

**BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIMA DÖRT BOYUTLU
YAKLAŞIM**

Hacer KONİK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2011
ANKARA**

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orjinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Hacer KONİK

BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIMA DÖRT BOYUTLU**YAKLAŞIM****(Yüksek Lisans Tezi)****Hacer KONİK****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****HAZİRAN 2011****ÖZET**

Bu tez üç bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde konu hakkında kısa bir bilgi verildikten sonra, ikinci bölümde öklidyen uzaydaki tam geometrik testlerin karmaşıklığı ve perspektif dönüşümlerden sonra elde edilen geometrik şekiller verildi. Son bölümde, Plücker koordinatlarına ve Plücker katsayılarına bağlı homojen ve dual homojen düzlem ve simplekslerin lineer bağımsızlık koşulları verildi. Ayrıca Plücker koordinatlarına ve Plücker katsayılarına bağlı olarak çakışma, aynı düzlemde geçme, aynı doğrudan geçme koşulları ile hem projektif uzay hem de iki taraflı uzaydaki simpleksler ve dual simpleksler arasındaki ilişkilendirme koşulları verildi.

Bilim Kodu : 204.1.049**Anahtar Kelimeler: Geometrik tasarım, Plücker koordinatları ve Plücker katsayıları****Sayfa Adedi : 59****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Baki KARLIĞA**

**A TOTALLY FOUR-DIMENSIONAL APPROACH COMPUTER-AIDED
GEOMETRIC DESIGN**

(M. Sc. Thesis)

Hacer KONİK

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
JUNE 2011**

ABSTRACT

This thesis consist of three sections. After giving some short explanations about the subject in the first section, complexity of perfect geometric tests in the Euclidean space and geometric figures after perspective transformations are introduced in the second section. In the last section, Plücker coordinates and Plücker coefficients simplices depending on them are given. Furthermore, coincidence, coplanarity, concurrency and collinearity conditions depending on Plücker coordinates and Plücker coefficients and also interference conditions between homogenous simplices and dual homogenous simplices in both projective space and two-sided space are given.

Science Code : 204.1.049

Key Words : Geometric design, Plücker coordinates and Plücker coefficients

Page Number : 59

Adviser : Prof. Dr. Baki KARLIĞA

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve çalışmalarımın her safhasında yakın ilgi ve önerileri ile beni yönlendiren danışmanım Sayın Hocam Prof. Dr. Baki KARLIĞA (Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi) 'ya teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında manevi desteklerini her zaman yanımda hissettiğim babama, anneme, kardeşime ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	x
1.GİRİŞ	1
2.ÖKLİDYEN UZAYDA TAM GEOMETRİK TESTLER.....	3
2.1. Projektif Uzay ve İki Taraflı Uzay.....	3
2.2. Homojen Simpleksler ve Dual Homojen Simpleksler	5
2.3. Perspektif Dönüşümlerden Sonra Geometrik Şekiller	5
2.4. Öklid Uzaydaki Tam İlişkilendirme Testleri	9
3. PLÜCKER KOORDİNATLARI VE PLÜCKER KATSAYILARINA BAĞLI R^4 'DEKİ GEOMETRİK TESTLER.....	11
3.1. Plücker Koordinatları ve Plücker Katsayıları	11
3.1.1. Plücker koordinatlarında nokta, doğru, düzlem ve uzay.....	13
3.1.2. Plücker katsayılarında düzlem, doğru, nokta ve uzay.....	17
3.2. Plücker Koordinatları ve Plücker Katsayılarına Bağlı Homojen ve Dual Homojen Düzlem ve Simplekslerin Lineer Bağımsızlık Koşulu.....	19
3.2.1. Homojen doğrular ve homojen doğru parçaları	19
3.2.2. Homojen düzlemler ve homojen üçgenler	20
3.2.3. Homojen uzay ve homojen dörtyüzlü	21
3.2.4 Dual homojen doğrular ve dual homojen doğru parçaları	22

Sayfa

3.2.5. Dual homojen nokta	22
3.2.6. Boşluk	23
3.3. Plücker Koordinatlarına ve Plücker Katsayılarına Bağlı Olarak Çakışma, Aynı Düzlemden Geçme, Aynı Noktadan Geçme, Aynı Doğrudan Geçme Koşulları	24
3.1.1. Çakışma (Aynı ve Zıt) koşulları	24
3.2.2. Aynı düzlemden ve aynı noktadan geçme	26
3.4. Projektif Uzayda ve İki Taraflı Uzaydaki Simpleksler Arasındaki İlişkilendirme Koşulları	30
3.4.1. Projektif uzaydaki ilişkilendirme koşulları	30
3.4.2. Projektif uzayda dual simpleksler	41
3.4.3. İki taraflı uzayda ilişkilendirme koşulları	44
3.4.4. İki taraflı uzayda dual simpleksler	54
KAYNAKLAR	58
ÖZGEÇMİŞ	59

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Homojen doğru parçalarının klasik Projektif uzaydaki tanımları.....	6
Şekil 2.2. Bir dual homojen doğru parçası.....	6
Şekil 2.3. Klasik projektif uzayda homojen üçgenler	7
Şekil 2.4. Klasik projektif uzayda homojen dörtyüzlüler	7
Şekil 3.1. Doğrunun Plücker koordinatlarının geometrik anlamı	15
Şekil 3.2. Projektif uzaydaki 2 boyutlu üçgenin içerdiği noktalar	31
Şekil 3.3. Projektif uzayda üçgenin yönü.....	32
Şekil 3.4. Dörtyüzlünün bir noktayı içirme koşulları	33
Şekil 3.5. Projektif uzayda üçgenin bir noktayı içirme koşulları	35
Şekil 3.6. Projektif uzayda doğru parçasının noktayı içermesi	36
Şekil 3.7. Projektif uzayda üçgen ve doğru parçasının kesişimi.....	37
Şekil 3.8. Projektif uzayda iki doğru parçasının kesişimi.....	40
Şekil 3.9. İki taraflı uzayda dörtyüzlünün noktayı içermesi	46
Şekil 3.10. İki taraflı uzayda üçgenin noktayı içermesi	47
Şekil 3.11. İki taraflı uzayda bir üçgenin bir noktayı içermesi	48
Şekil 3.12. İki taraflı uzayda doğru parçasının noktayı içermesi	49
Şekil 3.13. İki taraflı uzayda üçgen ile doğru parçasının kesişimi.....	50

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
P^3	Projektif uzay
T^3	İki taraflı uzay
$v = [x \ y \ z]$	Öklid uzayı ile birleştirilmiş vektör uzayı
$V = [X \ Y \ Z \ w]$	Projektif uzay veya iki taraflı uzay ile birleştirilmiş R^4 vektör uzayındaki bir vektör
$V = [X, Y, Z, w]$	Projektif uzay veya iki taraflı uzaydaki bir nokta
$V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0]$	Plücker koordinatlarına bağlı nokta
L_{01}	Plücker koordinatlarına bağlı doğru
F_{012}	Plücker koordinatlarına bağlı düzlem
U_{0123}	Plücker koordinatlarına bağlı uzay
γ_0	Plücker katsayılarına bağlı düzle
λ_{01}	Plücker katsayılarına bağlı doğru
π_{012}	Plücker katsayılarına bağlı nokta
τ_{0123}	Plücker katsayılarına bağlı boşluk

1.GİRİŞ

Bilgisayar grafikleri ve geometrik model oluşturma konularında hala bazı önemli problemler çözülmüş değildir. Geometrik algoritmalarındaki basitliğin eksikliği bu problemlerden biridir.

Genel olarak bilgisayar grafiklerindeki geometrik şekiller ve geometrik modeller projektif dönüşümlere maruz kalırlar, fakat bazı durumlarda bu şekiller birçok anormal şekillere dönüşürler. Bu gibi durumlar bir geometrik şekile veya rasyonel eğri ve yüzeylerin değerlendirilmesindeki bölme işlemlerine, projektif dönüşümler uygulandığında ortaya çıkar. Bundan dolayı, tamamıyla güvenilir bir değişmeyen yöntem yazmak çok zahmetli bir iştir. Bir doğru parçası ve üçgen arasında bir program yazdığımızı kabul edelim. Bu örnek olayımız da, bir doğru parçası projektif dönüşümden sonra; iç doğru parçası, dış doğru parçası ve yarı sonsuz doğru parçası olmak üzere 3 şekil, bir üçgen de projektif dönüşümlerden sonra Şekil 2.3 ‘de görüldüğü gibi; 5 farklı şekil alabildiği için $3 \times 5 = 15$ farklı metot yazmak zorundayız.

Bu problemin üstesinden gelmek için, homojen simpleksler arasında ve dual homojen simpleksler arasında ilişkilendirme testlerinin değişmeyen koşulları ve birleşimi türetilir. Fakat bu koşullarda, bazı durumların 3 boyutlu uzayda bir noktasını veya noktaları bulmak çok can sıkıcı olmaktadır.

Yamaguchi Computer-Aided Geometrik Design adlı kitabında Plücker koordinatları ve Plücker katsayılarını kullanan yeni bir metot önermiştir. Bu metot herhangi bir yardımcı nokta gerektirmez ve değişken değildir. Bunun yanında yazar Plücker koordinatları ve katsayılarını kullanan diğer temel geometrik testleri de sunmuştur. Homojen koordinatlar tanımlı bir nokta için koordinat sistemi temsil ederken keyfi derecedeki düzlemlerin koordinatları olan Plücker koordinatları, homojen koordinatların bir genelleştirilmesidir. Aynı şekilde Plücker katsayıları da homojen katsayıların genelleştirilmesidir. Bu konudaki her test koşulu durumu P^3 (projektif

uzay) ve T^3 (iki taraflı uzay)'teki homojen geometrik ögelerin yanında, dual homojen geometrik ögelere de uygulanır.

2. ÖKLİDYEN UZAYDA TAM GEOMETRİK TESTLER

Bu bölümde öklidyen uzaydaki tam geometrik testlerin bütün şartları göz önüne alındığında ne kadar karmaşık olduğunu göreceğiz. Giriş kısmındaki ilk amacımız işaretlenmiş ve işaretlenmemiş homojen koordinatlarla tanımlanan projektif uzayın iki çeşidini açıklamak ve daha sonra bu uzaylardaki homojen simpleksleri tanımlamaktır.

2.1. Projektif Uzay ve İki Taraflı Uzay

R^4 reel vektör uzayı ve $*R^4 = R^4 - \{0\}$ olarak alalım. $P, Q \in *R^4$ 'e bağlı olarak, aşağıdaki denklik bağıntısını verelim;

$$P \sim Q \iff \exists \lambda \in R; \lambda \neq 0, \lambda P = Q \quad (2.1)$$

$P = [X \ Y \ Z \ w]$ P 'yi içeren denklik sınıfının bir işaretlendirilmemiş homojen koordinat temsilcisidir; fakat Eş.2.1 denkleminde $\lambda \neq 0$ yerine $\lambda > 0$ kullanılırsa P işaretlendirilmiş homojen temsilcidir. İkinci denklik sınıfı, iki taraflı T^3 uzayındaki bir noktayı temsil ederken; ilk denklik sınıfı, P^3 klasik projektif uzayındaki noktayı temsil eder. P 'ye karşılık gelen sıradan koordinat vektörü $p = [x \ y \ z]$; X, Y ve Z 'nin w ye bölünmesiyle elde edilir, sırasıyla:

$$x = X/w, \quad y = Y/w, \quad z = Z/w.$$

İki projektif uzaydaki şekiller arasındaki farklılıklar aşağıdaki şekilde özetlenir:

1. Klasik projektif uzayda, bir şekil ve onun zıt görüntüsü iki taraflı uzayda olmamasına rağmen farklı düşünülmüş ve tanımlanmıştır.
2. İki taraflı uzayda bir şekil yönlendirilmiş, fakat izdüşüm uzayında aynı yönlendirme kullanılmamıştır.

Çizelge 2.1. Homojen simpleks ve dual homojen simplekslere ait tanımlar

Homojen Simpleksler	Dual Homojen Simpleksler
1-Homojen doğru parçası Homojen bir doğru parçası, iki lineer bağımsız homojen nokta vektörünün bir konveks birleşimi gibi V_0 ve V_1 homojen parametreleri tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanabilir: $V = [\xi_0 V_0 + \xi_1 V_1], \quad (\xi_0, \xi_1) \neq (0,0),$ P^3 'deki doğru parçası: $(\xi_0, \xi_1 \geq 0) \vee (\xi_0, \xi_1 \leq 0),$ T^3 'deki doğru parçası: $(\xi_0, \xi_1 \geq 0).$	1'.Dual homojen doğru parçası Dual homojen bir doğru parçası, iki lineer bağımsız homojen katsayı vektörünün bir konveks birleşimi gibi γ_0 ve γ_1 homojen parametreleri tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanabilir: $\gamma = [\xi_0 \gamma_0 + \xi_1 \gamma_1], \quad (\xi_0, \xi_1) \neq (0,0),$ P^3 'deki dual doğru parçası: $(\xi_0, \xi_1 \geq 0) \vee (\xi_0, \xi_1 \leq 0),$ T^3 'deki dual doğru parçası: $(\xi_0, \xi_1 \geq 0).$
2. Homojen üçgen Bir homojen üçgen, üç lineer bağımsız homojen nokta vektörünün bir konveks birleşimi gibi V_0, V_1 ve V_2 homojen parametreleri tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanabilir: $V = [\xi_0 V_0 + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2],$ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0,0,0),$ P^3 'deki üçgen: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0) \vee (\xi_0, \xi_1, \xi_2 \leq 0),$ T^3 'deki üçgen: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0).$	2'. Dual homojen üçgen Bir dual homojen üçgen, üç lineer bağımsız homojen katsayı vektörünün konveks birleşimi gibi γ_0, γ_1 ve γ_2 homojen parametreleri tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanabilir: $\gamma = [\xi_0 \gamma_0 + \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2],$ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2) \neq (0,0,0),$ P^3 'deki dual üçgen: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0) \vee (\xi_0, \xi_1, \xi_2 \leq 0),$ T^3 'deki dual üçgen: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2 \geq 0).$
3. Homojen dörtyüzlü Bir homojen dörtyüzlü, dört lineer bağımsız homojen nokta vektörlerinin bir konveks birleşimi gibi V_0, V_1, V_2 ve V_3 homojen parametreleri tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanabilir: $V = [\xi_0 V_0 + \xi_1 V_1 + \xi_2 V_2 + \xi_3 V_3],$ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0,0,0,0),$ P^3 'deki dörtyüzlü: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0) \vee (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 0),$ T^3 'deki dörtyüzlü: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0).$	3'. Dual homojen dörtyüzlü Bir homojen dörtyüzlü, dört lineer bağımsız homojen katsayı vektörünün konveks birleşimi gibi $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 homojen parametreleri tarafından aşağıdaki gibi tanımlanabilir: $\gamma = [\xi_0 \gamma_0 + \xi_1 \gamma_1 + \xi_2 \gamma_2 + \xi_3 \gamma_3],$ $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0,0,0,0),$ P^3 'deki dual dörtyüzlü: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0) \vee (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \leq 0),$ T^3 'deki dual dörtyüzlü: $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \geq 0).$

2.2. Homojen Simpleksler ve Dual Homojen Simpleksler

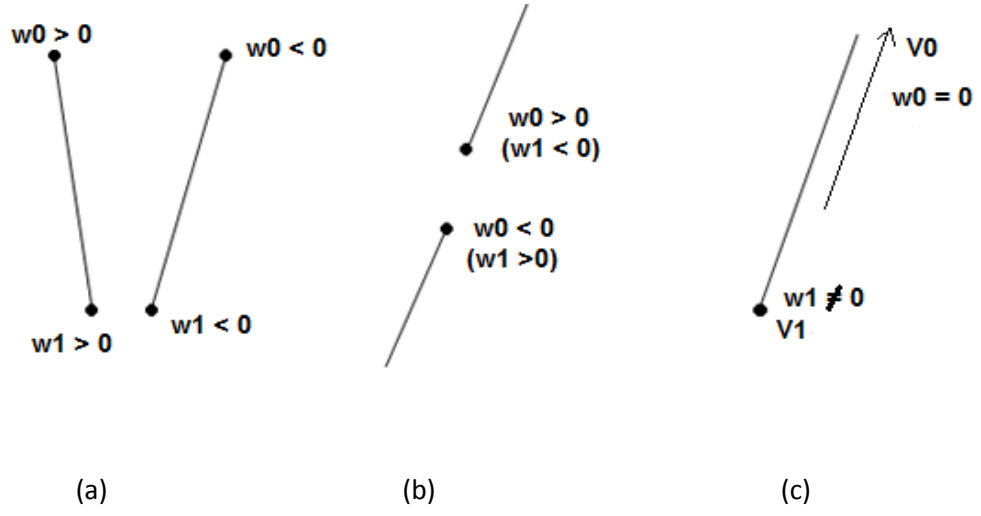
Öklidyen simplekslerin doğal genişlemelerinde olduğu gibi, homojen simpleksler Çizelge 2.1 de gösterilen ξ_i homojen parametrelerinin kullanılmasıyla P^3 'deki veya T^3 'deki V_i noktalarına karşılık gelen R^4 'deki lineer bağımsız V_i vektörlerinin lineer kombinasyonu olarak tanımlanmıştır.

