapısı R^{-1} tahmin bağıntısı ile bir yarı-nicelik uzayıdır.
(iii) $q \in Q$ için $l_{R^{-1}}(q) = r_R(q)$ olduğundan $\{r_R(q) : q \in Q\}$ ailesi $(Q, \mathcal{K}^c)$ nin bir tabanıdır (Liu, 2021).

Q üzerinde yarı-sıralı bir R bağıntısı, $\mathcal{K} = \{K : K \subseteq Q, \overline{R}(K) = K\}$ olmak üzere bir $(Q, \mathcal{K})$ yarı-nicelik uzayı belirler. Aşağıda verilen teorem ile $(Q, \mathcal{K})$ yarı-nicelik uzayının tahmin bağıntısının R olduğu söylenir.

Teorem 3.3.4. R, Q üzerinde bir yarı-sıralama bağıntısı ve $\mathcal{K} = \{K : K \subseteq Q, \overline{R}(K) = K\}$ olsun. O halde $(Q, \mathcal{K})$ bir yarı-nicelik uzayıdır ve $(Q, \mathcal{K})$ nin tahmin bağıntısı R dir.

Kanıt: $(Q, \mathcal{K})$ nin bir yarı-nicelik uzayı olduğu açıktır. Eğer $q \in K, K \in \mathcal{K}$ ise, $l_R(q) \subseteq K$ dir. Ayrıca $l_R(q) \in \mathcal{K}$ olur. Böylece $l_R(q)$ nun $\mathcal{K}_q$ ailesinin en küçük elemanı olur. Bu ise $(Q, \mathcal{K})$ nin tahmin bağıntısının R olduğu sonucunu verir ve kanıt tamamlanır (Liu, 2021).

Önerme 3.3.2 ve Teorem 3.3.4 den elde edilen bilgiler şöyle ifade edilebilir: yarı-nicelik uzayları ile yarı-sıralama bağıntıları arasında kaba kümeler anlamında bire bir eşleme yapılabilir. Gerçekten, Q üzerinde herhangi bir R tahmin bağıntısının yarı-nicelik uzayı konurduğuna ilişkin teoremi verelim.

Teorem 3.3.5. R, Q üzerinde bir bağıntı ve $\mathcal{K}_R = \{K : K \subseteq Q, \overline{R}(K) \subseteq K\}$ olsun. O halde I, Q üzerinde eşitlik bağıntısı ve $t(R), R$ nin geçişli kapanışı olmak üzere $I \cup t(R)$ tahmin bağıntısı ile $(Q, \mathcal{K}_R)$ ikilisi bir yarı-nicelik uzayıdır.

Kanıt: $\emptyset = \overline{R}(\emptyset) \subseteq \emptyset$ ve $\overline{R}(Q) \subseteq Q$ olduğundan $\emptyset, Q \in \mathcal{K}_R$ dir. $i \in \Delta$ için $K_i \in \mathcal{K}_R$ olduğunu varsayalım. O halde $\overline{R}(\bigcup_{i \in \Delta} K_i) = \bigcup_{i \in \Delta} \overline{R}(K_i) \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} K_i$ olur. Bu ise

$\bigcup_{i \in \Delta} K_i \in \mathcal{K}_R$ olduğunu anlamına gelir ve $\mathcal{K}_R$ ailesi $\cup$ -kapalıdır. Ayrıca, $\bigcap_{i \in \Delta} K_i \subseteq K_i$ olması $\overline{R}(\bigcap_{i \in \Delta} K_i) \subseteq \overline{R}(K_i) \subseteq K_i$ olmasını gerektirir. Bu bilgi kullanılarak $\overline{R}(\bigcap_{i \in \Delta} K_i) \subseteq \bigcap_{i \in \Delta} K_i$ elde edilir. Böylece $\bigcap_{i \in \Delta} K_i \in \mathcal{K}_R$ dir. $\mathcal{K}_R$ ailesi $\cap$ -kapalıdır ve $(Q, \mathcal{K}_R)$ bir yarı-nicelik uzayıdır (Liu, 2021; Wu ve Liu, 2020).

$(Q, \mathcal{K}_R)$ yarı-nicelik uzayının tahmin bağıntısının $I \cup t(R)$ olduğu aşağıdaki eşitliklerin doğal bir sonucudur (Liu, 2021; Wu ve Liu, 2020).

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_R &= \{K : K \subseteq Q, \overline{R}(K) \subseteq K\} \\ &= \{K : K \subseteq Q, \overline{I \cup t(R)}(K) = K\}. \end{aligned}$$

Teorem 3.3.5 in dual biçimi Teorem 3.3.6 da kanıtsız olarak verilmiştir.

Teorem 3.3.6. R, Q üzerinde bir bağıntı ve $\mathcal{U}_R = \{K : K \subseteq Q, K \subseteq \underline{R}(K)\}$ olsun. O halde $I \cup t(R^{-1})$ tahmin bağıntısı ile $(Q, \mathcal{U}_R)$ bir yarı-nicelik uzayıdır (Liu, 2021).

NOT: Önerme 3.2.1(v) den $K \subseteq \underline{R}(K) \Leftrightarrow \overline{R^{-1}}(K) \subseteq K$ denkliği görülür. $\mathcal{K}_R$ ile $\mathcal{U}_R$ arasındaki ilişki $\mathcal{K}_R = \mathcal{U}_{R^{-1}}$ olarak ifade edilebilir (Liu, 2021).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1. Örtü İndirgemenin Minimal Beceri Dönüşümlerine Uygulanması

Tanım 4.1.1. Q bir küme ve $\mathcal{C}$ de Q nun alt kümelerinin boş olmayan bir ailesi olsun.

- (1) $Q = \bigcup_{K \in \mathcal{C}} K$ eşitliğini sağlayan $\mathcal{C}$ ailesine Q kümesinin bir örtüsü adı verilir.
- (2) $K \in \mathcal{C}$ olsun. $K = \bigcup_{L \in \mathcal{C}^*} L$ olacak biçimde bir $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ varsa, K ya $\mathcal{C}$ içinde indirgenebilir aksi durumda $\mathcal{C}$ içinde indirgenemezdir denir.
- (3) Q kümesinin $\mathcal{C}^* \subseteq \mathcal{C}$ özeliğine sahip iki örtüsü $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{C}^*$ olsun. Eğer her $K \in \mathcal{C}^*$ elemanı $\mathcal{C}^*$ içinde indirgenebilir ise, $\mathcal{C}^*$ örtüsüne $\mathcal{C}$ nin indirgemesi adı verilir (Yao ve Yao, 2012).

Her $\mathcal{C}$ örtüsünün sadece bir indirgemesi vardır ve $\mathcal{C}$ nin indirgemesi $Red(\mathcal{C})$ ile gösterilir (Zhu ve Wang, 2003).

Örnek 4.1.1. $Q = \{1,2,3\}$ kümesinin bir örtüsü $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{2,3\}, \{1,2\}, Q\}$ ailesidir. $\mathcal{C}$ örtüsünün indirgemesi $Red(\mathcal{C}) = \{\{1\}, \{2\}, \{2,3\}\}$ ailesidir.

Örnek 4.1.2. R, Q üzerinde bir yarı-sıralama bağıntısı olsun. Her $q \in Q$ için $q \in l_R(q)$ sağlanır. O halde $\{l_R(q) : q \in Q\}$ ailesi Q kümesinin bir örtüsüdür. Ayrıca, eğer $T \subseteq Q$ için $l_R(q) = \bigcup_{s \in T} l_R(s)$ sağlanıyorsa, her $s \in T$ için $l_R(q) = l_R(s)$ dir ve $\{l_R(q) : q \in Q\}$ ailesi indirgenemezdir. Benzer olarak, $\{r_R(q) : q \in Q\}$ ailesi de Q kümesinin bir örtüsüdür ve indirgenemezdir.

Bir örtü için indirgeme algoritması oluşturulmasına ilişkin ilk düşünce Dowling tarafından verilmiştir (Dowling, 1993a,b). $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$ kümesi ve $\mathcal{C} = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ ailesi $|K_1| \leq |K_2| \leq \dots \leq |K_m|$ olacak biçimde verilsin. Burada $|K|$ gösterimi $K \subseteq Q$ alt kümesinin eleman sayısı olarak kullanılmıştır. Önce satırları $K_1, K_2, \dots, K_m$ ve sütunları $q_1, q_2, \dots, q_n$ olan $m \times n$ tipinde $M = [m_{ij}]_{m \times n}$ matrisi düşünülür. Daha sonra, matrisin elemanları $q_j \in K_i$ ise $m_{ij} = 1$, diğer durumlarda $m_{ij} = 0$ olarak yerleştirilir ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$).

