

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİNOM VE DÖRTLÜ BAND MATRİSLERİNİN KOMPOZİSYONU
İLE TÜRETİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI

Kübra TOPAL

TEZ DANIŞMANI

Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN

JÜRİ ÜYELERİ

Prof. Dr. Ruşen YILMAZ

Prof. Dr. Abdulcabbar SÖNMEZ

RİZE-2021

Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİNOM VE DÖRTLÜ BAND MATRİSLERİNİN KOMPOZİSYONU İLE
TÜRETİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI

Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN danışmanlığında, Kübra TOPAL tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararı ile oluşturulan jüri tarafından 15/01/2021 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı, Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Ruşen YILMAZ	
Üye	: Prof. Dr. Abdalcabbar SÖNMEZ	
Üye	: Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN	

Prof. Dr. Murat TOMAKİN
ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Bu çalışmamızda binom ve dörtlü band matrislerinin kompozisyonu ile elde edilen dizi uzaylarının, binom ve üçlü band matrislerinin kompozisyonu ile elde edilen dizi uzaylarından daha genel yapıda olduğunu göstermeyi amaçlıyoruz.

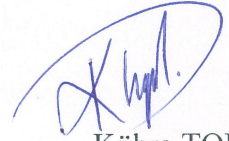
“Binom ve Dörtlü Band Matrislerinin Kompozisyonu ile Türetilen Yeni Dizi Uzayları” isimli tez çalışmamın seçiminde ve her aşamasında bana öncülük eden ve desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın hiçbir döneminde beni yalnız bırakmayan ve desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve anlayışıyla her zaman yanımda olan eşim Furkan Alper TOPAL’a teşekkür ederim.

Kübra TOPAL

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Binom ve Dörtlü Band Matrislerinin Kompozisyonu ile Türetilen Yeni Dizi Uzayları” başlıklı bu tezi, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim. 15/01/2021



Kübra TOPAL

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BİNOM VE DÖRTLÜ BAND MATRİSLERİNİN KOMPOZİSYONU İLE TÜRETİLEN YENİ DİZİ UZAYLARI

Kübra TOPAL

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Doç. Dr. Mustafa Cemil BİŞGİN

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde dizi uzayı tanımı verilerek sıkça kullanılan dizi uzaylarından bahsedildi. Birinci bölümün birinci kısmında tez boyunca kullanılan temel tanım ve teoremlere yer verildi. Ayrıca matris dönüşümleri, matris sınıfları ve dual uzay kavramlarına değinildi. Birinci bölümün ikinci kısmında literatür özeti verildi. İkinci bölümün birinci kısmında binom ve dörtlü band matrislerinin kompozisyonu ile türetilen dört yeni dizi uzayı $b_0^{r,s}(Q)$, $b_c^{r,s}(Q)$, $b_\infty^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ inşa edildi. Bu dizi uzaylarının klasik dizi uzaylarına lineer izomorfik olduğundan ve bu uzaylar için bazı kapsama bağıntılarından bahsedildi. İkinci bölümün ikinci kısmında inşa edilen yeni dizi uzaylarının Schauder bazlarına değinildi ve α -, β - ve γ - dualleri belirlendi. İkinci bölümün üçüncü kısmında bu uzayların bazı matris sınıfları karakterize edildi. Üçüncü bölümde elde edilen sonuçlar kısaca verildi. Dördüncü bölümde sonraki çalışmalar için öneriler verildi.

2021, 47 sayfa

Anahtar Kelimeler: Matris Sınıfları, Etki Alanı, Matris Dönüşümleri, Schauder Bazı, α -, β - ve γ - Dualleri.

ABSTRACT

NEW SEQUENCE SPACES DERIVED BY THE COMPOSITION OF BINOMIAL AND QUADRUPLE BAND MATRICES

Kübra TOPAL

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Assoc. Prof. Mustafa Cemil BİŞGİN

This thesis study consists of four chapters. In the first chapter, frequently used sequence spaces are mentioned by giving definition of sequence space. In the first part of the first chapter, basic definitions and theorems used throughout the thesis are given. Also, the notions of matrix transformations, matrix classes and dual space are mentioned. In the second part of the first chapter, literature summary is given. In the first part of the second chapter, four new sequence spaces $b_0^{r,s}(Q)$, $b_c^{r,s}(Q)$, $b_\infty^{r,s}(Q)$ and $b_p^{r,s}(Q)$ derived by the composition of binomial and quadruple band matrices are constructed. These sequence spaces are linear isomorphic to classical sequence spaces and some inclusion relations are mentioned. In the second part of the second chapter, the Schauder bases of the new constructed sequence spaces are mentioned and their α -, β - and γ - duals are determined. In the third part of the second chapter, some matrix classes of those spaces are characterized. In the third chapter, the obtained results are given briefly. In the fourth chapter, some suggestions are given for further studies.

2021, 47 pages

Keywords: Matrix Classes, Matrix Domain, Matrix Transformations, Schauder Basis,
 α -, β - and γ - Duals

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	II
ÖZET	III
ABSTRACT.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.1.1. Temel Tanım ve Teoremler	3
1.1.2. Metrik Uzaylar.....	4
1.1.3. Eşitsizlikler.....	5
1.1.4. Metrik Uzaylarda Topolojik Kavramlar.....	5
1.1.5. Normlu Uzaylar.....	6
1.1.6. Schauder Bazı	7
1.1.7. Matris Dönüşümleri	8
1.1.8. Matris Sınıfları	13
1.1.9. Dual Uzaylar	16
1.2. Literatür Özeti	17
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	22
2.1. Yeni Dizi Uzayları.....	22
2.2. Yeni Dizi Uzaylarının Schauder Bazı ve α - , β - ve γ - Dualleri.....	29
2.3. Bazı Matris Sınıfları.....	35
3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	42
4. ÖNERİLER	43
KAYNAKLAR	44
ÖZGEÇMİŞ	46

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathcal{F}$	Doğal Sayıların Sonlu Alt Kümelerinin Ailesi
ℓ_p	p . Dereceden Mutlak Yakınsak Seri Oluşturan Diziler Uzayı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{F}$	Reel Veya Kompleks Sayılar Cismi
w	Reel Veya Kompleks Terimli Diziler Uzayı
c_0	Sıfıra Yakınsak Diziler Uzayı
ℓ_∞	Sınırlı Diziler Uzayı
bv	Sınırlı Salınımlı Diziler Uzayı
bs	Sınırlı Seri Oluşturan Diziler Uzayı
c	Yakınsak Diziler Uzayı
cs	Yakınsak Seri Oluşturan Diziler Uzayı

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

w reel (veya kompleks) terimli dizilerin kümesi olmak üzere, skaler çarpım ve noktasal toplama işlemleri altında bir vektör uzayıdır. w nun her bir alt vektör uzayına bir dizi uzayı denir. $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) cismi olmak üzere

$$w = \{x = (x_k): x_k \in \mathbb{F}, \forall k \in \mathbb{N}\}$$

şeklinde ve noktasal toplama ile skaler çarpım işlemleri aşağıda tanımlandığı gibidir. $\forall x, y, z, \in w$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için;

$$\oplus: w \times w \rightarrow w$$

$$(x, y) \mapsto x \oplus y = (x_k + y_k)$$

$$\otimes: \mathbb{F} \times w \rightarrow w$$

$$(\alpha, x) \mapsto \alpha \otimes x = (\alpha x_k)$$

Buna göre aşağıda verilen şartlar sağlanır;

- (i) $x \oplus y \in w$
- (ii) $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$
- (iii) $x \oplus e = e \oplus x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in X$ vardır.
- (iv) $x \oplus x^{-1} = x^{-1} \oplus x = e$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in X$ vardır.
- (v) $x \oplus y = y \oplus x$
- (vi) $\alpha \otimes x \in w$
- (vii) $\alpha \otimes (x \oplus y) = (\alpha \otimes x) \oplus (\alpha \otimes y)$
- (viii) $(\alpha + \beta) \otimes x = (\alpha \otimes x) \oplus (\beta \otimes x)$
- (ix) $(\alpha \cdot \beta) \otimes x = \alpha \otimes (\beta \otimes x)$
- (x) $1_{\mathbb{F}} \otimes x = x$

Burada e ve $1_{\mathbb{F}}$ sırasıyla $(0, 0, 0, \dots)$ şeklinde sıfır dizisi ve $\mathbb{F}$ cisminin 2. işlemine göre etkisiz elemanıdır.

Sıkça kullanılan dizi uzaylarından yakınsak diziler uzayı

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k \text{ mevcut} \right\},$$

sıfıra yakınsak diziler uzayı

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0 \right\},$$

sınırlı diziler uzayı

$$\ell_{\infty} = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\},$$

p. mertebeden mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p < \infty, \quad 1 \leq p < \infty \right\},$$

sınırlı salınımlı diziler uzayı

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}| < \infty \right\},$$

sınırlı seri oluşturan diziler uzayı

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \in \ell_{\infty} \right\},$$

ve yakınsak seri oluşturan diziler uzayı

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \in c \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımladığımız dizi uzayları arasında bazı kapsama bağıntıları vardır. Bu kapsama bağıntıları şu şekildedir;

- I. $\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$
- II. $\ell_1 \subset bv \subset c$.

Dizi uzayları teorisinde etki alanları kullanılarak aşağıdaki gibi problemlere değinilmektedir;

1. Yeni dizi uzayları tanımlamak,
2. Elde edilen yeni dizi uzaylarının topolojik özelliklerini incelemek,
3. Elde edilen yeni dizi uzayları ile mevcut dizi uzayları arasındaki kapsama bağıntılarını incelemek,
4. Elde edilen yeni dizi uzaylarının varsa Schauder bazlarını belirlemek,
5. Elde edilen yeni dizi uzaylarının α -, β - ve γ - duallerini belirlemek,
6. Elde edilen yeni dizi uzaylarının mevcut dizi uzayları ile aralarındaki matris sınıflarını karakterize etmek.

1.1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Bu bölümde tez boyunca kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1.1. (Sınırlılık) (s_n) reel terimli bir dizi olmak üzere eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|s_n| \leq M$ olacak şekilde $\exists M > 0$ varsa (s_n) dizisi sınırlıdır.

Tanım 1.1.1.2. (Yakınsaklık) (s_n) reel terimli bir dizi ve $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere eğer $\forall \epsilon > 0$ için (s_n) dizisinin belli bir indisten sonraki bütün terimleri s nin ϵ komşuluğunda bulunuyorsa (s_n) dizisi s ye yakınsıyor denir.

Teorem 1.1.1.3. Yakınsak her dizi sınırlıdır.