2.3. Perspektif Dönüşümlerden Sonra Geometrik Şekiller

Çizelge 2.1 de verilen denklemlerdeki simpleksler öyle geneldirler ki öklidyen görüntüleri, homojen koordinatlar X, Y, Z 'nin sırasıyla w koordinatına bölünmesiyle elde edilir.

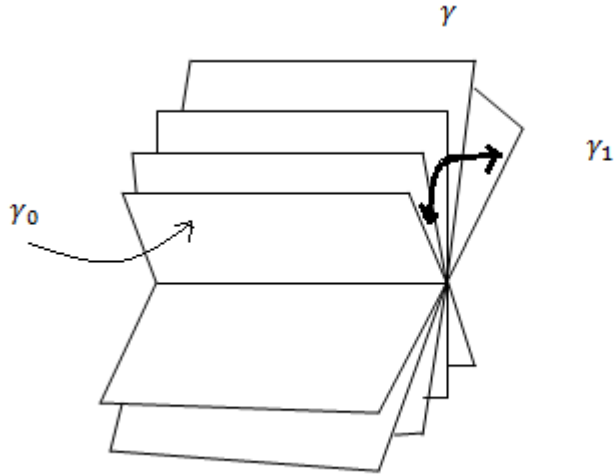
Doğru parçaları üç çeşit olarak belirtilir bunlar Şekil 2.1 de gösterildiği gibi iç doğru parçası, dış doğru parçası ve yarı sonsuz doğru parçasıdır. Bu doğru parçaları sırasıyla son noktalarının w koordinatlarının aynı işaretli, farklı işaretli ya da w koordinatlarından birinin sıfıra eşit olup olmadığına bağlı olarak oluşturulmuştur. Bu değişiklikler bölme işleminden dolayı meydana gelmiştir ve buna benzer durumlar farklı işaretli sayılar ile böldüğümüzde de meydana gelebilir. Gerçekten bu durumlar perspektif dönüşümlerin bölme işlemlerinde veya rasyonel eğrilerin ve yüzeylerin değerlendirilmesindeki bölme işlemlerinde meydana gelir.

Üçgenler ve dörtyüzlüler doğru parçalarından meydana gelmiştir. Bundan dolayı, bu simplekslerin öklidyen görüntüleri Şekil 2.3 ve Şekil 2.4 de görüldüğü gibi doğru parçalarından daha fazla karmaşık hale dönüşebilir. Bu görüntüler sınıflandırılmış ve sonsuzdaki düzleme karşılık orantılı konumlara bağlı olarak gösterilmiştir.

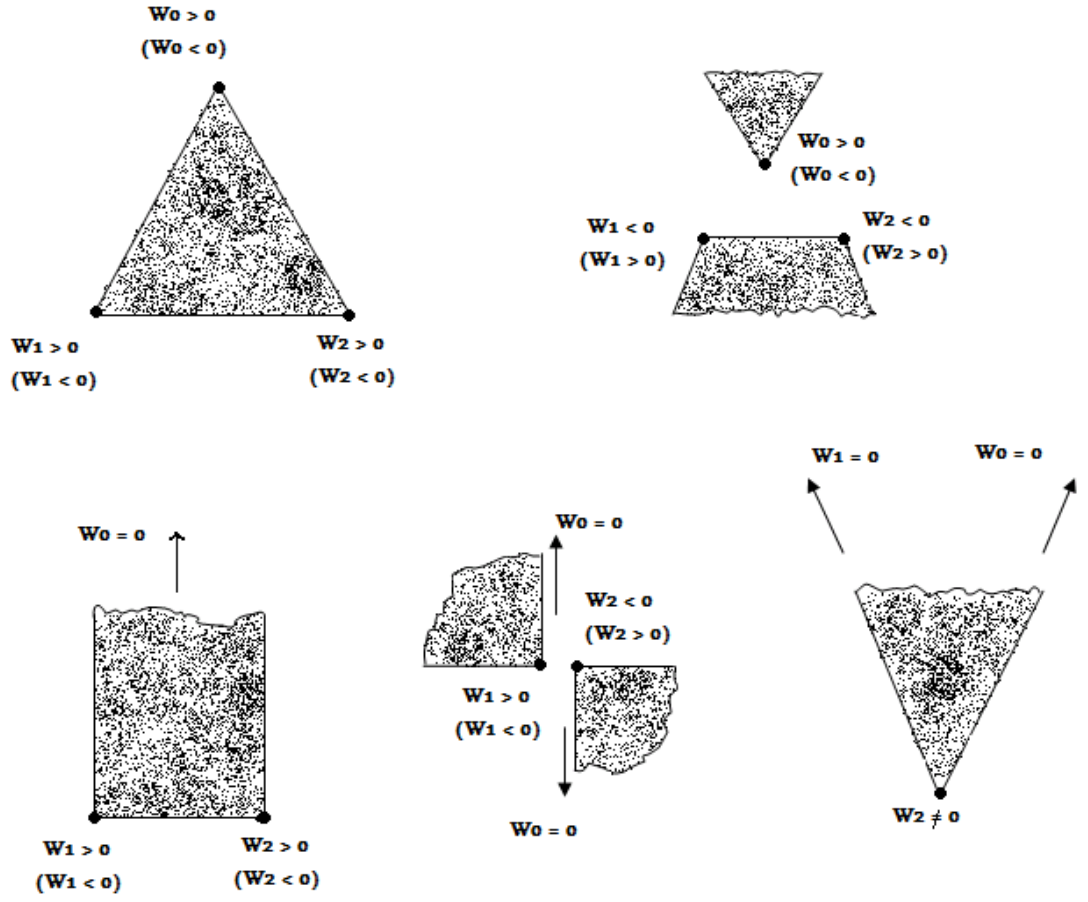


Şekil 2.1. Homojen doğru parçalarının klasik projektif uzaydaki tanımları

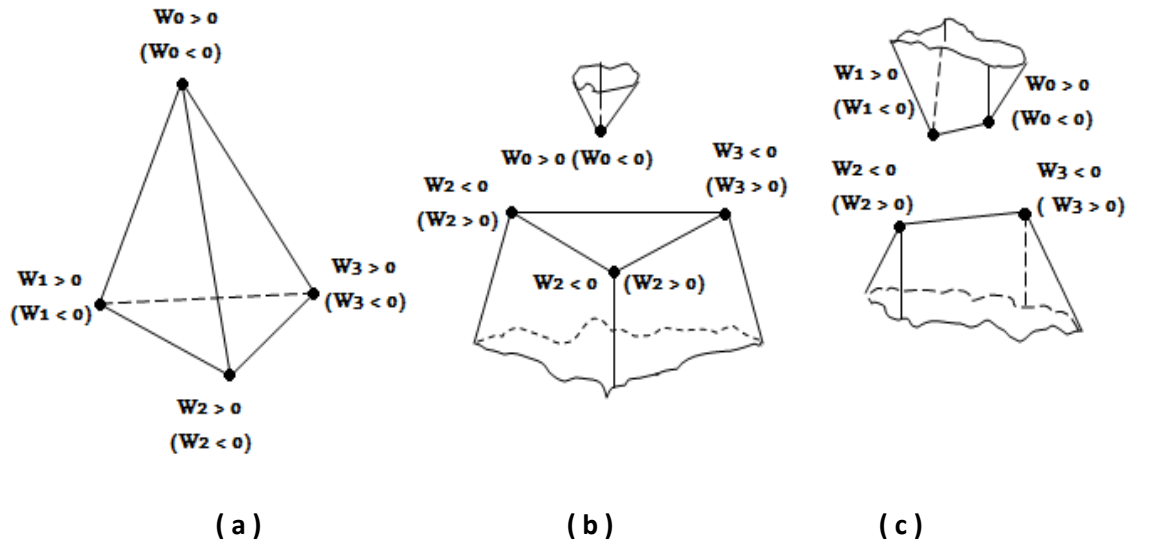
a) İç doğru parçası b) Dış doğru parçası c) Yarı sonsuz doğru parçası



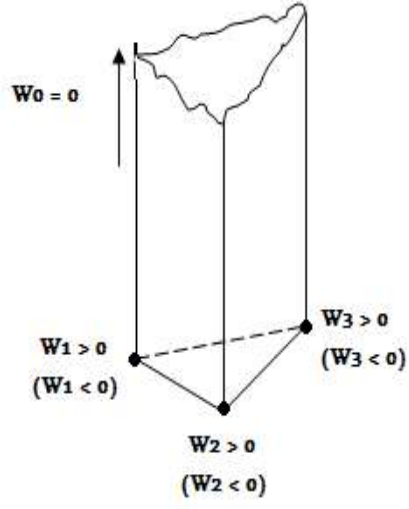
Şekil 2.2. Bir dual homojen doğru parçası



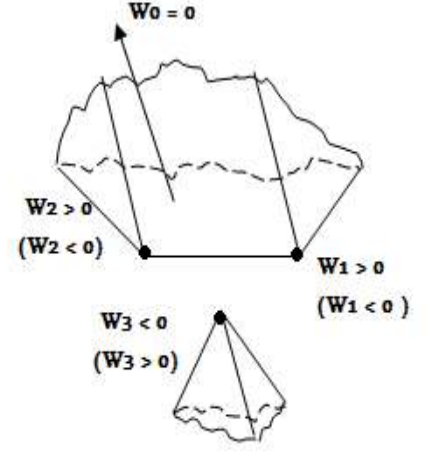
Şekil 2.3. Klasik projektif uzayda homojen üçgenler



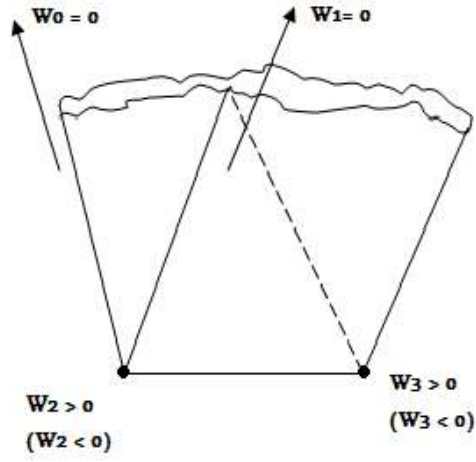
Şekil 2.4. Klasik projektif uzayda homojen dörtyüzlüler



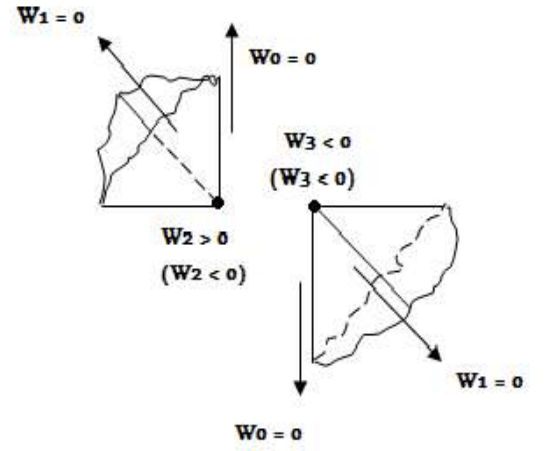
(d)



(e)

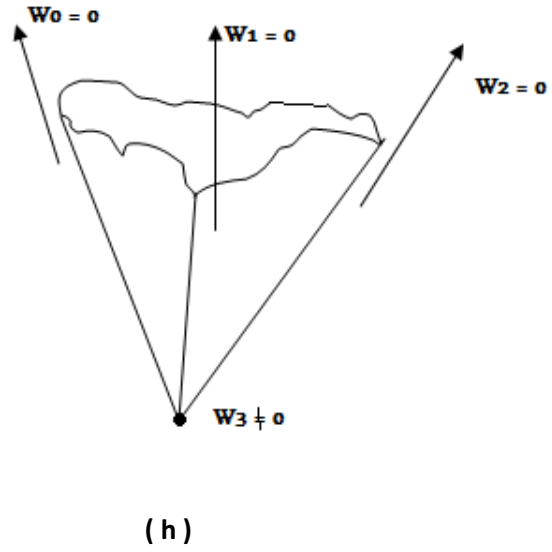


(f)



(g)

Şekil 2.4. (Devam) Klasik projektif uzayda homojen dörtyüzlüler



Şekil 2.4. (Devam) Klasik projektif uzayda homojen dörtyüzlüler

2.4. Öklid Uzaydaki Tam İlişkilendirme Testleri

Bölüm 2.3 de gösterildiği gibi, öklid uzaydaki görüntüler karmaşık olma eğilimindedir. Bir doğru parçası ve bir üçgen arasındaki bir kesişimi test etmek amacıyla yazılan bir yazılım paketini düşünelim. Tüm olası durumları kapsamak amacıyla $3 \times 5 = 15$ ayrı yöntem yazmalıyız.

Üçgeni oluşturan kenarlar ve verilen doğru parçasının kendisi farklı biçimler üstlenebileceği için, bu doğru parçaları farklı denklemler tarafından çalıştırılır, v_0 ve v_1 tarafından vektörlerin iki uç noktasını belirtirsek;

İç doğru parçası: $v = (1 - t)v_0 + tv_1, \quad 0 \leq t \leq 1$

Dış doğru parçası: $v = v_0 + \alpha t, \quad t \geq 0 \quad v = v_1 + \alpha t, \quad t \geq 0$

Yarı sonsuz doğru parçası: $v = v_0 + \alpha t, \quad t \geq 0$

şeklinde ifade edilir.