Örtü İndirgeme Algoritması

Giriş: $\mathcal{C}, Q$ nun bir örtüsüdür

Çıkış: $\mathcal{C}$ nin tek indirgemesi

1. $M = [m_{ij}]_{m \times n}$ matrisini oluştur
2. $i = 1$ den başlayarak $m - 1$ e kadar
 - a. $j = i + 1$ den başlayarak m ye kadar
 - b. Eğer $K_i \subseteq K_j$ ise, i . satır -1 çarpılıp j . satıra eklenir ($L_j - L_i$)

En az bir tane 1 bulunduran satırlar $\mathcal{C}$ nin indirgemesini oluşturur.

3. Algoritma sonlanır.

Örnek 4.1.3. $Q = \{1,2,3,4,5\}$ kümesinin bir örtüsü

$$\mathcal{C} = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,5\}, \{1,2,3,4\}, \{2,3,4,5\}\}$$

ailesidir. $\mathcal{C}$ örtüsünün indirgemesi olan $Red(\mathcal{C})$ yi örtü indirgeme algoritmasını kullanarak belirleyelim. İlk olarak $M = [m_{ij}]_{6 \times 5}$ matrisini aşağıdaki gibi oluşturalım. M matrisinin satırları $\mathcal{C}$ ailesinin, sütunları ise Q kümesinin elemanları ile işaretlenmiştir.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(L_3 - L_1)$ ve $(L_5 - L_1)$ cebirsel satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi, $(L_5 - L_2)$ ve $(L_6 - L_2)$ cebirsel satır işlemleri sonucunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrise son olarak $(L_6 - L_4)$ işlemi sonunda

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi bulunur. Bu matrisin en az bir tane 1 bulunduran satırlarının L_1, L_2, L_3 ve L_4 olduğu görülmektedir. O halde $Red(\mathcal{C}) = \{\{1,2\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{2,3,5\}\}$ ailesidir (Liu, 2021).

Teorem 4.1.1. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi yapısı olsun. Aşağıdaki önermeler denktir:

- (i) $\mathcal{K}$ ailesi $\cap$ -kapalıdır.
- (ii) $\mathcal{L} \subseteq Red(\mathcal{K})$ için $\cap_{K \in \mathcal{L}} K = \emptyset$ dir ya da $Red(\mathcal{K})$ içindeki bazı alt kümelerin bir birleşimi $\cap_{K \in \mathcal{L}} K$ olur.

Kanıt: (i) $\Rightarrow$ (ii) $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı $\cap$ -kapalı ve $\mathcal{L} \subseteq Red(\mathcal{K})$ için $\cap_{K \in \mathcal{L}} K \in \mathcal{K}$ olsun. O halde $\cap_{K \in \mathcal{L}} K = \emptyset$ ya da $Red(\mathcal{K})$ içindeki bazı alt kümelerin bir birleşimi $\cap_{K \in \mathcal{L}} K$ dir. (ii) $\Rightarrow$ (i) $i \in \Delta$ için $K_i \in \mathcal{K}$ olsun. Örtü indirgeme tanımına göre, $K_i = \cup_{j \in \Delta} L_i^{(j)}$ ve $L_i^{(j)} \in Red(\mathcal{K})$ dir. Ayrıca, $Red(\mathcal{K})$ içindeki bazı alt kümelerin bir birleşimi $\cap_{i \in \Delta} K_i = \cap_{i \in \Delta} (\cup_{j \in \Delta} L_i^{(j)}) = \cup_{j \in \Delta} (\cap_{i \in \Delta} L_i^{(j)})$ olur. O halde $\mathcal{K}$ ailesi $\cap$ -kapalıdır (Liu, 2021).

Önerme 4.1.1. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı $\cap$ -kapalı ve R de Q üzerinde tahmin bağıntısı olsun. R nin denklik bağıntısı olması için gerek ve yeter koşul $Red(\mathcal{K})$ nın Q nun bir ayrışımı olmasıdır.

Kanıt: Her $q \in Q$ için $l_R(q) = \cap_{K \in \mathcal{K}_q} K \in \mathcal{K}$ ve her $l_R(q)$ için $K = \cup_{q \in K} l_R(q)$ indirgenemez olması nedeniyle $Red(\mathcal{K}) = \{l_R(q) : q \in Q\}$ olur. Ayrıca, “ R denklik bağıntısıdır $\Leftrightarrow Red(\mathcal{K})$ ailesi Q kümesinin bir ayrışımıdır” denkliği göz önüne alınarak, $Red(\mathcal{K})$ ailesinin Q kümesinin bir ayrışımı olduğu elde edilir (Liu, 2021).

Örnek 4.1.4. $Q = \{1,2,3,4,5\}$ kümesi üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, Q\}$$

ailesi $\cap$ -kapalı bir bilgi yapısıdır. $\mathcal{K}$ ailesine örtü indirgeme algoritmasını uygulayalım.

Önce $M = [m_{ij}]_{8 \times 5}$ matrisini aşağıdaki gibi oluşturalım ve algoritmayı başlatalım:

$$\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[L_7-L_1]{L_4-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_8-L_2]{L_5-L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&\xrightarrow[L_5-L_3]{L_4-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_8-L_6]{L_7-L_6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Algoritma sonlandırıldığında $Red(\mathcal{K}) = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3,5\}\}$ elde edilir. Şimdi Q üzerinde tahmin bağıntısını oluşturalım.

$$\mathcal{K}_1 = \{\{1\}, \{1,4\}, \{1,3,5\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_2 = \{\{2\}, \{2,4\}, \{2,3,5\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_3 = \{\{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_4 = \{\{4\}, \{1,4\}, \{2,4\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_5 = \{\{3,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, Q\}.$$

Tahmin bağıntısı, $qRs \Leftrightarrow q \in \bigcap_{K \in \mathcal{K}_s} K$ ya da eşdeğeri olan $l_R(q) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_q} K$ eşitliği ile tanımlanır. Buna göre, her $q \in Q$ için sol komşuluklar aşağıdaki gibi belirlenir.

$$l_R(1) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_1} K = \{\{1\}\},$$

$$l_R(2) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_2} K = \{\{2\}\},$$

$$l_R(3) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_3} K = \{\{3,5\}\},$$

$$l_R(4) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_4} K = \{\{4\}\},$$

$$l_R(5) = \bigcap_{K \in \mathcal{K}_5} K = \{\{3,5\}\}.$$

Son olarak, R tahmin bağıntısı sıralı ikililer biçiminde aşağıda verilmiştir.

$$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (5,3), (4,4), (3,5), (5,5)\}$$

R bağıntısı aynı zamanda simetriktir. O halde R nin denklik bağıntısı olma özelliklerine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Önerme 4.1.1 gereğince $Red(\mathcal{K}) = \{\{1\}, \{2\}, \{4\}, \{3,5\}\}$ ailesi Q kümesinin bir ayrışımıdır.

4.2. Beceri Dönüşümlerinin Ayrıcı Modeli

Tanım 4.2.1. Sorular kümesi Q , beceriler kümesi S ve $\tau : Q \rightarrow 2^S - \{\emptyset\}$ bir dönüşüm olmak üzere (Q, S, τ) üçlüsüne beceri dönüşümü adı verilir. (Q, S, τ) beceri dönüşümü sorular ile beceriler arasında bir bağıntı belirler. Ayrıca, bir (Q, S, τ) beceri dönüşümü beceri-soru çizelgesine dönüştürülebilir (Doignon ve Falmagne, 1999).

Beceri dönüşümleri ve bilgi yapıları arasındaki köprü görevi üstlenen iki model bulunmaktadır. Birincisi ayrıcı model olarak adlandırılırlar. Ayrıcı modelde; bir soruya beceriler kümesinde bulunan kazanılmış herhangi bir beceri kullanılarak cevap verilir. Örneğin;

$$7 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 6 \times 7$$

cebirsel işleminin doğru olarak yapılabilmesi için toplama veya çarpma becerilerinden birinin kazanılmış olması yeterlidir. Toplama becerisi için s_1 , çarpma becerisi için s_2 kısaltmaları kullanarak $S = \{s_1, s_2\}$ beceriler kümesi oluşturulabilir.

Çizelge 4.1. Beceri-soru çizelgesi (Liu, 2021)

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6
q_1	1	0	0	1	0	0
q_2	1	0	1	1	1	1
q_3	1	1	1	1	0	1
q_4	1	1	0	0	1	1
q_5	0	0	1	0	1	1

Örnek 4.2.1. Sorular kümesi $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, beceriler kümesi $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$ olarak verilsin. $\tau : Q \rightarrow 2^S - \{\emptyset\}$ dönüşümü

$$\tau(q_1) = \{s_1, s_4\}, \tau(q_2) = \{s_1, s_3, s_4, s_5, s_6\}, \tau(q_3) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, s_6\},$$

$$\tau(q_4) = \{s_1, s_2, s_5, s_6\}, \tau(q_5) = \{s_3, s_5, s_6\}$$

olarak tanımlansın. (Q, S, τ) bir beceri dönüşümüdür. (Q, S, τ) beceri dönüşümüne karşılık gelen beceri-soru çizelgesi Çizelge 4.1 ile verilmiştir.

