

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR AYRIK YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE
1-BOYUTLU BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS
DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif HAMARAT

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

AĞUSTOS 2023

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR AYRIK YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE
1-BOYUTLU BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS
DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Elif HAMARAT
(36203614011)**

Matematik Ana Bilim Dalı

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY
Eş Danışman: Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU**

AĞUSTOS 2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Öncelikle danışmanlığımı üstlenen ve tez çalışmamın konusunun belirlenmesinden tamamlanmasına kadar olan süreçte hiçbir şekilde benden desteklerini esirgemeyen kıymetli hocam Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a ve eş danışmanım Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU hocama danışmanlıkları, bu süreçteki destekleri ve tezimin şekillenmesi için yaptıkları yapıcı eleştirileri için teşekkür ederim. Tezimin her aşamasında benden desteğini esirgemeyen özellikle Matlab programlarının yazımında büyük katkısından dolayı Prof. Dr. Yusuf UÇAR hocama ve tezin yazılımında her zaman yakınımızda olup yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. M. Kemal Özdemir hocama da teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca çalışmalarım sırasında büyük desteği bulunan başta Bölüm Başkanımız Prof. Dr. Alaattin Esen'e ve tüm bölüm hocalarımla birlikte kıymetli aileme de en içten teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Bir Ayrık Yaklaşım Yöntemi ile 1-Boyutlu Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Denkleminin Çözümü” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Elif HAMARAT



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. MODEL PROBLEM İÇİN BİR SONLU FARK YÖNTEMİ.....	6
2.1 Sonlu Farklar Yöntemine Kısa Bir Bakış	6
2.2 Model Problemin Crank-Nicolson Tipi Sonlu Fark Şeması.....	7
3. TEST PROBLEMLER.....	12
3.1 Test Problem 1	12
3.2 Test Problem 2	12
3.3 Test Problem 3	13
4. NÜMERİK HESAPLAMALAR VE SONUÇLAR.....	14
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	27
KAYNAKLAR.....	28
ÖZGEÇMİŞ	31

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve farklı M değerleri için $T = 5$ de bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının ve CPU zamanlarının [30] da verilenlerle kıyaslanması.	15
Çizelge 4.2 : Problem 1'in $M = 160$ ve farklı k değerleri için $T = 5$ de bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının ve CPU zamanlarının [30] da verilenlerle kıyaslanması.	16
Çizelge 4.3 : Problem 1'in farklı $M = N$ ve T değerleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, doğruluk mertebeleri ve CPU zamanlarının [30] da verilenlerle kıyaslanması.....	17
Çizelge 4.4 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve farklı M 'ler için farklı T 'lerde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [8, 27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.	17
Çizelge 4.5 : Problem 1'in $k = 0.001$ ve $M = 400$ için farklı T 'lerde hesaplanan mutlak hatalarının [27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.	19
Çizelge 4.6 : Problem 1'in çeşitli $M = N$ değerleri için $T = 10$ da hesaplanan L_∞ hata normlarının [6, 24, 30] da verilenlerle kıyaslanması.	19
Çizelge 4.7 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve çeşitli M 'ler için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [6, 8, 21, 30] da verilenlerle kıyaslanması.....	19
Çizelge 4.8 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve $M = 120$ için çeşitli T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [8, 27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.	20
Çizelge 4.9 : Problem 1'in $k = 0.001$ ve $M = 400$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında u 'nun hesaplanan değerleriyle birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının [27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.....	20
Çizelge 4.10 : Problem 2'nin $k = 0.01$ ve $M = 100$ için çeşitli T 'lerde bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [27,30] da verilenlerle kıyaslanması.	22
Çizelge 4.11 : Problem 2'nin $k = 0.01$ ve $M = 300$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [24,30] da verilenlerle kıyaslanması.	23
Çizelge 4.12 : Problem 2'nin $k = 0.1$ ve $M = 200$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [15,30] da verilenlerle kıyaslanması.	23
Çizelge 4.13 : Problem 2'nin $k = 0.1$ ve $M = 200$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [13,30] da verilenlerle kıyaslanması.	23
Çizelge 4.14 : Problem 3'ün $k = 0.1$ ve $M = 500$ için farklı T zamanlarında hesaplanan L_∞ hata normunun [5, 30] da verilenlerle kıyaslanması.....	25
Çizelge 4.15 : Problem 3'ün farklı $h = k$ değerleri için $T = 10$ da hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte doğruluk mertebelerinin [30] da verilenlerle kıyaslanması.....	25

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 4.1 : Problem 1'in $M = 40$ ve $k = 0.01$ için farklı T zamanlarındaki (a) analitik (*) ve nümerik (-) çözümlerinin 2-boyutlu ve (b) nümerik çözümlerinin 3-boyutlu grafikleri.	21
Şekil 4.2 : Problem 1'in $M = 40$ ve $k = 0.01$ için farklı T zamanlarındaki (a) genel hata ve (b) mutlak hata grafikleri.	21
Şekil 4.3 : Problem 2'nin $M = 100$ ve $k = 0.01$ için u 'nun (a) farklı T zamanlarında 2-boyutlu ve (b) $T = 10$ zamanında 3-boyutlu grafikleri.	24
Şekil 4.4 : Problem 3'ün $M = 500$ ve $k = 0.1$ için $T = 10$ zamanında (a) analitik (*) ve nümerik (-) çözümlerinin 2-boyutlu ve (b) nümerik çözümlerinin 3-boyutlu grafikleri.	26
Şekil 4.5 : Problem 3'ün $M = 500$ ve $k = 0.1$ için $T = 10$ zamanında (a) genel hata ve (b) mutlak hata grafikleri.	26

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

h	: Konum Adım Uzunluğu
k	: Zaman Adım Uzunluğu
$u(x_j, t_n)$	: Tam Çözüm
u_j^n	: Yaklaşık Çözüm
L_2	: Ortalama Hata
L_∞	: Maksimum Hata
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
BBM	: Benjamin-Bona-Mahony
RLW	: Düzenli Uzun Dalga (Regularized Long Wave)
CPU	: Merkezi İşlem Birimi (Central Processing Unite)
O	: Mertebe (Order)



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR AYRIK YAKLAŞIM YÖNTEMİ İLE 1-BOYUTLU BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

ELİF HAMARAT

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

31+viii sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Bu tezin konusu, küçük genlikli uzun dalgaların nonlinear bir dağılma ortamında yayılımını açıklayan 1-boyutlu lineer olmayan Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBM-Burgers) denkleminin verilen başlangıç ve sınır şartlarına bağlı yaklaşık nümerik çözümlerinin hesaplanması hakkında olduğundan Bölüm 1’de kısaca denklemin öneminden ve literatürde mevcut olan çalışmalardan bahsedildi.

Bu çalışmanın esasını oluşturan Bölüm 2’de model problem olarak göz önüne alınan 1-boyutlu lineer olmayan genel biçimde verilen BBM-Burgers denkleminin uygun başlangıç ve sınır şartlarına bağlı yaklaşık sayısal çözümleri ile birlikte hesaplanan bazı sonuçları vermek için bir sayısal şema sunuldu. Bunun için BBM-Burgers denklemi, önce zamana göre türevler için birinci mertebeden ileri sonlu fark yaklaşımı ve tüm konumsal türevler için standart ikinci mertebeden merkezi fark yaklaşımı kullanılarak Crank-Nicolson tipi yöntemle tamamen ayrıklaştırıldı ve böylece lineer olmayan bir kapalı şema elde edildi. Sonra, kapalı şemanın bir direkt yöntemle çözümü amaçlandığından, şemada yer alan doğrusal olmayan terim yerine Rubin-Graves tipi bir lineerleştirme yaklaşımı kullanılarak başlangıç ve sınır değer problemi tri-diagonal matrislerden oluşan ve bir direkt çözüm yöntemi ile doğrudan çözülebilen bir lineer cebirsel denklem sistemine indirildi.

Bölüm 3’te bir önceki bölümde sunulan şemanın doğruluğunu ve etkinliğini kontrol etmek için, ikisi analitik çözüme sahip olan ve biri analitik çözüme sahip olmayan üç deneysel test problem verildi.

Bölüm 4’te Bölüm 2’de sunulan şemadan hesaplanan sonuçlar (çözümün noktasal değerleri, L_2 ve L_∞ hata normları, şemanın doğruluk mertebeleri ve CPU zamanları) problemde görülen aynı parametre değerleri için literatürde mevcut çalışmaların sonuçlarıyla karşılaştırıldı. Elde edilen yaklaşık sayısal sonuçlardan konum ve zaman adım uzunlukları küçüldükçe sunulan şemanın analitik çözümlere yaklaşan yeterince iyi sonuçlar verdiği ve diğer araştırmacıların kabul edilebilir bir uyum içinde olduğu görüldü. Ayrıca kullanımı kolay olan şemanın von-Neumann tekniği ile kararlılığı incelendi ve şemanın şartsız kararlı olduğu gösterildi.

Son bölüm olan Bölüm 5’te ise kısa bir sonuç ile birlikte ileriki çalışmalardan bahsedildi.

Anahtar Kelimeler: BBM-Burgers Denklemi, Crank-Nicolson Yöntemi, Rubin-Graves Yaklaşımı, von-Neumann Kararlılık Testi

ABSTRACT

Master Thesis

SOLUTION OF 1-DIMENSIONAL BENJAMIN-BONA-MAHONY-BURGERS EQUATION WITH A DISCRETE APPROXIMATION METHOD

Elif HAMARAT

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

31+viii pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Since the subject of this thesis is the calculation of the approximate numerical solutions of the 1-dimensional non-linear Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (BBM-Burgers) equation, which explains the propagation of small amplitude long waves in a nonlinear dispersion medium, depending on the given initial and boundary conditions, in Chapter 1, the importance of the equation is briefly discussed and studies available in the literature are mentioned.

In Chapter 2 forming the basis of this study, a numerical scheme is presented to obtain some calculated results together with the approximate numerical solutions depending on the appropriate initial and boundary conditions of the BBM-Burgers equation, which is given in 1-dimensional non-linear general form, which is considered as a model problem. For this, the BBM-Burgers equation is first completely discretized using the Crank-Nicolson type method using the first order forward finite difference approach for time derivatives and the usual second order central difference approach for all spatial derivatives, and thus a nonlinear implicit scheme is obtained. Then, since the solution of the implicit scheme with a direct method is aimed, a Rubin-Graves type linearization approach is used instead of the nonlinear term in the scheme, and the initial and boundary value problem is reduced to a system of linear algebraic equations consisting of tri-diagonal matrices and which can be solved directly by a direct solution method.

In Chapter 3, three experimental test problems are given, two with exact solutions and one without an exact solution, to check the accuracy and effectiveness of the scheme presented in the previous section.

In Chapter 4 the results (point values of the solution, the error norms L_2 and L_∞ , the accuracy orders of the scheme, and *CPU* times) calculated from the scheme presented in Chapter 2 are compared with the results of the studies available in the literature for the same parameter values seen in the problem. From the approximate numerical results obtained, it is seen that as the spatial and temporal step lengths are decreased, the presented scheme gave good enough results approaching analytical solutions and is in acceptable agreement with those of other researchers. In addition, the stability of the easy-to-use scheme is examined with the von-Neumann technique and it is shown that the scheme is unconditionally stable.

In the last chapter, Chapter 5, a brief conclusion and further work are mentioned.

Keywords: BBM-Burgers Equation, Crank-Nicolson Method, Rubin-Graves Approximation, von-Neumann Stability Test

1. GİRİŞ

Doğada meydana gelen birçok fiziksel olay genellikle cebirsel, diferansiyel veya integral denklemlerle ifade edilir. Mühendislik bilimleri, fizik ve hesaplamalı matematikte çok önemli rol oynayan birçok fenomen genellikle lineer olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemler (KDD'ler) ile modellenir. Bu tür lineer olmayan KDD'lerden oluşan başlangıç ve sınır değer problemlerinin incelenmesi ve analitik çözümlerinin bulunması çoğu zaman zor ve zahmetlidir. Bilindiği kadarıyla lineer olmayan KDD'lerin hepsi için iyi çalışan belirli bir tek yöntem veya teknik mevcut değildir. Bundan ötürü bu tip denklemler genellikle ayrı ayrı ele alınır ve incelenir. Böyle denklemlerin çoğunlukla analitik çözümlerinden ziyade yaklaşık çözümleri tercih edilir. Bu nedenle, pek çok araştırmacı doğrusal olmayan KDD'lerin sayısal çözümlerini elde etmek için yaklaşık yöntem ve teknikler üzerinde yoğunlaşmıştır.