Paketin içerisinde program; ilk olarak 15 olası durumdan hangisinin geçerli olduğunu bulmak zorundadır ve buna karşılık gelen yolun kontrolünü geçmelidir. Bu kolay bir işlem değildir.

Ancak, eğer öklid uzayı yerine, projektif uzay ile bağlantılı R^4 uzayında çalışırsak, olaylar çok daha basit hale gelir. İlk olarak, Bölüm 2.2 'de görüldüğü gibi her simpleks tek bir biçim içinde gösterilir. Dolayısıyla geometrik bir test tek ve birleştirilmiş bir biçimde ifade edilir.

3. PLÜCKER KOORDİNAT VE PLÜCKER KATSAYILARINA BAĞLI R^4 ‘DEKİ GEOMETRİK TESTLER

Yamaguchi Bölüm 2 ‘de belirtilen zorlukların üstesinden gelmek için, Plücker koordinatlarını ve Plücker katsayılarını kullanan aşağıdaki yeni sistemi önermiştir.

3.1. Plücker Koordinatları ve Plücker Katsayıları

Plücker koordinatları homojen koordinatların genelleştirilmesi, yani gelişigüzel düzlemler için koordinatlardır. Bir nokta için homojen koordinatlar Plücker koordinatlardır.

İkinci olarak, Plücker katsayıları homojen katsayıların genelleştirilmesi, yani herhangi bir düzlemin katsayıları ile ilgilidir. Bir düzlem için homojen katsayılar Plücker katsayılarıdır.

Çizelge 3.1 de sırasıyla bir nokta, doğru, düzlem ve uzayı; V_0, L_{01}, F_{012} ve U_{0123} şeklindeki Plücker koordinatları ile ifade edeceğiz. İkinci olarak sırasıyla; bir düzlem, doğru, nokta ve boşluğu $\gamma_0, \lambda_{01}, \pi_{012}, \tau_{0123}$ şeklindeki Plücker katsayıları ile ifade edeceğiz. Plücker katsayıları ve Plücker koordinatlarının birbirlerinin dualleri olduğunu da göreceğiz.

Çizelge 3.1. Plücker Koordinatları ve Plücker Katsayıları

Plücker Koordinatları	Plücker katsayıları
Nokta: $V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0]$.	Düzlem: $\gamma_0 = [a_0, b_0, c_0, d_0]^T$.
Doğru: $L_{01} = [P_{01}, Q_{01}, R_{01}, S_{01}, T_{01}, U_{01}]$, $P_{01} = \begin{vmatrix} X_0 & w_0 \\ X_1 & w_1 \end{vmatrix} = X_0 w_1 - w_0 X_1$, $Q_{01} = \begin{vmatrix} Y_0 & w_0 \\ Y_1 & w_1 \end{vmatrix} = Y_0 w_1 - w_0 Y_1$, $R_{01} = \begin{vmatrix} Z_0 & w_0 \\ Z_1 & w_1 \end{vmatrix} = Z_0 w_1 - w_0 Z_1$, $S_{01} = \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = Y_0 Z_1 - Z_0 Y_1$, $T_{01} = \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} = Z_0 X_1 - X_0 Z_1$, $U_{01} = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} = X_0 Y_1 - Y_0 X_1$,	Doğru: $\lambda_{01} = [p_{01}, q_{01}, r_{01}, s_{01}, t_{01}, u_{01}]^T$, $p_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} = a_0 d_1 - a_1 d_0$, $q_{01} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} = b_0 d_1 - b_1 d_0$, $r_{01} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} = c_0 d_1 - c_1 d_0$, $s_{01} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} = b_0 c_1 - b_1 c_0$, $t_{01} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = c_0 a_1 - c_1 a_0$, $u_{01} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0$,
Düzlem: $F_{012} = [A_{012}, B_{012}, C_{012}, D_{012}]$, $A_{012} = \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 & w_0 \\ Y_1 & Z_1 & w_1 \\ Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix}$, $B_{012} = \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 & w_0 \\ Z_1 & X_1 & w_1 \\ Z_2 & X_2 & w_2 \end{vmatrix}$, $C_{012} = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & w_2 \end{vmatrix}$, $D_{012} = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$, $f_{012} \in \{A_{012}, B_{012}, C_{012}, D_{012}\}$	Nokta: $\pi_{012} = [x_{012}, y_{012}, z_{012}, w_{012}]^T$, $x_{012} = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$, $y_{012} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$, $z_{012} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}$, $w_{012} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}$, $p_{012} \in \{x_{012}, y_{012}, z_{012}, w_{012}\}$
Uzay: $U_{0123} = [S_{0123}]$, $S_{0123} = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & w_3 \end{vmatrix}$.	Boşluk: $\tau_{0123} = [T_{0123}]^T$, $T_{0123} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$.

3.1.1. Plücker koordinatlarında nokta, doğru, düzlem ve uzay

Noktaların Plücker koordinatlarının geometrik anlamları

Noktanın homojen koordinatları Plücker koordinatlarının özel bir durumunu temsil ettiğinden V_0 ile temsil edilen bir noktanın Plücker koordinatları;

$$V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0] \quad (3.1)$$

şeklinde verilir.

Doğruların Plücker koordinatlarının geometrik anlamları

$V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0]$, $V_1 = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]$ ve $\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \end{bmatrix}$ 2×4 matrisinden elde ettiğimiz 2×2 tipinde 6 farklı matrisin determinantı;

$$\begin{aligned} P_{01} &= \begin{vmatrix} X_0 & w_0 \\ X_1 & w_1 \end{vmatrix} = X_0 w_1 - w_0 X_1, & S_{01} &= \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 \\ Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} = Y_0 Z_1 - Z_0 Y_1, \\ Q_{01} &= \begin{vmatrix} Y_0 & w_0 \\ Y_1 & w_1 \end{vmatrix} = Y_0 w_1 - w_0 Y_1, & T_{01} &= \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 \\ Z_1 & X_1 \end{vmatrix} = Z_0 X_1 - X_0 Z_1, \\ R_{01} &= \begin{vmatrix} Z_0 & w_0 \\ Z_1 & w_1 \end{vmatrix} = Z_0 w_1 - w_0 Z_1, & U_{01} &= \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 \\ X_1 & Y_1 \end{vmatrix} = X_0 Y_1 - Y_0 X_1, \end{aligned} \quad (3.2)$$

olmak üzere; V_0 ve V_1 noktalarından geçen, bir L_{01} doğrunun Plücker koordinatı;

$$L_{01} = [P_{01}, Q_{01}, R_{01}, S_{01}, T_{01}, U_{01}] \quad (3.3)$$

şeklinde verilir.

Şimdi de $w_0 \neq 0 \neq w_1$ olduğunu kabul edelim ve doğrunun geometrik anlamını inceleyelim.

P_{01}, Q_{01}, R_{01} ile ilgili olarak;

$$\begin{aligned} [P_{01} \ Q_{01} \ R_{01}] &= w_1 w_0 [x_0 - x_1 \ y_0 - y_1 \ z_0 - z_1] \\ &= w_1 w_0 [V_1 V_0] \end{aligned} \quad (3.4)$$

ifadesi elde edilir.

Bu son eşitlikte $w_1 w_0 > 0$ ise $[P_{01} \ Q_{01} \ R_{01}]$ V_0, V_1 noktalarından geçen doğrunun yönlendirilmiş bir vektör temsilcisidir.

Bu durum ayrıca $V_0 V_1$ doğrusu ile sonsuzdaki düzlemin arakesit noktalarını belirlemede kullanılır.

Yani Şekil 3.1 den;

$$\begin{bmatrix} 0 & -P_{01} & -Q_{01} & -R_{01} \\ P_{01} & 0 & -U_{01} & T_{01} \\ Q_{01} & U_{01} & 0 & -S_{01} \\ R_{01} & -T_{01} & S_{01} & 0 \end{bmatrix}, [P_{01} \ Q_{01} \ R_{01}] \text{ 'in belirlediği doğrudan elde edilen}$$

antisimetrik matris ve $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ de sonsuzdaki düzlemin normal vektörü olmak üzere;

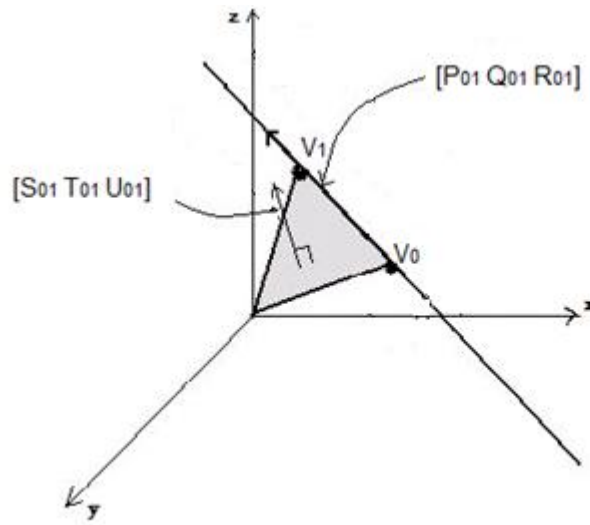
$$\left(\begin{bmatrix} 0 & -P_{01} & -Q_{01} & -R_{01} \\ P_{01} & 0 & -U_{01} & T_{01} \\ Q_{01} & U_{01} & 0 & -S_{01} \\ R_{01} & -T_{01} & S_{01} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T = [0 \ P_{01} \ Q_{01} \ R_{01}].$$

Yukarıdaki sonuç gösterir ki; doğru sonsuzdaki $(0, P_{01}, R_{01}, Q_{01})$ noktasında sonsuzdaki düzlem ile kesişir ve doğrunun yönlendirilmiş vektörü $[P_{01} \ Q_{01} \ R_{01}]$ dir.

S_{01}, T_{01} ve U_{01} ile ilgili olarak ise;

$$\begin{aligned} [S_{01} \ T_{01} \ U_{01}] &= w_1 w_0 [y_0 z_1 - z_0 y_1 \quad z_0 x_1 - x_0 z_1 \quad x_0 y_1 - y_0 x_1] \\ &= w_1 w_0 \quad V_0 \times V_1 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Bu eşitlik gösterir ki; $[S_{01} \ T_{01} \ U_{01}]$ vektörü orjini içeren düzlemin normal vektör temsilcisidir.



Şekil 3.1. Doğrunun Plücker koordinatlarının geometrik anlamı

Yani Şekil 3.1 den;

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0], \text{ sonsuzdaki düzlemin normal vektörü ve } \begin{bmatrix} 0 & S_{01} & T_{01} & U_{01} \\ -S_{01} & 0 & R_{01} & -Q_{01} \\ -T_{01} & -R_{01} & 0 & P_{01} \\ -U_{01} & Q_{01} & -P_{01} & 0 \end{bmatrix} \text{ de}$$

$[S_{01} \ T_{01} \ U_{01}]$ doğrultusundan elde edilen antisimetrik matris olmak üzere;

$$\left([1 \ 0 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & S_{01} & T_{01} & U_{01} \\ -S_{01} & 0 & R_{01} & -Q_{01} \\ -T_{01} & -R_{01} & 0 & P_{01} \\ -U_{01} & Q_{01} & -P_{01} & 0 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 \\ S_{01} \\ T_{01} \\ U_{01} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Yukarıdaki sonuç gösterir ki; $[S_{01} T_{01} U_{01}]$ orjini ve $V_0 V_1$ doğrusunu içeren bir düzlemin normal vektörüdür.

O halde $[P_{01} Q_{01} R_{01}]$ ve $[S_{01} T_{01} U_{01}]$ vektörleri birbirine diktir ve böylece skaler çarpımları sıfırdır.

Düzlemlerin Plücker koordinatlarının geometrik anlamları

$V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0]$, $V_1 = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]$, $V_2 = [X_2, Y_2, Z_2, w_2]$ ve

$\begin{bmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \end{bmatrix}$ 3×4 matrisinden elde ettiğimiz 3×3 tipinde 4 farklı matrisin determinantı;

$$\begin{aligned} A_{012} &= \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 & w_0 \\ Y_1 & Z_1 & w_1 \\ Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix}, B_{012} = \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 & w_0 \\ Z_1 & X_1 & w_1 \\ Z_2 & X_2 & w_2 \end{vmatrix}, \\ C_{012} &= \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & w_2 \end{vmatrix}, D_{012} = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

olmak üzere; V_0, V_1 ve V_2 noktalarını içeren F_{012} düzleminin Plücker koordinat temsilcisi;

$$F_{012} = [A_{012}, B_{012}, C_{012}, D_{012}] \quad (3.8)$$

şeklinde verilir.

Uzayın Plücker koordinatlarının geometrik anlamları

V_0, V_1, V_2 ve V_3 noktalarının Plücker koordinatları sırası ile $[X_0, Y_0, Z_0, w_0]$, $[X_1, Y_1, Z_1, w_1]$, $[X_2, Y_2, Z_2, w_2]$ ve $[X_3, Y_3, Z_3, w_3]$ ve

$$S_{0123} = \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & w_3 \end{vmatrix} \quad (3.9)$$

olmak üzere, U_{0123} uzayının Plücker koordinat temsilci;

$$U_{0123} = [S_{0123}] \quad (3.10)$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.2. Plücker katsayılarında düzlem, doğru, nokta ve uzay

Düzlemlerin Plücker katsayılarının geometrik anlamları

Düzlemin homojen katsayıları Plücker katsayılarının özel bir durumunu temsil ettiğinden γ_0 ile temsil edilen düzlemin Plücker katsayı temsilcisi;

$$\gamma_0 = [a_0, b_0, c_0, d_0]^T \quad (3.11)$$

şeklinde tanımlanır.

Doğruların Plücker katsayılarının geometrik anlamları

Üç boyutlu uzayda γ_0 ve γ_1 düzlemlerinin Plücker katsayıları sırası ile

$$[a_0, b_0, c_0, d_0]^T, [a_1, b_1, c_1, d_1]^T \text{ ve } \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{bmatrix} 4 \times 2 \text{ matrisinden elde edilen } 2 \times 2$$

tipinde 6 farklı matrisin determinantları da;

$$\begin{aligned}
p_{01} &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} = a_0 d_1 - a_1 d_0, & s_{01} &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ c_0 & c_1 \end{vmatrix} = b_0 c_1 - b_1 c_0, \\
q_{01} &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} = b_0 d_1 - b_1 d_0, & t_{01} &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ a_0 & a_1 \end{vmatrix} = c_0 a_1 - c_1 a_0, \\
r_{01} &= \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ d_0 & d_1 \end{vmatrix} = c_0 d_1 - c_1 d_0, & u_{01} &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = a_0 b_1 - a_1 b_0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

olmak üzere;

$$\lambda_0 = [p_{01}, q_{01}, r_{01}, s_{01}, t_{01}, u_{01}]^T \tag{3.13}$$

γ_0 ve γ_1 düzlemlerinin arakesit doğrusunun Plücker katsayı temsilcisidir.