Tanım 4.2.2. (1) (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü ve $Y \subseteq S$ olsun. Eğer $K \subseteq Q$ için

$$K = \{q \in Q : Y \cap \tau(q) \neq \emptyset\}$$

sağlanıyorsa, K ya ayırıcı model yardımıyla Y ile kondurulan bilgi durumu denir.

Her $q \in Q$ için $\tau(q) \neq \emptyset$ olduğundan, $Y = \emptyset$ olması durumunda $K = \emptyset$ bilgi durumu elde edilir. $Y = S$ olması durumu ise $K = Q$ bilgi durumunu tanımlar.

(2) Beceriler kümesi S nin alt kümeleriyle tanımlanan ya da belirlenen bütün bilgi durumlarının ailesi, ayırıcı model yardımıyla (Q, S, τ) beceri dönüşümü ile belirlenen bilgi yapısı olarak adlandırılır ve kısaca $\mathcal{K}_{DM}$ ile gösterilir (Doignon ve Falmagne, 1999).

Örnek 4.2.2. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ ve $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ kümeleri verilsin. $\tau : Q \rightarrow 2^S - \{\emptyset\}$ dönüşümü $\tau(q_1) = \{s_2, s_3\}, \tau(q_2) = \{s_1, s_3, s_4\}, \tau(q_3) = \{s_2\}, \tau(q_4) = \{s_2, s_3\}, \tau(q_5) = \{s_3\}$ olarak tanımlansın. (Q, S, τ) bir beceri dönüşümüdür. $Y = \{s_2, s_4\} \subseteq S$ alt kümesinin belirlediği bilgi durumu $K = \{q_1, q_2, q_3, q_4\} = \{q \in Q : \{s_2, s_4\} \cap \tau(q) \neq \emptyset\}$ olur ve $K \in \mathcal{K}_{DM}$ dir. Ancak $K = \{q_1, q_2, q_3\} \subseteq Q$ kümesini bilgi durumu olarak belirleyen bir $Y \subseteq S$ alt kümesi bulunamaz. O halde $K \notin \mathcal{K}_{DM}$ dir. $\mathcal{K}_{DM}$ bilgi yapısı tüm elemanları ile aşağıda verilmiştir:

$$\mathcal{K}_{DM} = \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}, Q\}.$$

Önerme 4.2.1. (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü olsun. $\mathcal{K}_{DM}$ bilgi yapısı bir bilgi uzayıdır.

Kanıt: (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü olsun. Her $i \in \Delta$ için K_i bilgi durumu S beceriler kümesinin bir T_i alt kümesiyle elde edildiğini varsayalım. Bu durumda her $i \in \Delta$ için $K_i \in \mathcal{K}_{DM}$ olur. O halde $\cup_{i \in \Delta} K_i$ ailesi de $\cup_{i \in \Delta} T_i$ tarafından elde edilir. Bu ise $\cup_{i \in \Delta} K_i$ ailesinin bir bilgi durumu olmasıdır. Başka bir ifadeyle $\cup_{i \in \Delta} K_i \in \mathcal{K}_{DM}$ dir ve $\{K_i\}_{i \in \Delta}$ ailesi $\cup$ -kapalıdır. Böylece, $\mathcal{K}_{DM}$ bilgi yapısı bir bilgi uzayı olur (Doignon ve Falmagne, 1999).

Örnek 4.2.3. Örnek 4.2.2 de elde edilen $\mathcal{K}_{DM}$ bilgi yapısı $\cup$ -kapalı olduğundan bir bilgi uzayıdır.

Önerme 4.2.2. $(Q, \mathcal{K})$ bir bilgi uzayı olsun. $\mathcal{K}$ ailesini belirleyecek biçimde bir (Q, S, τ) beceri dönüşümü vardır.

Kanıt: $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayı olsun. İlk olarak τ dönüşümünü oluşturalım. $S = \mathcal{K}$ alalım. Her $q \in Q$ için $\tau(q) = \mathcal{K}_q$ ile bir beceri dönüşümü oluşturulabilir. Böylece τ dönüşümü her soruyu o soruyu bulunduran bilgi durumlarına resmeder. Ayrıca $Q \in \mathcal{K}$ olduğundan $\tau(q) \neq \emptyset$ dir. $\mathcal{F} \subseteq S = \mathcal{K}$ için, $\mathcal{F}$ ile elde edilen K bilgi durumu $\mathcal{K}$ ailesinin bir ögesidir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} K &= \{q \in Q : \mathcal{F} \cap \tau(q) \neq \emptyset\} \\ &= \{q \in Q : \mathcal{F} \cap \mathcal{K}_q \neq \emptyset\} \\ &= \{q \in Q : \exists K^* \in \mathcal{K}, q \in K^* \text{ ve } K^* \in \mathcal{F}\} \\ &= \{q \in Q : \exists K^* \in \mathcal{K}, q \in K^*\} = \cup \mathcal{F} \end{aligned}$$

sağlanır. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayı olduğundan $\cup$ -kapalı, yani $K = \cup \mathcal{F} \in \mathcal{K}$ dir. Son olarak, herhangi bir $K \in \mathcal{K}$ nın S nin bir alt kümesi tarafından, diyelim ki $\{K\}$ tarafından elde edildiğini gösterelim. $\{K\}$ kümesi tarafından elde edilen bilgi durumu için N gösterimi kullanılsın. Böylece

$$\begin{aligned} N &= \{q \in Q : \{K\} \cap \tau(q) \neq \emptyset\} \\ &= \{q \in Q : \{K\} \cap \mathcal{K}_q \neq \emptyset\} \\ &= \{q \in Q : K \in \mathcal{K}_q\} = K \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak, bir $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayının (Q, S, τ) beceri dönüşümü tarafından elde edildiği gösterilerek kanıt tamamlanır (Doignon ve Falmagne, 1999).

Örnek 4.2.4. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ kümesi üzerinde

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}, Q\}$$

ailesi $\cup$ -kapalıdır ve $(Q, \mathcal{K})$ ikilisi bir bilgi uzayıdır. $(Q, \mathcal{K})$ bilgi uzayına karşılık gelen beceri dönüşümünü belirlemek için

$$\mathcal{K}_{q_1} = \{\{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_{q_2} = \{\{q_2\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_{q_3} = \{\{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_{q_4} = \{\{q_1, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_4, q_5\}, Q\},$$

$$\mathcal{K}_{q_5} = \{\{q_1, q_2, q_4, q_5\}, Q\},$$

küme aileleri oluşturulur. Her $q \in Q$ için $\tau(q) = \mathcal{K}_q$ eşitliği ile $(Q, \mathcal{K}, \tau)$ beceri dönüşümü elde edilir. $(Q, \mathcal{K}, \tau)$ üçlüsünde $\mathcal{K} = S$ olduğuna özen gösterelim.

(Q, S, τ) bir beceri dönüşümü ve $Y \subseteq S$ olsun. Bir bilgi durumunun ayırıcı model yardımıyla becerilerin bir Y alt kümesi ile kondurulması Tanım 4.2.2 ile verilmişti. Şimdi üst yaklaşım operatörü ile bilgi durumu arasında bir ilişkinin varlığını gösterelim. Böylece kaba kümeler ile bilgi durumunun elde edilmesinin yolu açılacaktır. Bilgi durumlarının oluşturulması bizleri bilgi yapısına ve daha da önemlisi bilgi uzayına götürecektir. Öncelikle, Q kümesinden S ye bir R bağıntısı, her $q \in Q$ için $\tau_R(q) = \tau(q)$ ile tanımlansın. Bu durumda Y kümesi ile kondurulan K bilgi durumu, üst yaklaşım operatörü kullanılarak $K = \bar{R}(Y) = \{q \in Q : \tau(q) \cap Y \neq \emptyset\}$ eşitliği ile verilir. Böylece $\mathcal{K}_{DM} = \{\bar{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi ayırık modelle kondurulan bilgi yapısı olur. Ayrıca $\mathcal{K}_{DM}$ ailesi $\cup$ -kapalıdır. Gerçekten; $K_1, K_2 \in \mathcal{K}_{DM}$ olsun. O halde $K_1 = \bar{R}(Y_1) = S_1$ ve $\bar{R}(Y_2) = S_2$ olacak biçimde $Y_1, Y_2 \subseteq S$ alt kümeleri vardır. $\bar{R}(Y_1) \cup \bar{R}(Y_2) = \bar{R}(Y_1 \cup Y_2)$ eşitliği $\mathcal{K}_{DM}$ ailesinin $\cup$ -kapalı olduğunu gösterir ve $(Q, \mathcal{K}_{DM})$ bir bilgi uzayıdır. Ayrıca, R bağıntısı serial olduğundan $\{l_R(s) : s \in S\}$ ailesi Q kümesinin bir örtüsüdür.