1.1.2. Metrik Uzaylar

Tanım 1.1.2.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere

$$\begin{aligned} d: X \times X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) \end{aligned}$$

şeklinde bir d dönüşümü tanımlansın. Eğer $\forall x, y, z \in X$ için aşağıda tanımlanan metrik aksiyomları sağlanırsa d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine metrik uzay denir.

- (i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Örnek 1.1.2.2.

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = |x - y| \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği denir.

Örnek 1.1.2.3. $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için,

$$\begin{aligned} d: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (x, y) &\mapsto d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme $\mathbb{R}^n$ nin alışılmış metriği denir.

1.1.3. Eşitsizlikler

Tanım 1.1.3.1. $1 \leq p < \infty$ ve $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ için,

$$\left(\sum_{k=0}^n |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=0}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=0}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğine Minkowski eşitsizliği denir.

Tanım 1.1.3.2. $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$ için,

$$\sum_{k=0}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=0}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=0}^n |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliğine Hölder eşitsizliği denir.

1.1.4. Metrik Uzaylarda Topolojik Kavramlar

Bir dizinin yakınsaklığına karar verebilmek için limitine bakılmaktadır. Ancak bazı uzaylarda Cauchy dizisi kavramı ile dizinin limitine bakılmaksızın yakınsak olup olmadığına karar verilebilir.

Tanım 1.1.4.1 (s_n) reel terimli bir dizi olsun. Eğer, $\forall \epsilon > 0$ için $\exists n_0^{(\epsilon)} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall m, n > n_0^{(\epsilon)}$ için $|s_n - s_m| < \epsilon$ oluyorsa (s_n) dizisine Cauchy dizisi denir. Yani bir dizinin Cauchy dizisi olması için dizinin belli bir indisten sonraki herhangi iki terimi arasındaki fark istenildiği kadar küçük yapılabilir.

Teorem 1.1.4.2. Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 1.1.4.3. (X, d) metrik uzayındaki her bir Cauchy dizisi bu uzayın bir elemanına yakınsak ise (X, d) metrik uzayına tam metrik uzay denir.

1.1.5. Normlu Uzaylar

Tanım 1.1.5.1. $X, \mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere $\| \cdot \|$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\begin{aligned} \| \cdot \|: X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

Eğer $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ve $\forall x, y \in X$ için aşağıda verilen norm aksiyomları sağlanıyorsa $\| \cdot \|$ dönüşümüne X üzerinde bir norm ve $(X, \| \cdot \|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir.

- (i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$
- (ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tanım 1.1.5.2. Tam normlu uzaya Banach uzay denir.

Tanım 1.1.5.3. X bir lineer topolojik dizi uzayı olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlanan $p_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri sürekli ise X dizi uzayına K-uzayı (Koordinat Uzayı) denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 1.1.5.4. X bir tam lineer metrik uzay ve bir K-uzayı ise X dizi uzayına FK-uzayı (Frèchet Koordinat Uzayı) denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Tanım 1.1.5.5. X bir Banach dizi uzayı olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlanan $p_n: X \rightarrow \mathbb{C}$ dönüşümleri sürekli ise X Banach dizi uzayı BK-uzayı (Banach Koordinat Uzayı) olarak isimlendirilir (Choudhary ve Nanda, 1989).

ℓ_∞, c_0 ve c dizi uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normuna göre, ℓ_p dizi uzayı ise

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

normuna göre BK-uzaydırlar.

Teorem 1.1.5.6. $n = 1, 2, 3, \dots$ için $p_0 = \|\cdot\|_A$ ve $p_n = |x_n|$ olmak üzere A satır sonlu matris ise (c_A, p) bir FK-uzayıdır. Eğer A üçgen bir matris ise (c_A, p_0) bir BK-uzayıdır (Wilansky, 1984).

1.1.6. Schauder Bazı

Sonlu boyutlu vektör uzaylarında çalışıldığı zaman Hamel bazı kavramı yeterli olmasına rağmen sonsuz boyutlu vektör uzaylarında bu kavram yetersiz kalmaktadır. Bundan dolayı sonsuz boyutlu Banach uzaylarında Hamel bazı kullanışsız hale gelmektedir. Bu nedenle daha farklı yapıya sahip olan sonsuz boyutlu vektör uzayları için Schauder bazını kullanmak daha elverişlidir.

Tanım 1.1.6.1. X bir normlu uzay ve (y_k) bu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| x - \sum_{k=0}^n \delta_k y_k \right\| = 0$$

olacak şekilde bir (δ_k) skaler sayı dizisi bulunabiliyorsa (y_k) dizisine X uzayının Schauder bazı denir (Choudhary ve Nanda, 1989).

Örnek 1.1.6.2. $(e^{(k)})$ dizisi k . terimi 1 ve diğer terimleri 0 olan bir dizi ve $e = (1, 1, 1, \dots)$ olmak üzere;

- a) c dizi uzayının Schauder bazı $\{e, e^{(0)}, e^{(1)}, e^{(2)}, \dots\}$ dizisidir,
- b) c_0 ve ℓ_p dizi uzaylarının Schauder bazı $(e^{(k)})$ dizisidir.

Tanım 1.1.6.3. Sayılabilir yoğun bir alt kümeye sahip olan uzaya ayrılabilir uzay denir.

Teorem 1.1.6.4. Schauder bazına sahip her Banach uzay ayrılabilir.

Teorem 1.1.6.5. (Banach-Steinhaus Teoremi) X bir Banach uzayı ve X in sürekli duali

$$X^* = \{f \mid f: X \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli ve lineer}\}$$

olmak üzere $\{f_n\} \subset X^*$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

ise $f \in X^*$ dir (Choudhary ve Nanda, 1989).

1.1.7. Matris Dönüşümleri

Toplanabilme teorisi analizde genellikle serilerle ilgili bir çalışma alanıdır. 19. yüzyıldan önce ıraksak seriler hakkında Euler bazı çalışmalar yapmış olsa da bu çalışmalar anlamlı olmamıştır. 1696'da Bernoulli $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ için

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}$$

olduğunu söylemiştir. Daha sonra Euler $x = 1$ alarak $1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}$ olacağını belirtmiştir. Ancak bu anlamlı değildir. Gerçekten;

$$\alpha = 1 - x + x^2 - \dots \pm x^n$$

alınırsa

$$\alpha x = x - x^2 + x^3 - \dots \pm x^{n+1}$$

olur ve buradan

$$\alpha = \frac{1 \pm x^{n+1}}{1+x}$$

elde edilir. Eğer $|x| < 1$ ise $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$ olup

$$1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \pm x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$$

eşitliği sağlanacağından $x = 1$ almak anlamlı olmayacaktır. Euler daha sonra z nin yeterince küçük değerleri için $f(z) = \sum_n a_n z^n$ olmak üzere $f(1) = s$ olması durumunda ıraksak olan $\sum_n a_n$ serisinin s değerine Euler anlamında toplanabilir olduğunu söyleyerek bunu

$$\sum_n a_n = s(E)$$

şeklinde belirtmiştir. Fakat bu da anlamlı değildir. Gerçekten,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

serisini göz önüne alırsak bu serinin kısmi toplamlar dizisi $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

olur. Bu dizisinin değeri n çift ise 1, n tek ise 0 olacağından ele aldığımız seri ıraksak bir seridir. Euler'in tanımına göre

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

ve

$$f(1) = \frac{1}{2}$$

olup

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}(E)$$

elde edilir. Ancak $|z| < 1$ için

$$\frac{1-z^2}{1-z^3} = \frac{(1-z)(1+z)}{(1-z)(1+z+z^2)} = \frac{1+z}{1+z+z^2} = 1 - z^2 + z^3 - z^5 + z^6 - \dots$$

ve $f(1)$

$$\frac{2}{3} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

elde edilmiş olur. Yani Euler'in bu tanımı da anlamlı olmamıştır. Daha sonra Cauchy 1821 yılında yakınsak bir dizinin aritmetik ortalamasının da aynı değere yakınsağını ispatlamıştır. Bunu kullanarak 1890 yılında Cesàro; $\sum_n a_n$ ıraksak bir seri olmak üzere bu serinin kısmi toplamlar dizisi (s_n) verildiğinde eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_n}{n+1}$$

şeklinde tanımlı (t_n) dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = K$ ise $\sum_n a_n$ serisinin K değerine Cesàro anlamında toplanabilir olduğu tanımını vermiş ve bunu

$$\sum_n a_n = K(C, 1)$$

şeklinde göstermiştir. Bundan sonra, bazı matematikçiler tarafından da çeşitli toplanabilme metodları tanımlanmıştır. Ancak farklı metodlar ile toplanan ıraksak seriler farklı sonuçlar verebilmektedir. Bu sebeple serinin hangi yöntemle toplandığını özel olarak belirtmek gerekmektedir.

Tanım 1.1.7.2. $|x| < 1$ için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olmak üzere eğer,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = K$$

ise ıraksak olan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

serisi K değerine Abel toplanabilirdir denir ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = K(A)$$

şeklinde gösterilir.

Toplanabilme teorisi zamanla yerini daha kapsamlı çalışma alanı olan matris dönüşümü teorisine bırakmıştır. Matris dönüşümü teorisinde sonsuz matris yöntemi ile bir seriyi toplanabilmektedir.

Tanım 1.1.7.3. $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k) \in w$ olsun. Burada A ve x in çarpımı $\forall n, k \in \mathbb{N}_0$ için aşağıdaki gibidir;

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} a_{0k} x_k \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Ayrıca,

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

olmak üzere $y = (y_n) = ((Ax)_n)$ dizisine x in A dönüşümü denir. Burada Ax çarpımının anlamlı olması, $\forall n \in \mathbb{N}_0$ için $(Ax)_n$ serilerinin yakınsak olmasına bağlıdır.

Tanım 1.1.7.4. A reel (veya kompleks) terimli bir sonsuz matris olsun. Eğer $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $k > n$ iken $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ oluyorsa $A = (a_{nk})$ matrisine üçgen matris denir.

Tanım 1.1.7.5. X keyfi bir dizi uzayı ve A reel (veya kompleks) terimli sonsuz bir matris olmak üzere X_A ile A matrisinin X üzerindeki etki alanı gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$X_A = \{x = (x_k) \in w: Ax \in X\}.$$

Tanım 1.1.7.6. X ve Y iki dizi uzayı olmak üzere eğer $\forall x \in X$ için $Ax \in Y$ ise A , X den Y ye bir matris dönüşümü tanımlar denir ve

$$A: X \rightarrow Y$$

şeklinde gösterilir.