Noktaların Plücker katsayılarının geometrik anlamları

γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemlerinin Plücker katsayıları sırası ile $[a_0, b_0, c_0, d_0]^T$, $[a_1, b_1, c_1, d_1]^T$, $[a_2, b_2, c_2, d_2]^T$ ve $\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{bmatrix}$ 4×3 matrisinden elde edilen

3×3 tipinde 4 farklı matrisin determinantları;

$$\begin{aligned}
x_{012} &= \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}, y_{012} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}, \\
z_{012} &= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ d_0 & d_1 & d_2 \end{vmatrix}, w_{012} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

olmak üzere;

$$\pi_{012} = [x_{012}, y_{012}, z_{012}, w_{012}]^T \tag{3.15}$$

γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemlerinin arakesit noktalarının Plücker katsayı temsilcisidir.

Boşluğun Plücker katsayılarının geometrik anlamları

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 düzlemlerinin Plücker katsayıları sırası ile $[a_0, b_0, c_0, d_0]^T$, $[a_1, b_1, c_1, d_1]^T$, $[a_2, b_2, c_2, d_2]^T$, $[a_3, b_3, c_3, d_3]^T$ ve

$$T_{0123} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

olmak üzere;

$$\tau_{0123} = [T_{0123}]^T \quad (3.17)$$

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 düzlemleri tarafından belirlenen boşluğun Plücker katsayı temsilcisidir.

3.2. Plücker Koordinatları ve Plücker Katsayılarına Bağlı Homojen ve Dual Homojen Düzlem ve Simplekslerin Lineer Bağımsızlık Koşulu

Homojen geometrik elementler ve onların dual karşılıkları sırasıyla; noktaların homojen koordinatları ve düzlemlerin homojen katsayıları sayesinde tanımlanır. Örneğin homojen bir üçgen veya düzlem lineer bağımsız üç noktanın homojen koordinatları tarafından tanımlanır. Eğer bu üç nokta lineer bağımsız değilse, üçgen ya da düzlem tanımlanamaz. Bir geometrik test koşulu oluşturmadan önce ilk olarak geometrik elementi oluşturan noktaların lineer bağımsız olup olmadığını kontrol etmeliyiz. Eğer örneğimiz lineer bağımsız değilse o geometrik element dejenere olmuş demektir.

3.2.1. Homojen doğrular ve homojen doğru parçaları

4 boyutlu homojen koordinatlarla ifade edilen V_0 ve V_1 noktaları tarafından elde edilen 3 boyutlu homojen doğrunun, 6 boyutlu Plücker koordinatları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$L_{01} = [P_{01}, Q_{01}, R_{01}, S_{01}, T_{01}, U_{01}]. \quad (3.18)$$

Eğer verilen iki nokta özdeş ya da antipodal ise doğru oluşmaz. Diğer bir ifadeyle;

$$V_0 = kV_1, \quad k \neq 0$$

olmak üzere Eş.3.18 koşulunun bütün bileşenleri sıfırdır.

Aksine; eğer Eş.3.18 koşulunun bütün bileşenleri sıfır ise iki noktanın özdeş ya da antipodal olduğunu gösterebiliriz.

Böylece V_0 ve V_1 noktaları lineer bağımsız olmak üzere, 3 boyutlu bir doğrunun veya doğru parçasının tanımı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$[P_{01} \ Q_{01} \ R_{01} \ S_{01} \ T_{01} \ U_{01}] \neq [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.19)$$

Eğer ki; Eş.3.19 koşulu sağlanmıyor ise 3 boyutlu homojen bir doğru veya doğru parçası tanımlanamaz.

3.2.2. Homojen düzlemler ve homojen üçgenler

4 boyutlu homojen koordinatlarla ifade edilen V_0, V_1 ve V_2 noktaları tarafından elde edilen homojen düzlemin, 4 boyutlu Plücker koordinatları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$F_{012} = [A_{012}, B_{012}, C_{012}, D_{012}]. \quad (3.20)$$

Eğer verilen V_0, V_1 ve V_2 noktaları bir düzlem oluşturmuyorsa yani; noktalar yalnız bir doğru üzerinde ise Eş.3.20 koşulunun bütün bileşenleri sıfır olur ki bu birleşenlerin lineer bağımlı olduğunu gösterir.

Aksine; eğer Eş.3.20 koşulunun bütün bileşenleri sıfır ise verilen bu üç nokta yalnız bir doğru üzerinde demektir.

Böylece V_0, V_1 ve V_2 'nin lineer bağımsız olması durumunda bir homojen üçgen veya bir homojen düzlemin tanımı aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F_{012} = [A_{012} \ B_{012} \ C_{012} D_{012}] \neq [0 \ 0 \ 0 \ 0] . \quad (3.21)$$

Eğer Eş.3.21 koşulu sağlanmıyor ise homojen düzlem veya homojen üçgen tanımlanamaz.

3.2.3. Homojen uzay ve homojen dörtyüzlü

4 boyutlu homojen koordinatlarla ifade edilen V_0, V_1, V_2 ve V_3 noktaları tarafından elde edilen homojen dörtyüzlünün 1 boyutlu Plücker koordinatları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$U_{0123} = [S_{0123}]. \quad (3.22)$$

Eğer verilen bu dört nokta bir dörtyüzlü oluşturmıyorsa yani; noktalar yalnız bir düzlem üzerinde ise Eş.3.22 koşulunun bileşenleri sıfırdır.

Aksine; Eş.3.22 koşulunun bileşeni sıfırsa, verilen bu dört nokta bir düzlem üzerinde demektir. Böylece V_0, V_1, V_2 ve V_3 noktalarının lineer bağımsız olması koşuluyla bir homojen dörtyüzlü veya uzay aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$[S_{0123}] \neq [0]. \quad (3.23)$$

Eğer Eş.3.23 koşulu sağlanmıyorsa, bir homojen dörtyüzlü veya uzay tanımlanamaz.

3.2.4. Dual homojen doğrular ve dual homojen doğru parçaları

4 boyutlu homojen katsayılarla ifade edilen γ_0 ve γ_1 düzlemleri tarafından elde edilen dual homojen doğrunun, 6 boyutlu Plücker katsayıları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$\lambda_{01} = [p_{01}, q_{01}, r_{01}, s_{01}, t_{01}, u_{01}]^T. \quad (3.24)$$

Eğer verilen iki düzlem özdeş ya da antipodal ise doğru oluşmaz. Diğer bir ifadeyle;

$$\gamma_0 = k\gamma_1, \quad k \neq 0$$

olmak üzere Eş.3.24 koşulunun bütün bileşenleri sıfırdır.

Aksine; eğer Eş.3.24 koşulunun bütün bileşenleri sıfırsa, iki düzlem özdeş ya da antipodaldır.

Böylece γ_0 ve γ_1 düzlemleri lineer bağımsız olmak üzere, 3 boyutlu bir dual homojen doğrunun veya dual homojen doğru parçasının tanımı aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$[p_{01} \ q_{01} \ r_{01} \ s_{01} \ t_{01} \ u_{01}] \neq [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]. \quad (3.25)$$

Eğer; Eş.3.25 koşulu sağlanmıyorsa 3 boyutlu dual homojen bir doğru veya dual homojen doğru parçası tanımlanamaz.

3.2.5. Dual homojen nokta

4 boyutlu homojen katsayılarla ifade edilen γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemleri tarafından elde edilen dual homojen noktanın 4 boyutlu Plücker katsayıları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$\pi_{012} = [x_{012}, y_{012}, z_{012}, w_{012}]^T \quad (3.26)$$

Eğer verilen γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemleri bir noktada kesişmiyorsa Eş.3.26 koşulunun bütün bileşenleri sıfır olur. Bu ise düzlemlerin lineer bağımlı olması demektir.

Böylece γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemlerinin lineer bağımsız olması durumunda dual homojen bir noktanın tanımı aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\pi_{012} = [x_{012} \ y_{012} \ z_{012} \ w_{012}] \neq [0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.27)$$

Eğer Eş.3.27 koşulu sağlanmıyor ise dual homojen bir nokta tanımlanamaz.

3.2.6. Boşluk

4 boyutlu homojen katsayılarla ifade edilen $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 düzlemleri tarafından elde edilen uzayın, 1 boyutlu Plücker katsayıları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$\tau_{0123} = [T_{0123}]^T. \quad (3.28)$$

Eğer verilen bu dört düzlem bir boşluk oluşturmıyorsa; Eş.3.28 koşulunun bileşeni sıfır olur ki bu düzlemlerin lineer bağımlı olduğunu gösterir.

Böylece $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 düzlemlerinin lineer bağımsız olması koşuluyla boşluk aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$[T_{0123}] \neq [0]. \quad (3.29)$$

Eğer Eş.3.29 koşulu sağlanmıyorsa, boşluk tanımlanamaz.

3.3. Plücker Koordinatlarına ve Plücker Katsayılarına Bağlı Olarak Çakışma, Aynı Düzlemden Geçme, Aynı Noktadan Geçme, Aynı Doğrudan Geçme Koşulları

3.3.1. Çakışma (Aynı veya Zıt) koşulları

V_0 ve V_1 gibi iki noktanın çakışma durumu

$V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0]$ ve $V_1 = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]$ noktalarından geçen bir doğrunun Plücker koordinatlarının aşağıdaki şekilde ifade edildiğini biliyoruz.

$$[P_{01}, Q_{01}, R_{01}, S_{01}, T_{01}, U_{01}]. \quad (3.30)$$

V_0 ve V_1 noktaları aynı ya da çakışık olduklarında yani; $V_0 = kV_1$ ($k \neq 0$), ise

$$[P_{01} \ Q_{01} \ R_{01} \ S_{01} \ T_{01} \ U_{01}] = L_{01} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.31)$$

şeklindedir.

Aksine; Eş.3.31 koşulu sağlanıyorsa, Eş.3.30 koşulu bir doğru temsil edemez yani; V_0 ve V_1 noktaları aynı ya da zıttırlar.

Böylece uzaydaki V_0 ve V_1 noktalarının ya zıt ya da aynı noktalar olduğu Eş.3.31 koşulu ile ifade edilir.

γ_0 ve γ_1 gibi iki düzleminin çakışma durumu

$\gamma_0 = [a_0, b_0, c_0, d_0]^T$ ve $\gamma_1 = [a_1, b_1, c_1, d_1]^T$ düzlemleri için çakışık olma şartı aynı noktalardaki gibidir, fakat çakışık noktalar için olan koşulların bir dual formuyla ilgilidir. Yani γ_0 ve γ_1 düzlemlerinin aynı ya da zıt olması için gerek ve yeter şart Eş.3.31 koşulunun bir dual formu tarafından ya da

$$[p_{01} \ q_{01} \ r_{01} \ s_{01} \ t_{01} \ u_{01}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.32)$$

şeklinde ifade edilir.

L_{01} ve L_{ab} gibi iki doğrunun çakışma durumu

V_0 ve V_1 noktaları tarafından elde edilen $L_{01} = [P_{01}, Q_{01}, R_{01}, S_{01}, T_{01}, U_{01}]$ ve V_a ve V_b noktaları tarafından elde edilen $L_{ab} = [P_{ab}, Q_{ab}, R_{ab}, S_{ab}, T_{ab}, U_{ab}]$ doğruları;

$$L_{01} = kL_{ab}, \quad k \neq 0 \quad (3.33)$$

şartını sağladığında ya aynı ya da zıt doğrulardır.

O halde Eş.3.33 koşulundan;

$$L_{01} = [kP_{ab}, kQ_{ab}, kR_{ab}, kS_{ab}, kT_{ab}, kU_{ab}], \quad (3.34)$$

ifadesi elde edilir ve Eş.3.34 koşulundan da

$$\frac{P_{01}}{P_{ab}} = \frac{Q_{01}}{Q_{ab}} = \frac{R_{01}}{R_{ab}} = \frac{S_{01}}{S_{ab}} = \frac{T_{01}}{T_{ab}} = \frac{U_{01}}{U_{ab}} = k$$

elde edilir.

λ_{01} ve λ_{ab} gibi iki doğrunun çakışma koşulları

γ_0 ve γ_1 düzlemlerinden elde edilen $\lambda_{01} = [p_{01}, q_{01}, r_{01}, s_{01}, t_{01}, u_{01}]^T$ doğrusu ve γ_a ve γ_b düzlemlerinden elde edilen $\lambda_{ab} = [p_{ab}, q_{ab}, r_{ab}, s_{ab}, t_{ab}, u_{ab}]^T$ doğrusu Eş.3.33 koşulunun bir dual formuyla ilgili olarak ya aynı ya da zıt doğrulardır yani:

$$\lambda_{01} = k\lambda_{ab}, \quad k \neq 0. \quad (3.35)$$

O halde Eş.3.35 koşulundan;

$$\lambda_{01} = [kp_{ab}, kq_{ab}, kr_{ab}, ks_{ab}, kt_{ab}, ku_{ab}], \quad (3.36)$$

ifadesi elde edilir ve Eş.3.36 koşulundan da

$$\frac{p_{01}}{p_{ab}} = \frac{q_{01}}{q_{ab}} = \frac{r_{01}}{r_{ab}} = \frac{s_{01}}{s_{ab}} = \frac{t_{01}}{t_{ab}} = \frac{u_{01}}{u_{ab}} = k. \quad (3.37)$$

elde edilir.

3.3.2. Aynı düzlemde ve aynı noktadan geçme

Dört noktanın aynı düzlemde bulunması

V_0, V_1, V_2 ve V_3 noktaları için aynı düzlemde olma şartı bu noktaların homojen koordinatlarının lineer bağımlı olması ile ya da

$$\begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 & w_3 \end{vmatrix} = S_{0123} = 0 \quad (3.38)$$

şeklinde ifade edilir.

Dört düzlemin aynı noktadan geçmesi

$\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 düzlemlerini aynı noktadan geçme koşulu Eş.3.38 koşulunun duali olarak;

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = T_{0123} = 0 \quad (3.39)$$

şeklinde ifade edilir.

Üç noktanın aynı doğru üzerinde bulunması

$V_0 = [X_0, Y_0, Z_0, w_0]$, $V_1 = [X_1, Y_1, Z_1, w_1]$ ve $V_2 = [X_2, Y_2, Z_2, w_2]$ noktalarından geçen düzlem denklemi;

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z & w \\ X_0 & Y_0 & Z_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} Y_0 & Z_0 & w_0 \\ Y_1 & Z_1 & w_1 \\ Y_2 & Z_2 & w_2 \end{vmatrix} + Y \begin{vmatrix} Z_0 & X_0 & w_0 \\ Z_1 & X_1 & w_1 \\ Z_2 & X_2 & w_2 \end{vmatrix} + Z \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & w_0 \\ X_1 & Y_1 & w_1 \\ X_2 & Y_2 & w_2 \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} X_0 & Y_0 & Z_0 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} \\ = XA_{012} + YB_{012} + ZC_{012} + wD_{012} \quad (3.40)$$

şeklinde verilir.

Burada $A_{012}, B_{012}, C_{012}, D_{012}$ düzlemin Plücker koordinatlarıdır. V_0, V_1 ve V_2 noktalarının aynı doğru üzerinde olma koşulu;

$$F_{012} = [A_{012} \ B_{012} \ C_{012} \ D_{012}] = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.41)$$

ile verilir.