Örnek 4.2.5. (Q, S, τ) beceri dönüşümü Örnek 4.2.2 de verildiği gibi olsun. Her $s \in S$ elemanının üst yaklaşımları $\bar{R}(\{s_1\}) = \{q_2\}$, $\bar{R}(\{s_2\}) = \{q_1, q_3, q_4\}$, $\bar{R}(\{s_3\}) =$

$\{q_1, q_2, q_4, q_5\}$ ve $\overline{R}(\{s_4\}) = \{q_2\}$ olur. Böylece elde edilen $\mathcal{K}_{DM} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi Örnek 4.2.2 deki $\mathcal{K}_{DM}$ ailesi ile çakışır.

(Q, S, τ) bir beceri dönüşümü, $S_1 \subseteq S$ ve her $q \in Q$ için $\tau_1(q) = \tau(q) \cap S_1$ olsun. Eğer her $q \in Q$ için $\tau_1(q) \neq \emptyset$ ise, (Q, S_1, τ_1) üçlüsü de bir beceri dönüşümüdür ve $\{\overline{R}_1(Y) : Y \subseteq S_1\} \subseteq \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ sağlanır. İki farklı beceri dönüşümü aynı bilgi uzayını üretebilir. Genel olarak, beceri dönüşümünde bazı beceriler gerekli olmayabilir. Beceri dönüşümünden gereksiz becerilerin kaldırılması ya da ayıklanması yararlı ve faydalı olur. Sağlanan fayda, gözlemlenen çözüm davranışının daha sade bir yolla ulaşılmasına olanak tanır ve zamandan tasarruf sağlar. Birçok uygulamada gereksiz becerilerin elenmesine ihtiyaç duyulur. Bu durum bizleri minimal beceri dönüşümü düşüncesine götürmektedir.

Tanım 4.2.3. (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü, $\mathcal{K} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$, $S_1 \subseteq S$ ve her $q \in Q$ için $\tau_1(q) = \tau(q) \cap S_1$ olsun. Aşağıda verilen koşulları sağlayan bir (Q, S_1, τ_1) beceri dönüşümüne minimal adı verilir (Liu, 2021).

$M1 : Q$ dan S ye R_1 bağıntısı, her $q \in Q$ için $\tau_{R_1}(q) = \tau_1(q)$ ile tanımlı olmak üzere

$$\mathcal{K} = \{\overline{R}_1(Y) : Y \subseteq S_1\} \text{ dir.}$$

$M2 : S_2 \subset S_1$ ve Q dan S ye R_2 bağıntısı, her $q \in Q$ için $\tau_{R_2}(q) = \tau(q) \cap S_2$ ile tanımlı ise, $\mathcal{K} \neq \{\overline{R}_2(Y) : Y \subseteq S_2\}$ dir.

Örnek 4.2.6. (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü ve $\mathcal{K} = \{\overline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. $\overline{R}(Y) = \overline{R}(\cup_{s \in Y} \{s\}) = \cup_{s \in Y} \overline{R}(\{s\}) = \cup_{s \in Y} l_R(s)$ ve her $q \in Q$ için $\tau(q) \neq \emptyset$ olduğundan $\mathcal{K}$ ailesi $\{l_R(s) : s \in S\}$ ve $\cup_{s \in S} l_R(s) = \overline{R}(S) = Q$ tarafından gerilir ya da üretilir. Q kümesi n elemanlı olmak üzere, Q nun her A alt kümesi, karakteristik fonksiyon yardımıyla n -boyutlu Boole sütun vektörü λ_A ile gösterilebilir. S kümesinin m elemanlı ve R ye karşılık gelen bağıntı matrisinin M_R olduğunu varsayalım. Ayırıcı model kullanılarak Y kümesi ile kondurulan $\overline{R}(Y)$ bilgi durumunu hesaplayabilmek için aşağıdaki eşitlik kullanılır:

$$\lambda_{\overline{R}(Y)} = M_R \circ \lambda_Y$$

Bu eşitlikte yer alan $M_R \circ \lambda_Y$, $n \times m$ türündeki matris ile m –boyutlu sütun vektörü λ_Y nin Boole anlamında bileşkesini ya da çarpımını ifade etmektedir. Örnek 4.2.1 i tekrar ele alalım ve $Y = \{s_2, s_3, s_5, s_6\} \subseteq S$ olsun.

$$\lambda_{\overline{R}(Y)} = M_R \circ \lambda_Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O halde $\overline{R}(Y) = \{q_2, q_3, q_4, q_5\}$ dir.

NOT: Her $s \in S$ becerisine bir sol komşuluk olan $l_R(s)$ karşılık gelir. Ayrıca, minimal beceri dönüşümünü bulmak $\{l_R(s) : s \in S\}$ örtüsünün indirgemesini bulmaya eşdeğerdir. Şimdi verilen bir (Q, S, τ) beceri dönüşümü için bir minimal beceri dönüşümünü bulmaya ilişkin örneği inceleyelim.

Örnek 4.2.7. (Q, S, τ) beceri dönüşümü Örnek 4.2.1 deki gibi verilsin. O halde

$$\mathcal{C} = \{l_R(s_i) : i = 1, \dots, 6\}$$

$$= \{\{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_2, q_4, q_5\}, \{q_2, q_3, q_4, q_5\}\}$$

olur. $\bigcup_{i=1}^6 l_R(s_i) = Q$ olduğundan $\mathcal{C}$ ailesi Q nun bir örtüsüdür. Örtü indirgeme algoritmasını $\mathcal{C}$ ailesi için uygulayalım. Algoritmanın uygulanması sonucunda; $Red(\mathcal{C}) = \{l_R(s_2), l_R(s_3), l_R(s_4), l_R(s_5)\}$ ailesi $\mathcal{C}$ örtüsünün bir indirgemesidir. $S_1 = \{s_2, s_3, s_4, s_5\}$ minimal beceriler kümesi olmak üzere (Q, S_1, τ) bir minimal beceri dönüşümü olur. S_1 kümesinden herhangi bir beceri çıkarılırsa minimal olma özelliği bozulur. Bu bilgilere göre Çizelge 4.1 yeniden düzenlensin. Yeni oluşturulan Çizelge 4.2 de s_1 ve s_6 becerilerinin yer aldığı sütunların bulunmadığına dikkat edelim.

Ayırıcı model yardımıyla (Q, S, τ) beceri dönüşümü ile belirlenen bilgi yapısı olan $\mathcal{K}_{DM}$ ailesi

$\{\emptyset, \{q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_2, q_4, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5\}, Q\}$ olarak belirlenir. $(Q, \mathcal{K}_{DM})$ ikilisi bir bilgi uzayıdır.

Beceriler kümesi S den s_1 ve s_6 becerilerinin çıkarılması $\mathcal{K}_{DM}$ ailesinin belirlenmesini etkilemez. $\mathcal{K}_{DM}$ ailesinin öğeleri $\{l_R(s) : s \in S_1\} = Red(\mathcal{C})$ ailesinin bazı elemanlarının bir birleşimi olarak yazılabilir. Bu durumu ifade etmek için, $\mathcal{K}_{DM} = \ll Red(\mathcal{C}) \gg$ gösterimini kullanalım.

Çizelge 4.2. İndirgenmiş ya da minimal beceri-soru çizelgesi

	s_2	s_3	s_4	s_5
q_1	0	0	1	0
q_2	0	1	1	1
q_3	1	1	1	0
q_4	1	0	0	1
q_5	0	1	0	1

4.3. Beceri Dönüşümlerinin Birleştirici Modeli

Beceri dönüşümlerinin birleştirici modelinde ise, bir soruya beceriler kümesinde yer alan bütün kazanılmış beceriler kullanılarak cevap verilir. Örneğin;

$$8 \times 3 - 1$$

cebirsel işleminin doğru olarak hesaplanabilmesi için s_2 : çarpma ve s_3 : çıkarma becerilerinin kazanılmış olması gerekir. Bu durumda beceriler kümesi $S = \{s_2, s_3\}$ ile gösterilebilir.

Tanım 4.3.1. (1) (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü ve $Y \subseteq S$ olsun. Eğer $K \subseteq Q$ için

$$K = \{q \in Q : \tau(q) \subseteq Y\}$$

sağlanıyorsa, K ya birleştirici model yardımıyla Y ile kondurulan bilgi durumu denir.

(2) Beceriler kümesi S nin alt kümeleriyle tanımlanan ya da belirlenen bütün bilgi durumlarının ailesi, birleştirici model yardımıyla (Q, S, τ) beceri dönüşümü ile belirlenen bilgi yapısı olarak adlandırılır ve kısaca $\mathcal{K}_{CM}$ ile gösterilir (Doignon ve Falmagne, 1999).