1.1.8. Matris Sınıfları

Tanım 1.1.8.1. X ve Y herhangi iki dizi uzayı olsun. X den Y ye matris dönüşümlerinin sınıfı $(X:Y)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$(X:Y) = \{A = (a_{nk}): \forall x \in X \text{ için } Ax \in Y\}.$$

Tanım 1.1.8.2. $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere A nın toplanabilirlik alanı c_A ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$c_A = \{x = (x_k) \in w: Ax \in c\}.$$

$A \in (c:c)$ ise $c \subseteq c_A$ demektir ve bu durumda A matrisine konservatif matris denir. Burada $(c:c)$ konservatif matrislerin sınıfı olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.8.3. A ve B keyfi iki sonsuz matris olmak üzere

$$c_A \subset c_B$$

ise B , A dan daha güçlü veya A , B den daha zayıftır denir (Wilansky, 1984).

Tanım 1.1.8.4. A ve B keyfi iki sonsuz matris olmak üzere

$$c_A = c_B$$

ise A ile B eş güçlüdür denir.

Teorem 1.1.8.5. A ve B üçgen matrisler olmak üzere

$$c_A \subset c_B \Leftrightarrow BA^{-1} \text{ konservatiftir (Wilansky, 1984).}$$

Tanım 1.1.8.6. A sonsuz bir matris ve x herhangi bir dizi olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (Ax)_k$$

oluyorsa A matrisine regüler matris denir. Yani A sonsuz matrisi limit koruma özelliğine sahipse regülerdir. Regüler matrislerin sınıfı $(c: c: p)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.8.7. $C = (c_{nk})$ Cesàro matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Yakınsak bir dizinin aritmetik ortalaması da aynı değere yakınsak olacağından ve Cesàro matrisinin tanımı gereği $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (Cx)_n$$

olup Cesàro matrisi limit koruma özelliğini sağlar. Yani Cesàro matrisi regüler matristir.

Konservatif ve regüler matris tanımları birlikte düşünülürse;

- Konservatif her matrisin regüler olmadığı,
 - Konservatif olmayan bir matrisin regüler olamayacağı,
 - Regüler her matrisin konservatif olduğu
- açıktır.

Şimdi aşağıdaki Lemmada kullanmak üzere aşağıdaki ifadeleri tanımlayalım;

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |a_{nk}|^q < \infty \quad (1)$$

$$\sup_{n, k \in \mathbb{N}} |a_{nk}| < \infty \quad (2)$$

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n |a_{nk}|^p < \infty \quad (3)$$

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in K} a_{nk} \right|^q < \infty \quad (4)$$

$$\sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \sum_{k \in K} a_{nk} \right|^p < \infty \quad (5)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} = \xi_k \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k a_{nk} = \xi \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |a_{nk}| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} a_{nk} \right| \quad (8)$$

Lemma 1.1.8.8. $A = (a_{nk})$ sonsuz matris olmak üzere aşağıdakiler sağlanır (Stieglitz ve Tietz, 1977);

- (i) $A = (a_{nk}) \in (c_0: \ell_\infty) = (c: \ell_\infty) = (\ell_\infty: \ell_\infty) \Leftrightarrow q = 1$ olmak üzere (1) in sağlanmasıdır.
- (ii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p: \ell_\infty) \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p < \infty$ için (1) in sağlanmasıdır.
- (iii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1: \ell_\infty) \Leftrightarrow$ (2) nin sağlanmasıdır.
- (iv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty: c) \Leftrightarrow$ (6) ve (8) in sağlanmasıdır.

- (v) $A = (a_{nk}) \in (c: c) \Leftrightarrow q = 1$ olmak üzere (1), (6) ve (7) nin sağlanmasıdır.
- (vi) $A = (a_{nk}) \in (c_0: c) \Leftrightarrow q = 1$ olmak üzere (1) ve (6) nin sağlanmasıdır.
- (vii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p: c) \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p < \infty$ olmak üzere (1) ve (6) nin sağlanmasıdır.
- (viii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1: c) \Leftrightarrow (2)$ ve (6) nin sağlanmasıdır.
- (ix) $A = (a_{nk}) \in (c_0: c_0) \Leftrightarrow q = 1$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k = 0$ olmak üzere (1) ve (6) nin sağlanmasıdır.
- (x) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1: \ell_1) \Leftrightarrow p = 1$ olmak üzere (3) ün sağlanmasıdır.
- (xi) $A = (a_{nk}) \in (\ell_p: \ell_1) \Leftrightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $1 < p \leq \infty$ olmak üzere (4) ün sağlanmasıdır.
- (xii) $A = (a_{nk}) \in (c_0: \ell_1) = (c: \ell_1) \Leftrightarrow p = 1$ olmak üzere (5) in sağlanmasıdır.
- (xiii) $A = (a_{nk}) \in (\ell_\infty: \ell_\infty) \cap (\ell_1: \ell_1) \Rightarrow A = (a_{nk}) \in (\ell_p: \ell_p), 1 < p < \infty$.
- (xiv) $A = (a_{nk}) \in (c: \ell_p) = (c_0: \ell_p) \Leftrightarrow 1 \leq p < \infty$ olmak üzere (5) in sağlanmasıdır.
- (xv) $A = (a_{nk}) \in (\ell_1: \ell_p) \Leftrightarrow 1 \leq p < \infty$ olmak üzere (3) ün sağlanmasıdır.
- (xvi) $A = (a_{nk}) \in (c: c_0) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k = 0$, $\xi = 0$ ve $q = 1$ olmak üzere (1), (6) ve (7) nin sağlanmasıdır.

1.1.9. Dual Uzaylar

Tanım 1.1.9.1. X ve Y keyfi iki dizi uzayı olsun.

$$M(X, Y) = \{y = (y_k) \in w: \forall x \in X, xy = (x_k y_k) \in Y\}$$

şeklinde tanımlanan $M(X, Y)$ kümesi X ve Y dizi uzaylarının çarpım kümesidir.

Tanım 1.1.9.2. X keyfi bir dizi uzayı olmak üzere bu uzayın α -, β - ve γ - dualleri aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$X^\alpha = M(X, \ell_1) = \left\{ \alpha = (\alpha_k): \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k x_k| < \infty, \forall x \in X \right\}$$

$$X^\beta = M(X, cs) = \left\{ \alpha = (\alpha_k): \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k \text{ yakınsak, } \forall x \in X \right\}$$

$$X^\gamma = M(X, bs) = \left\{ \alpha = (\alpha_k): \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right| < \infty, \forall x \in X \right\}$$

1.2. Literatür Özeti

Bu bölümde Euler ve Binom matrislerinin etki alanları kullanılarak daha önce yapılmış olan çalışmalar hakkında kısaca bilgi vereceğiz.

Bu bölümde ve daha sonraki bölümlerde negatif indisli terimler sıfır olarak kabul edilecektir.

Euler matrisinin etki alanını kullanarak Euler dizi uzaylarını ilk olarak Altay, Başar ve Mursaleen aşağıdaki gibi inşa etmişlerdir (Altay ve Başar, 2005; Altay vd., 2006);

$$e_0^r = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k = 0 \right\},$$

$$e_c^r = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$e_\infty^r = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}$$

ve

$$e_p^r = \left\{ x = (x_k) \in w: \sum_n \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty).$$

Daha sonra Altay ve Polat Δ fark matrisi olmak üzere $e_0^r(\Delta)$, $e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımlayarak Altay, Başar ve Mursaleen 'in çalışmasını geliştirmişlerdir (Altay ve Polat, 2006);

$$e_0^r(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k (x_k - x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$e_c^r(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k (x_k - x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$e_\infty^r(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-r)^{n-k} r^k (x_k - x_{k-1}) \right| < \infty \right\}.$$

Bundan sonra Bişgin $b_0^{r,s}$, $b_c^{r,s}$, $b_\infty^{r,s}$ ve $b_p^{r,s}$ binom dizi uzaylarını aşağıdaki gibi tanımlayarak Altay, Başar ve Mursaleen'in daha önceden yapmış olduğu çalışmayı genelleştirmiştir (Bişgin, 2016a, 2016b, 2018, 2019);

$$b_0^{r,s} = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k x_k = 0 \right\},$$

$$b_c^{r,s} = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k x_k \text{ mevcut} \right\},$$

$$b_\infty^{r,s} = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k x_k \right| < \infty \right\}$$

ve

$$b_p^{r,s} = \left\{ x = (x_k) \in w: \sum_n \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k x_k \right|^p < \infty \right\} \quad (1 \leq p < \infty).$$

$B^{r,s} = (b_{nk}^{r,s})$ binom matrisi $s \cdot r > 0$, $r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$b_{nk}^{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{(s+r)^n} \binom{n}{k} s^{n-k} r^k, & 0 \leq k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases}$$

Eğer burada $r + s = 1$ alınırsa r . mertebeden Euler matrisi E^r elde edilir. Dolayısıyla Binom matrisinin Euler matrisinden daha genel olduğu görülmüş olur.

Bundan sonra Meng ve Song Binom ve fark matrislerinin kompozisyonunu kullanarak $b_0^{r,s}(\Delta)$, $b_c^{r,s}(\Delta)$ ve $b_\infty^{r,s}(\Delta)$ ($m = 1$ değeri için) dizi uzaylarını tanımlamış ve Bişgin'in çalışmasını geliştirmiştir. Meng ve Song tarafından $b_0^{r,s}(\Delta)$, $b_c^{r,s}(\Delta)$ ve $b_\infty^{r,s}(\Delta)$ dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Meng ve Song, 2017);

$$b_0^{r,s}(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+s)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (x_k - x_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$b_c^{r,s}(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(r+s)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (x_k - x_{k-1}) \text{ mevcut} \right\}$$

ve

$$b_\infty^{r,s}(\Delta) = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(r+s)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (x_k - x_{k-1}) \right| < \infty \right\}.$$

Daha sonra Sönmez $b_0^{r,s}(G)$, $b_c^{r,s}(G)$ ve $b_\infty^{r,s}(G)$ dizi uzaylarını (Sönmez, 2019) ve Bişgin $b_p^{r,s}(G)$ uzayını (Bişgin, 2017) tanımlayarak Meng ve Song'un yukarıda bahsedilen çalışmalarını genelleştirmişlerdir. $b_0^{r,s}(G)$, $b_c^{r,s}(G)$, $b_\infty^{r,s}(G)$ ve $b_p^{r,s}(G)$ dizi uzayları,

$$b_0^{r,s}(G) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1}) = 0 \right\},$$

$$b_c^{r,s}(G) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$b_\infty^{r,s}(G) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1}) \right| < \infty \right\}$$

ve

$$b_p^{r,s}(G) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1}) \right|^p < \infty \right\}$$

$1 \leq p < \infty$ şeklinde tanımlanmıştır. Burada $G = (g_{nk})$ ikili band matrisi aşağıdaki gibidir;

$$g_{nk} = \begin{cases} t & , & k = n \\ u & , & k = n - 1 \\ 0 & , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