Bu tür denklemler arasında öne çıkanlardan biri

$$u_t - u_{xxt} + \beta u_x + \gamma uu_x = 0 \quad (1.0.1)$$

olarak tanımlanan lineer olmayan Benjamin-Bona-Mahony (BBM) denklemdir. Bu denklem bilindiği üzere ilk olarak Peregrine [1] ve ardından Benjamin vd. [2] tarafından bir kanaldaki su yüzeyindeki küçük genlikli uzun dalgaları simüle etmek için göz önüne alınmış ve incelenmiştir. Dalga bozulmasına yol açan mekanizmaları göz önünde bulundurmak için u_{xx} (dissipative) terimini içeren

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma uu_x = 0 \quad (1.0.2)$$

olarak modellenen literatürde RLW-Burgers (Regularized Long Wave-Burgers) olarak da bilinen BBM-Burgers denklemi göz önüne alınmıştır [2]. Bu denklem açıkça aynı zamanda

$$u_t - \alpha u_{xx} + \gamma uu_x = 0 \quad (1.0.3)$$

olarak verilen Burges tipi bir denklemin u_{xx} terimi eklenmiş halidir. Bundan dolayı bu denklem yani (1.0.2) denklemi BBM-Burgers denklemi olarak da adlandırılır.

Bu tez çalışmasında, küçük genlikli uzun dalgaların doğrusal olmayan bir dağılma (dispersive) ortamında yayılımını tanımlayan 1-boyutlu homojen ve lineer olmayan BBM-Burgers denklemi için aşağıdaki başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen

$$u_t - u_{xxt} - \alpha u_{xx} + \beta u_x + \gamma uu_x = G(x, t), \quad a \leq x \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.0.4)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.0.5)$$

$$u(a, t) = 0, \quad u(b, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.0.6)$$

problemi ele alındı [2]. Burada, u, u_{xxt}, u_{xx} ve uu_x sırasıyla dalgayı, dağılımı (dispersion), yayılımı (dissipation) ve konveksiyonu temsil eden terimler; α, β ve γ pozitif sabitler; $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bir sonlu aralık; $G(x, t)$ ve $f(x)$ ler ise nümerik hesaplamalar ve sonuçlar bölümünde verilecek olan tanımlı fonksiyonlardır.

(1.0.2) denkleminde görülen u_{xx} ve u_{xxt} terimleri arasında, (1.0.3) denklemi ile verilen Burgers denklemi yani

$$u_t - \alpha u_{xx} + \gamma uu_x = 0$$

denklemi u_{xx} terimini içerirken (1.0.1) ile verilen BBM denklemi yani

$$u_t - u_{xxt} + \beta u_x + \gamma uu_x = 0$$

denklemi u_{xxt} terimini içermektedir.

(1.0.2) denklemi ile verilen BBM-Burgers denklemi doğrusal olmamanın yanı sıra dağıtıcı ve yayıcı etkileri de içerdiğinden birçok araştırmacının son yıllarda oldukça ilgisini çekmiştir. BBM-Burgers denkleminin çözümü, küçük genlikli uzun dalgaların doğrusal olmayan dağılıma ortamlarında yayılmasının çeşitli özelliklerini anlamak için önemli bir rol oynar. Bu nedenle, denklemi çözmek için çeşitli sayısal yöntemler ve teknikler sunulmakta ve uygulanmaktadır. Genel olarak, bunların çoğu, sonlu farklar, sonlu elemanlar ve spektral eleman yöntemlerine dayanan problemin çözüm bölgesinin ayrıklaştırılması ile sonuçlanan şemalardır. Bu çalışmada tez boyunca uzamsal (x) ve zamansal (t) ağ uzunlukları sırasıyla h ve k ile gösterilecektir.

BBM-Burgers tipi denklemleri içeren başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümleriyle ilgili literatürde mevcut çalışmalar şunlardır: Zhao ve Xuan [3], tek boyutlu genelleştirilmiş BBM-Burgers denklemlerinin global düzgün çözümlerin varlığını ve yakınsaklığını araştırdılar. Al-Khaled vd. [4], genelleştirilmiş BBM-Burgers denkleminin yaklaşık dalga çözümlerini üretmek için Adomian ayrıştırma yarı analitik tekniğini kullandılar. Zhao vd. [5] çalışmalarında, BBM-Burgers denklemi için $O(h^2) + O(k^2)$ hata mertebesine sahip korunumlu bir sonlu fark şeması sundular ve denklemin bazı nümerik sonuçlarını verdiler. Omrani ve Ayadi [6], homojen olan ve homojen olmayan tek boyutlu BBM-Burgers denkleminin ayrık çözümlerini bulmak için Crank-Nicolson tipi sonlu farklara dayalı yakınsama oranı $O(h^2) + O(k^2)$ hata mertebesine sahip korunumlu bir fark şeması öne sürdüler. Che vd. [7], tek boyutta verilen

genelleştirilmiş BBM-Burgers denklemi için ayrık çözümler elde etmek için $O(h^2) + O(k^2)$ mertebesine sahip üç-seviyeli bir doğrusal kapalı sonlu farklar şeması oluşturdular. Arora vd. [8], 1-boyutlu homojen olan ve homojen olmayan BBM-Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için zamansal integrasyon için Crank-Nicolson tipi sonlu farklar ve uzamsal integrasyon için dördüncü dereceden B-spline kollokasyon yöntemini kullanan ayrıklaştırılmış bir sayısal şema sundular. Dehghan vd. [9], lineer olmayan yüksek boyutlu genelleştirilmiş BBM-Burgers denklemini çözmek için birinci mertebeden zaman türevi için ileri sonlu fark yaklaşımı ve uzamsal türevler için multiquadric radyal tabanlı fonksiyon yöntemi kullanarak $O(k)$ zaman mertebeli koşulsuz olarak kararlı olan yakınsak bir ayrık sayısal şema tanıttılar. Piao ve Lee [10], 1-boyutlu homojen olmayan BBM-Burgers denkleminin kararlılığı (stabilization) için bir durum tahmini geri beslemesi kullanan bir geri besleme kontrolü ile indirgenmiş mertebeli bir modeli araştırdılar ve daha sonra ikinci dereceden B-spline temel fonksiyonlar yardımıyla Galerkin sonlu elemanlar yöntemi ile denklemin çözümünü buldular. Mohebbi ve Faraz [11], tek boyutlu homojen BBM-Burgers denkleminin soliteri (solitary) çözümleri için kararlı ve $O(h^4) + O(k^2)$ mertebeden yakınsak olan üç-seviyeli bir zaman adımına sahip sonlu farklar şeması oluşturdular. Dehghan vd. [12], 2-boyutlu homojen olmayan genelleştirilmiş BBM-Burgers denklemini çözmek için zaman ayrıklaştırması için sonlu fark yaklaşımı ve uzaysal ayrıklaştırma için interpolasyonlu elemansız Galerkin tekniği yardımıyla $O(k)$ mertebesinde kararlı ve yakınsak bir sayısal şema önerdiler. Zarebnia ve Parvaz [13], 1-boyutlu homojen BBM-Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü $O(h^2) + O(k^2)$ mertebesinde kübik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde ettiler. Shivanian ve Jafarabadi [14], 2-boyutlu doğrusal olmayan genelleştirilmiş BBM-Burgers denkleminin başlangıç ve Dirichlet tipi sınır değer problemini sayısal olarak çözmek için spektral ağsız radyal nokta interpolasyon tekniğini kullandılar. Zarebnia ve Parvaz [15], 1-boyutlu homojen BBM-Burgers denkleminin ayrık çözümlerini vermek için ikinci dereceden B-spline baz fonksiyonlu kollokasyon sonlu elemanlar yöntemini kullandılar ve $O(h^2) + O(k^2)$ doğruluk mertebeden bir nümerik şema sundular. Lu vd. [16], yüksek mertebeli dissipative terimli 1-boyutlu ve 2-boyutlu homojen olan ve homojen olmayan BBM-Burgers tipi denklemlerin fiziksel davranışlarını formüle etmek için uyarlanabilir (adaptive) hareketli ağ sonlu elemanlar yönteminde uzay yönünde ikinci mertebeden yakınsak olan bir sayısal şema önerdiler. Zarebnia ve Aghili [17], 1-boyutlu homojen BBM-Burgers denkleminin noktasal çözümleri için zaman integrasyon için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını ve uzay integrasyon için radyal baz fonksiyonlarını

kullanan ağırsız bir kollokasyon yöntemi sundular. Oruç [18], 1-boyutlu ve 2-boyutlu homojen olmayan BBM-Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için zaman ayırıklaştırması için standart sonlu farklar, konum ayırıklaştırması için Lucas polinomları ve türev matrisleri için Fibonacci polinomları kullanarak hibrit bir algoritma oluşturdu. Berikelashvili ve Mirianashvili [19], 1-boyutlu homojen BBM-Burgers denkleminin sayısal çözümü için üç-seviyeli sonlu farklar şemasının yakınsaması üzerinde çalıştılar. Singh ve Kumar [20], 1-boyutlu homojen olan ve homojen olmayan BBM-Burgers denklemini çözmek için Haar dalgacıklarına dayalı etkili bir sayısal yöntem geliştirdiler. Mittal vd. [21], homojen ve doğrusal olmayan BBM-Burgers denklemini çözmek için literatürde CGL olarak bilinen ve çözüm aralığının kenarlarına doğru daha yoğun olan noktalarda Chebyshev polinomları ile zaman-uzay sözde-spektral yöntemine dayalı bir sayısal şema geliştirdiler. Hajiketabi ve Abbasbandy [22], 1-boyutlu, 2-boyutlu ve 3-boyutlu homojen ve doğrusal olmayan genelleştirilmiş BBM-Burgers denklemini çözmek için radyal bazlı fonksiyonların ve grup koruma şemasının kombinasyonu fikrinden doğan birinci mertebeden Lie grup yöntemi olarak adlandırılan yeni bir sayısal yöntem önerdiler. Aslefallah vd. [23], zaman türevlerini θ -ağırlıklı sonlu farklarla ayırıklaştırdıktan ve orijinal problemi kısmi diferansiyel denklemler sistemine parçaladıktan sonra, 2-boyutlu homojen ve doğrusal olmayan BBM-Burgers denklemlerinin birkaç varyasyonunu simüle etmek için tekil (singular) sınır yöntemini kullandılar. Zarebnia ve Parvaz [24], homojen olan ve homojen olmayan 1-boyutlu BBM-Burgers denkleminin sayısal çözümlerini vermek için zaman ayırıklaştırması için sonlu fark yaklaşımı ve uzamsal ayırıklaştırma için beşinci dereceden B-spline baz fonksiyonlu kollokasyon yöntemi kullanarak $O(h^2) + O(k^2)$ doğruluk mertebesine sahip bir nümerik şema sundular. Hajishafieha ve Abbasbandy [25], sonlu fark yaklaşımlarıyla ayırıklaştıran 1-boyutlu ve 2-boyutlu homojen olmayan genelleştirilmiş BBM-Burgers denkleminin çözümüne yaklaşmak için bir parametrelili yeni bir polinom fonksiyonları sınıfı kullandılar. Dana vd. [26], homojen olan BBM-Burgers denkleminin sayısal çözümü için $O(h^6) + O(k^2)$ mertebesine sahip bir sonlu farklar şeması önerdiler. Arora vd. [27], hem homojen olan hem de homojen olmayan 1-boyutlu BBM-Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini üretmek için konum yönünde beşinci dereceden B-spline baz fonksiyonlu Hermite kollokasyon yöntemini ve zaman yönünde ağırlıklı sonlu farklar yaklaşımını kullanarak $O(h^4) + O(k^2)$ doğruluk mertebesinde hibrit bir sayısal teknik geliştirdiler. Son zamanlarda, Bayarassou [28], BBM-Burgers tipi denklemleri çözmek için iki sonlu farklar şeması geliştirdiler. Bunlardan biri iki zaman seviyeli ve diğeri üç zaman seviyeli doğrusal olmayan kapalı şemalardır öyle ki her biri $O(h^4 + k^2)$ yakınsama mertebesine sahiptir. Zhang ve Liu [29], BBM-Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini elde

etmek için $O(k^2 + h^4)$ yakınsama mertebesine sahip üç zamanlı bir lineerleştirilmiş kompakt sonlu farklar tekniği sundular. Kutluay vd. [30], BBM-Burgers denklemi için verilen başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık sayısal çözümlerini elde etmek için denklemdaki lineer olmayan terim yerine Richtmyer lineerleştirme yaklaşımı kullanarak Crank-Nicolson tipi bir nümerik şema verdiler. Bu çalışma, bu tezin hazırlanmasında kullanılan temel kaynaklardan biridir.