(Q, S, τ) bir beceri dönüşümü ve $Y \subseteq S$ olsun. Tanım 4.3.1 de bir bilgi durumunun birleştirici model yardımıyla becerilerin bir Y alt kümesi ile kondurulması ifade edilmişti. Alt yaklaşım operatörü ile bilgi durumu arasında bir ilişki bulunmaktadır. Ayırıcı modele benzer olarak; alt yaklaşım operatörü ile bilgi durumu elde edilebilir. Becerilerin bir Y alt kümesi ile kondurulan K bilgi durumu, alt yaklaşım operatörü kullanılarak $K = \underline{R}(Y) = \{q \in Q : \tau(q) \subseteq Y\}$ ile bulunur. Bu yöntem işletilerek $\mathcal{K}_{CM} = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi birleştirici modelle kondurulan bilgi yapısı olur ve Önerme 3.2.1 (ii) gereğince de $\mathcal{K}_{CM}$

ailesi $\cap$ -kapalıdır. $Y \subseteq S$ ve $s \in Y$ olmak üzere, $\overline{R}(\{s\}) = l_R(s)$ ile $\underline{R}(\{s\}^c) = (l_R(s))^c$ eşitlikleri Önerme 3.2.1 (ii) gereğince sağlanır. $Y^c = \bigcup_{s \in Y^c} \{s\}$ ifadesinin eşdeğeri $Y = \bigcap_{s \in Y^c} \{s\}^c$ olarak yazılabilir. Bir sonraki adımda, alt yaklaşım operatörü $Y = \bigcap_{s \in Y^c} \{s\}^c$ kümesine uygulandığında

$$\underline{R}(Y) = \underline{R}\left(\bigcap_{s \in Y^c} \{s\}^c\right) = \bigcap_{s \in Y^c} \underline{R}(\{s\}^c) = \bigcap_{s \in Y^c} (l_R(s))^c$$

olur. Böylece $\{(l_R(s))^c : s \in S\}$ kesişim üreten bir ailedir. Bunun anlamı; birleştirici modelle kondurulan bilgi yapısı $\mathcal{K}_{CM}$ ailesinin her bir elemanının $\{(l_R(s))^c : s \in S\}$ ailesinin bazı elemanlarının kesişimi olmasıdır.

Örnek 4.3.1. (Q, S, τ) beceri dönüşümünü Örnek 4.2.2 de verildiği gibi ele alalım. $Y = \{s_1, s_3, s_4\} \subseteq S$ alt kümesinin belirlediği K bilgi durumu elde edelim. Bunun için alt yaklaşım tanımı kullanmak yeterli olacaktır. Gerçekten; $\{q \in Q : \tau(q) \subseteq \{s_1, s_3, s_4\}\} = \{q_2, q_5\} = K$ olur ve $K \in \mathcal{K}_{CM}$ dir. Buna karşın $K = \{q_1, q_2, q_5\} \notin \mathcal{K}_{CM}$ olmaktadır. $\mathcal{K}_{CM}$ ailesinin elemanlarının tamamı elde edilerek aşağıda verilmiştir:

$$\mathcal{K}_{CM} = \{\emptyset, \{q_3\}, \{q_5\}, \{q_2, q_5\}, \{q_1, q_3, q_4, q_5\}, Q\}.$$

Örnek 4.3.2. (Q, S, τ) beceri dönüşümünü Örnek 4.2.2 de verildiği gibi olsun. Her $s \in S$ elemanının tümleyeni $\{s\}^c$ olmak üzere alt yaklaşımları, sırasıyla $\underline{R}(\{s_1\}^c) = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$, $\underline{R}(\{s_2\}^c) = \{q_2, q_5\}$, $\underline{R}(\{s_3\}^c) = \{q_3\}$ ve $\underline{R}(\{s_4\}^c) = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$ olur. $\mathcal{K}_{CM}$ ailesinin elemanları $\{(l_R(s))^c : s \in S\} = \mathcal{D} = \{\{q_3\}, \{q_2, q_5\}, \{q_1, q_3, q_4, q_5\}\}$ ailesinin bazı elemanların bir kesişimi olarak elde edilir. $\mathcal{K}_{CM} = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesinin Örnek 4.3.1 de elde edilen $\mathcal{K}_{CM}$ ailesi ile aynı olduğu görülür

Örnek 4.3.3. (Q, S, τ) beceri dönüşümünü Örnek 4.2.1 de verildiği gibi olsun ve Örnek 4.2.7 yi tekrar düşünelim. Birleştirici model yardımıyla (Q, S, τ) beceri dönüşümü ile belirlenen bilgi yapısını oluşturan $\mathcal{K}_{CM}$ ailesi

$\{\emptyset, \{q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_2, q_4, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{q_1, q_2, q_3, q_5\}\}$ olarak belirlenir.

$\mathcal{K}_{CM}$ ailesinin elemanları $\{(l_R(y))^c : y \in S_1\} = (Red(\mathcal{C}))^c = \mathcal{D}$ ailesinin bazı elemanlarının bir kesişimi olarak yazılabilir. Bunu sade bir biçimde ifade etmek için

$\mathcal{K}_{CM} = \gg \mathcal{D} \ll$ gösteriminden yararlanalım. $\mathcal{D}$ ailesinin elemanlarının belirlenmesi $\mathcal{K}_{CM}$ ailesinin oluşturulması anlamına gelir. O halde $\mathcal{D}$ elemanları

$$(l_R(s_2))^c = \{q_1, q_2, q_5\}, (l_R(s_3))^c = \{q_1, q_4\},$$

$$(l_R(s_4))^c = \{q_4, q_5\}, (l_R(s_5))^c = \{q_1, q_3\}$$

olmak üzere $\{\{q_1, q_2, q_5\}, \{q_1, q_4\}, \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\}\}$ ailesidir. O halde $\mathcal{K}_{CM}$ ailesi

$$\mathcal{K}_{CM} = \{\emptyset, \{q_5\}, \{q_1, q_2, q_5\}, \{q_1, q_4\}, \{q_4, q_5\}, \{q_1, q_3\}, \{q_1\}, Q\}$$

olur. Her $K \in \mathcal{K}_{CM}$ elemanının $\mathcal{D}$ ailesinin bazı öğelerin bir kesişimi olarak yazılabildiğini örnek üzerinde gösterelim. Örneğin: $\{q_5\} \in \mathcal{K}_{CM}$ elemanı $\mathcal{D}$ ailesinin $\{q_1, q_2, q_5\}, \{q_4, q_5\}$ elemanlarının kesişimi olarak elde edilir. Buna karşın $\{q_3\} \notin \mathcal{K}_{CM}$ olduğuna dikkat edelim.

Önerme 4.3.1. (Q, S, τ) bir beceri dönüşümü olsun. $\mathcal{K}_{CM}$ bilgi yapısı $\cap$ -kapalıdır (Doignon ve Falmagne, 1999).

NOT: Önerme 4.2.1 ile Önerme 4.3.1 birbirlerinin dualidir.

Örnek 4.3.4. Örnek 4.2.2 de verilen $(Q, \mathcal{K}_{DM})$ ikilisi bir bilgi uzayıdır. $\mathcal{K}_{CM} = \{K^c : K \in \mathcal{K}_{DM}\} = \{\emptyset, \{q_3\}, \{q_5\}, \{q_2, q_5\}, \{q_1, q_3, q_4, q_5\}, Q\}$ bilgi yapısı $\mathcal{K}_{DM}$ nin dualidir ve $\cap$ -kapalıdır.

4.4. Çoklu Beceri Dönüşümleri

Tanım 4.4.1. Sorular kümesi Q , beceriler kümesi S ve $\mu : Q \rightarrow 2^{(2^S - \{\emptyset\})} - \{\emptyset\}$ bir dönüşüm olmak üzere (Q, S, μ) üçlüsüne çoklu-beceri dönüşümü adı verilir. Her $q \in Q$ için $\mu(q)$ kümesinin elemanları etiketlenmiş yeterlilikler ya da yetkinlikler olarak adlandırılır (Doignon ve Falmagne, 1999).

Her $q \in Q$ için, $A \subseteq S$ olmak üzere $\mu(q) = \{A\}$ ise, (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü bir beceri dönüşümü olur. Kısaca, bir beceri dönüşümünün çoklu-beceri dönüşümünün özel bir durumu olduğu söylenebilir.

Tanım 4.4.2. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, $K \subseteq Q$ ve $T \subseteq S$ olsun. Eğer K kümesi T içinde en az bir yetkinliğe sahip bütün soruları bulunduruyorsa, K bilgi durumunun becerilerin bir T alt kümesiyle belirlenir denir. Bu tanım aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$q \in K : \Leftrightarrow \exists C \in \mu(q) : C \subseteq T.$$

Böylece her $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı en az bir çoklu-beceri dönüşümü tarafından belirlenir. $T = \emptyset$ ise, $K = \emptyset$ dir. $T = S$ ise, $K = Q$ olur. O halde $\emptyset, Q \in \mathcal{K}$ sağlanır (Doignon ve Falmagne, 1999).