$D = (d_{nk})$ üçlü band matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve $t, u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için

$$d_{nk} = \begin{cases} t & , & k = n \\ u & , & k = n - 1 \\ v & , & k = n - 2 \\ 0 & , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Eğer burada $v = 0$ alınırsa ikili band matrisi $G = (g_{nk})$ elde edilir. Dolayısıyla binom ve üçlü band matrisinin kompozisyonundan elde edilen $b_0^{r,s}(D), b_c^{r,s}(D), b_\infty^{r,s}(D)$ ve $b_p^{r,s}(D)$ dizi uzayları binom ve ikili band matrisinin kompozisyonundan elde edilen $b_0^{r,s}(G), b_c^{r,s}(G), b_\infty^{r,s}(G)$ ve $b_p^{r,s}(G)$ dizi uzaylarından daha geneldir. Yani Bişgin $b_0^{r,s}(D), b_c^{r,s}(D), b_\infty^{r,s}(D)$ dizi uzaylarını (Bişgin, 2017) ve

Sönmez $b_p^{r,s}(D)$ uzayını (Sönmez, 2020) aşağıdaki gibi tanımlayarak daha önceki çalışmalarını genellemişlerdir;

$$b_0^{r,s}(D) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1} + vx_{k-2}) = 0 \right\},$$

$$b_c^{r,s}(D) = \left\{ x = (x_k) \in w: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1} + vx_{k-2}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$b_\infty^{r,s}(D) = \left\{ x = (x_k) \in w: \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1} + vx_{k-2}) \right| < \infty \right\}$$

ve

$$b_p^{r,s}(D) = \left\{ x = (x_k) \in w: \sum_n \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (tx_k + ux_{k-1} + vx_{k-2}) \right|^p < \infty \right\}.$$

Son olarak Bişgin tarafından dörtlü band matrisi $Q = (q_{nk})$ aşağıdaki gibi tanımlanmıştır (Bişgin);

$$q_{nk} = \begin{cases} o & , & k = n \\ t & , & k = n - 1 \\ u & , & k = n - 2 \\ v & , & k = n - 3 \\ 0 & , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

Burada $\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve $o, t, u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ dir. Eğer burada $v = 0$ alınırsa üçlü band matrisi $D = (d_{nk})$, $u = v = 0$ alınırsa ikili band matrisi $G = (g_{nk})$ ve $o = 1, t = -1, u = v = 0$ alınırsa fark matrisi Δ elde edilir. Dolayısıyla Bişgin tarafından tanımlanan dörtlü band matrisi önceden tanımlanan matrislerden daha geneldir.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde daha önce yapılan çalışmalardan elde edilen dizi uzaylarından daha genel yapıda dizi uzayları tanımlanarak bunların Schauder bazları, $\alpha -$, $\beta -$ ve $\gamma -$ dualleri, matris dönüşümleri ve bazı matris sınıfları belirlenecektir.

2.1. Yeni Dizi Uzayları

Bu kısımda binom ve dörtlü band matrislerinin kompozisyonu ile oluşturduğumuz $b_0^{r,s}(Q)$, $b_c^{r,s}(Q)$, $b_\infty^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzaylarını tanımlayacağız. Ayrıca tanımladığımız yeni dizi uzaylarının sırasıyla klasik dizi uzayları c_0 , c , ℓ_∞ ve ℓ_p ile lineer izomorfik olduklarından ve bazı kapsama bağıntılarından bahsedeceğiz.

$\forall n, k \in \mathbb{N}$ ve $o, t, u, v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ için binom ve dörtlü band matrislerinin kompozisyonunun etki alanından yararlanarak aşağıdaki yeni dizi uzayları elde edilir;

$$b_0^{r,s}(Q) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (ox_k + tx_{k-1} + ux_{k-2} + vx_{k-3}) = 0 \right\},$$

$$b_c^{r,s}(Q) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (ox_k + tx_{k-1} + ux_{k-2} + vx_{k-3}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$b_\infty^{r,s}(Q) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (ox_k + tx_{k-1} + ux_{k-2} + vx_{k-3}) \right| < \infty \right\}$$

ve

$$b_p^{r,s}(Q) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (ox_k + tx_{k-1} + ux_{k-2} + vx_{k-3}) \right|^p < \infty \right\},$$

burada $1 \leq p < \infty$ dir.

Eğer etki alanı kavramı göz önüne alınırsa aşağıdaki eşitlikler yazılabilir;

$$b_0^{r,s}(Q) = (b_0^{r,s})_Q, \quad b_c^{r,s}(Q) = (b_c^{r,s})_Q, \quad b_\infty^{r,s}(Q) = (b_\infty^{r,s})_Q, \quad b_p^{r,s}(Q) = (b_p^{r,s})_Q \quad (9)$$

Ayrıca $F^{r,s} = (f_{nk}^{r,s}) = B^{r,s}Q$ matrisi $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için

$$f_{nk}^{r,s} = \begin{cases} \frac{s^{n-k-3}r^k}{(s+r)^n} \left[os^3 \binom{n}{k} + ts^2r \binom{n}{k+1} + usr^2 \binom{n}{k+2} + vr^3 \binom{n}{k+3} \right] & , \quad 0 \leq k \leq n \\ & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmak üzere (9) eşitlikleri $F^{r,s} = (f_{nk}^{r,s})$ matrisi ile yeniden tanımlanırsa

$$b_0^{r,s}(Q) = (c_0)_{F^{r,s}}, \quad b_c^{r,s}(Q) = c_{F^{r,s}}, \quad b_\infty^{r,s}(Q) = (\ell_\infty)_{F^{r,s}}, \quad b_p^{r,s}(Q) = (\ell_p)_{F^{r,s}} \quad (10)$$

elde edilir. Burada verilen keyfi bir $x = (x_k) \in w$ için x in $F^{r,s}$ -dönüşümü $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$y_k = (F^{r,s}x)_k = \frac{1}{(s+r)^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} s^{k-i} r^i (ox_i + tx_{i-1} + ux_{i-2} + vx_{i-3})$$

veya

$$y_k = (F^{r,s}x)_k = \frac{1}{(s+r)^k} \sum_{i=0}^k \left[os^3 \binom{k}{i} + ts^2r \binom{k}{i+1} + usr^2 \binom{k}{i+2} + vr^3 \binom{k}{i+3} \right] s^{k-i-3} r^i x_i$$

şeklinde tanımlanabilir.

Teorem 2.1.1. $b_0^{r,s}(Q)$, $b_c^{r,s}(Q)$ ve $b_\infty^{r,s}(Q)$ dizi uzayları

$$\|x\|_{b_0^{r,s}(Q)} = \|x\|_{b_c^{r,s}(Q)} = \|x\|_{b_\infty^{r,s}(Q)} = \|F^{r,s}x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |(F^{r,s}x)_k|$$

normu ile birer BK-uzayıdır ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzayı da

$$\|x\|_{b_p^{r,s}(Q)} = \|F^{r,s}x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |(F^{r,s}x)_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir BK-uzayıdır.

İspat: c_0 , c ve ℓ_∞ uzaylarının supremum normu ile ve ℓ_p uzayının p -normu ile Banach uzayı olduğunu biliyoruz. Ayrıca tanımlanan $F^{r,s} = (f_{nk}^{r,s})$ bir üçgen matris ve (10) sağlandığı için Teorem 1.1.5.6. göz önüne alınırsa $b_0^{r,s}(Q)$, $b_c^{r,s}(Q)$, $b_\infty^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzaylarının BK-uzayı olduğu elde edilir.

Teorem 2.1.2. $b_0^{r,s}(Q)$, $b_c^{r,s}(Q)$, $b_\infty^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzayları sırasıyla c_0 , c , ℓ_∞ ve ℓ_p dizi uzaylarına lineer izomorfiktir ($1 \leq p < \infty$).

İspat: Diğerleri benzer şekilde yapılabileceğinden ispatı sadece $b_0^{r,s}(Q)$ uzayı için yapacağız. $L: b_0^{r,s}(Q) \rightarrow c_0$, $L(x) = F^{r,s}x$ olacak şekilde bir L dönüşümü tanımlayalım. Burada $\forall x, y \in b_0^{r,s}(Q)$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = F^{r,s}(\alpha x + \beta y) = \alpha F^{r,s}x + \beta F^{r,s}y = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

olup L lineerdir. Ayrıca $Lx = \theta$ alındığında $x = \theta$ olacağından L dönüşümünün birebir olduğu açıktır. Şimdi $y = (y_k) \in c_0$ olmak üzere L dönüşümünün örten ve norm koruyan olduğunu göstermek için $x = (x_n)$ dizisini $\forall k \in \mathbb{N}$ için;

$$x_n = \frac{1}{o} \sum_{k=0}^n \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} y_k \quad (11)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, μ_1, μ_2 ve μ_3 , $ox^3 + tx^2 + ux + v = 0$ denkleminin rastgele üç kökü olmak üzere Bişgin'in çalışmasına göre temel hesaplamalar sonucu μ_1, μ_2 ve μ_3 ile ilgili aşağıdaki eşitlikler elde edilir,

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = -\frac{t}{o},$$

$$\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 = \frac{u}{o},$$

$$\mu_1\mu_2\mu_3 = -\frac{v}{o},$$

$$\mu_1^3 + \frac{t}{o}\mu_1^2 + \frac{u}{o}\mu_1 + \frac{v}{o} = 0,$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_1\mu_2 + \frac{t}{o}(\mu_1 + \mu_2) + \frac{u}{o} = 0,$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 + \frac{t}{o}(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{u}{o} = 0$$