Bu tez çalışmasının temel amacı, (1.0.4)-(1.0.6) denklemleri ile tanımlanan başlangıç ve sınır değer problemini homojen olması ve homojen olmaması durumlarında sayısal olarak çözmek için sonlu farklara dayalı uygun ayırık yaklaşımlar kullanarak doğru, verimli ve düşük hesaplama maliyetli $O(k^2) + O(h^2)$ yakınsaklık mertebesinde bir sayısal şema vermektir. Sonlu fark yaklaşımları, lineer olmayan KDD'leri çözmek için en basit ve en eski sayısal tekniklerden biri olmasına rağmen bu tür denklemlerin ayırık yaklaşık çözümlerinin bulunmasında halen günümüzde yaygın olarak kullanılmaktadır.

Doğrusal olmayan KDD den oluşan birçok başlangıç ve sınır değer probleminin, analitik tekniklerle tam çözümünü bulmak bazı özel durumlar dışında oldukça zordur. Bu nedenle, bu tip problemlerin tam çözümleri yerine uygun bir nümerik analiz yöntemiyle yeterince yakın doğrulukta olacak şekilde yaklaşık çözümleri bulunur. Bazı durumlarda ister lineer olan isterse lineer olmayan problemler nümerik yöntemlerle daha hızlı çözülebilmekte ve problem parametrelerinde rahatlıkla değişiklik yapılabilir. Sonlu bir çözüm bölgesinde başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen herhangi bir diferansiyel denklemi çözmek için en yaygın kullanılan sayısal tekniklerden biri sonlu farklar yöntemidir. Bilindiği üzere analitik yöntemler problem sınırları içinde zaman ve konum değişkenlerinin her noktasında çözümü sağlar. Ancak, sonlu farklar yöntemi, yalnızca sınırlar içindeki ayırık noktalarda çözümü sağlar ve bu nedenle, tam çözümün yalnızca bir yaklaşımdır. Bununla birlikte, sorunu yalnızca sonlu sayıda noktada temsil etmek, çözüm prosedürünü tek bir karmaşık hesaplama yerine birkaç aritmetik hesaplama yapmaktan birine basitleştirir. Sonlu farklar yöntemi, problemi bilgisayarlar tarafından çözülebilecek bir algoritmaya dönüştürür. Genel olarak konuşulacak olunursa, sonlu farklar hesabında daha çok ayırık noktalar kullanılırsa, yaklaşık çözüm tam çözüme daha yakın olacaktır ancak bu durumda daha fazla aritmetik hesaplama gerekecektir. Sonlu fark çözümünü tamamlamak için sınır koşulları ve başlangıç koşulları ayırık noktalarda temsil edilmelidir.

2. MODEL PROBLEM İÇİN BİR SONLU FARK YÖNTEMİ

Bu tez çalışmasının ana kısmını oluşturan bu bölümde, model problem olarak (1.0.4)-(1.0.6) denklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık nümerik çözümlerini elde etmek için Rubin-Graves tipi bir lineerleştirme yaklaşımı ile sonlu farklar yöntemi üzerine temellenen Crank-Nicolson tipi bir sonlu fark şeması verildi. Şemanın çıkarılışına geçmeden önce sonlu farklar yönteminin temel prensiplerinden aşağıdaki kısımda kısaca bahsedildi.

2.1 Sonlu Farklar Yöntemine Kısa Bir Bakış

$x \in [a, b]$ ve $t \in [0, T]$ olmak üzere x ve t bağımsız değişkenlerine bağlı bir $u = u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonu için en genel biçimi

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0$$

olan bir KDD uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla verilsin. Böyle bir problemin sonlu farklar yöntemiyle bir nümerik şemasının oluşturulmasında izlenecek adımlar şöyle sıralanabilir:

—Önce problemin $(x, t) \in [a, b] \times [0, T]$ çözüm bölgesi düzgün kafeslere ayrılır. Şöyle ki bunun için x 'in tanımlı olduğu $[a, b]$ aralığı her birinin genişliği $h = x_{j+1} - x_j$ ($x_j = jh$, $j = 0(1)M$) olan $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ olacak biçimde genellikle eşit alt aralıklara bölünür. Benzer şekilde t 'nin tanımlı olduğu $[0, T]$ aralığı da her birinin genişliği $k = t_{n+1} - t_n$ ($t_n = nk$, $n = 0(1)N$) olan $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$ olacak biçimde genellikle eşit alt aralıklara bölünür. Sonlu fark çözümü için kafeslerin kesim noktaları olan (x_j, t_n) ($j = 0(1)M$, $n = 0(1)N$) düğüm (grid) noktaları kullanılır. Bu noktalarda u 'nun değeri u_j^n ile gösterilir. u_j^n , KDD'in $u(x_j, t_n)$ tam değerine bir yaklaşımı temsil eder.

—KDD ve sınır şartlarında görülen türevler yerine Taylor seri açılımından elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yani formülleri yazılır [31]. Böylece başlangıç ve sınır değer problemi cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanan bir nümerik şemaya indirgenir.

—Cebirsel denklem sisteminden elde edilecek olan yaklaşık çözümlerin tam çözüme yakınsaması için şemanın kararlılığı incelenir.

Bu bölümde (1.0.4)-(1.0.6) denklemleriyle verilen problemin yaklaşık nümerik çözümlerini elde etmek için Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılarak sonlu farklar yöntemi üzerine temellenmiş Crank-Nicolson sonlu fark şeması elde edildi. Bunun için önce problemin $[x, t] \in [a, b] \times [0, T]$ çözüm bölgesini oluşturan $[a, b]$ aralığı $h = x_{j+1} - x_j$ ($x_j = jh$, $j = 0(1)M$) olmak

üzere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{M-1} < x_M = b$ ve $[0, T]$ aralığı da $k = t_{n+1} - t_n$ ($t_n = nk$, $n = 0(1)N$) olmak üzere $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-2} < t_N = T$ olacak şekilde eşit genişlikli alt aralıklara bölünür. (x_j, t_n) ($j = 0(1)M$, $n = 0(1)N$) düğüm noktalarında KDD'nin $u(x_j, t_n)$ tam değerine bir yaklaşım u_j^n ile gösterilsin.

Yukardaki hazırlıklardan sonra (1.0.4)-(1.0.6) denklemleriyle verilen model problemin Crank-Nicolson tipi sonlu fark şemasının çıkarılışına geçmeden önce (1.0.4) ile verilen BBM-Burgers denkleminde görülen zamana ve konuma göre türevler yerine Taylor serisinden kolayca türetilen aşağıdaki yaklaşımları verelim [31].

$$(u_t)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k) \quad (2.1.1)$$

$$(u_x)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.1.2)$$

$$(u_{xx})_j^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.1.3)$$

Burada h ve k sırasıyla konum ve zaman adım uzunlukları, $O(k)$ ve $O(h^2)$ hata terimleri olup $k \rightarrow 0$ ve $h \rightarrow 0$ iken $O(k) \rightarrow 0$ ve $O(h^2) \rightarrow 0$ dir.

2.2 Model Problemin Crank-Nicolson Tipi Sonlu Fark Şeması

Bu kısımda (1.0.4)-(1.0.6) denklemleriyle verilen başlangıç ve sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemine dayanan Crank-Nicolson tipi fark şeması verildi. Bunun için (1.0.4) denklemindeki zamana göre türev yerine (2.1.1) ile verilen ileri fark formülü ve konuma göre türevler yerine hatalar ihmal edilerek, Crank-Nicolson tipi fark yaklaşımları yazılırsa zamana göre ayrıklaştırılmış

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} - \frac{(u_{xx})_j^{n+1} - (u_{xx})_j^n}{k} - \frac{\alpha}{2} [(u_{xx})_j^{n+1} + (u_{xx})_j^n] + \frac{\beta}{2} [(u_x)_j^{n+1} + (u_x)_j^n] \\ + \frac{\gamma}{2} [(uu_x)_j^{n+1} + (uu_x)_j^n] = \frac{1}{2} (G_j^{n+1} + G_j^n) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

denklemini bulunur. Bu yarı ayrıklaştırılmış denklemde görülen u_x ve u_{xx} türevleri yerine hatalar ihmal edilerek (2.1.2) ve (2.1.3) ile verilen merkezi fark formülleri, $(uu_x)_j^{n+1}$ lineer olmayan terimi yerine de

$$(uu_x)_j^{n+1} = u_j^n (u_x)^{n+1} + (u_x)_j^n u_j^{n+1} - u_j^n (u_x)_j^n \quad (2.2.2)$$

veya

$$(uu_x)_j^{n+1} = u_j^n \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) + \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) u_j^{n+1} - u_j^n \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) \quad (2.2.3)$$

olarak verilen Rubin-Graves tipi lineerleştirme yaklaşımı [32] yazılırsa, gerekli işlemler ve düzenlemelerden sonra, $j = 1(1)M - 1$ ve $n = 0(1)N$ olmak üzere, konuma ve zamana göre

tamamen ayrıklaştırılmış

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} - \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) \right] u_j^{n+1} \\
& + \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} + \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} = \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right] u_{j-1}^n + \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2} \right] u_j^n \\
& + \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right] u_{j+1}^n + \frac{1}{2} (G_j^{n+1} + G_j^n)
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Crank-Nicolson sonlu fark şeması elde edilir.

(1.0.6) ile verilen $u(a, t) = 0$ ve $u(b, t) = 0$ sınır şartlarından elde edilen

$$u_0^n = u_0^{n+1} = 0,$$

$$u_M^n = u_M^{n+1} = 0$$

sınır değerleri (2.2.4)'de kullanılırsa (1.0.4)-(1.0.6) denklemleriyle verilen model problemin

Crank-Nicolson tipi sonlu fark şeması

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) \right] u_j^{n+1} + \left[-\frac{\lambda}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} + \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} \\
& = \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2} \right] u_j^n + \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right] u_{j+1}^n + \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} - \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} \\
& + \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right] u_{j-1}^n + \frac{1}{2} (G_j^{n+1} + G_j^n), \quad j = 1
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} - \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) \right] u_j^{n+1} \\
& + \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} + \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} = \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right] u_{j-1}^n + \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2} \right] u_j^n \\
& + \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right] u_{j+1}^n + \frac{1}{2} (G_j^{n+1} + G_j^n), \quad j = 2(1)M-2
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} - \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) \right] u_j^{n+1} \\
& = \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} \right] u_{j-1}^n + \left[\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2} \right] u_j^n + \left[-\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \right] u_{j+1}^n \\
& + \left[-\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} + \frac{\gamma u_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{2} (G_j^{n+1} + G_j^n), \quad j = M-1
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

olarak veya matris formunda

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{M-2,M-3} & a_{M-2,M-2} & a_{M-2,M-1} \\ & & & & a_{M-1,M-2} & a_{M-1,M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ \vdots \\ u_{M-2}^{n+1} \\ u_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \\
& = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & b_{M-2,M-3} & b_{M-2,M-2} & b_{M-2,M-1} \\ & & & & b_{M-1,M-2} & b_{M-1,M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1^n \\ d_2^n \\ \vdots \\ d_{M-2}^n \\ d_{M-1}^n \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

veya kısaca

$$\underline{A} \underline{u}^{(n+1)} = \underline{B} \underline{u}^{(n)} + \underline{d} \tag{2.2.9}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\underline{u}^{(n)} = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{M-2}^n \\ u_{M-1}^n \end{bmatrix} \text{ ve } \underline{d} = \begin{bmatrix} d_1^n \\ d_2^n \\ \vdots \\ d_{M-2}^n \\ d_{M-1}^n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} G_1^{n+1} + G_1^n \\ G_2^{n+1} + G_2^n \\ \vdots \\ G_{M-2}^{n+1} + G_{M-2}^n \\ G_{M-1}^{n+1} + G_{M-1}^n \end{bmatrix}$$

olup yukarıdaki matrislerin girişleri

$j = 1$ için

$$\begin{aligned} a_{jj} &= \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma u_{j+1}^n}{4h}, \\ a_{j,j+1} &= -\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} + \frac{\gamma u_j^n}{4h}, \\ b_{jj} &= \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2}, \\ b_{j,j+1} &= -\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \end{aligned}$$

$j = 2(1)M - 2$ için

$$\begin{aligned} a_{j,j-1} &= -\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} - \frac{\gamma u_j^n}{4h}, \\ a_{j,j} &= \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right), \\ a_{j,j+1} &= -\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h} + \frac{\gamma u_j^n}{4h}, \\ b_{j,j-1} &= -\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}, \\ b_{j,j} &= \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2}, \\ b_{j,j+1} &= -\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} \end{aligned}$$

$j = M - 1$ için

$$\begin{aligned} a_{j,j-1} &= -\frac{1}{kh^2} - \frac{\alpha}{2h^2} - \frac{\beta}{4h} - \frac{\gamma u_j^n}{4h}, \\ a_{jj} &= \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha}{h^2} + \frac{\gamma}{2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{2h} \right), \\ b_{j,j-1} &= -\frac{1}{kh^2} + \frac{\alpha}{2h^2} + \frac{\beta}{4h}, \\ b_{j,j} &= \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha}{h^2} \end{aligned}$$

dir.