Üç düzlemin aynı doğrudan geçmesi

$\gamma_0 = [a_0, b_0, c_0, d_0]^T$, $\gamma_1 = [a_1, b_1, c_1, d_1]^T$ ve $\gamma_2 = [a_2, b_2, c_2, d_2]^T$ düzlemlerin aynı doğrudan geçme koşulu, üç noktanın aynı doğrudan geçme koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. Yani; γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemlerinin aynı doğrudan geçmesi için gerek ve yeter şart Eş.3.41 koşulunun dual formuyla ya da

$$[x_{012} \ y_{012} \ z_{012} \ w_{012}]^T = \pi_{012} = [0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (3.42)$$

eşitliği ile ifade edilir.

Böylece aşağıdaki tablolar ile verilenleri özetleyebiliriz.

Çizelge 3.2. Geometrik elemanlar için lineer bağımsızlık koşulları

Homojen elemanlar	Koşullar	Dual homojen elemanlar	Koşullar
Doğru Doğru parçası	$L_{01} =$ $[P_{01} Q_{01} R_{01} S_{01} T_{01} U_{01}]$ $\neq [000000]$	Doğru Doğru parçası	$\lambda_{01} =$ $[p_{01} q_{01} r_{01} s_{01} t_{01} u_{01}]$ $\neq [000000]$
Düzlem Üçgen	$F_{012} =$ $[A_{012} B_{012} C_{012} D_{012}]$ $\neq [0000]$	Nokta	$\pi_{012} =$ $[x_{012} y_{012} z_{012} w_{012}]$ $\neq [0000]$
Uzay	$U_{0123} = S_{0123} \neq [0]$	Boşluk	$\tau_{0123} = T_{0123} \neq [0]$

Çizelge 3.3. Geometrik elemanlar için çakışma, aynı düzlemden geçme, aynı noktadan geçme, doğrudan geçme koşulları

Homojen elemanlar için çakışma koşulları	Dual homojen elemanlar için çakışma koşulları
1. İki nokta V_0 ve V_1 noktaları için aynı yada antipodal olma koşulu: $P_{01} = Q_{01} = R_{01} = S_{01} = T_{01} = U_{01} = 0$ 2. İki doğru L_{01} ve L_{ab} doğruları için aynı olma yada zıt yönlendirilme koşulu: $L_{01} = kL_{ab}, \quad k \neq 0.$	1'. İki düzlem γ_0 ve γ_1 düzlemleri için aynı olma ya da zıt yönlendirilme koşulu: $p_{01} = q_{01} = r_{01} = s_{01} = t_{01} = u_{01} = 0.$ 2'. İki doğru λ_{01} ve λ_{ab} doğruları için aynı olma yada zıt yönlendirilme koşulu: $\lambda_{01} = k \lambda_{ab}, \quad k \neq 0.$
Aynı düzlemden geçme koşulu	Aynı doğrudan geçme koşulu
Dört nokta V_0, V_1, V_2 ve V_3 noktaları için aynı düzlemden geçme koşulu: $S_{0123} = 0.$	Dört düzlem $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ ve γ_3 düzlemleri için aynı noktadan geçme koşulu: $T_{0123} = 0.$
Homojen elemanlar için aynı doğrudan geçme koşulu	Dual homojen elemanlar için aynı doğrudan geçme koşulu
Üç nokta V_0, V_1 ve V_2 noktaları için aynı doğrudan geçme koşulu: $A_{012} = B_{012} = C_{012} = D_{012} = 0$ $(F_{012} = 0)$	Üç düzlem γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemleri için aynı doğrudan geçme koşulu: $x_{012} = y_{012} = z_{012} = w_{012}$ $(\pi_{012} = 0)$

3.4. Projektif Uzayda ve İki Taraflı Uzaydaki Simpleksler Arasındaki İlişkilendirme Koşulları

3.4.1. Projektif uzaydaki ilişkilendirme koşulları

Dörtüzlünün bir noktayı içermesi

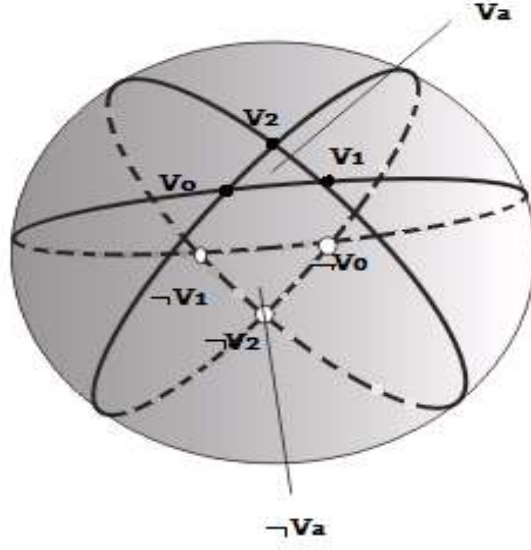
Şimdi $V_0V_1V_2V_3$ homojen dörtüzlüsünde bulunan bir homojen V_a noktası için klasik projektif uzayda ilişkilendirme koşullarını türetelim.

Geometrik Türetim

Bu probleme geçmeden önce ilk olarak düzlem geometrisinde bir problemi ele alalım. Örneğin $V_0V_1V_2$ üçgeni bir V_a noktasını içersin. Bu durumdaki şartımız R^3 'ün küresel modeli içinde;

$$(V_0V_1V_2 \text{ 'ün, } V_a \text{ 'yı içermesi}) \vee (\neg V_0 \neg V_1 \neg V_2 \text{ nin, } V_a \text{ 'yı içermesi})$$

şeklinde ifade edilir.



3.2. Projektif uzaydaki 2 boyutlu üçgenin içerdiği noktalar

Burada belirtelim ki $(V_0V_1V_2$ 'nin, $\neg V_a$ 'yı içermesi) ve $(\neg V_0\neg V_1\neg V_2$ 'nin, $\neg V_a$ 'yı içermesi) koşulları yukarıdaki şartta yer almaz, çünkü $(V_0V_1V_2$ 'nin, $\neg V_a$ 'yı içermesi) koşulu ile $(\neg V_0\neg V_1\neg V_2$ 'nin, V_a 'yı içermesi) koşulu aynı ve $(\neg V_0\neg V_1\neg V_2$ 'nin $\neg V_a$ 'yı içermesi) koşulu ile de $(V_0V_1V_2$ 'nin, V_a 'yı içermesi) koşulu aynıdır.

Üçgenin geçici olarak pozitif yönlü olduğunu varsayalım. Yukarıdaki ilk koşulda V_a noktasının V_1V_2 , V_2V_0 , V_0V_1 doğrularıyla belirlenmiş pozitif yarı küre içinde bulunur. İkinci koşulda ise V_a bu doğruların belirlediği negatif yarı küre içinde de bulunur.

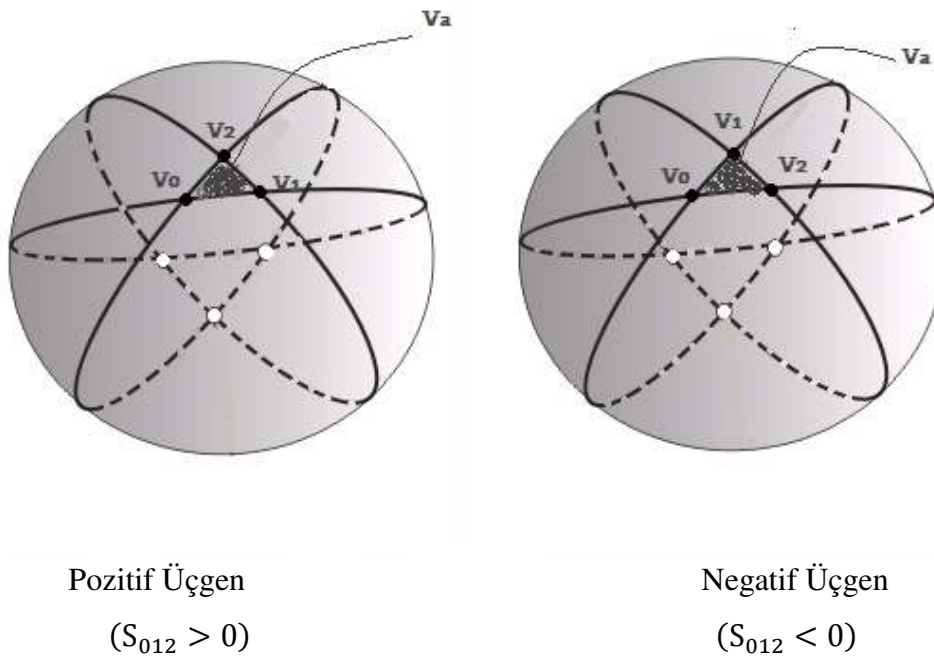
Eğer $V_0V_1V_2$ üçgeni üzerinde bir V noktası, $\neg V_0\neg V_1\neg V_2$ zıt üçgeni üzerinde de bir V^1 noktası alır ve V_iV_j ile bu üçgenin keyfî bazı kenarlarını belirleyecek olursak aşağıdaki ilişkinin mevcut olduğunu görürüz.

$$\text{sign} \left(\begin{vmatrix} V \\ V_i \\ V_j \end{vmatrix} \right) = -\text{sign} \left(\begin{vmatrix} V^1 \\ V_i \\ V_j \end{vmatrix} \right) \quad (3.43)$$

Eş.3.43 koşulu yardımıyla $V_0V_1V_2$ 'nin V_a 'yı içirme şartı;

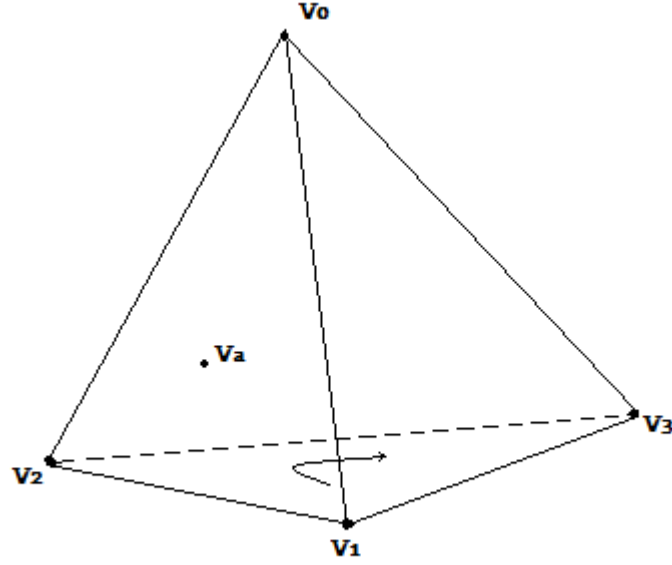
$$(S_{a12}, S_{a20}, S_{a01} \geq 0) \vee (S_{a12}, S_{a20}, S_{a01} \leq 0) \quad (3.44)$$

şeklindedir.



Şekil 3.3. Projektif uzayda üçgenin yönü

Şimdi üçgenin yerlerini belirlemenin etkilerini düşünelim. Negatif yönlü bir üçgende V_a 'nın bulunma şartı ile pozitif yönlü bir üçgenin zıttı içinde V_a 'nın bulunma şartı aynıdır ve negatif yöndeki bir üçgenin zıttın da V_a 'nın bulunma şartı ile de pozitif yöndeki bir üçgende V_a 'nın bulunma şartı aynıdır (Şekil 3.3). Bunun anlamı ise bir üçgenin yeri belirlemek sonucu değiştirmez



Şekil 3.4. Dörtüzlünün bir noktayı içirme koşulları

Yukarıdaki düzlem geometrisine benzer olarak; $V_0V_1V_2V_3$ 'nün, V_a 'yı içermesi koşulu R^4 'ün küresel modelinde;

$$(V_0V_1V_2V_3 \text{ 'nün, } V_a \text{ 'yı içermesi}) \vee (\neg V_0\neg V_1\neg V_2\neg V_3 \text{ 'nün, } V_a \text{ 'yı içermesi})$$

şeklinde ifade edilir.

Şekil 3.4 'ün pozitif yön belirlediğini düşündüğümüzde yukarıdaki ilk şartta V_a noktası $V_1V_2V_3, V_0V_3V_2, V_0V_1V_3$ ve $V_0V_2V_1$ düzlemleriyle belirlenmiş pozitif yarı küre içinde ikinci şartta da V_a noktası bu düzlemlerin belirlediği negatif yarı kürede bulunur.

Şimdi yukarıdaki düzlem geometrisinde yer alan durumlara benzer olarak; eğer $V_0V_1V_2V_3$ dörtüzlüsü içinde bir V noktası ve $\neg V_0\neg V_1\neg V_2\neg V_3$ zıt dörtüzlüsünde bir V^1 noktası alırsak ve $V_iV_jV_k$ tarafından dörtüzlünün keyfi bazı düzlemlerini belirlersek aşağıdaki ilişkinin mevcut olduğunu görürüz.

$$\text{sign} \left(\begin{vmatrix} V \\ V_i \\ V_j \\ V_k \end{vmatrix} \right) = -\text{sign} \left(\begin{vmatrix} V^1 \\ V_i \\ V_j \\ V_k \end{vmatrix} \right). \quad (3.45)$$

Eş.3.45 koşulundan $V_0V_1V_2V_3$ 'nün, V_a 'yı içirme şartı;

$$(S_{a123}, S_{a032}, S_{a013}, S_{a021} \geq 0) \vee (S_{a123}, S_{a032}, S_{a013}, S_{a021} \leq 0) \quad (3.46)$$

şeklindedir.

Bir üçgenin bir noktayı içermesi

Şimdi homojen $V_0V_1V_2$ üçgeninin, V_a homojen noktasını içermesi için klasik projektif uzayda koşullar türetelim.

İlk olarak V_a noktası ile $V_0V_1V_2$ üçgeninin aynı düzlemde olma şartı;

$$S_{a012} = 0 \quad (3.47)$$

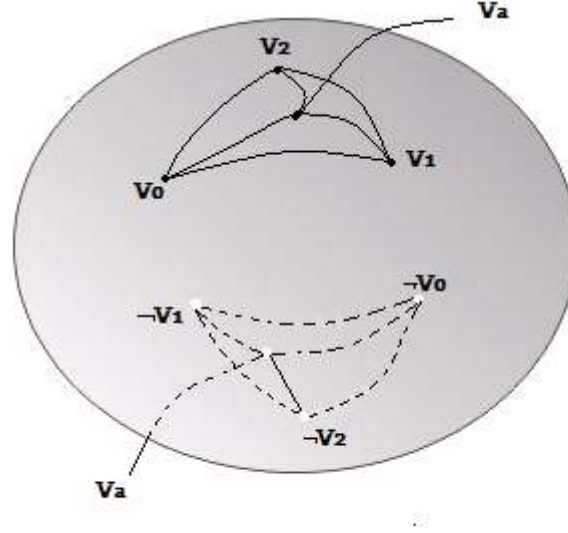
şeklindedir.