ve

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \frac{t}{o} = 0 .$$

Bu eşitlikler göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} (Qx)_k &= ox_k + tx_{k-1} + ux_{k-2} + vx_{k-3} \\ &= \sum_{l=0}^k \sum_{i=l}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{v=0}^{k-i-j} \binom{i}{l} \mu_1^{k-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-l} (r+s)^l y_l \\ &\quad + \frac{t}{o} \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{i=l}^{k-1} \sum_{j=0}^{k-i-1} \sum_{v=0}^{k-i-j-1} \binom{i}{l} \mu_1^{k-i-j-v-1} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-l} (r+s)^l r^{-i} y_l \\ &\quad + \frac{u}{o} \sum_{l=0}^{k-2} \sum_{i=l}^{k-2} \sum_{j=0}^{k-i-2} \sum_{v=0}^{k-i-j-2} \binom{i}{l} \mu_1^{k-i-j-v-2} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-l} (r+s)^l r^{-i} y_l \\ &\quad + \frac{v}{o} \sum_{l=0}^{k-3} \sum_{i=l}^{k-3} \sum_{j=0}^{k-i-3} \sum_{v=0}^{k-i-j-3} \binom{i}{l} \mu_1^{k-i-j-v-3} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-l} (r+s)^l r^{-i} y_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l=0}^{k-3} \left[\sum_{i=l}^{k-3} \left[\sum_{j=0}^{k-i-3} \binom{i}{l} (-s)^{i-l} (r+s)^l r^{-i} \left[\sum_{v=0}^{k-i-j-3} \mu_3^j \mu_2^v \mu_1^{k-i-j-v-3} (\mu_1^3 \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{t}{o} \mu_1^2 + \frac{u}{o} \mu_1 + \frac{v}{o} \right) \right] + \mu_3^j \mu_2^{k-i-j-2} \left(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \frac{t}{o} (\mu_1 + \mu_2) + \mu_1 \mu_2 + \frac{u}{o} \right) \right] \\
&\quad + \binom{k-2}{l} (-s)^{k-l-2} (r+s)^l r^{2-k} (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 \\
&\quad + \mu_2 \mu_3 + \frac{t}{o} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{u}{o}) \\
&\quad + \binom{k-1}{l} (-s)^{k-l-1} (r+s)^l r^{1-k} \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \frac{t}{o} \right) \\
&\quad + \binom{k}{l} (-s)^{k-l} (r+s)^l r^{-k} \Big] y_l \\
&\quad + y_{k-2} (r+s)^{k-2} [r^{2-k} (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_1 \mu_2 + \mu_1 \mu_3 + \mu_2 \mu_3 \\
&\quad + \frac{t}{o} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3) + \frac{u}{o})] \\
&\quad + y_{k-1} (r+s)^{k-1} \left[r^{1-k} \left(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \frac{t}{o} \right) + \binom{k}{k-1} (-s) r^{-k} \right] \\
&\quad + y_k \left(\frac{r+s}{r} \right)^k \\
&= \sum_{l=0}^{k-3} \binom{k}{l} (-s)^{k-l} (r+s)^l r^{-k} y_l + y_{k-2} (r+s)^{k-2} \binom{k}{k-2} (-s)^2 r^{-k} \\
&\quad + y_{k-1} (r+s)^{k-1} \binom{k}{k-1} (-s) r^{-k} + y_k (r+s)^k r^{-k} \\
&= \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-s)^{k-l} (r+s)^l r^{-k} y_l
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} (F^{r,s} x)_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (ox_k + tx_{k-1} + ux_{k-2} + vx_{k-3}) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} (-s)^{k-l} (r+s)^l r^{-k} y_l \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $x \in b_0^{r,s}(Q)$ ve $L(x) = y$ dir. Dolayısıyla L dönüşümü örten ve Teorem 2.1.1 den norm koruyandır. Sonuç olarak L dönüşümü lineer, birebir, örten ve norm koruyan özelliklerini sağladığı için $b_0^{r,s}(Q)$ ve c_0 uzayları lineer olarak izomorfiktir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2.1.3. $o + t + u + v = 0$ olmak üzere $c \subset b_0^{r,s}(Q)$ kapsaması kesindir.

İspat: Kabul edelim ki $o + t + u + v = 0$ ve $x = (x_k) \in c$ olsun. Bu durumda $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \sigma$ ve buradan $\lim_{k \rightarrow \infty} (Qx)_k = (o + t + u + v)\sigma = 0$ olur. Yani $Qx = ((Qx)_k) \in c_0$ dır. Ayrıca, $rs > 0$ iken binom matrisi regülerdir. Bu durumlar göz önüne alındığında $x \in c$ iken $B^{r,s}Qx \in c_0$ elde ederiz. Yani $x \in c$ iken $x \in b_0^{r,s}(Q)$ olur. Dolayısıyla $c \subset b_0^{r,s}(Q)$ kapsaması sağlanır. Şimdi bu kapsamının kesin olduğunu göstermek için bir $x = (x_k)$ dizisi tanımlayalım. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = \ln(k + 4)$ olsun. Açıkça görülmektedir ki $x = (x_k) \notin c$ ancak

$$F^{r,s}x = \frac{1}{(r+s)^k} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} s^{k-i} r^i \left[t \ln\left(\frac{k+3}{k+4}\right) + u \ln\left(\frac{k+2}{k+4}\right) + v \ln\left(\frac{k+1}{k+4}\right) \right] \in c_0$$

dır. Yani $x = (x_k) \in b_0^{r,s}(Q)$ dır. Buradan $c \subset b_0^{r,s}(Q)$ kapsamasının kesin olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2.1.4. $b_p^{r,s}(Q) \subset b_0^{r,s}(Q) \subset b_c^{r,s}(Q) \subset b_\infty^{r,s}(Q)$ kapsamaları kesindir.

İspat: Biliyoruz ki $\ell_p \subset c_0 \subset c \subset \ell_\infty$ kapsamaları sağlanır. O halde $b_p^{r,s}(Q) \subset b_0^{r,s}(Q) \subset b_c^{r,s}(Q) \subset b_\infty^{r,s}(Q)$ kapsamalarının da sağlanacağı açıktır. Şimdi $\forall k \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki şekilde üç dizi tanımlayalım;

$$x_k = \frac{1}{o} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i,$$

$$y_k = \frac{1}{o} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i \left(-\frac{2s+r}{r} \right)^j$$

ve

$$z_k = \frac{1}{o} \sum_{n=0}^k \sum_{j=n}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i (-s)^{j-n} (r+s)^n r^{-j} (n+1)^{-\frac{1}{p}}.$$

O halde $F^{r,s}x = (1,1,1, \dots) \in c \setminus c_0$, $F^{r,s}y = ((-1)^k) \in \ell_\infty \setminus c$ ve $F^{r,s}z = (k+1)^{1/p} \in c_0 \setminus \ell_p$ bulunur. Dolayısıyla kapsamalar kesindir. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 2.1.5. $b_p^{r,s}(Q)$ ve $\ell_\infty(Q)$ dizi uzayları örtüşür ancak birbirini içermez. Burada $p \in [1, \infty)$.

İspat: Teoremin ispatı için üç dizi tanımlayalım; $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = \frac{(-1)^k}{o} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i ,$$

$$y_k = \frac{1}{o} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i$$

ve

$$z_k = \frac{1}{o} \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \mu_1^{k-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i \left(-\frac{s}{r} \right)^j$$

burada $\left| \frac{s}{r} \right| > 1$ dir. Buradan,

$$Qx = ((-1)^k) \in \ell_\infty \text{ ve } F^{r,s}x = \left(\left(\frac{s-r}{s+r}\right)^k\right) \in \ell_p$$

$$Qy = e \in \ell_\infty \text{ ancak } F^{r,s}y = e \notin \ell_p$$

$$Qz = \left(\left(-\frac{s}{r}\right)^k\right) \notin \ell_\infty \text{ ancak } F^{r,s}z = (1,0,0, \dots) \in \ell_p$$

bulunur. Yani, $x \in \ell_\infty(Q) \cap b_p^{r,s}(Q)$, $y \in \ell_\infty(Q) \setminus b_p^{r,s}(Q)$ ve $z \in b_p^{r,s}(Q) \setminus \ell_\infty(Q)$. Böylece ispat tamamlanmıştır.

2.2. Yeni Dizi Uzaylarının Schauder Bazı ve α -, β - ve γ - Dualleri

Bu kısımda, bir önceki kısımda tanımlanan $b_0^{r,s}(Q), b_c^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzaylarının Schauder bazları verilerek $b_0^{r,s}(Q), b_c^{r,s}(Q), b_\infty^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ uzaylarının α -, β - ve γ - dualleri belirlenecektir.

Teorem 2.2.1. $\lim_{k \rightarrow \infty} (F^{r,s}x)_k = \zeta$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\xi_k = (F^{r,s}x)_k$ olsun. $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için aşağıda belirtildiği gibi iki dizi tanımlayalım;

$$\rho_k = \frac{1}{o} \sum_{l=0}^k \sum_{i=l}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{v=0}^{k-i-j} \binom{i}{l} \mu_1^{k-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-l} (r+s)^l r^{-i} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$\rho_n^{(k)}(r, s) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n < k \\ \frac{1}{o} \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} & , \quad k \leq n \end{cases}$$

Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;

a) $b_0^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzaylarının Schauder bazları $\{\rho^{(k)}(r, s)\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisidir.

Ayrıca bu Schauder bazının her $x \in b_0^{r,s}(Q)$ veya $b_p^{r,s}(Q)$ iken yalnızca bir gösterimi vardır ve bu gösterim aşağıdaki gibidir;

$$x = \sum_k \xi_k \rho^{(k)}(r, s)$$

b) $\{\rho, \rho^{(0)}(r, s), \rho^{(1)}(r, s), \dots\}$ dizisi $b_c^{r,s}(Q)$ dizi uzayının Schauder bazıdır ve her $x \in b_c^{r,s}(Q)$ için aşağıdaki gibi bir tek gösterime sahiptir;

$$x = \zeta \rho + \sum_k [\xi_k - \zeta] \rho^{(k)}(r, s)$$

İspat: a) $e^{(k)}$, k. terimi 1 diğer terimleri 0 olan bir dizi, $1 \leq p < \infty$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $F^{r,s} \rho^{(k)}(r, s) = e^{(k)} \in c_0$ olduğu açıktır. Buradan $\{\rho^{(k)}(r, s)\} \subset b_0^{r,s}(Q)$ ve $\{\rho^{(k)}(r, s)\} \subset b_p^{r,s}(Q)$ içermeleri sağlanır.