Yukarıdaki (2.2.9) lineer cebirsel denklem sistemi direkt çözüm yöntemlerinden biri yardımıyla çözülerek bu tez çalışmasında göz önüne alınan (1.0.4)-(1.0.6) denklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık nümerik çözümleri elde edilir.

(2.2.5)-(2.2.7) fark denklemleriyle verilen Crank-Nicolson sonlu fark şemasının lokal kesme hatası, $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken $O(h^2 + k^2)$ olup şemanın çözümü L_2 ve L_∞ normlarında $O(h^2 + k^2)$ mertebesiyle (1.0.4)-(1.0.6) denklemleriyle verilen başlangıç-sınır değer probleminin çözümüne yakınsar [31].

Bir sonlu fark şemasının yakınsak olması için yani yaklaşık nümerik çözümlerin analitik çözüme yeterince yakın olması için gerek ve yeter şart şemanın tutarlı ve kararlı olmasıdır [31].

Tutarlılık: $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ iken kesme hatası terimleri sıfıra yaklaşıyorsa sonlu fark yaklaşımı tutarlıdır denir.

Kararlılık: Hesaplamanın bir zaman adımında yapılan hatalar ardışık olarak artan her bir zaman adımında hataların büyümesine neden olmuyorsa sonlu fark şeması kararlıdır denir. Diğer bir ifade ile kararlı bir şema hesaplamalar ilerledikçe hataların neredeyse değişmeden sabit kaldığı bir şemadır.

Sonlu farklar yöntemi çıkarılışında göz önünde bulundurulmuş sezgisel yaklaşımı nedeniyle tutarlıdır. Bundan ötürü şemanın yakınsaklığı için sadece kararlılığını incelemek yeterlidir.

Şemanın Kararlılık Analizi: Bunun için önce (1.0.4) denkleminde görülen uu_x non-lineer teriminde $u = C$ lokal sabit alınırsa denklemin Crank-Nicolson sonlu fark şeması

$$\begin{aligned} & -\left(\frac{1}{kh^2} + \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{4h} + \frac{C}{4h}\right)u_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} + \frac{1}{h^2}\right)u_j^{n+1} - \left(\frac{1}{kh^2} + \frac{1}{2h^2} - \frac{1}{4h} - \frac{C}{4h}\right)u_{j+1}^{n+1} \\ & = -\left(\frac{1}{kh^2} - \frac{1}{2h^2} - \frac{1}{4h} - \frac{C}{4h}\right)u_{j-1}^n + \left(\frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2} - \frac{1}{h^2}\right)u_j^n - \left(\frac{1}{kh^2} - \frac{1}{2h^2} + \frac{1}{4h} + \frac{C}{4h}\right)u_{j+1}^n \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

olarak elde edilir. Bu şemanın kararlılık analizi

$$u_j^n = \xi^n e^{i\beta jh} \quad (2.2.11)$$

olmak üzere von-Neumann tekniği ile araştırıldı [31]. Burada $i = \sqrt{-1}$, β mod sayısı ve ξ güçlendirme faktörüdür. (2.2.10) da u_j^n yerine (2.2.11) eşitliği yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\xi[\lambda_1 + \lambda_2 + i\lambda_3] = \lambda_1 - \lambda_2 - i\lambda_3 \quad (2.2.12)$$

bulunur. Burada

$$\lambda_1 = -\frac{2}{kh^2} \cos(\beta h) + \frac{1}{k} + \frac{2}{kh^2}, \lambda_2 = -\frac{1}{h^2} \cos(\beta h) + \frac{1}{h^2} \text{ ve } \lambda_3 = \left(\frac{1}{2h} + \frac{C}{2h}\right) \sin(\beta h)$$

dir. Kararlılık için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. $|\xi| \leq 1$ olması için (2.2.12)'den $\sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2} \leq \sqrt{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3^2}$ veya $\lambda_1 \lambda_2 \geq 0$ eşitsizliği sağlanmalıdır. Gerçekten, gerekli bir takım matematiksel işlemler yapılırsa $\lambda_1 \lambda_2$ ifadesi

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{2}{h^2 k} \sin^2\left(\frac{\beta h}{2}\right) + \frac{8}{h^4 k} \sin^4\left(\frac{\beta h}{2}\right) \geq 0$$

eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla $|\xi| \leq 1$ olup sunulan şema şartsız kararlıdır.



3. TEST PROBLEMLER

Bu bölümde (1.0.4)-(1.0.6) denklemleriyle verilen model problem için Bölüm 2’de elde edilen nümerik şemanın doğruluğunu ve güvenilirliğini kontrol etmek için model problemin test problemler olarak adlandırılan üç özel durumu göz önüne alındı.

3.1 Test Problem 1

Bu test problemde (1.0.4) ile verilen BBM-Burgers deklemini $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $[a, b] = [0, \pi]$ ve $G(x, t) = e^{-t}(\cos x - \sin x + \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2x)$ için göz önüne alındı. Bu durumda (1.0.4) denklemini

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} + u_x + uu_x = e^{-t}(\cos x - \sin x + \frac{1}{2}e^{-t} \sin 2x), \quad x \in [0, \pi], \quad t \geq 0 \quad (3.1.1)$$

olup

$$u(x, 0) = \sin x, \quad x \in [0, \pi] \quad (3.1.2)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.1.3)$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla ele alındı. (3.1.1) denkleminin analitik(tam) çözümü

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x \quad (3.1.4)$$

dir [33]. Diferansiyel denklemin yukarıda (3.1.2) ve (3.1.3) ile verilen başlangıç ve sınır şartları tam çözüm (3.1.4) den direkt olarak alınmıştır.

3.2 Test Problem 2

Bu test problemde (1.0.4) ile verilen BBM-Burgers denklemini $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $[a, b] = [-10, 10]$ ve $G(x, t) = 0$ için ele alındı.

Bu durumda (1.0.4) denklemini

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} + u_x + uu_x = 0, \quad x \in [-10, 10], \quad t \geq 0 \quad (3.2.1)$$

homojen denklem olup

$$u(x, 0) = \exp(-x^2), \quad x \in [-10, 10] \quad (3.2.2)$$

başlangıç ve

$$u(-10, t) = 0, \quad u(10, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (3.2.3)$$

sınır şartlarıyla göz önüne alındı. Bilindiği kadarıyla bu test problemin analitik çözümü mevcut değildir.

3.3 Test Problem 3

Bu test problemde ise (1.0.4) ile verilen BBM-Burgers denklemi $\alpha = \beta = 1, \gamma = 12, [a, b] = [-50, 50]$ ve $G(x, t) = 0$ için göz önüne alındı. Bu durumda (1.0.4) non-homojen denklemi

$$u_t - u_{xxt} - u_{xx} + u_x + 12uu_x = 0, x \in [-50, 50], t \geq 0 \quad (3.3.1)$$

olup

$$u(x, 0) = -\frac{23}{120} - \frac{1}{5} \tanh(x) + \frac{1}{10} \tanh^2(x) \quad (3.3.2)$$

başlangıç ve

$$\begin{aligned} u(-50, t) &= -\frac{23}{120} - \frac{1}{5} \tanh(-50 + \frac{t}{10}) + \frac{1}{10} \tanh^2(-50 + \frac{t}{10}) \\ u(50, t) &= -\frac{23}{120} - \frac{1}{5} \tanh(50 + \frac{t}{10}) + \frac{1}{10} \tanh^2(50 + \frac{t}{10}) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

sınır şartlarıyla ele alındı. (3.3.1) denkleminin analitik(tam) çözümü [27]

$$u(x, t) = -\frac{23}{120} - \frac{1}{5} \tanh(x + \frac{t}{10}) + \frac{1}{10} \tanh^2(x + \frac{t}{10}), x \in [-50, 50] \quad (3.3.4)$$

olup denklemin yukarıda (3.3.2) ve (3.3.3) ile verilen başlangıç ve sınır şartları doğrudan doğruya tam çözümden alınmıştır.

4. NÜMERİK HESAPLAMALAR VE SONUÇLAR

Bu bölümde, önerilen şemanın doğruluğunu kontrol etmek için Bölüm 3 de verilen ikisi analitik çözümü olan ve diğeri analitik çözümü olmayan üç farklı test problem ele alındı ve yaklaşık nümerik çözümleri hesaplandı. Tüm hesaplamalarda Matlab yazılımı kullanıldı. Sunulan şemanın doğruluğunu ve güvenilirliğini kanıtlamak için, $u(x_j, t_n)$ analitik ve u_j^n yaklaşık çözümleri göstermek üzere,

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=1}^{M-1} |u(x_j, t_n) - u_j^n|^2}, \quad L_\infty = \max_{1 \leq j \leq M-1} |u(x_j, t_n) - u_j^n|$$

hata normları ile birlikte mutlak hata

$$AE = |u(x_j, t_n) - u_j^n|, \quad j = 1(1)M - 1$$

ve

$$Mertebe(L) = \log_2[L(2h, 2k)/L(h, k)]$$

olarak verilen şemanın doğruluk Mertebesi (Order) hesaplandı. Burada, h ve k sırasıyla yeterince küçük konum ve adım uzunlukları olup L ise L_2 veya L_∞ normlarından birini temsil eder.

Test Problem 1: (3.1.1)-(3.1.3) denklemleriyle verilen problemin $x \in [0, \pi]$ aralığında sabit $k = 0.01$ ve farklı M değerleri ile sabit $M = 160$ ve farklı k değerleri için (2.2.1)-(2.2.4) denklemleri ile verilen nümerik şemadan $T = 5$ bitiş zamanında elde edilen u 'nun seçili noktasal değerleri, L_2 ve L_∞ hata normlarıyla birlikte CPU zamanları sırasıyla Çizelge 4.1 ve Çizelge 4.2'de verildi. Çizelgelere bakıldığında sunulan yöntemle elde edilen yaklaşık nümerik sonuçların [30] da verilen sonuçlardan daha iyi olduğu ve analitik çözümle oldukça iyi uyum içinde olduğu kolayca görülmektedir. Bu durum açıkça yöntemin doğruluğunun ve güvenilirliğinin bir kanıtıdır. Ayrıca kullanılan yöntemin doğası gereği h ve k adım uzunlukları yeterince küçülürken nümerik sonuçların gittikçe analitik sonuçlara yaklaştığı ve bundan ötürü de hata normlarının gittikçe küçüldüğü görülmektedir. Bu ise yöntemin teorisini destekleyen bir diğer önemli delildir. Her ne kadar h ve k nın küçülen değerlerinde iyi sonuçlar elde edilse de CPU zamanlarına bakıldığında bu durum yöntemin hesaplama maliyetini arttırmaktadır. Bu nedenle h ve k nın çok küçük değerleri yerine onların analitik çözüme yakın makul çözümler üretecek değerlerini almak yeterli olacaktır.

Hesaplanan nümerik çözümlerin sürekliliğini ve analitik çözümle ne kadar iyi uyum içinde olduğunu göstermek için $M = 40$ ve $k = 0.01$ için farklı T zamanlarında analitik ve nümerik

çözümlerin grafikleri Şekil 4.1 ile birlikte hatanın yeterince küçük olduğunu göstermek için de hata grafikleri Şekil 4.2’de verildi.