Örnek 4.4.1. $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ve $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ olsun. Q içindeki her soru için yetkinliği listeleyen $\mu : Q \rightarrow 2^{(2^S - \{\emptyset\})} - \{\emptyset\}$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\mu(q_1) = \{\{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}\}, \quad \mu(q_2) = \{\{s_3\}, \{s_1, s_3\}\},$$

$$\mu(q_3) = \{\{s_1\}, \{s_2\}, \{s_1, s_3\}\}, \quad \mu(q_4) = \{\{s_2\}\}.$$

(Q, S, μ) üçlüsü bir çoklu-beceri dönüşümüdür. (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümünün belirlediği $(Q, \mathcal{K})$ bilgi yapısı

$$\mathcal{K} = \{\emptyset, \{q_2\}, \{q_3\}, \{q_3, q_4\}, \{q_1, q_2, q_3\}, \{q_1, q_3, q_4\}, \{q_2, q_3, q_4\}, Q\}$$

ailesidir.

4.5. Çoklu Beceri Dönüşümlerinin Birleştirici Modeli

Tanım 4.5.1. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü olsun. Bir $p : 2^S \rightarrow 2^Q$ dönüşümü

$$p(Y) = \{q \in Q : \exists A \in \mu(q), A \subseteq Y\}, \quad Y \subseteq S$$

ile tanımlansın. p dönüşümüne problem fonksiyonu, $p(Y)$ kümesine de bir birleştirici model yardımıyla Y ile kondukları bilgi durumu adları verilir (Heller, vd. 2013).

$\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. Bu durumda $(Q, \mathcal{K}_{CM}^m)$ bir bilgi yapısıdır. $(Q, \mathcal{K}_{CM}^m)$ ye birleştirici model yardımıyla (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü ile kondukları bilgi yapısı denir.

(Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü ve $x \in Q$ olsun. $\mu(x)$ içinde bulunan minimal elemanların (varsa) kümesini $\mu_{min}(x)$ ile gösterelim. Bu durumda (Q, S, μ_{min}) üçlüsü de bir çoklu-beceri dönüşümü olur. Ayrıca, (Q, S, μ) ve (Q, S, μ_{min}) aynı bilgi yapısını tanımlarlar.

Örnek 4.5.1. $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $S = \{a, b, c\}$ olmak üzere $\mu : Q \rightarrow 2^{(2^S - \{\emptyset\})} - \{\emptyset\}$ dönüşümü aşağıda verildiği gibi tanımlansın:

$$\mu(1) = \{\{a, b\}, \{a, c\}\}, \mu(2) = \{\{a, c\}, \{c\}\}, \mu(3) = \{\{b, c\}\}, \mu(4) = \{\{a, c\}, \{b\}\}.$$

$Y = \{a, c\}$ ile kondurulan bilgi durumu $\{1, 2, 4\}$ olur ve (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü ile kondurulan bilgi yapısı $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, Q\}$ olur. $\mathcal{K}$ ailesi ne $\cup$ -kapalı ne de $\cap$ -kapalıdır. Bilgi yapısını kaba küme yaklaşımlarıyla belirleyebiliriz. $\text{Max}_{i=1}^4 |\mu_{\min}(i)| = 2$ olduğundan; Q dan S kümesine birbirlerinden farklı R_1 ve R_2 ile gösterilen bağıntılar vardır. $x \in Q$ olmak üzere, $\mu_{\min}(x) = \{r_{R_i}(x) : i = 1, 2\}$ olarak tanımlansın.

Çizelge 4.3. R_1 ve R_2 bağıntıları

Q	r_{R_1}	r_{R_2}
1	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$
2	$\{c\}$	$\{c\}$
3	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
4	$\{a, c\}$	$\{b\}$

$$r_{R_1}(1) = \{a, b\}, r_{R_1}(2) = \{c\}, r_{R_1}(3) = \{b, c\}, r_{R_1}(4) = \{a, c\},$$

$$r_{R_2}(1) = \{a, c\}, r_{R_2}(2) = \{c\}, r_{R_2}(3) = \{b, c\}, r_{R_2}(4) = \{b\}$$

olduğunu varsayalım (Çizelge 4.3). O halde

$$p(Y) = \{x \in Q : \exists A \in \mu(q), A \subseteq Y\} = \underline{R_1}(Y) \cup \underline{R_2}(Y), \quad Y \in 2^S$$

dir. $Y = \{a, c\}$ olsun. Bu durumda $\underline{R_1}(Y) = \{2, 4\}$, $\underline{R_2}(Y) = \{1, 2\}$ ve

$$p(Y) = \underline{R_1}(Y) \cup \underline{R_2}(Y) = \{2, 4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\}$$

olur.

Bu örnekte verilen yöntem genel bir çoklu-beceri dönüşümüne genişletilebilir. Bir (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü için $Q = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ olsun. (Q, S, μ) üçlüsünü değiştirmek için $(Q, S, \mu_{\min})$ gösterimini kullanalım. $l = \text{Max}_{i=1}^n |\mu_{\min}(i)|$ olsun. Q dan S kümesine $R_1, R_2, \dots, R_l$ bağıntıları, $i = 1, 2, \dots, m$ olmak üzere $\mu_{\min}(x_i) = \{r_{R_1}(x_i), r_{R_2}(x_i), \dots, r_{R_l}(x_i)\}$ ile tanımlansın. Gerçekten, S nin alt kümelerinin keyfi sıralanışına göre, $\mu_{\min}(x) = \{T_1, T_2, \dots, T_l\}, T_i \subseteq S$ olsun.

(1) $t = l$ ise, $r_{R_i}(x) = T_i, i = 1, 2, \dots, l$ dir.

(2) $t < l$ ise, $r_{R_i}(x) = T_i, i = 1, 2, \dots, t$ ve $r_{R_i}(x) = T_t, t < i \leq l$ dir.

Ayrıca,

$$p(Y) = \{x \in Q : \exists A \in \mu(x), A \subseteq Y\} = \underline{R}_1(Y) \cup \underline{R}_2(Y), \dots, \underline{R}_l(Y), \forall Y \in 2^S$$

olur. $\tau_i : Q \rightarrow 2^S - \{\emptyset\}$ dönüşümü $x \in Q$ ve $i = 1, \dots, l$ olmak üzere, $\tau_i(x) = r_{R_i}(x)$ ile tanımlanır ve (Q, S, τ_i) bir beceri dönüşümüdür (Liu, 2021).

Bir çoklu-beceri dönüşümü üzerine hangi koşul konulursa, $\cap$ -kapalı aile tanımlayacağına ilişkin soru Falmagne ve Doignon tarafından gündeme getirilmiştir. Bu sorunun yanıtı aşağıda verilen iki teoremle karşılık bulmuştur (Liu, 2021).

Teorem 4.5.1. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, p problem fonksiyonu ve $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. Eğer her $q \in Q$ için $\mu(q)$ nun en küçük ögesi varsa, $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesi $\cap$ -kapalıdır.

Kanıt: $\mu(q)$ içindeki en küçük elemanı $\mu_{min}(q)$ ile gösterelim ve Q dan S kümesine bir R bağıntısı, her $q \in Q$ için $r_R(q) = \mu_{min}(q)$ ile tanımlansın. $Y \subseteq S$ için

$$p(Y) = \{q \in Q : \exists A \in \mu(q), A \subseteq Y\} = \{q \in Q : \mu_{min}(q) \subseteq Y\} = \underline{R}(Y)$$

olduğu tanımlardan görülür. Ayrıca, $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\} = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ olur ve $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesi $\cap$ -kapalıdır (Liu, 2021).

Örnek 4.5.2. $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ olmak üzere $\mu : Q \rightarrow 2^{(2^S - \{\emptyset\})} - \{\emptyset\}$ dönüşümü aşağıdaki gibi verilmiş olsun:

$$\mu(1) = \{\{s_1, s_2\}, Q\}, \mu(2) = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1\}\}, \mu(3) = \{\{s_2, s_3\}, Q\}, \mu(4) = \{\{s_1\}, \{s_1, s_3\}\}.$$

(Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümüdür. Her $i = 1, 2, 3$ için $\mu(i)$ nin en küçük elemanı bulunmaktadır. Bunlar, sırasıyla $\mu_{min}(1) = \{s_1, s_2\}$, $\mu_{min}(2) = \{s_1\}$, $\mu_{min}(3) = \{s_2, s_3\}$, $\mu_{min}(4) = \{s_1\}$ olurlar. O halde $\mathcal{K}_{CM}^m = \{\emptyset, \{3\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 4\}, Q\}$ ailesi $\cap$ -kapalıdır (Liu, 2021).

Önerme 4.5.1. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, p problem fonksiyonu olsun. Her $q \in Q$ için $\mu(q)$ tek elemanlı bir küme ise, $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi $\cap$ -kapalıdır.

