

T.C.
RECEP TAYYİP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN FOURIER
YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ**

NEVRA TURGUT

TEZ DANIŞMANI
PROF. DR. KADİR KUTLU
TEZ JÜRİLERİ
DOÇ. DR. AHMET GÖKDOĞAN
DR. ÖĞR. ÜYESİ İSHAK CUMHUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RİZE-2019
Her Hakkı Saklıdır

T.C.
RECEP TAYYIP ERDOĞAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN FOURIER YÖNTEMİYLE
ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ**

Prof. Dr. Kadir KUTLU danışmanlığında, Nevra TURGUT tarafından hazırlanan bu çalışma, Enstitü Yönetim Kurulu kararıyla oluşturulan jüri tarafından 24/07/2019 tarihinde Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	Unvanı Adı Soyadı
Başkan	: Prof. Dr. Kadir KUTLU
Üye	: Doç. Dr. Ahmet GÖKDOĞAN
Üye	: Dr. Öğr. Üyesi İshak CUMHUR

İmzası

K. Kutlu
A. Gökdoğan
İ. Cumhur


Doç. Dr. Ferhat KALAYCI
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

ÖNSÖZ

Fizikte ve mühendislikte titreşim ve dalga hareketi ihtiva eden pek çok problem diferansiyel denklem halinde özellikle de kısmi türev içeren denklemler olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu tür problemlerin belli şartlar altında varsa çözümünün veya en azından çözülebilir olup olmadığı fiziksel muhakemeyele ispatı yeterli değildir. Bunun yanında elbette matematiksel olarak da kanıtlanması gerekir.

Yüksek lisans çalışmam süresince bana değerli zamanını ayıran, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Kadir KUTLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan ve desteklerini hissettiren aileme teşekkürlerimi sunarım.

Nevra TURGUT

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Tarafımdan hazırlanan “Bir Boyutlu Dalga Denkleminin Fourier Yöntemiyle Çözümünün Varlığı ve Tekliği” başlıklı bu tezin, Yükseköğretim Kurulu Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesindeki hususlara uygun olarak hazırladığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal işlemi kabul ettiğimi beyan ederim.
24/07/2019



Nevra TURGUT

Uyarı: Bu tezde kullanılan özgün ve/veya başka kaynaklardan sunulan içeriğin kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZET

BİR BOYUTLU DALGA DENKLEMİNİN FOURIER YÖNTEMİYLE ÇÖZÜMÜNÜN VARLIĞI VE TEKLİĞİ

Nevra TURGUT

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Yüksek Lisans Tezi
Danışmanı: Prof. Dr. Kadir KUTLU

Bu çalışmanın ana konusu bir boyutlu dalga (hiperbolik) denkleminin başlangıç ve periyodik sınır değer (karışık) probleminin $\forall (x, t) \in D := \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ bölgesinde çözümünün varlığı ve tekliğini göstermektir. Problem aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t, u_t); \quad (0 < t < T; 0 < x < \pi; -\infty < u_t < \infty) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (0 \leq x \leq \pi) \\ u(0, t) &= u(\pi, t), u_x(0, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T) \end{aligned}$$

Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[0, \pi]$ aralığında, $f(x, t, u_t)$, $D \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır. $u(x, t)$ ise aranan (çözüm) fonksiyondur. Çözümde ileride açıklayacağımız Fourier yönteminden yararlanılmaktadır. Çözümün varlığının ve tekliğinin ispatında ise klasik yöntem olan art arda yaklaşımlar metodundan faydalanılmaktadır.

2019, 65 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fourier Yöntemi, Periyodik Koşullar, Dalga Denklemi, Test Fonksiyonu, Dirichlet Şartları.

ABSTRACT

EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION WITH FOURIER METHOD OF ONE DIMENSIONAL WAVE EQUATION

Nevra TURGUT

Recep Tayyip Erdogan University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
Master Thesis
Supervisor: Prof. Dr. Kadir KUTLU

The main topic of this work is to show the existence and uniqueness of the solution of one dimensional wave (hyperbolic) equation with the initial and periodic boundary value (mixed) problem in the domain $\forall(x, t) \in D := \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$. The problem is as follows:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t, u_t); \quad (0 < t < T; 0 < x < \pi; -\infty < u_t < \infty) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (0 \leq x \leq \pi) \\ u(0, t) &= u(\pi, t), u_x(0, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T)\end{aligned}$$

Here $\varphi(x)$ and $\psi(x)$ are the known function which are defined on the interval $[0, \pi]$ and $f(x, t, u_t)$, is the known function which is defined on domain $D \times (-\infty, \infty)$. All functions are suppose to satisfy the necessary conditions and $u(x, t)$ is the desired solution function, We use the Fourier method for the solution which we will explain later. For the proof of the existence and uniqueness of the solution, we use the classical method of successive approximations.