Çizelge 4.1 : Problem 1’in $k = 0.01$ ve farklı M değerleri için $T = 5$ de bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının ve CPU zamanlarının [30] da verilenlerle kıyaslanması.

x	Mevcut Sonuçlar				Tam
	$M = 40$	$M = 80$	$M = 160$	$M = 320$	
$\pi/8$	0.002587	0.002580	0.002579	0.002579	0.002579
$\pi/4$	0.004781	0.004768	0.004765	0.004765	0.004764
$3\pi/8$	0.006248	0.006230	0.006226	0.006225	0.006225
$\pi/2$	0.006762	0.006744	0.006739	0.006738	0.006738
$5\pi/8$	0.006246	0.006230	0.006226	0.006225	0.006225
$3\pi/4$	0.004777	0.004767	0.004765	0.004764	0.004764
$7\pi/8$	0.002582	0.002579	0.002578	0.002578	0.002579
L_2	$2.8421E - 5$	$6.5986E - 6$	$1.2200E - 6$	$5.4645E - 7$	
L_∞	$2.4549E - 5$	$5.7784E - 6$	$1.1235E - 6$	$5.8919E - 7$	
$CPU(s)$	0.2279	0.3733	0.5574	1.3213	
[30]					
$\pi/8$	0.002589	0.002581	0.002579	0.002579	
$\pi/4$	0.004787	0.004770	0.004766	0.004765	
$3\pi/8$	0.006258	0.006233	0.006227	0.006225	
$\pi/2$	0.006776	0.006747	0.006740	0.006738	
$5\pi/8$	0.006259	0.006233	0.006227	0.006225	
$3\pi/4$	0.004787	0.004769	0.004765	0.004764	
$7\pi/8$	0.002587	0.002580	0.002578	0.002578	
L_2	$4.3868E - 5$	$1.0423E - 5$	$2.0985E - 6$	$4.3912E - 7$	
L_∞	$3.7921E - 5$	$9.0846E - 6$	$1.9021E - 6$	$4.7806E - 7$	
$CPU(s)$	0.2269	0.3573	0.7603	1.8884	

Çizelge 4.2 : Problem 1'in $M = 160$ ve farklı k değerleri için $T = 5$ de bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerleri ile birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının ve CPU zamanlarının [30] da verilenlerle kıyaslanması.

x	Mevcut Sonuçlar				Tam
	$k = 0.1$	$k = 0.05$	$k = 0.025$	$k = 0.0125$	
$\pi/8$	0.002572	0.002577	0.002579	0.002579	0.002579
$\pi/4$	0.004748	0.004761	0.004764	0.004765	0.004764
$3\pi/8$	0.006193	0.006218	0.006224	0.006226	0.006225
$\pi/2$	0.006687	0.006726	0.006736	0.006739	0.006738
$5\pi/8$	0.006156	0.006209	0.006222	0.006225	0.006225
$3\pi/4$	0.004688	0.004746	0.004760	0.004764	0.004764
$7\pi/8$	0.002520	0.002564	0.002575	0.002578	0.002579
L_2	$8.4021E-5$	$1.9909E-5$	$3.9857E-6$	$1.0502E-6$	
L_∞	$7.6517E-5$	$1.8474E-5$	$4.0423E-6$	$9.2101E-7$	
$CPU(s)$	0.1229	0.1427	0.2377	0.4961	
[30]					
$\pi/8$	0.002573	0.002578	0.002579	0.002579	
$\pi/4$	0.004748	0.004761	0.004765	0.004766	
$3\pi/8$	0.006194	0.006219	0.006225	0.006227	
$\pi/2$	0.006688	0.006727	0.006737	0.006740	
$5\pi/8$	0.006157	0.006210	0.006223	0.006226	
$3\pi/4$	0.004689	0.004747	0.004761	0.004765	
$7\pi/8$	0.002520	0.002564	0.002575	0.002578	
L_2	$8.3129E-5$	$1.9037E-5$	$3.2766E-6$	$1.7760E-6$	
L_∞	$7.5884E-5$	$1.7868E-5$	$3.5344E-6$	$1.6519E-6$	
$CPU(s)$	0.1084	0.1776	0.3626	0.6975	

Çizelge 4.3 : Problem 1'in farklı $M = N$ ve T değerleri için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları, doğruluk mertebeleri ve CPU zamanlarının [30] da verilenlerle kıyaslanması.

Mevcut Sonuçlar						
T	$M = N$	L_2	L_∞	Mertebe (L_2)	Mertebe (L_∞)	CPU (s)
2	40	$2.514763E-3$	$2.310373E-3$	—	—	0.0194
	80	$6.266159E-4$	$5.759105E-4$	2.0048	2.0042	0.0344
	160	$1.565247E-4$	$1.438680E-4$	2.0012	2.0011	0.0884
	320	$3.912309E-5$	$3.596083E-5$	2.0003	2.0002	1.2597
5	40	$5.117546E-4$	$4.704716E-4$	—	—	0.0194
	80	$1.277424E-4$	$1.174237E-4$	2.0022	2.0024	0.0344
	160	$3.192331E-5$	$2.935160E-5$	2.0006	2.0002	0.0884
	320	$7.980061E-6$	$7.337065E-6$	2.0001	2.0002	1.2497
10	40	$1.344750E-5$	$1.388463E-5$	—	—	0.0194
	80	$3.374686E-6$	$3.482978E-6$	1.9945	1.9951	0.0344
	160	$8.444689E-7$	$8.716640E-7$	1.9986	1.9985	0.0884
	320	$2.111668E-7$	$2.179534E-7$	1.9997	1.9998	1.2504
[30]						
2	40	$1.728802E-4$	$1.463953E-4$	—	—	0.0386
	80	$4.317641E-5$	$3.654372E-5$	2.0015	2.0022	0.0779
	160	$1.079137E-5$	$9.139531E-6$	2.0004	1.9994	0.2864
	320	$2.697673E-6$	$2.284673E-6$	2.0001	2.0001	1.2597
5	40	$9.826394E-5$	$9.900900E-5$	—	—	0.0393
	80	$2.451182E-5$	$2.469528E-5$	2.0032	2.0033	0.0827
	160	$6.124574E-6$	$6.171747E-6$	2.0008	2.0005	0.2948
	320	$1.530932E-6$	$1.542742E-6$	2.0002	2.0002	1.2497
10	40	$1.287583E-5$	$1.333497E-5$	—	—	0.0393
	80	$3.230839E-6$	$3.377299E-6$	1.9947	1.9941	0.0796
	160	$8.084497E-7$	$8.373849E-7$	1.9987	1.9990	0.2893
	320	$2.021586E-7$	$2.094135E-7$	1.9997	1.9995	1.2504

Çizelge 4.4 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve farklı M 'ler için farklı T 'lerde hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [8, 27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

Mevcut Sonuçlar				[8]		[30]	
M	T	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
120	1	$1.533E-5$	$1.290E-5$	$5.13E-3$	$7.67E-3$	$2.64E-5$	$2.15E-5$
	2	$1.115E-5$	$9.305E-6$	$1.731E-3$	$2.84E-3$	$1.82E-5$	$1.64E-5$
	4	$4.164E-6$	$3.835E-6$	$2.12E-4$	$3.84E-4$	$6.89E-6$	$6.32E-6$
	10	$1.509E-7$	$1.349E-7$	$4.08E-6$	$4.06E-6$	$2.15E-7$	$1.96E-7$
Mevcut Sonuçlar				[27]		[30]	
400	1	$5.114E-6$	$5.044E-6$	$1.51E-3$	$1.46E-3$	$5.56E-6$	$5.63E-6$
	2	$3.936E-6$	$3.883E-6$	$1.21E-3$	$1.18E-3$	$3.93E-6$	$4.04E-6$
	4	$1.266E-6$	$1.265E-6$	$3.95E-4$	$3.96E-4$	$1.11E-6$	$1.17E-6$
	10	$1.019E-8$	$1.216E-8$	$2.75E-6$	$3.22E-6$	$6.25E-9$	$7.41E-9$

Çizelge 4.4'te $x \in [0, \pi]$ ve $k = 0.01$ için farklı M ve T değerlerinde şemadan hesaplanan yaklaşık nümerik çözümler aynı parametrelerde [8, 27, 30] da verilenlerle karşılaştırıldı. Bu çizelgeden kolayca görüldüğü üzere mevcut yöntemden elde edilen L_2 ve L_∞ normlarının yeterince küçük, [8, 27] de verilenlerden daha iyi ve [30] da verilenlerle ise iyi uyum içinde olduğu açıktır.

Sunulan şemanın daha fazla güvenilirliğini ve doğruluğunu göstermek için elde edilen yaklaşık sayısal çözümler literatürde mevcut olan diğer araştırmacılarınkilerle de karşılaştırıldı. Çizelge 4.3'ten 4.9'a kadar olan çizelgelerde konumsal bölüntü sayısı M ve zaman adım uzunluğu $k = T/N$ 'nin çeşitli değerleri için bazı T bitiş zamanlarında mevcut şemadan hesaplanan bazı düğüm noktalarındaki u 'nun ayrık yaklaşım çözümleri, L_2 ve L_∞ hata normları ve sayısal simülasyonlar sırasında saniye cinsinden alınan CPU zamanları mümkün olduğunca aynı parametre değerleri kullanılarak [18, 19, 24, 27, 28, 30] da verilenlerle karşılaştırıldı.

Mevcut şemanın doğruluk mertebesi $O(h^2) + O(k^2)$ olup [24, 28] de verilenlerle aynı iken [27] de $O(h^4) + O(k^2)$ 'dir. Buna rağmen (2.2.1)-(2.2.4) denklemleriyle verilen mevcut şemadan hesaplanan hataların bu referanslarda verilenlere kıyasla çok daha küçük olduğu açıkça görülmektedir. Yine çizelgelerden de görüldüğü gibi sunulan şemanın konum ve zaman adım ölçüleri küçülürken sonlu farklar yönteminin doğası gereğince sayısal sonuçlar daha da iyileşerek gittikçe tam sonuçlara yaklaşmaktadır. Ancak bunun sonucunda bilgisayar açısından hesaplama süresinin ve bellek kullanım maliyetlerinin önemli ölçüde artması kaçınılmazdır. Çizelgelerden artan bitiş zamanlarında hesaplama süresini gösteren CPU zamanlarının artması yöntemin teorisini açıkça desteklemektedir. Çizelge 4.3 ayrıca konum ve zaman değişkenlerinde L_2 ve L_∞ hata normları cinsinden doğruluk mertebelerini sunar. Bu çizelge şemanın doğruluğunun veya hesaplama mertebesinin teorik değerlerine yakın olan L_2 ve L_∞ hata normları için yaklaşık 2 olduğunu göstermektedir. Açıkça elde edilen deneysel sonuçlar $M = N$ durumunda teorik doğruluk mertebesi olan $O(h^2) + O(k^2)$ ile çok iyi uyum içindedirler. Genel olarak konuşulacak olursa hesaplanan L_2 ve L_∞ normlarının yeterince küçük olduğu ve bu normların her biri için hesaplanan doğruluk mertebelerinin yöntemin gerçek doğruluk mertebesi olan 2'nin çok yakın civarında olduğu, M ve N bölüntü sayıları büyüdükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının T 'nin her bir bitiş zamanında gittikçe küçüldüğü ve uzun zamanlarda şemanın gittikçe daha iyi sonuçlar ürettiği görülmektedir.