Kanıt: $q \in Q$ için $\mu(q) = \{A_q\}$ olsun. O halde $\mu(q)$ içinde en küçük eleman A_q olur (Heller vd., 2013).

Teorem 4.5.2. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, p problem fonksiyonu ve $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. Q dan $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesine bir R bağıntısı, $q \in Q$ için $r_R(q) = \mathcal{K}_{CM}^m - (\mathcal{K}_{CM}^m)_q$ ile tanımlansın. Aşağıda verilen önermeler denktir.

- (i) $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesi $\cap$ -kapalıdır.
- (ii) Her $Y \subseteq S$ için $p(Y) = \underline{R}(\mathcal{K} - \{p(Y)\})$ sağlanır.

Kanıt: $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ nin bir bilgi yapısı olduğu açıktır. Q dan $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesine bir R bağıntısı, $q \in Q$ için $r_R(q) = \mathcal{K}_{CM}^m - (\mathcal{K}_{CM}^m)_q$ ile tanımlayalım. Teorem 3.3.2 gereğince, “ $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesinin $\cap$ -kapalı olması için gerek ve yeter koşul $p(Y) = \underline{R}(\mathcal{K} - \{p(Y)\})$ dir” eşdeğerliği bilinmektedir. Böylece kanıt tamamlanır (Liu, 2021).

4.6. Çoklu Beceri Dönüşümlerinin Ayırıcı Modeli

4.6.1. Tanım (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü olsun. Birleştirici modelin bir dual biçimi olarak diğer bir $q : 2^S \rightarrow 2^Q$ problem fonksiyonu

$$q(Y) = \{x \in Q : \forall A \in \mu(x), A \cap Y \neq \emptyset\}, \quad Y \subseteq S$$

ile tanımlansın. $q(Y)$ kümesine de ayırıcı model yardımıyla Y ile kondurulan bilgi durumu adı verilir (Liu, 2021).

$\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi bir bilgi yapısıdır. $(Q, \mathcal{K}_{DM}^m)$ ikilisine ayırıcı model yardımıyla (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü ile kondurulan bilgi yapısı denir. p ve q problem fonksiyonlarının birbirlerinin duali olduğu kolayca görülür. p ve q arasındaki dualitenin varlığı, $Y \subseteq S$ olmak üzere $(p(Y))^c = q(Y^c)$ ve $(q(Y))^c = p(Y^c)$ eşitliklerinin sağlandığı anlamına gelir. Her $x \in Q$ için $|\mu(x)| = 1$ ise, (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümünü bir (Q, S, μ) beceri-dönüşümüne çevirir ve $q(Y)$ kümesi ayırıcı model yardımıyla Y ile kondurulan bir bilgi durumu ile çakışır. Birleştirici model için verilen teoremlerin benzerleri ayırıcı model için de ifade edilebilir.

Teorem 4.6.1. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, q problem fonksiyonu ve $\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. Her $x \in Q$ için $\mu(x)$ in en küçük elemanı varsa, $(Q, \mathcal{K}_{DM}^m)$ bir bilgi uzayıdır.

Kanıt: Teorem 4.5.1 de verilen kanıta benzer olarak, $\mu(x)$ içindeki en küçük elemanı $\mu_{min}(x)$ ile gösterelim. Q dan S kümesine bir R bağıntısı, $x \in Q$ için $r_R(x) = \mu_{min}(x)$ ile tanımlayalım. Bu durumda,

$q(Y) = \{x \in Q : \forall A \in \mu(x), A \subseteq Y\} = \{x \in Q : \mu_{\min}(x) \cap Y \neq \emptyset\} = \overline{R}(Y), Y \subseteq S$ olur. Böylece $(Q, \mathcal{K}_{DM}^m)$ ikilisinin bir bilgi uzayı olduğu görülür (Liu, 2021).

Örnek 4.6.1. (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü Örnek 4.6.2 de verildiği gibi olsun. Ayrıca, Q dan S ye bir R bağıntısı, $r_R(1) = \{s_1, s_2\}, r_R(2) = \{s_1\}, r_R(3) = \{s_2, s_3\}$ ve $r_R(4) = \{s_1\}$ olarak tanımlansın. $\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi bir bilgi uzayıdır (Liu, 2021).

Teorem 4.6.2 (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, q problem fonksiyonu olsun. Her $x \in Q$ için ve her $A, \mu(x)$ içinde tek elemanlı bir küme ise, $\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi $\cap$ -kapalı bir bilgi yapısıdır.

Kanıt: Q dan S ye bir R bağıntısını, $r_R(x) = \bigcup_{A \in \mu(x)} A, x \in Q$ ile tanımlayalım. O halde $q(Y) = \{x \in Q : \forall A \in \mu(x), A \cap Y \neq \emptyset\} = \{x \in Q : r_R(x) \subseteq Y\} = \underline{R}(Y)$ olur ve $\mathcal{K}_{DM}^m = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi $\cap$ -kapalı bir bilgi yapısıdır (Liu, 2021).

Örnek 4.6.2. $Q = \{1, 2, 3, 4\}$ ve $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ olmak üzere μ dönüşümü

$$\mu(1) = \{\{s_1\}, \{s_3\}\}, \mu(2) = \{\{s_1\}, \{s_2\}\}, \mu(3) = \{\{s_2\}, \{s_3\}\}, \mu(4) = \{\{s_1\}, \{s_2\}\}$$

olarak verilsin. (Q, S, μ) üçlüsü bir çoklu-beceri dönüşümüdür. Ayrıca, Q dan S ye bir R bağıntısı, $r_R(1) = \{s_1, s_3\}, r_R(2) = \{s_1, s_2\}, r_R(3) = \{s_2, s_3\}$ ve $r_R(4) = \{s_1, s_2\}$ ile tanımlansın. $\mathcal{K}_{DM}^m = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\} = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{2, 4\}, Q\}$ ailesi $\cap$ -kapalıdır (Liu, 2021).

Teorem 4.6.3. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, $\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ ve Q dan $\mathcal{L}$ ailesine bir R bağıntısı, $x \in Q$ için $r_R(x) = (\mathcal{K}_{DM}^m)_x$ ile tanımlansın. $\mathcal{K}_{DM}^m$ ailesinin bir bilgi uzayı olması için gerek ve yeter koşul $\overline{R}(q(Y)) = q(Y), Y \subseteq S$ olmasıdır.

Kanıt: $\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ bir bilgi yapısıdır. Teorem 3.3.1 gereğince, $\mathcal{K}_{DM}^m$ bir bilgi uzayıdır $\Leftrightarrow$ her $Y \subseteq S$ için $\overline{R}(q(Y)) = q(Y)$ denkliği kanıtı tamamlar (Liu, 2021).

Teorem 4.6.4. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü, $Y \subseteq S$ olmak üzere $p(Y) = \{x \in Q : \exists A \in \mu(x), A \subseteq Y\}$ ile $q(Y) = \{x \in Q : \forall A \in \mu(x), A \cap Y \neq \emptyset\}$ problem

fonksiyonları verilsin. Ayrıca, $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ ve $\mathcal{K}_{DM}^m = \{q(Y) : Y \subseteq S\}$ olsun. O halde $\mathcal{K}_{CM}^m$ ve $\mathcal{K}_{DM}^m$ birbirlerinin dualidir

Kanıt: Aşağıda verilen denklıklar $\mathcal{K}_{CM}^m$ ve $\mathcal{K}_{DM}^m$ ailelerinin birbirlerinin duali olduğunu kanıtlar (Liu, 2021).

$$\begin{aligned} K \in \mathcal{K}_{CM}^m &\Leftrightarrow K = p(Y) = \{x \in Q : \exists A \in \mu(x), A \subseteq Y\} \\ &\Leftrightarrow K^c = \{x \in Q : \forall A \in \mu(x), A \cap Y^c \neq \emptyset\} \\ &\Leftrightarrow K^c \in \mathcal{K}_{DM}^m. \end{aligned}$$

Örnek 4.6.3. (Q, S, μ) çoklu-beceri dönüşümü Örnek 4.5.1 de verildiği gibi olsun.

$$\mathcal{K}_{CM}^m = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{1,4\}, \{1,2,4\}, \{2,3,4\}, Q\}$$

ailesinin duali $\mathcal{K}_{DM}^m = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}, \{1,3,4\}, Q\}$ dir. Doğal olarak $\mathcal{K}_{CM}^m$ ailesi de $\mathcal{K}_{DM}^m$ ailesinin dualidir.

Önerme 4.6.1. (Q, S, μ) bir çoklu-beceri dönüşümü olsun. Her $x \in Q$ için, $\mu(x)$ içindeki her A kümesi tek noktadan oluşuyor ya da tek noktalı ve $\mathcal{K}_{CM}^m = \{p(Y) : Y \subseteq S\}$ ise, $\mathcal{K}_{CM}^m$ bir bilgi uzayıdır (Heller vd. 2013).