Geometrik Türetim

V_a noktasının $V_0V_1V_2$ üçgeni ile aynı düzlemde yer alma koşulu, küresel modelde $V_0V_1V_2$ üçgeninin V_a 'yı içermesi veya $\neg V_0 \neg V_1 \neg V_2$ zıt üçgeninin V_a 'yı içermesi için gerekli olan koşullardaki gibi ifade edilir. Bu koşullar düzlemin Plücker koordinatları tarafından vektör tanımları kullanılarak;

$$\begin{aligned} & (F_{012} \cdot F_{a12} \geq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{0a2} \geq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{01a} \geq 0) \\ & \vee (F_{012} \cdot F_{a12} \leq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{0a2} \leq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{01a} \leq 0) \end{aligned} \quad (3.48)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.5. Projektif uzayda üçgenin nokta içerme koşulları

Eş.3.48 koşuluyla aynı düzlemde olma koşulunu birleştirirsek;

$$(S_{a012} = 0)$$

$$\wedge (F_{012} \cdot F_{a12} \geq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{0a2} \geq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{01a} \geq 0)$$

$$\vee (F_{012} \cdot F_{a12} \leq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{0a2} \leq 0 \wedge F_{012} \cdot F_{01a} \leq 0) \quad (3.49)$$

ifadesi elde edilir.

Bir doğru parçasının bir noktayı içermesi

V_0V_1 homojen doğru parçası üzerinde bulunan homojen V_a noktası için klasik projektif uzayda koşullar türetelim.

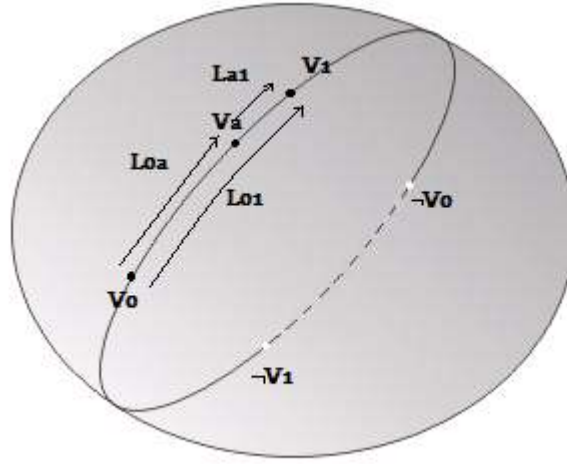
İlk olarak V_a noktasının V_0V_1 doğrusu üzerinde bulunma şartı;

$$F_{a01} = 0 \quad (3.50)$$

şeklindedir.

Geometrik Türetim

V_a noktasının V_0V_1 doğru parçası ile aynı doğru üzerinde bulunma koşulu, küresel modelde V_0V_1 doğru parçasının V_a 'yı içermesi ya da $\neg V_0\neg V_1$ zıt doğru parçasının V_a 'yı içermesi için gerekli olan koşullardaki gibi ifade edilir.



Şekil 3.6. Projektif uzayda doğru parçasının noktayı içermesi

Bu koşullar doğrunun Plücker koordinatları tarafından vektör tanımları kullanılarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$(L_{01} \cdot L_{0a}, L_{01} \cdot L_{a1} \geq 0) \vee (L_{01} \cdot L_{0a}, L_{01} \cdot L_{a1} \leq 0). \quad (3.51)$$

Buda basitçe;

$$(L_{a0} \cdot L_{a1} \leq 0) \quad (3.52)$$

şeklinde ifade edilir.

Eş.3.50 ve Eş.3.52 koşullarından;

$$(F_{a01} = 0) \wedge (L_{a0} \cdot L_{a1} \leq 0) \quad (3.53)$$

ifadesi elde edilir.

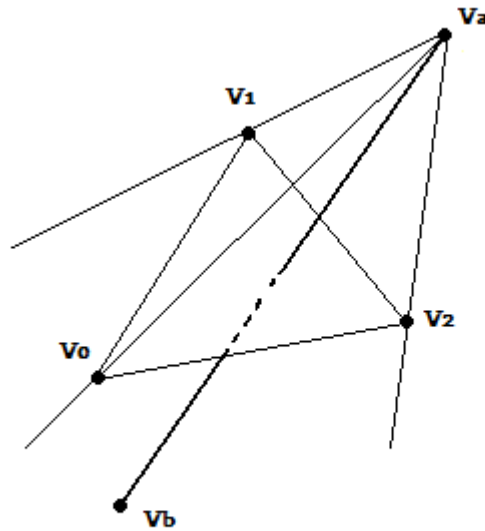
Bir doğru parçası ile bir üçgenin kesişmesi

Bir homojen $V_0V_1V_2$ üçgeni ve bir homojen V_aV_b doğru parçasının bir tek noktada kesişmesi için klasik projektif uzayda koşullar türetelim.

Doğru parçası ile üçgenin aynı düzlemde bulunmama koşulu;

$$(S_{a012}, S_{b012}) \neq (0,0) \quad (3.54)$$

şeklindedir.



Şekil 3.7. Projektif uzayda üçgen ve doğru parçasının kesişimi

Geometrik Türetim

İlk olarak R^4 de $V_0V_1V_2$ üçgen düzleminin zıt yarı uzayındaki doğru parçasının uç noktalarını belirtmeliyiz. Burada iki durum söz konusudur; birincisi V_a noktasının düzlemin pozitif yarı uzayında bulunması, ikincisi de V_a noktasının düzlemin negatif yarı uzayında bulunmasıdır. Bu durumları;

$$(S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0) \vee (S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0) \quad (3.55)$$

şeklinde ifade edebiliriz.

İkinci olarak da üçgenin içi ile doğru parçasının kesişimini incelemeliyiz. Şimdi Şekil3.7 'deki $V_aV_0V_1V_2$ üçgen pramidini düşünelim. Bu bölümün birinci kısmında anlatılanlara göre V_b 'nin R^4 'ün küresel modelindeki pramidin içinde yer alma koşulu;

$$(V_aV_0V_1V_2 \text{ pramidi } V_b \text{ noktasını içerir}) \vee (\neg V_a \neg V_0 \neg V_1 \neg V_2 \text{ pramidi } V_b \text{ noktasını içerir})$$

şeklindedir.

Böylece yukarıdaki koşullardan;

$$(S_{ba21}, S_{ba02}, S_{ba10} \geq 0) \vee (S_{ba21}, S_{ba02}, S_{ba10} \leq 0) \quad (3.56)$$

ifadesi elde edilir.

Eş. 3.54, Eş. 3.55 ve Eş. 3.56 'daki koşullardan;

$$\begin{aligned} & (S_{a012}, S_{b012}) \neq (0,0) \\ & \wedge ((S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0) \vee (S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0)) \\ & \wedge ((S_{ba21}, S_{ba02}, S_{ba10} \geq 0) \vee (S_{ba21}, S_{ba02}, S_{ba10} \leq 0)) \end{aligned} \quad (3.57)$$

ifadesi elde edilir.

Eğer Eş. 3.57 'deki koşul sağlanır ise bir üçgen ile bir doğru parçası $V = [X, Y, Z, w]$ şeklindeki bir noktada kesişir. Bu nokta, $V_a V_b$ homojen doğru parçası üzerindeki bir nokta ya da $V_0 V_1 V_2$ homojen üçgeni üzerinde bir nokta olarak ifade edilebilir.

V noktasının V_a ve V_b noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned} V &= [S_{a012}V_b - S_{b012}V_a], & (S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0), \\ V &= [S_{b012}V_a - S_{a012}V_b], & (S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0) \end{aligned}$$

şeklindedir.

V noktasının V_0, V_1 ve V_2 noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned} V &= [S_{ba21}V_0 + S_{ba02}V_1 + S_{ba10}V_2], & (S_{ba21}, S_{ba02}, S_{ba10} \geq 0), \\ V &= [-S_{ba21}V_0 - S_{ba02}V_1 - S_{ba10}V_2], & (S_{ba21}, S_{ba02}, S_{ba10} \leq 0) \end{aligned}$$

şeklindedir.

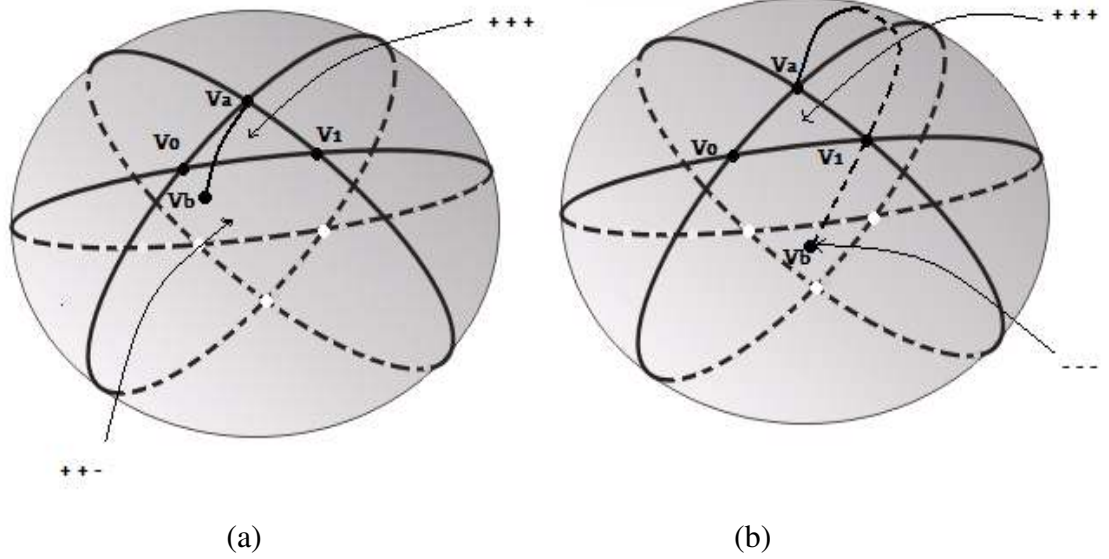
İki doğru parçasının kesişimi

Klasik projektif uzayda $V_0 V_1$ ve $V_a V_b$ homojen doğru parçalarının kesişimi için gerekli şartlar türetelim.

İlk olarak iki doğrunun aynı düzlemde olması için gerekli olan koşul aşağıdaki gibidir.

$$S_{01ab} = 0. \tag{3.58}$$

Geometrik Türetim



Şekil 3.8. Projektif uzayda iki doğru parçasının kesişimi

İki doğrunun kesişip kesişmediğini belirlemek için Şekil 3.8 ‘deki küre üzerinde bulunan üçgenlerin bölgelerinin işaretleri üzerinde çalışalım. Burada $V_0V_1V_a$ üçgenini kullanalım.

Şekil 3.8 (a) da $V_b + + -$ işaretli bölgede olduğunda V_aV_b doğru parçası V_0V_1 doğru parçasıyla kesişir ve Şekil 3.8 (b) de $V_b - - -$ işaretli bölgede olduğunda V_aV_b doğru parçası ile $\neg V_0\neg V_1$ doğru parçası kesişirler.

Şimdi kullandığımız bu vektörleri Plücker koordinatları ile belirtelim;

$$(S_{01ab} = 0)$$

$$\wedge(F_{01a} \cdot F_{b1a} \geq 0 \wedge F_{01a} \cdot F_{0ba} \geq 0 \wedge F_{01a} \cdot F_{01b} \leq 0)$$

$$\vee(F_{01a} \cdot F_{b1a} \leq 0 \wedge F_{01a} \cdot F_{0ba} \leq 0 \wedge F_{01a} \cdot F_{01b} \leq 0). \quad (3.59)$$

Eş.3.59 ‘daki koşul sağlanırsa iki doğru $V = [X, Y, Z, w]$ gibi bir noktada kesişirler.

V noktasının V_0 ve V_1 noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned} V &= [f_{ab0}V_1 - f_{ab1}V_0] , & (f_{ab0} \geq 0) \wedge (f_{ab1} \leq 0), \\ V &= [f_{ab1}V_0 - f_{ab0}V_1] , & (f_{ab0} \leq 0) \wedge (f_{ab1} \geq 0) \end{aligned}$$

şeklindedir.

V noktasının V_a ve V_b noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned} V &= [f_{01a}V_b - f_{01b}V_a] , & (f_{01a} \geq 0) \wedge (f_{01b} \leq 0), \\ V &= [f_{01b}V_a - f_{01a}V_b] , & (f_{01a} \leq 0) \wedge (f_{01b} \geq 0) \end{aligned}$$

şeklindedir.

3.4.2. Projektif uzayda dual simpleksler

Bir dual dörtyüzlünün bir düzlemi içermesi

Klasik projektif uzayda $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ dual homojen dörtyüzlüsünün γ_a homojen düzlemini içirme koşulu, homojen bir dörtyüzlünün homojen bir noktayı içirme koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. Bu yüzden Eş. 3.46 koşulundan yararlanarak;

$$(T_{a123}, T_{a032}, T_{a013}, T_{a021} \geq 0) \vee (T_{a123}, T_{a032}, T_{a013}, T_{a021} \leq 0) \quad (3.60)$$

ifadesi elde edilir.

Dual üçgenin bir düzlemi içermesi

Klasik projektif uzayda $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ dual homojen üçgeninin γ_a homojen düzlemini içirme koşulu, homojen bir üçgenin homojen bir noktayı içirme koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. Bu yüzden Eş. 3.49 koşulundan yararlanarak;

$$\begin{aligned}
& (T_{a012} = 0) \\
& \wedge (\pi_{012} \cdot \pi_{a12} \geq 0 \wedge \pi_{012} \cdot \pi_{0a2} \geq 0 \wedge \pi_{012} \cdot \pi_{01a} \geq 0) \\
& \vee (\pi_{012} \cdot \pi_{a12} \leq 0 \wedge \pi_{012} \cdot \pi_{0a2} \leq 0 \wedge \pi_{012} \cdot \pi_{01a} \leq 0)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

ifadesi elde edilir.

Bir doğru parçasının bir düzlemi içermesi

Klasik projektif uzayda $\gamma_0\gamma_1$ dual homojen doğru parçasının γ_a düzlemini içirme koşulu, homojen doğru parçasının homojen bir noktayı içirme koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. O halde Eş. 3.53 koşulundan yararlanarak;

$$(\pi_{a01} = 0) \wedge (\lambda_{a0} \cdot \lambda_{a1} \leq 0) \tag{3.62}$$

ifadesi elde edilir.

Bir dual doğru parçası ve bir dual üçgen arasındaki ortak düzlem

Klasik projektif uzayda $\gamma_a\gamma_b$ dual homojen doğru parçası ve $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ dual homojen üçgeninin bir tek ortak homojen düzlemi olması koşulu, homojen bir doğru parçası ve homojen bir üçgenin bir tek noktada kesişmesi koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. O halde Eş. 3.57 koşulundan yararlanarak;

$$\begin{aligned}
& (T_{a012}, T_{b012}) \neq (0,0) \\
& \wedge ((T_{a012} \geq 0 \wedge T_{b012} \leq 0) \vee (T_{a012} \leq 0 \wedge T_{b012} \geq 0)) \\
& \wedge ((T_{ba21}, T_{ba02}, T_{ba10} \geq 0) \vee (T_{ba21}, T_{ba02}, T_{ba10} \leq 0))
\end{aligned} \tag{3.63}$$

ifadesi elde edilir.