Çizelge 4.5 : Problem 1'in $k = 0.001$ ve $M = 400$ için farklı T 'lerde hesaplanan mutlak hatalarının [27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

	T	$x = \frac{\pi}{8}$	$x = \frac{3\pi}{8}$	$x = \frac{5\pi}{8}$	$x = \frac{7\pi}{8}$
Mevcut	1	$7.67E-7$	$9.23E-7$	$2.87E-7$	$7.59E-7$
	2	$5.69E-7$	$8.92E-7$	$1.03E-7$	$4.69E-7$
	4	$1.69E-7$	$3.96E-7$	$2.71E-7$	$2.12E-8$
	6	$3.72E-8$	$1.22E-7$	$1.39E-7$	$4.69E-8$
	8	$6.65E-9$	$3.05E-8$	$4.78E-8$	$2.68E-8$
	10	$8.99E-10$	$6.26E-9$	$1.31E-8$	$9.77E-9$
[27]	1	$1.32E-5$	$3.70E-5$	$1.32E-4$	$1.02E-4$
	2	$8.20E-6$	$2.72E-5$	$1.03E-4$	$8.77E-5$
	4	$2.34E-6$	$6.38E-6$	$3.13E-5$	$3.24E-5$
	6	$6.90E-7$	$4.73E-7$	$6.52E-6$	$8.62E-6$
	8	$1.88E-7$	$2.31E-7$	$9.27E-7$	$1.86E-6$
	10	$4.45E-8$	$1.27E-7$	$2.85E-8$	$3.19E-7$
[30]	1	$1.32E-6$	$1.77E-6$	$5.04E-7$	$1.29E-6$
	2	$8.74E-7$	$1.55E-6$	$2.53E-7$	$6.97E-7$
	4	$2.26E-7$	$6.07E-7$	$4.68E-7$	$1.52E-8$
	6	$4.56E-8$	$1.73E-7$	$2.16E-7$	$8.48E-8$
	8	$7.40E-9$	$4.03E-8$	$6.95E-8$	$4.21E-8$
	10	$8.15E-10$	$7.62E-9$	$1.79E-8$	$1.43E-8$

Çizelge 4.6 : Problem 1'in çeşitli $M = N$ değerleri için $T = 10$ da hesaplanan L_∞ hata normlarının [6, 24, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

$M = N$	Mevcut	[6]	[24]	[30]
10	$2.08499E-4$	0.0218	$2.97032E-4$	$2.00721E-4$
20	$5.48905E-5$	0.0053	$1.14462E-4$	$5.27363E-5$
40	$1.38846E-5$	0.0013	$4.96031E-5$	$1.33350E-5$
80	$3.48298E-6$	$3.3291E-4$	$2.32273E-5$	$3.34730E-6$
160	$8.71664E-7$	$8.3133E-5$	$1.12752E-5$	$8.37385E-7$
320	$2.17953E-7$	$2.0766E-5$	$5.56190E-6$	$2.09413E-7$
640	$5.44933E-8$	$5.1898E-6$	$2.76323E-6$	$5.23555E-8$

Çizelge 4.7 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve çeşitli M 'ler için hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [6, 8, 21, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

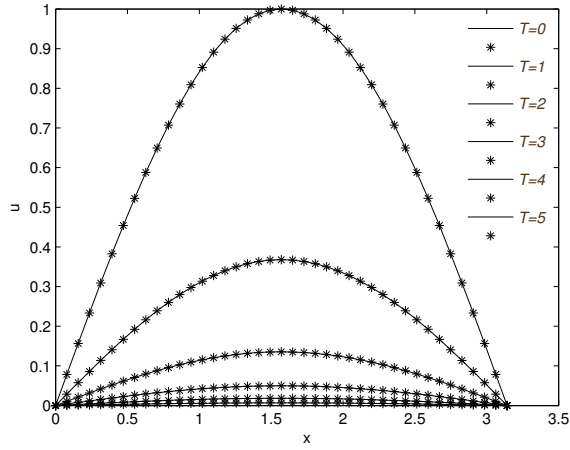
	Mevcut		[30]		[21]	
M	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	$4.2455E-5$	$3.7079E-5$	$6.0009E-5$	$5.3949E-5$	$5.3251E-5$	$3.2597E-5$
16	$9.9594E-6$	$8.9195E-6$	$1.3753E-5$	$1.2515E-5$	$4.0646E-5$	$9.0876E-6$
64	$5.8834E-7$	$5.2849E-7$	$8.1392E-7$	$7.4698E-7$	$4.1282E-6$	$1.1177E-6$
128	$1.2992E-7$	$1.1600E-7$	$1.8584E-7$	$1.6980E-7$	$5.2201E-7$	$2.7547E-7$
	Mevcut		[30]		[8]	[6]
10	$2.6387E-5$	$2.3646E-5$	$3.6879E-5$	$3.3580E-5$	$1.7147E-4$	$2.1800E-2$
20	$6.3161E-6$	$5.6761E-6$	$8.6995E-6$	$7.9448E-6$	$5.6341E-5$	$5.3000E-3$
80	$3.6813E-7$	$3.3027E-7$	$5.1220E-7$	$4.6962E-7$	$7.2635E-6$	$3.3291E-4$
320	$7.2674E-9$	$6.4015E-9$	$1.1796E-8$	$1.1271E-8$	$8.1631E-7$	$2.0766E-5$

Çizelge 4.8 : Problem 1'in $k = 0.01$ ve $M = 120$ için çeşitli T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [8, 27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

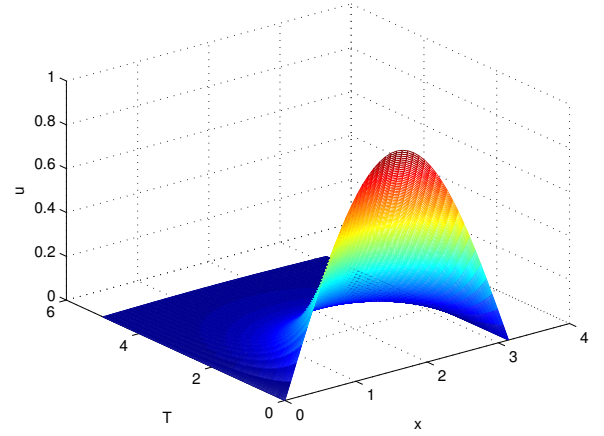
T	Mevcut		[30]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
1	$1.5332E-5$	$1.2895E-5$	$2.6384E-5$	$2.1529E-5$
2	$1.1151E-5$	$9.3052E-6$	$1.8229E-5$	$1.6441E-5$
4	$4.1635E-6$	$3.8353E-6$	$6.8921E-6$	$6.3235E-6$
10	$1.5093E-7$	$1.3488E-7$	$2.1464E-7$	$1.9624E-7$
T	[8]		[27]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
1	$5.1270E-3$	$7.6730E-3$	$1.51E-3$	$1.46E-3$
2	$1.7297E-3$	$2.8380E-3$	$1.21E-3$	$1.18E-3$
4	$2.1240E-4$	$3.8414E-4$	$3.95E-4$	$3.96E-4$
10	$4.0784E-6$	$4.0595E-6$	$2.75E-6$	$3.22E-6$

Çizelge 4.9 : Problem 1'in $k = 0.001$ ve $M = 400$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında u 'nun hesaplanan değerleriyle birlikte L_2 ve L_∞ hata normlarının [27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

$T = 2$				
x	Mevcut	[27]	[30]	Tam
$\pi/8$	0.051791	0.051799	0.051791	0.051791
$3\pi/8$	0.125034	0.125006	0.125035	0.125033
$5\pi/8$	0.125034	0.124931	0.125034	0.125033
$7\pi/8$	0.051790	0.051703	0.051790	0.051791
L_2	$1.0130E-6$		$1.6911E-6$	
L_∞	$9.3018E-7$		$1.5840E-6$	
$CPU(s)$	8.0317		10.3517	
$T = 6$				
$\pi/8$	0.000949	0.000949	0.000949	0.000949
$3\pi/8$	0.002290	0.002290	0.002290	0.002290
$5\pi/8$	0.002290	0.002284	0.002290	0.002290
$7\pi/8$	0.000949	0.000940	0.000949	0.000949
L_2	$1.7253E-7$		$2.6026E-7$	
L_∞	$1.4616E-7$		$2.2194E-7$	
$CPU(s)$	20.3377		30.1281	
$T = 10$				
$\pi/8$	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017
$3\pi/8$	0.000042	0.000042	0.000042	0.000042
$5\pi/8$	0.000042	0.000042	0.000042	0.000042
$7\pi/8$	0.000017	0.000017	0.000017	0.000017
L_2	$1.5391E-8$		$2.1161E-8$	
L_∞	$1.3849E-8$		$1.9444E-8$	
$CPU(s)$	34.4686		51.1027	

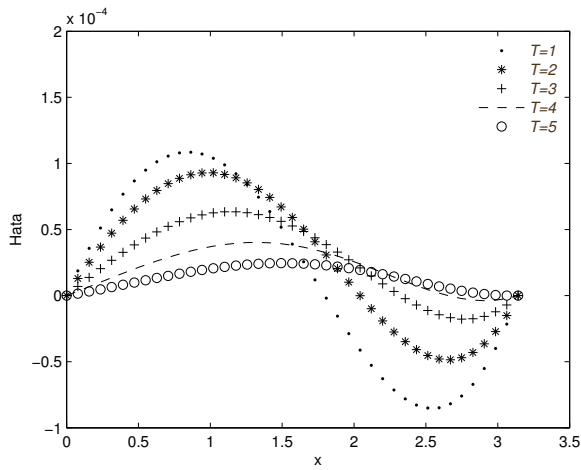


(a)

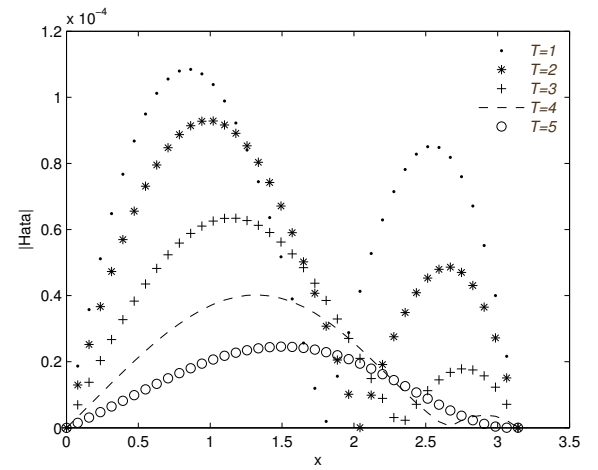


(b)

Şekil 4.1 : Problem 1'in $M = 40$ ve $k = 0.01$ için farklı T zamanlarındaki (a) analitik (*) ve nümerik (-) çözümlerinin 2-boyutlu ve (b) nümerik çözümlerinin 3-boyutlu grafikleri.



(a)



(b)

Şekil 4.2 : Problem 1'in $M = 40$ ve $k = 0.01$ için farklı T zamanlarındaki (a) genel hata ve (b) mutlak hata grafikleri.

Çizelge 4.10 : Problem 2'nin $k = 0.01$ ve $M = 100$ için çeşitli T 'lerde bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [27, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

Mevcut	T	$x = -8$	$x = -6$	$x = -4$	$x = -2$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$	$x = 6$	$x = 8$
	1	$-5.25E-5$	-0.00040	-0.00299	-0.01377	0.57448	0.27346	0.07753	0.01979	0.00457
	2	$-4.86E-5$	-0.00039	-0.00288	-0.01754	0.28935	0.35779	0.17485	0.06558	0.02058
	3	$-3.45E-5$	-0.00029	-0.00216	-0.01424	0.13389	0.32160	0.24259	0.12477	0.04991
	4	$-2.19E-5$	-0.00019	-0.00147	-0.01012	0.05670	0.24057	0.26097	0.17760	0.08813
	5	$-1.32E-5$	-0.00012	-0.00096	-0.00677	0.02073	0.16136	0.23854	0.20860	0.12635
	6	$-7.59E-6$	$-7.74E-5$	-0.00061	-0.00438	0.00511	0.10056	0.19506	0.21311	0.15536
	7	$-4.25E-6$	$-4.71E-5$	-0.00038	-0.00278	-0.00093	0.05915	0.14743	0.19610	0.16943
	8	$-2.32E-6$	$-2.82E-5$	-0.00023	-0.00174	-0.00272	0.03296	0.10512	0.16672	0.16793
	9	$-1.24E-6$	$-1.66E-5$	-0.00014	-0.00108	-0.00280	0.01729	0.07161	0.13340	0.15415
	10	$-6.50E-7$	$-9.67E-6$	$-8.55E-5$	-0.00066	-0.00230	0.00837	0.04691	0.10177	0.13304
[30]	1	$-5.37E-5$	-0.00041	-0.00305	-0.01426	0.57464	0.27400	0.07773	0.01984	0.00459
	2	$-4.96E-5$	-0.00040	-0.00294	-0.01797	0.28927	0.35815	0.17518	0.06573	0.02063
	3	$-3.51E-5$	-0.00029	-0.00220	-0.01455	0.13355	0.32170	0.24290	0.12500	0.05001
	4	$-2.23E-5$	-0.00020	-0.00150	-0.01032	0.05628	0.24050	0.26116	0.17784	0.08828
	5	$-1.34E-5$	-0.00013	-0.00097	-0.00690	0.02035	0.16119	0.23860	0.20879	0.12653
	6	$-7.72E-6$	$-7.87E-5$	-0.00062	-0.00446	0.00482	0.10033	0.19502	0.21322	0.15551
	7	$-4.32E-6$	$-4.79E-5$	-0.00038	-0.00283	-0.00114	0.05891	0.14731	0.19613	0.16953
	8	$-2.36E-6$	$-2.86E-5$	-0.00024	-0.00177	-0.00287	0.03274	0.10497	0.16668	0.16796
	9	$-1.26E-6$	$-1.69E-5$	-0.00014	-0.00109	-0.00290	0.01711	0.07143	0.13330	0.15412
	10	$-6.59E-7$	$-9.82E-6$	$-8.69E-5$	-0.00067	-0.00236	0.00823	0.04674	0.10165	0.13297
[27]	1	$-5.21E-5$	-0.00040	-0.00297	-0.01379	0.57275	0.27451	0.07772	0.01980	0.00456
	2	$-4.83E-5$	-0.00038	-0.00285	-0.01734	0.28699	0.35876	0.17540	0.06572	0.02059
	3	$-3.43E-5$	-0.00028	-0.00212	-0.01397	0.13200	0.32177	0.24327	0.12512	0.05001
	4	$-2.19E-5$	-0.00019	-0.00144	-0.00986	0.05554	0.24007	0.26141	0.17809	0.08835
	5	$-1.32E-5$	-0.00012	-0.00094	-0.00655	0.02017	0.16059	0.23856	0.20904	0.12668
	6	$-7.72E-6$	$-7.70E-5$	-0.00059	-0.00422	0.00493	0.09983	0.19474	0.21333	0.15568
	7	$-4.39E-6$	$-4.71E-5$	-0.00037	-0.00267	-0.00091	0.05860	0.14693	0.19606	0.16963
	8	$-2.44E-6$	$-2.84E-5$	-0.00023	-0.00166	-0.00262	0.03262	0.10461	0.16646	0.16793
	9	$-1.34E-6$	$-1.69E-5$	-0.00014	-0.00103	-0.00267	0.01712	0.07117	0.13301	0.15395
	10	$-7.22E-7$	$-9.97E-6$	$-8.47E-5$	-0.00063	-0.00219	0.00832	0.04658	0.10135	0.13269