2019, 65 pages

Keyword: Fourier Method, Periodic Conditions, Wave equation, Test Function, Dirichlet Condition.

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	I
TEZ ETİK BEYANNAMESİ	II
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş	1
1.2. Düzgün Yakınsak Fonksiyon Serileri	1
1.3. Ortogonal ve Ortonormal Fonksiyon Aileleri	5
1.4. Fourier Katsayıları ve Fourier Serisi	9
1.5. Ard Arda Yaklaşımlar Metodu	16
1.6. İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler	23
1.7. Periyodik Sınır Değer Problemleri	25
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	29
3. BULGULAR	30
4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR	61
5. ÖNERİLER	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	65

SEMBOLLER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{B}$	Banach Uzayı
$\ f(x)\ $	f Fonksiyonunun Normu
$\langle f, g \rangle$	İki Fonksiyonun İç Çarpımı
$u(x, t)$	Çözüm Fonksiyonu
$v(x, t)$	Test Fonksiyonu
$U_0^T(t)$	Denklemin Homojen Çözümü
Δ	Diskriminant
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

İncelenen problemde aranan fonksiyonun ve türevlerinin tanımlandığı aralığın uç değerlerinin birbirine eşit olması periyodik sınır şartı olarak adlandırılır. Bu çalışmada karışık sınır şartıyla verilen homojen olmayan bir boyutlu dalga denkleminin çözümünün varlığı ve tekliğini değişken katsayılı Fourier serisi yardımıyla göstermektir.

1.2. Düzgün Yakınsak Fonksiyon Serileri

Tanım: 1.1.1. $\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots$ $[a, b]$ de tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve $[a, b]$ deki her x için $n > N$ olduğunda $|u_n(x) - F(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ bulabilirse diziye $F(x)$ 'e yakınsaktır veya $[a, b]$ de $F(x)$ limitine sahiptir denir. Bu halde $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = F(x)$ yazılır. N sayısı ε ' na bağlı olduğu gibi x 'e de bağlı olabilir. Eğer N , sadece ε 'na bağlı ve x 'e bağlı değilse diziye $[a, b]$ de $F(x)$ e düzgün olarak yakınsar veya $[a, b]$ de düzgün yakınsaktır denir.

$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$ olmak üzere, eğer $\{S_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots$ kısmi toplam dizisi $[a, b]$ de yakınsak ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots$$

fonksiyon serisine $[a, b]$ de yakınsaktır denir. O halde $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$ yazılır ve $S(x)$ serinin toplamı olarak adlandırılır.

Buradan, her $\varepsilon > 0$ ve $[a, b]$ deki her x için $n > N$ olduğunda $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N > 0$ sayısı bulabilirse $\sum u_n(x)$ dizisinin $S(x)$ 'e yakınsadığı sonucu çıkar. Eğer N x 'e değil sadece ε ' na bağlı ise seri $[a, b]$ de düzgün yakınsak olarak adlandırılır.

$S(x) - S_n(x) = R_n(x)$ n . terimden sonraki kalan olduğundan, buna eşdeğer olarak denilebilir ki, eğer her $\varepsilon > 0$ ve $[a, b]$ deki her x için $n > N$ olduğu zaman $|R_n(x)| < \varepsilon$ sağlanacak biçimde ε ' a bağlı fakat x ' e bağlı olmayan bir N bulunabilirse $\sum u_n(x)$, $[a, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır denir.

Bu tanımlar $a \leq x \leq b$ aralığından başka $a < x < b$ gibi aralıklar içinde düzenlenebilir. Bir serinin yakınsaklık bölgesi (mutlak veya düzgün) x ' in değerinden oluşan bir küme olup burada fonksiyon serisi (mutlak veya düzgün) yakınsaktır.

Teorem 1.1.1. Eğer bir aralıkta

1. $|u_n(x)| \leq M_n, n = 1, 2, 3, \dots$

2. $\sum M_n$ yakınsak

olacak şekilde $M_1, M_2, M_3, \dots$ pozitif sabitlerinin bir dizisi bulunabilirse, o zaman $\sum u_n(x)$ aralıkta düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Örnek 1.1.1. $[0, 2\pi]$ de $\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ yakınsak olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ düzgün ve mutlak yakınsaktır.

Bu test düzgün yakınsaklık için yeterli olan ancak gerekli olmayan bir koşul ortaya koyar. Yani testin uygulanamadığı bir seri düzgün yakınsak olabilir.