Eğer Eş.3.63 ‘deki koşul sağlanırsa bir dual doğru parçası ve bir dual üçgen arasında $\gamma = [a, b, c, d]^T$ şeklinde homojen düzlem oluşur ve bu düzlem, γ_a ve γ_b ya da γ_0, γ_1 ve γ_2 terimleriyle ifade edilebilir.

γ düzleminin γ_a ve γ_b düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [T_{a012}\gamma_b - T_{b012}\gamma_a]^T, & (T_{a012} \geq 0 \wedge T_{b012} \leq 0), \\ \gamma &= [T_{b012}\gamma_a - T_{a012}\gamma_b]^T, & (T_{a012} \leq 0 \wedge T_{b012} \geq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

γ düzleminin γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [T_{ba21}\gamma_0 + T_{ba02}\gamma_1 + T_{ba10}\gamma_2]^T, & (T_{ba21}, T_{ba02}, T_{ba10} \geq 0), \\ \gamma &= [-T_{ba21}\gamma_0 - T_{ba02}\gamma_1 - T_{ba10}\gamma_2]^T, & (T_{ba21}, T_{ba02}, T_{ba10} \leq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

İki dual doğru parçası arasındaki ortak düzlem

Klasik projektif uzayda $\gamma_a\gamma_b$ ve $\gamma_0\gamma_1$ dual homojen doğru parçalarının ortak bir düzleme sahip olmaları koşulu, V_aV_b ve V_0V_1 homojen doğru parçalarının kesişimleri koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. Bu yüzden Eş. 3.59 ‘daki koşuldan yararlanarak;

$$(T_{01ab} = 0) \wedge (\pi_{01a} \cdot \pi_{01b} \leq 0 \wedge \pi_{ab0} \cdot \pi_{ab1} \leq 0) \quad (3.64)$$

ifadesi elde edilir.

$\gamma, \gamma_a\gamma_b$ ve $\gamma_0\gamma_1$ dual homojen doğru parçaları arasındaki ortak düzlem olmak üzere;
 γ düzleminin γ_0 ve γ_1 düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [p_{ab0}\gamma_1 - p_{ab1}\gamma_0]^T, & (p_{ab0} \geq 0) \wedge (p_{ab1} \leq 0), \\ \gamma &= [p_{ab1}\gamma_0 - p_{ab0}\gamma_1]^T, & (p_{ab0} \leq 0) \wedge (p_{ab1} \geq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

γ düzleminin γ_a ve γ_b düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [p_{01a}\gamma_b - p_{01b}\gamma_a]^T, & (p_{01a} \geq 0) \wedge (p_{01b} \leq 0), \\ \gamma &= [p_{01b}\gamma_a - p_{01a}\gamma_b]^T, & (p_{01a} \leq 0) \wedge (p_{01b} \geq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

3.4.3 İki taraflı uzayda ilişkilendirme koşulları

Dörtüzlünün bir noktayı içermesi

İki taraflı uzaydaki $V_0V_1V_2V_3$ homojen dörtüzlüsünün V_a homojen noktasını içermesi için ilişkilendirme koşulları türetilim.

Geometrik Türetim

Bu probleme geçmeden önce ilk olarak düzlem geometrisinde bir problem ele alalım. Örneğin $V_0V_1V_2$ üçgeni bir V_a noktası içersin. Bu durumdaki şartımız R^3 'ün küresel modeli içinde gerçekleşir. Yani; $V_0V_1V_2$ üçgenin bir V_a noktası içirme koşulunu üçgenin yerine göre ifade edecek olursak;

$$\begin{aligned}(S_{012} > 0 \wedge S_{a12}, S_{a20}, S_{a01} \geq 0) \\ V(S_{012} < 0 \wedge S_{a12}, S_{a20}, S_{a01} \leq 0)\end{aligned} \tag{3.65}$$

ifadesini elde ederiz.

Yukarıdaki ilk doğrunun ikinci teriminde V_1V_2 , V_2V_0 ve V_0V_1 doğruları ile belirlenmiş pozitif yarı uzayı V_a noktasını içerir. İkinci doğrunun ikinci terimi de aynı doğruların belirlemiş olduğu negatif yarı uzayında V_a noktasını içerir.

Yukarıdaki 2 boyutlu duruma benzer olarak $V_0V_1V_2V_3$ dörtyüzlüsünün V_a noktasını içermesi koşulunu R^4 'ün küresel modeli üzerinde aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

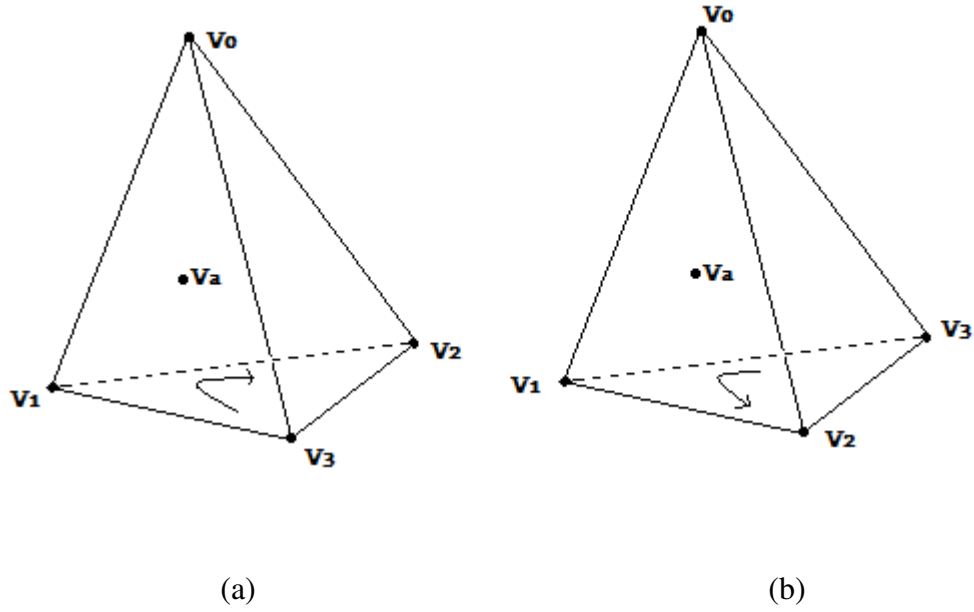
$$(V_0V_1V_2V_3 \text{ pozitif}) \wedge (\text{pozitif dörtyüzlü } V'_a \text{yı içerir}) \\ V(V_0V_1V_2V_3 \text{ negatif}) \wedge (\text{negatif dörtyüzlü } V'_a \text{yı içerir})$$

Yukarıdaki ilk doğrunun ikinci teriminde; V_a noktası $V_1V_2V_3$, $V_0V_3V_2$, $V_0V_1V_3$ ve $V_0V_2V_1$ düzlemleri ile belirlenmiş pozitif yarı uzayında yer alır. Yukarıdaki ikinci doğrunun ikinci teriminde ise V_a yine bu doğruların belirlemiş olduğu negatif yarı uzayında yer alır.

İzdüşüm uzayındaki ilişkilendirme koşullarındaki Eş. 3.45 koşulundan;

$$(S_{0123} > 0 \wedge S_{a123}, S_{a032}, S_{a013}, S_{a021} \geq 0) \\ V(S_{0123} < 0 \wedge S_{a123}, S_{a032}, S_{a013}, S_{a021} \leq 0) \quad (3.66)$$

ifadesi yazılabilir.



Şekil 3.9. İki taraflı uzayda dörtyüzlünün noktayı içermesi

a) Pozitif dörtyüzlü

b) Negatif dörtyüzlü

Bir üçgenin bir noktayı içermesi

İki taraflı uzayda $V_0V_1V_2$ homojen üçgeninin bir V_a homojen noktasını içermesi için koşullar türetelim.

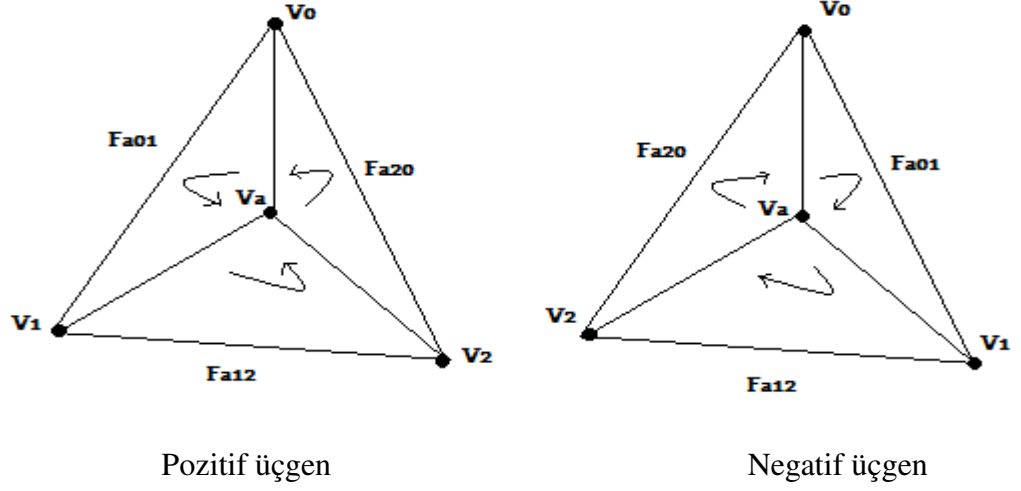
İlk olarak V_a noktası ile $V_0V_1V_2$ üçgeninin aynı düzlemde olma şartı;

$$S_{a012} = 0 \quad (3.67)$$

şeklindedir.

Geometrik Türetim

V_a noktasının $V_0V_1V_2$ üçgeni ile aynı düzlemde olma koşulu, küresel modelde V_a' 'nın $V_0V_1V_2$ üçgeninde yer alma koşulu gibi ifade edilebilir.



Şekil 3.10. İki taraflı uzayda üçgenin noktayı içermesi

Bu koşul düzlemin Plücker koordinatları tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilir.

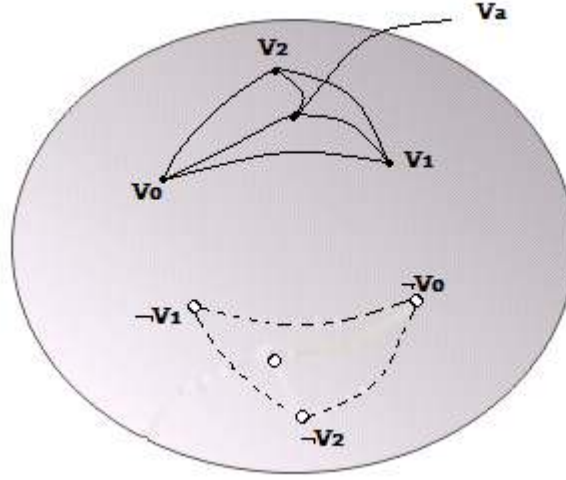
$$F_{012} \cdot F_{a12}, F_{012} \cdot F_{a20}, F_{012} \cdot F_{a01} \geq 0. \quad (3.68)$$

Aynı düzlemde olma şartı ile Eş. 3.68 koşulunu birleştirirsek, bir üçgenin bir noktayı içirme koşulu;

$$(S_{a012} = 0) \wedge (F_{012} \cdot F_{a12}, F_{012} \cdot F_{a20}, F_{012} \cdot F_{a01} \geq 0) \quad (3.69)$$

şeklindedir.

Bu koşullar üçgenin pozitif ya da negatif olma koşuluna bağlı değildir (Şekil 3.10). Ayrıca $\neg V_0 \neg V_1 \neg V_2$ zıt üçgenindeki noktalar hariç tutulduğundan bu durum klasik projektif uzaydaki duruma benzemez.



Şekil 3.11. İki taraflı uzayda bir üçgenin bir noktayı içermesi

Bir doğru parçasının bir noktayı içermesi

İki taraflı uzayda V_0V_1 homojen doğru parçası üzerinde V_a homojen noktasının bulunma koşullarını türetilim.

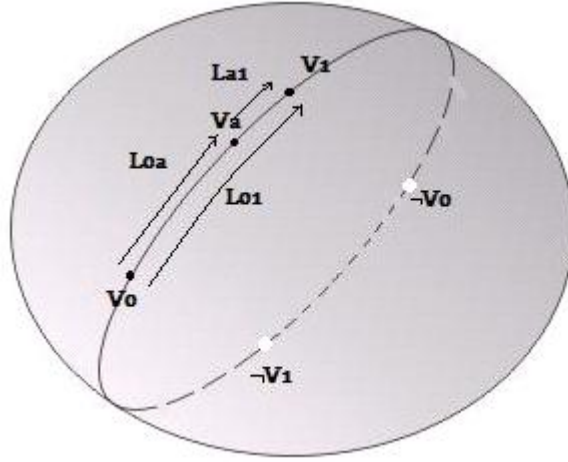
İlk olarak V_a noktasının V_0V_1 doğru parçası üzerinde bulunma koşulu aşağıdaki gibidir:

$$F_{a01} = 0 \quad (3.70)$$

Geometrik Türetim

V_a noktasının V_0V_1 doğru parçası ile aynı doğru üzerinde bulunma koşulu, küresel modelde V_0V_a ve V_aV_1 doğru parçalarının aynı V_0V_1 doğru parçası üzerinde bulunma koşulu gibi aşağıdaki şekilde ifade edilir (Şekil 3.12).

$$L_{01} \cdot L_{0a} \geq 0 \wedge L_{01} \cdot L_{a1} \geq 0. \quad (3.71)$$



Şekil 3.12. İki taraflı uzayda doğru parçasının noktayı içermesi

Eş. 3.71 'deki koşul ile aynı doğrudan geçme koşulunu birleştirirsek, bir doğru parçasının bir noktayı içirme koşulu;

$$(F_{a01} = 0) \wedge (L_{01} \cdot L_{0a} \geq 0) \wedge (L_{01} \cdot L_{a1} \geq 0) \quad (3.72)$$

şeklindedir.

Son olarak belirtelim ki $\neg V_0 \neg V_1$ zıt doğru parçası üzerindeki noktalar hariç tutulduğundan bu durum klasik projektif uzaya benzemez.

Bir doğru parçası ile bir üçgenin kesişmesi

İki taraflı uzayda homojen $V_0 V_1 V_2$ üçgeni ve homojen $V_a V_b$ doğru parçasının bir tek noktada kesişmesi için koşullar türetelim.