Kanıt: Teorem 4.6.2 gereğince, $\mathcal{K}_{DM}^m = \{\bar{R}(Y) : Y \subseteq S\}$ ailesi $\cap$ -kapalı bir bilgi yapısıdır ve $(\mathcal{K}_{DM}^m)^c = \{\underline{R}(Y) : Y \subseteq S\} = \mathcal{K}_{CM}^m$ olmaktadır. O halde $\mathcal{K}_{CM}^m$ bir bilgi uzayıdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Kaba kümeler ve bilgi uzayları teorileri birbirlerinden farklı sorunların çözümlerine alternatif olarak düşünülmüştür. Her iki teori de küme tabanlıdır ve kümeleri etkin olarak kullanır. Kaba küme teorisinde kümenin elemanları klasik kümelerde olduğu gibi kesin olarak belli değildir. Bu durum muğlak ya da belirsiz olarak ifade edilebilir. Bilgi sistemi adı verilen çizelgeler nesneler ve nesnelerin sahip olduğu özellikleri bulundurur. Teorinin başlangıcı bilgi sistemleridir. Bir bilgi sisteminde gizli olan ya da görünmeyen bilginin yaklaşımlarda bulunarak ortaya çıkarılması amaçlanır. Alt yaklaşım ve üst yaklaşım operatörleri yardımıyla çizelgede gizli kalmış ya da görünmeyen bilgiye ulaşılır. Bilgi uzayları teorisinin özünde ise, öğrenme ve değerlendirmeye dayanan bir yaklaşım bulunmaktadır. Bilgi uzayları teorisi de kümeleri etkin olarak kullanır. Bilgi alanı belirli bir konuya ilişkin sorulardan oluşur. Bilgi uzayı ise sorulara verilen doğru yanıtlar arasındaki ilişkileri bulunduran matematiksel bir yapıdır. Herhangi bir ölçüme ya da istatistik bilgisine gereksinme duymaz. Temel düşünce, bilgi uzayları teorisini bir bilgisayar yazılımının dayanağı olarak almak ve teoriye eğitim boyutuyla bir uygulama alanı yaratmaktır. Bunun gerçekleştirilmesi bir bilgisayar yazılımı ile sağlanır. Yazılımı tamamen matematik tabanlı olup bilgi uzayları teorisini kullanmaktadır. Bilgi uzayı özel bir bilgi yapısıdır ve kısaca ALEKS (Assessment and LEarnig in Knowledge Spaces) adı verilen web tabanlı yazılımın çekirdeğini oluşturur. Öğrenciler matematik, fizik, kimya, istatistik ve muhasebe gibi birçok alanda ALEKS yazılım sistemini etkin olarak kullanmaktadır. ALEKS yazılım için bilgi uzayları teorisinin uygulama alanı olduğunu söylemek çok yerinde olacaktır. Yakın zamanda yaşadığımız Covid pandemisi, uzaktan eğitimin gerekliliğini ve önemini belirgin bir şekilde ortaya koymuştur. Bu durumun doğal bir sonucu olarak ALEKS yazılımı çeşitli düzeyde bulunan öğrenciler tarafından etkin olarak kullanılmasının yolu açılmıştır.

Bu çalışma farklı iki teorisinin birbirlerini yaklaşımlar anlamında desteklediğini göstermektedir. Ayrıca, biçimsel kavram analizinin de bilgi uzayları ve kaba küme teorileriyle ortak yönlerinin bulunduğu bilinmektedir. Bilgi uzayları kaba küme üst yaklaşımlarıyla karakterize edilmektedir. Kesişime kapalı olan bilgi yapıları üst yaklaşım operatörü ile elde edilebilmektedir. Kaba küme yaklaşımları ile beceri dönüşümlerinin ayrık ve birleştirici modelleri kullanılarak bilgi yapıları oluşturulabilir. Ayrık ve birleştirici modeller eğitim alanında öğrencinin edindiği beceriler başlığı altında yer almaktadır. Minimal beceri dönüşümleriyle konurulan bilgi yapıları küme birleşim ve

kesişim işlemlerine göre kapalı bir aile olur. Örtü indirgeme algoritması tekniğinin minimal beceri dönüşümlerinin elde edilmesinde önemli bir katkı sağladığı görülmüştür. Bilgi uzaylarında çoklu beceri dönüşümlerinden yararlanılmaktadır. Ayrıca, bilgi yapıları beceri dönüşümlerinin ayrık ve birleştirici modelleriyle elde edilebilmektedir.

Matematik dizininde yoğun olarak ilgi gören bilgi uzayları teorisinin diğer disiplinlerle olan ilişkileri araştırma konusu olarak ele alınabilir. Bunlar arasında biçimsel kavram analizi, öğrenme uzayı ve doku uzayı teorileri sayılabilir. Bilgi uzayları ve kaba kümeler gelecekteki çalışmalar için farklı disiplinler arasında bağlantıyı sağlayacaktır. Bu alanlarda yapılması öngörülen araştırmalar, bilgi yönetimi, yapay zeka, makina öğrenmesi ve diğer teknoloji alanlarında önemli yenilikler getirebilir.



KAYNAKLAR

- Acar, E. (2020). *Örtü Tabanlı Kaba Küme Teorisi. (Yüksek Lisans Tezi)*. Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Burdur.
- Birkhoff, G. (1937). Ring of Sets. *Duke Journal of Mathematics*. 3, 443-454.
- Császár, A. (2002). Generalized Topology, Generalized Continuity. *Acta Mathematica Hungarica*. 96, 351-357.
- Danilov, V.I. (2009). Knowledge Spaces From a Topological Point of View. *Journal of Mathematical Psychology*. 53, 510-517.
- Doignon, J. P., ve Falmagne, J. C. (1985a). Spaces For The Assessment of Knowledge. *International Journal of Man-Machine Studies*. 23(2), 175-196.
- Doignon, J. P., ve Falmagne, J. C. (1985b). Parametrization of Knowledge Structures. *Discrete Applied Mathematics*. 21, 87-100.
- Doignon, J. P., ve Falmagne, J. C. (1999). *Knowledge Spaces*. Berlin: Springer-Verlag.
- Dowling, C.E. (1993a). Applying The Basis of a Knowledge Space For Controlling The Questioning of An Expert, *Journal of Mathematical Psychology*. 37(1), 21-48.
- Dowling, C.E. (1993b). On The Irredundant Generation of Knowledge Spaces, *Journal of Mathematical Psychology*. 37(1), 49-62.
- Düntsche, I., ve Gediga, G. (1995). Skills and Knowledge Structures. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*. 48, 9-27.
- Düntsche, I., ve Gediga, G. (1996). On Query Procedures to Build Knowledge Structures. *Journal of Mathematical Psychology*. 40, 160-168.
- Ganter, B., ve Wille, R. (1999) *Formal Concept Analysis. Mathematical Foundations*. Berlin: Springer-Verlag.
- Heller, J., Ünlü, A., Albert, D. (2013). Skills, Competencies and Knowledge Structures, in: J. C. Falmagne, et al. (Eds), *Knowledge Spaces: Applications in Education*, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 229-242.
- Hockemeyer, C. (2022, July). Bibliography on Knowledge Spaces.
<http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Ai/knowledge.spaces.html>.
- Lin, F., Cao, X., Li, J. (2022). The Language of Knowledge Spaces in Pre-Topology.
<http://dx.doi.org/10.2139/ssm.4128798>.
- Liu, G. (2010a). Rough Set Theory Based on Two Universal Sets and Its Applications. *Knowledge-Based Systems*. 23, 110-115.

- Liu, G. (2010b). Closures and Topological Closures in Quasi-Discrete Closure spaces. *Applied Mathematics Letters*. 23, 772-776.
- Liu, G. (2021). Rough Set Approaches in Knowledge Spaces. *International Journal of Approximate Reasoning*. 138, 78–88.
- Pawlak, Z. (1982). Rough Sets, *International Journal of Information and Computer Science*. 11(5), 341–356.
- Wu, H., Liu, G. (2020). The Relationships Between Topologies and Generalized Rough Sets, *Internaional Journal of Approximate Reasoning*. 119, 313–324.
- Yao, Y.Y., (1998a). Constructive and Algebraic Methods of Theory of Rough Sets. *Information Sciences*. 109, 21-47.
- Yao, Y.Y. (1998b). Relational Interpretations of Neighborhood Operators and Rough Set Approximation Operators. *Information Sciences*. Vol. 111, No. 1-4, 239-259.
- Yao, Y. Y., ve Yao, B. (2012). Covering Based Rough Sets Approximation. *Information Sciences*. 200, 91-107.
- Zhu, W., ve Wang, F. (2003). Reduction and Axiomization of Covering Generalized Rough Sets. *Information Sciences*. 152, 217-230.