Test Problem 2: Çizelge 4.10-4.13'de bilindiği kadarıyla tam çözüme sahip olmayan (3.2.1)-(3.2.3) ile verilen problemin farklı k ve M değerleri için çeşitli T bitiş zamanlarında sunulan (2.2.9) ile verilen şemadan bazı düğüm noktalarında elde edilen u 'nun yaklaşık çözümleri aynı parametre değerleri için [13, 15, 24, 27, 30] da verilenlerle karşılaştırıldı. Her bir çizelgeye bakıldığında sunulan yöntemle elde edilen sonuçların diğer araştırmacıların verdikleri ile yeterince iyi uyum içindedir. Bu durum aynı zamanda mevcut yöntemin doğruluğu ve güvenilirliğinin bir delilidir. Elde edilen nümerik çözümlerin sürekliliğini göstermek için Şekil 4.3'de $k = 0.01$ ve $M = 100$ değerleri için farklı T bitiş zamanlarında u 'nun grafikleri verildi.

Çizelge 4.11 : Problem 2'nin $k = 0.01$ ve $M = 300$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [24, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

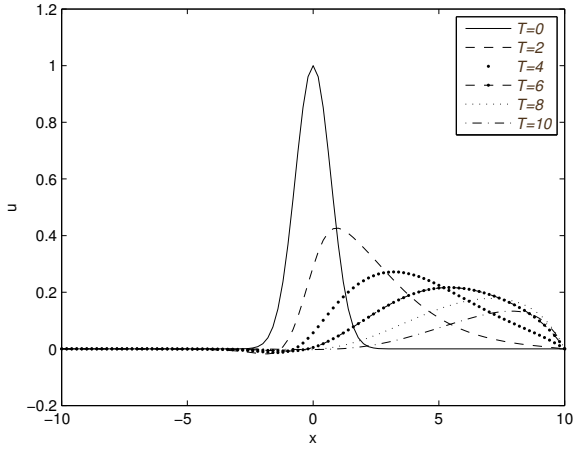
	x	$T = 1$	$T = 2$	$T = 4$	$T = 10$
Mevcut	-6	-0.0137505008	-0.0172781384	-0.0097049407	-0.0005375241
	-4	0.5729522151	0.2872812764	0.0557664765	-0.0020600354
	-2	0.2743955907	0.3586639854	0.2401808968	0.0084854921
	0	0.0776994781	0.1753553171	0.2614630677	0.0469203573
	2	0.0198162024	0.0658211715	0.1787429081	0.1031994926
	4	0.0047096453	0.0214510172	0.0938549477	0.1501093908
	6	0.0010652925	0.0063863592	0.0417120485	0.1642529939
[24]	-5	-0.0010923500	-0.0010473800	0.0005281950	-0.0000298137
	0	0.5727480000	0.2869880000	0.0555430000	-0.0021879900
	5	0.0396689000	0.1099050000	0.2252390000	0.0736685000
[30]	-6	-0.0004027093	-0.0003854799	-0.0001926536	-0.0000099566
	-4	-0.0029786942	-0.0028580523	-0.0014459544	-0.0000849685
	-2	-0.0138378812	-0.0174131814	-0.0099069255	-0.0006380026
	0	0.5729609472	0.2872418829	0.0556234699	-0.0022075893
	2	0.2744530896	0.3586911172	0.2401157676	0.0083069361
	4	0.0777182218	0.1753733973	0.2613784776	0.0466006797
	6	0.0198025240	0.0657209890	0.1780612490	0.1013858444

Çizelge 4.12 : Problem 2'nin $k = 0.1$ ve $M = 200$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [15, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

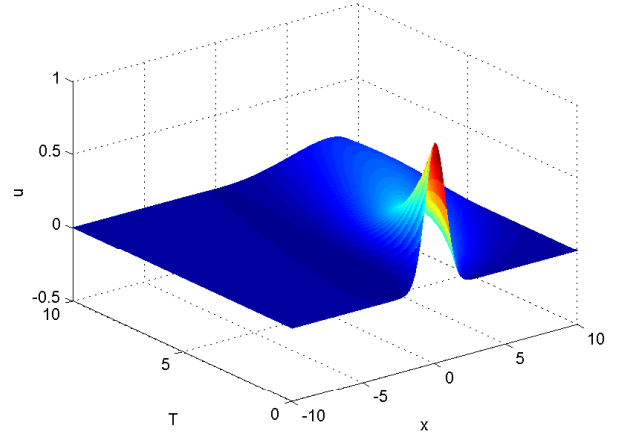
	x	$T = 1$	$T = 5$	$T = 7$	$T = 10$
Mevcut	-5	-0.0010935758	-0.0003432611	-0.0001340342	-0.0000297571
	0	0.5732253918	0.0202646416	-0.0009308974	-0.0022184044
	5	0.0396144589	0.2345316326	0.1797324849	0.0737940730
[15]	-5	-0.00109485	-0.000342832	-0.000133937	-0.0000298046
	0	0.572752	0.0202368	-0.00091068	-0.00220189
	5	0.0396263	0.234568	0.179672	0.073734
[30]	-5	-0.0010997141	-0.0003448419	-0.0001346249	-0.0000298826
	0	0.5732642614	0.0201701925	-0.0009840328	-0.0022341872
	5	0.0396404222	0.2345679719	0.1797213522	0.0737554585

Çizelge 4.13 : Problem 2'nin $k = 0.1$ ve $M = 200$ için farklı T zamanlarında bazı düğüm noktalarında hesaplanan u değerlerinin [13, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

	x	$T = 0.5$	$T = 1$	$T = 1.5$	$T = 2$
Mevcut	-5	$-8.02454E - 4$	$-1.09358E - 3$	$-1.13099E - 3$	$-1.04993E - 3$
	0	$7.74363E - 1$	$5.73225E - 1$	$4.10979E - 1$	$2.87547E - 1$
	5	$1.45497E - 2$	$3.96145E - 2$	$7.25961E - 2$	$1.09752E - 1$
[30]	-5	$-8.07177E - 4$	$-1.09971E - 3$	$-1.13709E - 3$	$-1.05540E - 3$
	0	$7.74389E - 1$	$5.73264E - 1$	$4.10995E - 1$	$2.87526E - 1$
	5	$1.45603E - 2$	$3.96404E - 2$	$7.26392E - 2$	$1.09810E - 1$
[13]	-5	$-9.64717E - 4$	$-1.12975E - 3$	$-1.10663E - 3$	$-9.99733E - 3$
	0	$6.88545E - 1$	$5.02510E - 1$	$3.56505E - 1$	$2.4731E - 1$
	5	$2.34371E - 2$	$5.21002E - 2$	$8.72901E - 2$	$1.25003E - 1$



(a)



(b)

Şekil 4.3 : Problem 2'nin $M = 100$ ve $k = 0.01$ için u 'nun (a) farklı T zamanlarında 2-boyutlu ve (b) $T = 10$ zamanında 3-boyutlu grafikleri.

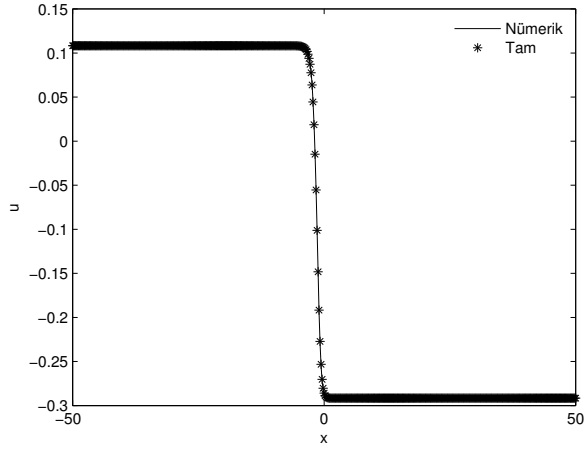
Test Problem 3: Çizelge 4.14 ve 4.15 de (3.3.1)-(3.3.3) ile verilen problemin farklı k ve M değerleri için çeşitli T bitiş zamanlarında sunulan (2.2.9) şemadan elde edilen yaklaşık nümerik çözümlerden hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte şemanın doğruluk mertebesi aynı parametre değerleri kullanılarak [5,30] da verilenlerle karşılaştırıldı. Çizelgelerden mevcut yöntemle elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu ve [5,30] da verilenlerle de uyumlu olduğu görülmektedir. Çizelge 4.15'ten $h = k$ değerleri küçülürken hata normlarının da küçüldüğü ve hesaplanan doğruluk mertebelerinin kullanılan yöntemin gerçek değeri olan 2'ye oldukça yakın olduğu görülmektedir. Bu sonuçlar sunulan yöntemin beklenen analizini desteklemekle birlikte doğruluğunun ve güvenilirliğinin delilleridir. Hesaplanan nümerik sonuçların sürekliliği ve mutlak hatanın yeterince küçük olduğu sırasıyla Şekil 4.4 ve Şekil 4.5'te grafiklerle gösterildi.

Çizelge 4.14 : Problem 3'ün $k = 0.1$ ve $M = 500$ için farklı T zamanlarında hesaplanan L_∞ hata normunun [5, 30] da verilenlerle kıyaslanması.

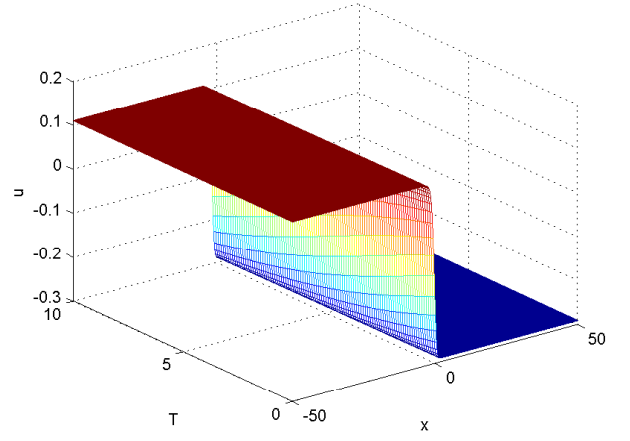
T	Mevcut	[5]($\theta = 0$)	[30]
0.2	$2.314619E - 4$	$7.650E - 5$	$1.27889E - 4$
0.3	$3.401796E - 4$	$6.954E - 5$	$1.85144E - 4$
0.4	$4.437645E - 4$	$1.490E - 4$	$2.38076E - 4$
0.5	$5.419406E - 4$	$1.334E - 4$	$2.86796E - 4$
0.6	$6.374081E - 4$	$2.160E - 4$	$3.31423E - 4$
0.7	$7.314288E - 4$	$1.918E - 4$	$3.72081E - 4$
0.8	$8.210687E - 4$	$2.774E - 4$	$4.08902E - 4$
0.9	$9.060932E - 4$	$2.474E - 4$	$4.42021E - 4$
1.0	$9.863111E - 4$	$3.385E - 4$	$4.71577E - 4$

Çizelge 4.15 : Problem 3'ün farklı $h = k$ değerleri için $T = 10$ da hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte doğruluk mertebelerinin [30] da verilenlerle kıyaslanması.