$1 \leq p < \infty$ ve $x = (x_k) \in b_0^{r,s}(Q)$ veya $b_p^{r,s}(Q)$ olmak üzere $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$x^{[m]} = \sum_{k=0}^m \xi_k \rho^{(k)}(r, s)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $x^{[m]}$ ile $F^{r,s} = (f_{nk}^{r,s})$ matrisini işleme alırsak $\forall n, m \in \mathbb{N}$ için

$$F^{r,s} x^{[m]} = \sum_{k=0}^m \xi_k F^{r,s} \rho^{(k)}(r, s) = \sum_{k=0}^m (F^{r,s} x)_k e^{(k)}$$

ve

$$\{F^{r,s}(x - x^{[m]})\}_n = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq n \leq m \\ (F^{r,s} x)_n & , \quad n > m \end{cases}$$

elde ederiz. Şimdi keyfi $\epsilon > 0$ için $m_0 = m_0^{(\epsilon)}$ mevcuttur öyle ki $\forall m_0 \leq m$ için

$$|(F^{r,s} x)_m| < \frac{\epsilon}{2}$$

ve

$$\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |(Qx)_n|^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

olur. Bu durumda $\forall m \geq m_0$ için

$$\|x - x^{[m]}\|_{b_0^{r,s}(Q)} = \sup_{m \leq n} |(F^{r,s}x)_n| \leq \sup_{m_0 \leq n} |(F^{r,s}x)_n| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

ve

$$\|x - x^{[m]}\|_{b_p^{r,s}(Q)} = \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} |(F^{r,s}x)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=m_0+1}^{\infty} |(F^{r,s}x)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

elde edilir. Buradan,

$$x = \sum_k \xi_k \rho^{(k)}(r, s)$$

olduğunu görüyoruz. Şimdi bu gösterimin tek olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bu gösterimin başka bir temsili aşağıdaki gibi olsun;

$$x = \sum_k \lambda_k \rho^{(k)}(r, s).$$

Teorem 2.1.2 de tanımlanan L dönüşümü dikkate alındığında $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$(F^{r,s}x)_n = \sum_k \lambda_k [F^{r,s} \rho^{(k)}(r, s)]_n = \sum_k \lambda_k e_n^{(k)} = \lambda_n$$

elde ederiz. Bu ise $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(F^{r,s}x)_n = \xi_n$ olmasıyla çelişir. Bu çelişkiye kabulümüzden düştük. Dolayısıyla $\forall x = (x_k) \in b_0^{r,s}(Q)$ veya $b_p^{r,s}(Q)$ için bu gösterim tektir.

b) Biliyoruz ki $\{\rho^{(k)}(r, s)\} \subset b_0^{r,s}(Q)$ ve $F^{r,s}\rho = e \in c$ dir. Dolayısıyla,

$\{\rho, \rho^{(k)}(r, s)\} \subset b_c^{r,s}(Q)$ kapsaması sağlanır. Keyfi bir $x = (x_k) \in b_c^{r,s}(Q)$ dizisi ve $\lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \zeta$ için $y = x - \zeta d$ olacak şekilde bir $y = (y_k)$ dizisi seçelim. Buradan açıkça görülüyor ki $y = (y_k) \in b_0^{r,s}(Q)$ dir. Ayrıca (a) dan $y = (y_k)$ bir tek temsile sahiptir. Yani, $\forall x = (x_k) \in b_c^{r,s}(Q)$ aşağıdaki şekilde bir tek temsile sahiptir;

$$x = \zeta \rho + \sum_k [\xi_k - \zeta] \rho^{(k)}(r, s).$$

Böylece ispat tamamlanmıştır.

Sonuç 2.2.2. $b_0^{r,s}(Q), b_c^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzayları ayrılabilirlerdir ($1 \leq p < \infty$).

Teorem 2.2.3. $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerinin koleksiyonu $\mathcal{F}$ ile gösterilmek üzere $1 \leq p < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için aşağıdaki üç kümeyi tanımlayalım;

$$\eta_1^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \frac{1}{o} \sum_{k \in K} \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} a_n \right| < \infty \right\},$$

$$\eta_2^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \frac{1}{o} \sum_{n \in K} \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} a_n \right|^q < \infty \right\}$$

ve

$$\eta_3^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w: \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n \left| \frac{1}{o} \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} a_n \right| < \infty \right\}.$$

Buradan aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz;

- I. $\{b_0^{r,s}(Q)\}^\alpha = \{b_c^{r,s}(Q)\}^\alpha = \eta_1^{r,s}(Q)$
- II. $\{b_1^{r,s}(Q)\}^\alpha = \eta_3^{r,s}(Q)$
- III. $\{b_p^{r,s}(Q)\}^\alpha = \eta_2^{r,s}(Q) \quad (1 < p < \infty)$

İspat: Teoremin ispatını sadece (I) için yapacağız. (II) ve (III) benzer şekilde yapılabileceğinden ispatları verilmeyecektir. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $a = (a_n) \in w$ için $x = (x_n)$

$$x_n = \frac{1}{o} \sum_{k=0}^n \left[\sum_{j=k}^n \sum_{i=0}^{n-j} \sum_{v=0}^{n-j-i} \binom{j}{k} \mu_1^{n-j-i-v} \mu_2^v \mu_3^i (-s)^{j-k} (r+s)^k r^{-j} \right] y_k$$

şeklinde olmak üzere

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{o} \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} a_n \right] y_k = (G^{r,s} y)_n$$

elde edilir. Buradan, $x = (x_k) \in b_0^{r,s}(Q), b_c^{r,s}(Q)$ olduğunda $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart $y = (y_k) \in c_0, c$ olduğunda $G^{r,s} y \in \ell_1$ olmasıdır. Bu da bize $a = (a_n) \in \{b_0^{r,s}(Q)\}^\alpha = \{b_c^{r,s}(Q)\}^\alpha$ olması için gerek ve yeter şart $G^{r,s} \in (c_0: \ell_1) = (c: \ell_1)$ olduğunu gösterir. Elde ettiğimiz bu sonuç ve Lemma 1.1.8.8. (xii) birlikte düşünüldüğünde;

$$a = (a_n) \in \{b_0^{r,s}(Q)\}^\alpha \Leftrightarrow \sup_{K \in \mathcal{F}} \sum_n \left| \frac{1}{o} \sum_{k \in K} \sum_{i=k}^n \sum_{j=0}^{n-i} \sum_{v=0}^{n-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{n-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} a_n \right| < \infty$$

elde edilir. Sonuç olarak $\{b_0^{r,s}(Q)\}^\alpha = \{b_c^{r,s}(Q)\}^\alpha = \eta_1^{r,s}(Q)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2.2.4. $\eta_4^{r,s}(Q), \eta_5^{r,s}(Q), \eta_6^{r,s}(Q), \eta_7^{r,s}(Q)$ ve $\eta_8^{r,s}(Q)$ kümeleri

$$\eta_4^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n |z_{nk}^{r,s}|^q < \infty \right\} \quad (1 \leq q < \infty),$$

$$\eta_5^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} z_{nk}^{r,s} \text{ mevcut } \forall k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\eta_6^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k z_{nk}^{r,s} \text{ mevcut} \right\},$$

$$\eta_7^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \sup_{n,k \in \mathbb{N}} |z_{nk}^{r,s}| < \infty \right\}$$

ve

$$\eta_8^{r,s}(Q) = \left\{ a = (a_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k |z_{nk}^{r,s}| = \sum_k \left| \lim_{n \rightarrow \infty} z_{nk}^{r,s} \right| \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $Z^{r,s} = (z_{nk}^{r,s})$ aşağıda tanımlandığı gibidir;

$$z_{nk}^{r,s} = \begin{cases} \frac{1}{o} \sum_{i=k}^n \sum_{l=k}^i \sum_{j=0}^{i-l} \sum_{v=0}^{i-l-j} \binom{l}{k} \mu_1^{i-l-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{l-k} (r+s)^k r^{-l} a_i & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}.$$

Aşağıdakiler sağlanır;

- (i) $\{b_0^{r,s}(Q)\}^\beta = \eta_4^{r,s}(Q) \cap \eta_5^{r,s}(Q), \quad q = 1.$
- (ii) $\{b_c^{r,s}(Q)\}^\beta = \eta_4^{r,s}(Q) \cap \eta_5^{r,s}(Q) \cap \eta_6^{r,s}(Q), \quad q = 1.$
- (iii) $\{b_1^{r,s}(Q)\}^\beta = \eta_5^{r,s}(Q) \cap \eta_7^{r,s}(Q).$
- (iv) $\{b_p^{r,s}(Q)\}^\beta = \eta_4^{r,s}(Q) \cap \eta_5^{r,s}(Q), \quad 1 < p < \infty \quad \text{ve} \quad 1 < q < \infty.$
- (v) $\{b_\infty^{r,s}(Q)\}^\beta = \eta_5^{r,s}(Q) \cap \eta_8^{r,s}(Q).$
- (vi) $\{b_0^{r,s}(Q)\}^\gamma = \{b_c^{r,s}(Q)\}^\gamma = \{b_\infty^{r,s}(Q)\}^\gamma = \eta_4^{r,s}(Q), \quad q = 1.$
- (vii) $\{b_1^{r,s}(Q)\}^\gamma = \eta_7^{r,s}(Q).$
- (viii) $\{b_p^{r,s}(Q)\}^\gamma = \eta_4^{r,s}(Q), \quad 1 < p < \infty \quad \text{ve} \quad 1 < q < \infty.$

İspat: Diğerleri benzer şekilde yapılabileceğinden ispatı sadece (i) için vereceğiz.

- (i) Keyfi bir $a = (a_n)$ dizisi verilsin. $x = (x_k)$ Teorem 2.1.2 deki gibi tanımlı olmak üzere $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n a_k x_k &= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{o} \sum_{i=0}^k \sum_{l=i}^k \sum_{j=0}^{k-l} \sum_{v=0}^{k-l-j} \binom{l}{i} \mu_1^{k-l-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{l-i} (r+s)^i r^{-l} y_i \right] a_k \\
&= \sum_{k=0}^n \left[\frac{1}{o} \sum_{i=k}^n \sum_{l=k}^i \sum_{j=0}^{i-l} \sum_{v=0}^{i-l-j} \binom{l}{k} \mu_1^{i-l-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{l-k} (r+s)^k r^{-l} a_i \right] y_k \\
&= (Z^{r,s} y)_n
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $Z^{r,s} = (z_{nk}^{r,s})$ Teorem 2.2.4 te tanımladığımız şekildedir. Bu hesaplamalardan elde edilir ki, $x = (x_k) \in b_0^{r,s}(Q)$ olduğunda $ax = (a_n x_n) \in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y \in c_0$ olduğunda $Z^{r,s} y \in c$ olmasıdır. Bu da bize $a = (a_k) \in \{b_0^{r,s}(Q)\}^\beta$ ancak ve ancak $Z^{r,s} \in (c_0 : c)$ olduğunu gösterir. Elde ettiğimiz bu sonuçla Lemma 1.1.8.8. (vi) şartını birleştirirsek $a = (a_k) \in \{b_0^{r,s}(Q)\}^\beta$ olması için gerek ve yeter şart $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n |z_{nk}^{r,s}| < \infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} z_{nk}^{r,s}$ mevcut olduğunu görürüz. Yani, $\{b_0^{r,s}(Q)\}^\beta = \eta_4^{r,s}(Q) \cap \eta_5^{r,s}(Q)$ elde edilmiş olur. Bu da ispatı tamamlar.

2.3. Bazı Matris Sınıfları

Bu kısımda $b_c^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ ($1 \leq p < \infty$) dizi uzayları ile ilgili matris sınıflandırmalarından bazıları tanımlandı. Kullanım kolaylığı olması açısından bu bölüm boyunca $\forall n, k \in \mathbb{N}$ için $\rho_{nk}^{r,s}$ aşağıda tanımlandığı şekilde kullanılacaktır;

$$\rho_{nk}^{r,s} = \frac{1}{o} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{l=k}^i \sum_{j=0}^{i-l} \sum_{v=0}^{i-l-j} \binom{l}{k} \mu_1^{i-l-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{l-k} (r+s)^k r^{-l} a_{ni}.$$

Lemma 2.3.1. E bir üçgen matris, A bir sonsuz matris ve X ile Y keyfi iki dizi uzayı olsun. Bu durumda $A \in (X : Y_E) \Leftrightarrow EA \in (X : Y)$ dir (Başar ve Altay, 2003).