Doğru parçası ile üçgenin aynı düzlemde bulunmama koşulun aşağıdaki gibidir:

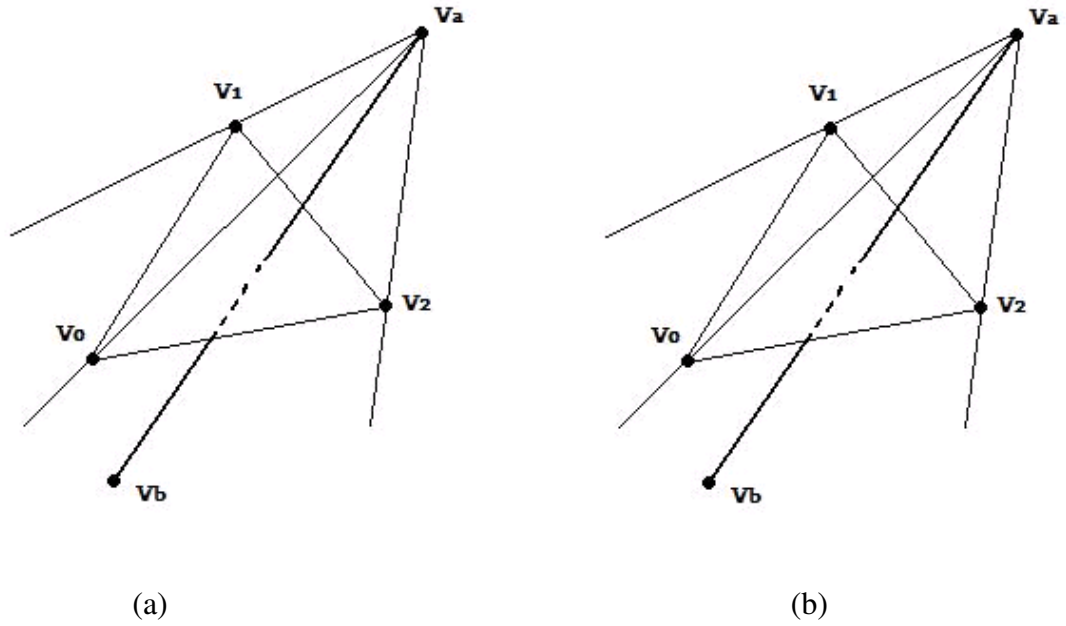
$$(S_{a012}, S_{b012}) \neq (0,0). \quad (3.73)$$

Geometrik Türetim

İlk olarak R^4 de $V_0V_1V_2$ üçgen düzleminin zıt yarı uzayındaki doğru parçasının kenar noktalarını belirtmeliyiz. Burada üçgenin yönüne göre iki durum söz konusudur. Bu koşulları;

$$(S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0) \vee (S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0) \quad (3.74)$$

şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 3.13. İki taraflı uzayda üçgen ile doğru parçasının kesişimi

İkinci olarak; üçgenin içi ile doğru parçasının kesişimini incelemeliyiz. Şimdi Eş.3.74 koşulundaki her durum ile ilgili olarak $V_aV_0V_1V_2$ bir üçgen pramidini düşünelim. Üçgenin içi ile doğru parçasının kesişmesi için V_b pramidin içinde olmalıdır. Prismidin pozitif ve negatif olmak üzere iki çeşidi vardır. Böylece bu pramidin V_b 'yi içermesi koşulu;

$$\begin{aligned}
& (S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0 \wedge S_{ba12}, S_{ba02}, S_{ba10} \geq 0) \\
& V(S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0 \wedge S_{ba12}, S_{ba02}, S_{ba10} \leq 0)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

şeklindedir.

Eş. 3.73 ve Eş. 3.75 koşullarından:

$$\begin{aligned}
& (S_{a012}, S_{b012}) \neq (0,0) \\
& \wedge (S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0 \wedge S_{ba12}, S_{ba02}, S_{ba10} \geq 0) \\
& V(S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0 \wedge S_{ba12}, S_{ba02}, S_{ba10} \leq 0)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

elde edilir.

Eğer Eş. 3.76 koşulu sağlanırsa bir üçgen ile bir doğru parçası $V = [X, Y, Z, w]$ şeklindeki bir noktada kesişir. Bu nokta, V_a ve V_b terimlerine ya da V_0, V_1 ve V_2 terimlerine bağlı olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

V noktasının V_a ve V_b noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned}
V &= [S_{a012}V_b - S_{b012}V_a], & (S_{a012} \geq 0 \wedge S_{b012} \leq 0), \\
V &= [S_{a012}V_b - S_{b012}V_a], & (S_{a012} \leq 0 \wedge S_{b012} \geq 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

V noktasının V_0, V_1 ve V_2 noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned}
V &= [S_{ab12}V_0 + S_{ab20}V_1 + S_{ab01}V_2], & (S_{ab12}, S_{ab20}, S_{ab01} \geq 0), \\
V &= [-S_{ab12}V_0 - S_{ab20}V_1 - S_{ab01}V_2], & (S_{ab12}, S_{ab02}, S_{ab10} \leq 0)
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İki doğru parçasının kesişimi

İki taraflı uzayda V_0V_1 ve V_aV_b homojen doğru parçalarının kesişimi için gerekli şartlar türetelim.

İlk olarak iki doğrunun aynı düzlemde olma şartı;

$$S_{01ab} = 0 \quad (3.77)$$

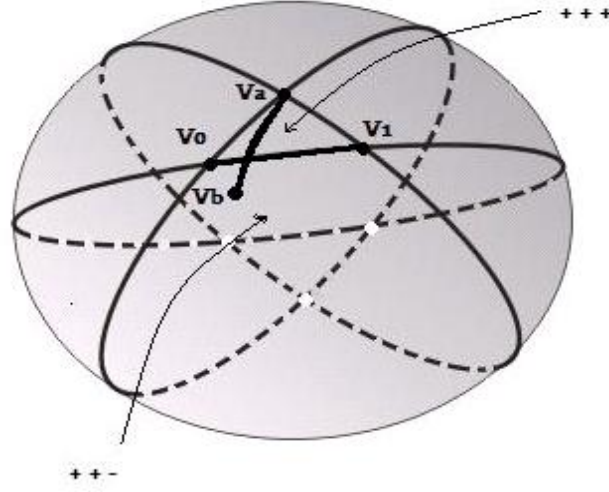
şeklindedir.

Geometrik Türetim

İki doğrunun kesişip kesişmediğini belirlemek için Şekil 3.14 'deki küre üzerinde bulunan üçgenlerin bölgelerinin işaretlerini inceleyelim. $V_b + + -$ bölgesinde olduğu zaman V_aV_b doğru parçası ile V_0V_1 doğru parçasının kesiştiği görülür. Kullanılan vektörler düzlemin Plücker koordinatlarıyla;

$$(F_{01a} \cdot F_{b1a} \geq 0) \wedge (F_{01a} \cdot F_{0ba} \geq 0) \wedge (F_{01a} \cdot F_{01b} \leq 0) \quad (3.78)$$

şeklinde ifade edilir.



Şekil 3.14. İki taraflı uzayda doğru parçalarının kesişimi

İlk olarak Eş. 3.78 koşulunun ikinci kısmında F_{01a} yerine F_{b1a} yazarsak;

$$(F_{01a} \cdot F_{b1a} \geq 0) \wedge (F_{b1a} \cdot F_{0ba} \geq 0) \wedge (F_{01a} \cdot F_{01b} \leq 0) \quad (3.79)$$

elde edilir.

Eş. 3.79 'daki ikinci ifadeden başlayarak, birinci durumdaki F_{b1a} 'yı F_{0ba} yerine yazar ve daha sonra simetrik bir yöntemle yeniden düzenlersek;

$$(F_{01a} \cdot F_{01b} \leq 0) \wedge (F_{ab0} \cdot F_{ab1} \leq 0) \wedge (F_{01a} \cdot F_{ab0} \leq 0) \quad (3.80)$$

elde edilir.

Böylece iki doğru parçasının aynı düzlemden geçme koşulu aşağıdaki gibi olur:

$$(S_{01ab} = 0) \wedge (F_{01a} \cdot F_{01b}, F_{ab0} \cdot F_{ab1}, F_{01a} \cdot F_{ab0} \leq 0). \quad (3.81)$$

Eş. 3.81 koşulu sağlanırsa iki doğru $V = [X, Y, Z, w]$ gibi bir noktada kesişirler.

V noktasının V_0 ve V_1 noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned} V &= [f_{ab0}V_1 - f_{ab1}V_0] , & (f_{ab0} \geq 0 \wedge f_{ab1} \leq 0), \\ V &= [f_{ab1}V_0 - f_{ab0}V_1] , & (f_{ab0} \leq 0 \wedge f_{ab1} \geq 0) \end{aligned}$$

şeklindedir.

V noktasının V_a ve V_b noktaları ile ifadesi;

$$\begin{aligned} V &= [f_{01a}V_b - f_{01b}V_a] , & (f_{01a} \geq 0 \wedge f_{01b} \leq 0), \\ V &= [f_{01b}V_a - f_{01a}V_b] , & (f_{01a} \leq 0 \wedge f_{01b} \geq 0) \end{aligned}$$

şeklindedir.

3.4.4. İki taraflı uzayda dual simpleksler

Dual dörtyüzlünün bir düzlemi içermesi

İki taraflı uzayda $\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ dual homojen dörtyüzlüsünün γ_a homojen düzlemini içirme koşulu, homojen bir dörtyüzlünün homojen bir noktayı içermesi koşulunun dual formuyla ilgilidir. O halde Eş.3.66 koşulunun dualinden;

$$\begin{aligned} (T_{0123} > 0 \wedge T_{a123}, T_{a032}, T_{a013}, T_{a021} \geq 0) \\ V(T_{0123} < 0 \wedge T_{a123}, T_{a032}, T_{a013}, T_{a021} \leq 0) \end{aligned} \quad (3.82)$$

ifadesi elde edilir.

Dual üçgenin bir düzlemi içermesi

İki taraflı uzayda $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ dual homojen üçgeninin γ_a homojen düzlemini içerme koşulu, homojen bir üçgenin homojen bir noktayı içerme koşulunun dual formuyla ilgilidir. O halde Eş.3.69 koşulunun dualinden;

$$(T_{a012} = 0) \wedge (\pi_{012} \cdot \pi_{a12}, \pi_{012} \cdot \pi_{a20}, \pi_{012} \cdot \pi_{a01} \geq 0) \quad (3.83)$$

ifadesi elde edilir.

Doğru parçasının bir düzlemi içermesi

İki taraflı uzayda $\gamma_0\gamma_1$ dual homojen doğru parçasının γ_a düzlemini içerme koşulu, homojen doğru parçasının homojen bir noktayı içerme koşulunun dual formuyla ilgilidir. Bu yüzden Eş.3.72 koşulunun dualinden;

$$(\pi_{a01} = 0) \wedge (\lambda_{01} \cdot \lambda_{0a} \leq 0 \wedge \lambda_{01} \cdot \lambda_{a1} \geq 0) \quad (3.84)$$

ifadesi elde edilir.

Dual doğru parçası ve dual üçgen arasındaki ortak düzlem

İki taraflı uzayda $\gamma_a\gamma_b$ dual homojen doğru parçası ve $\gamma_0\gamma_1\gamma_2$ dual homojen üçgeninin bir tek ortak homojen düzlemi olma koşulu, homojen bir doğru parçası ve homojen bir üçgenin bir tek noktada kesişme koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. Bu yüzden Eş.3.76 koşulunun dualinden;

$$\begin{aligned} (T_{a012}, T_{b012}) &\neq (0,0) \\ \wedge (T_{a012} \geq 0 \wedge T_{b012} \leq 0 \wedge T_{ba12}, T_{ba02}, T_{ba10} \geq 0) \\ \vee (T_{a012} \leq 0 \wedge T_{b012} \geq 0 \wedge T_{ba12}, T_{ba02}, T_{ba10} \leq 0) \end{aligned} \quad (3.85)$$

ifadesi elde edilir.

Yukarıdaki koşul sağlanırsa $\gamma = [a, b, c, d]^T$ gibi bir ortak homojen düzlem vardır. Bu ortak düzlem ya γ_a ve γ_b ya da γ_0, γ_1 ve γ_2 terimleriyle ifade edilebilir.

γ düzleminin γ_a ve γ_b düzlemleriyle ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [T_{a012}\gamma_b - T_{b012}\gamma_a]^T, & (T_{a012} \geq 0 \wedge T_{b012} \leq 0), \\ \gamma &= [T_{b012}\gamma_a - T_{a012}\gamma_b]^T, & (T_{a012} \leq 0 \wedge T_{b012} \geq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

γ düzleminin γ_0, γ_1 ve γ_2 düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [T_{ab12}\gamma_0 + T_{ab20}\gamma_1 + T_{ab01}\gamma_2]^T, & (T_{ab12}, T_{ab20}, T_{ab01} \geq 0), \\ \gamma &= [-T_{ab12}\gamma_0 - T_{ab20}\gamma_1 - T_{ab01}\gamma_2]^T, & (T_{ab12}, T_{ab20}, T_{ab01} \leq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

İki dual doğru parçası arasındaki ortak düzlem

İki taraflı uzayda $\gamma_a\gamma_b$ ve $\gamma_0\gamma_1$ dual homojen doğru parçalarının ortak bir düzleme sahip olmaları koşulu, V_aV_b ve V_0V_1 homojen doğru parçalarının kesişme koşulunun bir dual formuyla ilgilidir. Bu yüzden Eş.3.81 koşulunun dualinden;

$$(T_{01ab} = 0) \wedge (\pi_{01a} \cdot \pi_{01b}, \pi_{ab0} \cdot \pi_{ab1}, \pi_{01a} \cdot \pi_{ab0} \leq 0) \quad (3.86)$$

ifadesi elde edilir.

$\gamma, \gamma_a\gamma_b$ ve $\gamma_0\gamma_b$ dual homojen doğru parçaları arasındaki ortak düzlem olmak üzere;
 γ düzleminin γ_0 ve γ_1 düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [p_{ab0}\gamma_1 - p_{ab1}\gamma_0]^T, & (p_{ab0} \geq 0 \wedge p_{ab1} \leq 0), \\ \gamma &= [p_{ab1}\gamma_0 - p_{ab0}\gamma_1]^T, & (p_{ab0} \leq 0 \wedge p_{ab1} \geq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

γ düzleminin γ_a ve γ_b düzlemleri ile ifadesi;

$$\begin{aligned}\gamma &= [p_{01a}\gamma_b - p_{01b}\gamma_a]^T, & (p_{01a} \geq 0 \wedge p_{01b} \leq 0), \\ \gamma &= [p_{01b}\gamma_a - p_{01a}\gamma_b]^T, & (p_{01a} \leq 0 \wedge p_{01b} \geq 0)\end{aligned}$$

şeklindedir.

KAYNAKLAR

1. Yamaguchi F, Niizeki M, “A new paradigm for geometric processing”, *Comput. Graph Forum (Proceeding of Eurographic '93)* 12:177-188 (1993).
2. Yamaguchi F, Niizeki M, “A proposal of geometric processing of rational polynomial curves”, *In: Fisher RB (ed) Mathematics of surfaces*, Clarendon Press, Oxford, 5: 295-323 (1994).
3. Niizeki M, Yamaguchi F, “Projectively invariant intersection detections for solid modeling”, *ACM Trans Graph*, 13: 279-299 (1994).
4. Stolfi N., “Oriented projective geometry: a framework for geometric computations”, *Academic Press*, 34-36 (1991).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KONİK, Hacer
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 13.02.1986 Kayseri
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0(555) 437 00 74
e-mail : hacer_konik@hotmail.com

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Y.Lisans	Gazi Üni./ Matematik Bölümü	2011
Lisans	Erciyes Üni./ Matematik Bölümü	2008
Lise	Baldöktü Anadolu Lisesi	2004

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Yüzme, tenis, bilgisayar teknolojileri