	$h = k$	L_2	L_∞	Mertebe (L_2)	Mertebe (L_∞)
Mevcut	0.2	$2.374967E - 3$	$1.972691E - 3$	—	—
	0.1	$5.847488E - 4$	$4.835031E - 4$	2.0220	2.0286
	0.05	$1.456409E - 4$	$1.208443E - 4$	2.0054	2.0004
	0.025	$3.637632E - 5$	$3.017403E - 5$	2.0013	2.0018
[30]	0.2	$6.29016E - 4$	$6.76122E - 4$		
	0.1	$1.56757E - 4$	$1.74751E - 4$	2.0046	1.9520
	0.05	$3.91580E - 5$	$4.37249E - 5$	2.0012	1.9520
	0.025	$9.78753E - 6$	$1.09684E - 5$	2.0003	1.9951

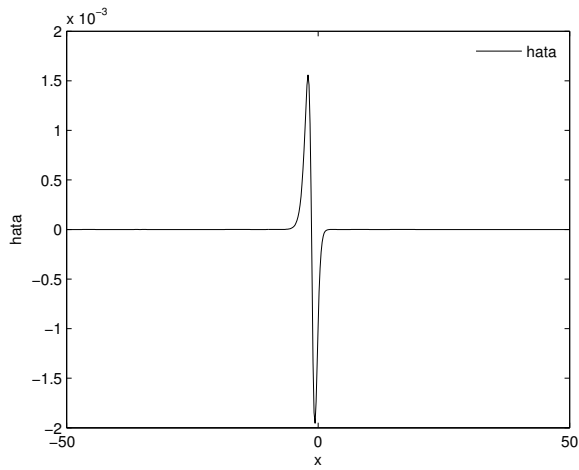


(a)

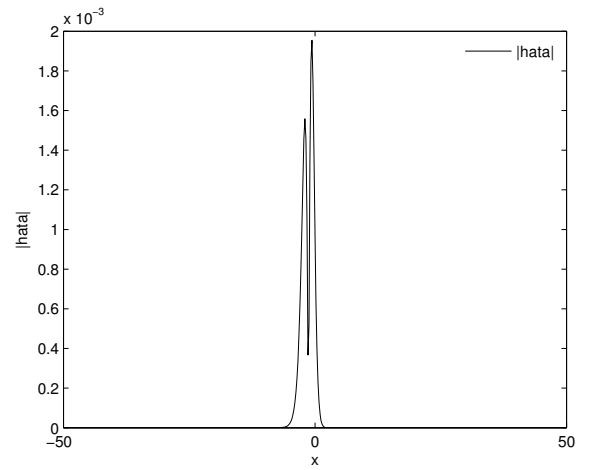


(b)

Şekil 4.4 : Problem 3'ün $M = 500$ ve $k = 0.1$ için $T = 10$ zamanında (a) analitik (*) ve nümerik (-) çözümlerinin 2-boyutlu ve (b) nümerik çözümlerinin 3-boyutlu grafikleri.



(a)



(b)

Şekil 4.5 : Problem 3'ün $M = 500$ ve $k = 0.1$ için $T = 10$ zamanında (a) genel hata ve (b) mutlak hata grafikleri.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada kapalı bir lineer cebirsel denklem sistemi ile sonuçlanan Crank-Nicolson sonlu fark şeması üç farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen ikisi homojen olan ve biri non-homojen olan 1-boyutlu non-lineer BBM-Burgers denkleminin yaklaşık nümerik çözümlerini elde etmek için başarıyla uygulandı.

Sunulan şemadan elde edilen sonuçların analitik çözümlere ne kadar yakınlıkta olduklarını göstermek için L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte şemanın doğruluk mertebeleri hesaplandı. Hesaplanan yaklaşık çözümlerin analitik çözümlerle iyi uyum içinde olduğu, ayrıca konum ve zaman adım uzunlukları iyileştirildiğinde nümerik sonuçların gittikçe analitik sonuçlara yaklaştığı ve aynı parametre değerleri için diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü. Elde edilen sonuçlar, şemanın sayısal doğruluk mertebesinin teorik değeri ile tutarlı ve şartsız kararlı olduğunu desteklemektedir. Ayrıca, konum ve zaman adım uzunlukları iyileştirildiğinde hesaplanan sonuçların analitik sonuçlara giderek yaklaşması sunulan yöntemin etkinliğinin ve doğruluğunun bir göstergesidir.

Dahası, elde edilen sayısal sonuçlar mevcut yöntemin uzun süreli simülasyonlar için bile literatürde var olan karşılaştırılabilir diğer sayısal yöntemlere göre çok daha iyi çözümler ürettiğini gösterdi. Bu da yöntemin öne çıkan bir diğer önemli özelliğidir.

Sonuç olarak sunulan şema uygulaması kolay olmakla beraber doğru ve güvenilir sonuçlar ürettiğinden fizik ve uygulamalı matematikte karşılaşılan doğrusal olmayan dalga yayılımını modellemede önemli rol oynayan BBM-Burgers denklemi gibi birleştirilmiş diğer lineer olmayan birçok KDD'in yaklaşık sayısal çözümlerini bulmak için kolayca uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Peregrine, D.H.** (1966). Calculations of the development of an undular bore, *J. Fluid Mech.*, 25(02), 321-330.
- [2] **Benjamin, T.B., Bona, J.L. ve Mahony, J.J.** (1972). Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems, *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser.A, Math. Phys. Sci.* 272(1220),47–78.
- [3] **Zhao, H. ve Xuan, B.** (1997). Existence and convergence of solutions for the generalized BBM-Burgers equations with dissipative term, *Nonlinear Anal.-Theory Methods Appl.*, 28(11), 1835-1849.
- [4] **Al-Khaled, K., Momani, S. ve Alawneh, A.** (2005). Approximate wave solutions for generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equations, *Appl. Math. Comput.*, 171, 281–292.
- [5] **Zhao, X., Li, D. ve Shi, D.** (2008). A finite difference scheme for RLW-Burgers equation, *J. Appl.Math. and Informatics*, 26, 573-581.
- [6] **Omriani, K. ve Ayadi, M.** (2008). Finite difference discretization of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Numer. Meth. Part Differ. Equ.*, 24, 239–248.
- [7] **Che, H., Pan, X., Zhang, L. ve Wang, Y.** (2012). Numerical analysis of a linear-implicit average scheme for generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *J. Appl. Math.*, Article ID 308410, 14 pages.
- [8] **Arora, G., Mittal, R.C. ve Singh, B.K.** (2014). Numerical solution of BBM-Burger equation with quartic B-spline collocation method, *Journal of Engineering Science and Technology Special Issue on ICMTEA 2013 Conference, December* 104-116.
- [9] **Dehghan, M., Abbaszadeh, M. ve Mohebbi, A.** (2014). The numerical solution of nonlinear high dimensional generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation via the meshless method of radial basis functions, *Comput. Math. Appl.*, 68, 212–237.
- [10] **Piao, G.R. ve Lee, H.C.** (2015). Distributed feedback control of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation by a reduced-order model, *East Asian J. Appl. Math.*, 5, 61-74.
- [11] **Mohebbi, A. ve Faraz, Z.** (2017). Solitary wave solution of nonlinear Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation using a high-order difference scheme, *Comp. Appl. Math.*, 36, 915-917.
- [12] **Dehghan, M., Abbaszadeh, M. ve Mohebbi, A.** (2015). The use of interpolating element-free Galerkin technique for solving 2D generalized Benjamin–Bona–Mahony–Burgers and regularized long-wave equations on non-rectangular domains with error estimate, *J. Comput. Appl. Math.*, 286, 211–231.

- [13] **Zarebnia, M. ve Parvaz, R.** (2016). On the numerical treatment and analysis of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equations, *Appl. Math. Comput.*, 284, 79–88.
- [14] **Shivanian, E. ve Jafarabadi, A.** (2016). More accurate results for nonlinear generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (GBBMB) problem through spectral meshless radial point interpolation (SMRPI), *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 72, 42–54.
- [15] **Zarebnia, M. ve Parvaz, R.** (2017). Numerical study of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 35(1), 127–138.
- [16] **Lu, C., Gao, Q., Fu, C. ve Yang, H.** (2017). Finite element method of BBM-Burgers equation with dissipative term based on adaptive moving mesh, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, Article ID 3427376, 11 pages.
- [17] **Zarebnia, M. ve Aghili, M.** (2017). An approximation to the solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Comput. Methods Differ. Equ.*, 5(4), 301–309.
- [18] **Oruç, O.** (2017). A new algorithm based on Lucas polynomials for approximate solution of 1D and 2D nonlinear generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation, *Comput. Math. Appl.* 74(12), 3042–3057.
- [19] **Berikelashvili, G. ve Mirianashvili, M.** (2019). On the convergence of difference schemes for the generalized BBM-Burgers equation, *Georgian Math. J.* 26 (3), 341–349.
- [20] **Singh, I. ve Kumar, S.** (2018). Haar Wavelet Methods for Numerical Solutions of Harry Dym (HD), BBM-Burgers and 2D Diffusion Equations, *Bull. Braz. Math. Soc.* 49(2), 313–338.
- [21] **Mittal, A., Balyan, L. ve Tiger, D.** (2018). Numerical solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burger (BBMB) and regularized long-wave (RLW) equations using time-space pseudo-spectral method, *J. Phys.: Conf. Ser.*
- [22] **Hajiketabi, M., Abbasbandy, S. ve Casas, F.** (2018). The lie-group method based on radial basis functions for solving nonlinear high dimensional generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation in arbitrary domains, *Appl. Math. Comput.* 321, 223–243.
- [23] **Aslefallah, M., Abbasbandy, S. ve Shivanian, E.** (2020). Meshless formulation to two-dimensional nonlinear problem of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers through singular boundary method: Analysis of stability and convergence, *Numer. Meth. Part Differ. Equ.* 36, 249–267.
- [24] **Zarebnia, M. ve Parvaz, R.** (2020). Error Analysis of the Numerical Solution of the Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 38(3), 177–191.
- [25] **Hajishafieiha, J. ve Abbasbandy, S.** (2020). A new class of polynomial functions for approximate solution of generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers (gBBMB) equations, *Appl. Math. Comput.*, 367: 124765.
- [26] **Dana, Z., Najafi, H. ve Sheikhani, A.** (2020). An efficient numerical method for solving Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation using difference scheme, *J. Differ. Equ. Appl.*, 26(4), 574–585.

- [27] **S.Arora, A.Jain ve V.K.Kukreja** (2020). Solution of Benjamin-Bona-Mahony-Burgers equation using collocation method with quintic hermite splines, *Appl. Numer. Math.*, 154, 1–16.
- [28] **Bayarassou, K.** (2021). Fourth-order accurate difference schemes for solving Benjamin–Bona–Mahony–Burgers (BBMB) equation, *Eng. with Comput.*, 37, 123–138.
- [29] **Zhang, Q. ve Liu, L.** (2021). Convergence and stability in maximum norms of linearized fourth-order conservative compact scheme for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers’ equation, *J. Sci.Comput.*, 87, 1-31.
- [30] **Kutluay, S., Özer, S. ve Yağmurlu, N.M.** (2023). A New Highly Accurate Numerical Scheme for Benjamin–Bona–Mahony–Burgers Equation Describing Small Amplitude Long Wave Propagation, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 20(3), 173.
- [31] **G.D.Smith** (1987). *Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods*, Oxford: Clarendon.
- [32] **S.G.Rubin ve R.A.Graves** (1975). National aeronautics and space administration, *Tech. Rep. (Washington)*.
- [33] **Sagar, B. ve Ray, S.** (2021). Numerical and analytical investigation for solutions of fractional Oskolkov–Benjamin–Bona–Mahony–Burgers equation describing propagation of long surface waves, *Int. J. Mod. Phys.*, 35.32: 2150326.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad: Elif HAMARAT

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2016, Yıldız Teknik Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

ÇALIŞMA DURUMU:

- Kocaeli' nin Gebze ilçesinde İlköğretim Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.