Teorem 2.3.2. $A = (a_{nk})$ kompleks terimli sonsuz bir matris olmak üzere $A \in (b_c^{r,s}(Q) : \ell_\infty)$ ancak ve ancak

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^n |\rho_{nk}^{r,s}| < \infty, \quad (12)$$

$$\rho_{nk}^{r,s} \text{ mevcut } \forall n, k \in \mathbb{N}, \quad (13)$$

$$\sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^m \left| \frac{1}{o} \sum_{i=k}^m \sum_{l=k}^i \sum_{j=0}^{i-l} \sum_{v=0}^{i-l-j} \binom{l}{k} \mu_1^{i-l-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{l-k} (r+s)^k r^{-l} a_{ni} \right| < \infty \quad (\forall m \in \mathbb{N}) \quad (14)$$

ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{o} \sum_{i=k}^m \sum_{j=k}^i \sum_{l=0}^{i-j} \sum_{v=0}^{i-j-l} \binom{j}{k} \mu_1^{i-j-l-v} \mu_2^v \mu_3^l (-s)^{j-k} (r+s)^k r^{-j} a_{ni} \text{ mevcut } (\forall m \in \mathbb{N}). \quad (15)$$

İspat: Kabul edelim ki $A \in (b_c^{r,s}(Q): \ell_\infty)$ olsun. Buradan $\forall x = (x_k) \in b_c^{r,s}(Q)$ için Ax in mevcut ve ℓ_∞ da olduğu açıktır. Bu da bizi $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_c^{r,s}(Q)\}^\beta$ olduğu sonucuna ulaştırır. Bu sonuç ile Teorem 2.2.4 (ii) birlikte düşünülürse (13), (14) ve (15) sağlanır. Eğer,

$$x = \frac{1}{o} \left[\frac{\mu_1^2 - \mu_1^{n+3}}{(1-\mu_1)(\mu_1-\mu_2)(\mu_1-\mu_3)} - \frac{\mu_2^2 - \mu_2^{n+3}}{(1-\mu_2)(\mu_1-\mu_2)(\mu_2-\mu_3)} + \frac{\mu_3^2 - \mu_3^{n+3}}{(1-\mu_3)(\mu_1-\mu_3)(\mu_2-\mu_3)} \right]$$

olmak üzere $x \in b_c^{r,s}(Q)$ ve $\forall x \in b_c^{r,s}(Q)$ için $Ax \in \ell_\infty$ olduğu gerçeğini göz önüne alırsak (12) nin sağlandığını söyleyebiliriz.

Tersine kabul edelim ki (12)-(15) sağlansın. $x = (x_k) \in b_c^{r,s}(Q)$ keyfi bir dizi olmak üzere $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^m \left[\frac{1}{o} \sum_{l=0}^k \sum_{i=l}^k \sum_{j=0}^{k-i} \sum_{v=0}^{k-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{k-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-l} (r+s)^l r^{-i} y_l \right] a_{nk} \\ &= \frac{1}{o} \sum_{k=0}^m \sum_{l=k}^m \left[\sum_{i=k}^l \sum_{j=0}^{l-i} \sum_{v=0}^{l-i-j} \binom{i}{k} \mu_1^{l-i-j-v} \mu_2^v \mu_3^j (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} \right] a_{nl} y_k \end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınsın. Eğer burada $m \rightarrow \infty$ için limit alırsak kabulümüzle birlikte $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \rho_{nk}^{r,s} y_k \quad (16)$$

elde edilir. Ayrıca (16) nın supremum normu alınarak

$$\|Ax\|_\infty \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\rho_{nk}^{r,s}| |y_k| \leq \|y\|_\infty \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\rho_{nk}^{r,s}| < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $Ax \in \ell_\infty$ dur. Yani $A \in (b_c^{r,s}(Q): \ell_\infty)$ elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2.3.3. $A \in (b_c^{r,s}(Q): c)$ ancak ve ancak (12)-(15) ve aşağıdakiler sağlanır;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k \rho_{nk}^{r,s} = \lambda \quad (17)$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_{nk}^{r,s} = \lambda_k \quad (18)$$

İspat: Kabul edelim ki $A \in (b_c^{r,s}(Q): c)$ olsun. Biliyoruz ki $c \subset \ell_\infty$ kapsaması sağlanır. Bu kapsama ve Teorem 2.3.2. birlikte düşünüldüğünde (12)-(15) şartlarının sağlandığı görülür. Ayrıca kabulümüzden dolayı açıkça Ax mevcuttur ve $\forall x = (x_k) \in b_c^{r,s}(Q)$ için c dedir. Bunlarla beraber eğer

$$x = \frac{1}{o} \left[\frac{\mu_1^2 - \mu_1^{n+3}}{(1 - \mu_1)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_3)} - \frac{\mu_2^2 - \mu_2^{n+3}}{(1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)(\mu_2 - \mu_3)} + \frac{\mu_3^2 - \mu_3^{n+3}}{(1 - \mu_3)(\mu_1 - \mu_3)(\mu_2 - \mu_3)} \right]$$

ve $x = \rho^{(k)}(r, s)$ olacak şekilde iki dizi seçersek (17) ve (18) eşitliklerinin sağlandığını görürüz. Burada $x = \rho^{(k)}(r, s)$ dizisi Teorem 2.2.1. de tanımlandığı gibi seçilmiştir.

Aksine, verilen bir $x = (x_k) \in b_c^{r,s}(Q)$ için kabul edelim ki (12)-(15), (17) ve (18) şartları sağlansın. $\forall n \in \mathbb{N}$ için Teorem 2.2.4. (ii) göz önüne alınarak $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_c^{r,s}(Q)\}^\beta$ olduğunu söyleyebiliriz. Bu bize gösterir ki Ax mevcuttur. (12) ve (18) den $\forall m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^m |\lambda_k| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\rho_{nk}^{r,s}| < \infty$$

sonucuna ulaşırız. Bu da bize $(\lambda_k) \in \ell_1$ olduğunu gösterir. Yani

$$\sum_k \lambda_k y_k$$

serileri mutlak yakınsaktır. Şimdi (16) da a_{nk} yerine $a_{nk} - \lambda_k$ alırsak $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k (a_{nk} - \lambda_k) x_k = \sum_k \frac{1}{o} \sum_{i=k}^{\infty} \sum_{j=i}^k \sum_{l=0}^{k-j} \sum_{v=0}^{k-j-i} \binom{j}{i} \mu_1^{k-j-l-v} \mu_2^v \mu_3^l (-s)^{j-i} (r+s)^i r^{-j} (a_{ni} - \lambda_i) y_k \quad (19)$$

elde ederiz. Eğer (19) ve Lemma 1.1.8.8. (xvi) birleştirilirse,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_k (a_{nk} - \lambda_k) x_k = 0 \quad (20)$$

elde ederiz. Son olarak eğer (20) ve $(\lambda_k y_k) \in \ell_1$ olmasını birleştirirsek $Ax \in c$ sonucunu elde ederiz. Bu da bize $A \in (b_c^{r,s}(Q): c)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmıştır.

Teorem 2.3.4. Verilen keyfi bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için aşağıdakiler sağlanır;

(i) $A = (a_{nk}) \in (b_1^{r,s}(Q): \ell_\infty)$ ancak ve ancak

$$\sup_{n, k \in \mathbb{N}} |\rho_{nk}^{r,s}| < \infty. \quad (21)$$

(ii) $1 < p < \infty$ olmak üzere $A = (a_{nk}) \in (b_p^{r,s}(Q): \ell_\infty)$ ancak ve ancak

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_k |\rho_{nk}^{r,s}|^q < \infty \quad (22)$$

ve

$$\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \eta_5^{r,s}(Q) . \quad (23)$$

İspat: (ii) $p \in (1, \infty)$ olmak üzere keyfi $x = (x_k) \in b_p^{r,s}(Q)$ için (22) ve (23) şartlarının sağlandığını kabul edelim. Dolayısıyla, $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_p^{r,s}(Q)\}^\beta$ elde ederiz. Buradan da x in A -dönüşümünün mevcut olduğu sonucuna ulaşmış oluruz. $x = (x_k)$ Teorem 2.1.2. deki gibi alınırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m a_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^m \left[\frac{1}{o} \sum_{j=0}^k \sum_{i=j}^k \sum_{l=0}^{k-i} \sum_{v=0}^{k-i-l} \binom{i}{j} \mu_1^{k-i-l-v} \mu_2^v \mu_3^l (-s)^{i-j} (r+s)^j r^{-i} y_j \right] a_{nk} \\ &= \frac{1}{o} \sum_{k=0}^m \sum_{j=k}^m \left[\sum_{i=k}^j \sum_{l=0}^{j-i} \sum_{v=0}^{j-i-l} \binom{i}{k} \mu_1^{j-i-l-v} \mu_2^v \mu_3^l (-s)^{i-k} (r+s)^k r^{-i} \right] a_{nj} y_k \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $m \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \rho_{nk}^{r,s} y_k \quad (24)$$

elde edilir. Daha sonra (24) de ℓ_∞ -normu ve Hölder eşitsizliğini birlikte uygularsak;

$$\|Ax\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \sum_k \rho_{nk}^{r,s} y_k \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_k |\rho_{nk}^{r,s}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_k |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

elde ederiz. Bunun bir sonucu olarak, $Ax \in \ell_\infty$ elde edilir. Yani $A = (a_{nk}) \in (b_p^{r,s}(Q): \ell_\infty)$ olur.

Tersine kabul edelim ki $A = (a_{nk}) \in (b_p^{r,s}(Q): \ell_\infty)$ olsun. Bu bize $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_p^{r,s}(Q)\}^\beta$ sonucunu verir. Buradan doğrudan (23) ün gerektiği ve $\{\rho_{nk}^{r,s}\}_{k,n \in \mathbb{N}}$ nin mevcut olduğu görülür. $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_p^{r,s}(Q)\}^\beta$ olmasından dolayı (24) sağlanır ve $a_n = (a_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ dizileri, $b_p^{r,s}(Q)$ de f_n sürekli lineer fonksiyonellerini $\forall n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki gibi tanımlar;

$$f_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k .$$

Ayrıca, Teorem 2.1.2. den biliyoruz ki $b_p^{r,s}(Q)$ ve ℓ_p izometrik olarak izomorfiktir. Bu bilgi ile (24) eşitliği birleştirilirse

$$\|f_n\| = \left\| (\rho_{nk}^{r,s})_{k \in \mathbb{N}} \right\|_q$$

elde edilir. Bu da bize f_n fonksiyonellerinin noktasal sınırlı olduğunu gösterir. Ayrıca, Banach-Steinhaus teoremi ile bu fonksiyonellerin düzgün sınırlı olduğunu yani sabit bir $M > 0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(\sum_k |\rho_{nk}^{r,s}|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|f_n\| \leq M$$

verir. Bu da bize (22) şartının sağlandığını gösterir. (i) de benzer yolla kolayca ispatlanabilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Teorem 2.3.5. $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. $A = (a_{nk}) \in (b_1^{r,s}(Q): \ell_p)$ olması için gerek ve yeter şart $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_n |\rho_{nk}^{r,s}|^p < \infty \tag{25}$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki verilen keyfi bir $x = (x_k) \in b_1^{r,s}(Q)$ dizisi için (25) şartı sağlansın. Buradan açıkça görülür ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $y = (y_k) \in \ell_1$ ve $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_1^{r,s}(Q)\}^\beta$ dir. Yani, x in A -dönüşümü mevcuttur. Bunun bir sonucu olarak $\sum_k \rho_{nk}^{r,s} y_k$ serileri $\forall n \in \mathbb{N}$ için mutlak yakınsak ve $y = (y_k) \in \ell_1$ dir. Daha sonra (24) de Minkowski eşitsizliğini uygulayarak

$$\left(\sum_n |(Ax)_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_k |y_k| \left(\sum_n |\rho_{nk}^{r,s}|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Yani $Ax \in \ell_p$ dir. Dolayısıyla $A = (a_{nk}) \in (b_1^{r,s}(Q): \ell_p)$ olur.

Tersine, kabul edelim ki $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $A = (a_{nk}) \in (b_1^{r,s}(Q): \ell_p)$ olsun. Yani $\forall x = (x_k) \in b_1^{r,s}(Q)$ için $Ax \in \ell_p$ dir. Dolayısıyla $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k \in \mathbb{N}} \in \{b_1^{r,s}(Q)\}^\beta$ dir. Bu da bize (24) eşitliğinin sağlandığını gösterir. Bu sonuçlar bize $\rho^{r,s} = (\rho_{nk}^{r,s}) \in (\ell_1: \ell_p)$ olduğunu gösterir. Bununla birlikte Lemma 1.1.8.8. (xv) göz önüne alınırsa (25) elde edilmiş olur. Böylece ispat tamamlanmıştır.

3. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Daha önce birçok yazar tarafından matris dönüşümleri kullanılarak yeni dizi uzayları tanımlanmıştır. İlk olarak Altay, Başar ve Mursaleen Euler matrisinin etki alanını kullanarak e_0^r, e_c^r, e_∞^r ve e_p^r dizi uzaylarını inşa etmişlerdir. Daha sonra Altay ve Polat fark matrisi ile Euler matrisini birleştirerek $e_0^r(\Delta), e_c^r(\Delta)$ ve $e_\infty^r(\Delta)$ dizi uzaylarını tanımlamışlardır. Bundan sonra Bişgin $b_0^{r,s}, b_c^{r,s}, b_\infty^{r,s}$ ve $b_p^{r,s}$ binom dizi uzaylarını tanımlamıştır. Eğer burada $r + s = 1$ alınırsa r . mertebeden Euler matrisi E^r elde edilir. Dolayısıyla Binom matrisi Euler matrisinden daha geneldir. Böylece Bişgin; Altay, Başar ve Mursaleen 'in daha önceden yapmış olduğu çalışmayı genelleştirmiştir. Daha sonra Meng ve Song binom ve fark matrisinin kompozisyonunu kullanarak $b_0^{r,s}(\Delta), b_c^{r,s}(\Delta)$ ve $b_\infty^{r,s}(\Delta)$ ($m = 1$ değeri için) tanımlamış ve Bişgin'in çalışmasını geliştirmiştir. Daha sonra Sönmez $b_0^{r,s}(G), b_c^{r,s}(G)$ ve $b_\infty^{r,s}(G)$ dizi uzaylarını ve Bişgin $b_p^{r,s}(G)$ uzayını tanımlayarak Meng ve Song 'un çalışmasını genellemişlerdir. Son olarak Binom ve üçlü band matrislerini birlikte işleyerek Bişgin $b_0^{r,s}(D), b_c^{r,s}(D), b_\infty^{r,s}(D)$ dizi uzaylarını ve Sönmez $b_p^{r,s}(D)$ dizi uzayını tanımlayarak daha önceden yapılmış çalışmaları genellemişlerdir. Biz de bu çalışmamızda Bişgin tarafından tanımlanan dörtlü band matrisi Q ve Binom matrisinin kompozisyonundan $b_0^{r,s}(Q), b_c^{r,s}(Q), b_\infty^{r,s}(Q)$ ve $b_p^{r,s}(Q)$ dizi uzaylarını türeterek yukarıda bahsedilen dizi uzaylarını genelledik ve tanımladığımız yeni dizi uzaylarının başlangıçta bahsedilen problemlerine çözüm aradık.

4. ÖNERİLER

Bu çalışmada fark matrisinin mertebesi artırılarak etki alanları daha genel dizi uzayları elde edilebileceğini gösterdik. O halde beşli band matrisi $T = T(h, r, s, u, v) = (t_{nk}(h, r, s, u, v))$;

$$t_{nk}(h, r, s, u, v) = \begin{cases} h & , & k = n \\ r & , & k = n - 1 \\ s & , & k = n - 2 \\ u & , & k = n - 3 \\ v & , & k = n - 4 \\ 0 & , & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

olmak üzere binom ve beşli band matrislerinin kompozisyonundan elde edilen dizi uzayları;

$$b_0^{r,s}(T) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (hx_k + rx_{k-1} + sx_{k-2} + ux_{k-3} + vx_{k-4}) = 0 \right\},$$

$$b_c^{r,s}(T) = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (hx_k + rx_{k-1} + sx_{k-2} + ux_{k-3} + vx_{k-4}) \text{ mevcut} \right\},$$

$$b_\infty^{r,s}(T) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (hx_k + rx_{k-1} + sx_{k-2} + ux_{k-3} + vx_{k-4}) \right| < \infty \right\}$$

ve

$$b_p^{r,s}(T) = \left\{ x = (x_k) \in w : \sum_n \left| \frac{1}{(s+r)^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} s^{n-k} r^k (hx_k + rx_{k-1} + sx_{k-2} + ux_{k-3} + vx_{k-4}) \right|^p < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır ve bu dizi uzaylarının tezimizde tanımladığımız dizi uzaylarından daha genel yapıda olduğu incelenebilir ve birinci bölümde bahsedilen dizi uzayları teorisindeki problemlere çözüm aranabilir.

KAYNAKLAR

- Altay, B. and Başar, F. (2005). On some Euler sequence spaces of non-absolute type. *Ukrainian Mathematical Journal*, 57, 1-17. <https://doi.org/10.1007/s11253-005-0168-9>
- Altay, B. Başar, F. and Mursaleen, M. (2006). On the Euler sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ I. *Information Sciences*, 176(10), 1450-1462. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2005.05.008>
- Altay, B. And Polat, H. (2006). On some new Euler difference sequence spaces. *Southeast Asian Bulletin Of Mathematics*, 30(2), 209-220.
- Başar, F. and Altay, B. (2003). On the space of sequences of p -bounded variation and related matrix mappings. *Ukrainian Mathematical Journal*, 55, 136-147. <https://doi.org/10.1023/A:1025080820961>
- Bişgin, M.C. (2017a). A note on the sequence space $b_p^{r,s}(G)$. *Cumhuriyet Science Journal*, 38(4), 11-25. <https://doi.org/10.17776/csj.363211>
- Bişgin, M.C. (2014). Bazı yeni dizi uzayları ve topolojik özellikleri. Doktora Tezi. Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Kayseri, Türkiye, 66 s.
- Bişgin, M.C. (2017b). Binom ve üçlü band matrislerinin kompozisyonu ile türetilen bazı yeni dizi uzayları. *12. Ankara Matematik Günleri*, Ankara, 25-26 Mayıs.
- Bişgin, M.C. Four new sequence spaces obtained from the domain of quadruple band matrix operator. *İncelemede*.
- Bişgin, M.C. (2019). Matrix transformations and compact operators on the binomial sequence spaces. *Korean Journal Of Mathematics*, 27(4), 949-968. <https://doi.org/10.11568/kjm.2019.27.4.949>
- Bişgin, M.C. (2018). The binomial almost convergent and null sequence spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara-Series A1 Mathematics and Statistics*, 67(1), 211-224. https://doi.org/10.1501/Commua1_00000000843
- Bişgin, M.C. (2016a). The binomial sequence spaces of nonabsolute type. *Journal of Inequalities And Applications*, 2016, 309. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1256-0>
- Bişgin, M.C. (2016b). The binomial sequence spaces which include the spaces ℓ_p and ℓ_∞ and geometric properties. *Journal Of Inequalities And Applications*, 304. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1252-4>
- Choudhary, B. and Nanda, S. (1989). Functional analysis with applications. New Delhi: Wiley.

- Meng, J. and Song, M. (2017). Binomial difference sequence spaces of order m . *Advances in Difference Equations*. 241. <https://doi.org/10.1186/s13662-017-1291-2>
- Sönmez, A. (2019). Some new sequence spaces derived by the composition of binomial matrix and double band matrix. *Journal of Applied Analysis and Computation*. 9(1), 231-244.
- Sönmez, A. (2020). Some notes on the new sequence space $b_p^{r,s}(D)$. *Gazi University Journal of Science*. 33(2), 476-490. <https://doi.org/10.35378/gujs.522691>
- Stieglitz, M. and Tietz, H. (1977). Matrix transformationen von folgenräumen eine ergebnisübersicht. *Mathematische Zeitschrift*. 154, 1-16. <https://doi.org/10.1007/BF01215107>
- Wilansky, A. (1984). Summability through functional analysis. *North-Holland Mathematics Studies*, 85.

ÖZGEÇMİŞ

Kübra TOPAL, 26 Haziran 1991 yılında Bayburt'ta dünyaya geldi. İlk ve orta öğretimini Ankara'da tamamladıktan sonra 2009 yılında Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 2015 yılında Gazi Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimini tamamlayarak 02/03/2016 yılında Ankara Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi'ne ilk ataması yapıldı. 23/08/2016 tarihinde Ardahan'a atanarak Kazım Karabekir Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, Şehit Uz. Çvş. İbrahim Erdoğan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi ve Ardahan Rekabet Kurumu Fen Lisesi'nde matematik öğretmenliğine devam etti. 31/08/2018 yılında Rize Merkez Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi'ne atanmış ve görevine halen Rize'de devam etmektedir. 2019 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başladığı yüksek lisans eğitimine halen devam etmektedir.