Bu test bizi düzgün yakınsak bir serinin mutlak yakınsak olması gerektiğine ve tersinin doğru olduğu inancına götürebilir. Ancak bu iki özellik birbirinden bağımsızdır. Yani bir seri mutlak yakınsak olmaksızın düzgün yakınsak olabilir ve tersi de mümkündür.

Uyarı 1.1.1. Teorem 1.1.1.'e düzgün yakınsak seriler için *Weierstrass M Testi* denir.

Teorem 1.1.2. Eğer $\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots [a, b]$ de sürekli ve eğer $\sum u_n(x), [a, b]$ de $S(x)$ toplamına düzgün yakınsak ise, o zaman $S(x), [a, b]$ 'de sürekli.

Kısaca bu, sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisinin, bir sürekli fonksiyon olduğunu ifade eder. Bu sonuç, herhangi bir serinin $S(x)$ toplam fonksiyonunun herhangi bir noktada süreksiz olduğunu göstererek, verilen serinin düzgün yakınsak olmadığını ispatlamada sık sık kullanılır.

Özel olarak eğer $x_0, [a, b]$ aralığında ise, o zaman teorem,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

olduğunu ifade eder. Burada x_0 'ın $[a, b]$ nin bir uç noktası olması halinde sağ veya sol limitler kullanılır.

Teorem 1.1.3. Eğer $\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots$ $[a, b]$ de sürekli ve $\sum u_n(x), S(x)$ 'e düzgün yakınsak ise, o zaman

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

veya

$$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

sağlanır.

Kısaca, sürekli fonksiyonların düzgün yakınsak bir serisi terim terime integrallenebilir.

Teorem 1.1.4. Eğer $\{u_n(x)\}, n = 1, 2, 3, \dots$ $[a, b]$ de sürekli ve kısmi türevlere sahip ve $\sum u_n(x), S(x)$ 'e yakınsak ise, o zaman $[a, b]$ de $\sum u'_n(x)$ düzgün yakınsak iken, $[a, b]$ de

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

veya

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} u_n(x)$$

sağlanır.

Bu, bir serinin hangi koşullar altında terim terime türevlenebileceğini gösterir. Yukardakilere benzer teoremler diziler için ifade edilebilir. Örneğin, eğer $\{u_n(x)\}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ $[a, b]$ de düzgün yakınsak ise, o zaman

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b u_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) dx$$

sağlanır. Bu ise Teorem 1.1.3. ün benzeridir.

Teorem 1.1.5. $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $u = (u_n) \in \ell_p$, $v = (v_n) \in \ell_q$ ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n \cdot v_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

dir.

İspat 1.1.1. $a = \frac{1}{p}$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - a + ax - x^a$ fonksiyonu sürekli ve $[0, \infty)$ da türevlenebilirdir. Üstelik $0 < x < 1$ için $f'(x) < 0$ dir. $f'(1) = 0$ olduğuna göre $x = 1$ 'de fonksiyon minimum değerini alır. O halde $f(x) \geq f(1) = 0$ dir. Böylece, $\forall x \geq 0$ için $x^a \leq 1 - a + ax$ yani $\forall x \geq 0$,

$$x^{\frac{1}{p}} \leq 1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{p}x = \frac{1}{q} + \frac{x}{p} \quad (1.1)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Eşitlik halinde,

$(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p)^{\frac{1}{p}} = A$ ve $(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^q)^{\frac{1}{q}} = B$ diyelim.

$A = 0$ (veya $B = 0$) ise $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 0$ (veya $v_n = 0$) olacağına göre durum açıktır.

$AB > 0$ olsun. (1.1) eşitsizliğinden

$$x = \left(\frac{|u_n|}{A}\right)^p \left(\frac{B}{|v_n|}\right)^q \text{ alırsak, } \frac{|u_n||v_n|}{AB} \leq \frac{|u_n|^p}{pA^p} + \frac{|v_n|^q}{qB^q} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$$

serisinin yakınsaklığını garantiler. Böylece,

$$\frac{1}{AB} \sum_{n=1}^{\infty} |u_n||v_n| \leq \frac{1}{pA^p} A^p + \frac{1}{qB^q} A^q = 1$$

den istenilen elde edilir (Kızmaz, 1993).

1.3. Ortogonal ve Ortonormal Fonksiyon Aileleri

$f(x)$ ve $\varphi(x), [a, b]$ ($a < b$) kapalı aralığında parçalı sürekli fonksiyonlar olduğunda, $\int_a^b f(x)\varphi(x) dx$ integraline, sözü edilen fonksiyonların skaler çarpımı denir ve (f, φ) veya $(f, \varphi)_{|a,b|}$ sembolleri ile gösterilir:

$(f, \varphi) = \int_a^b f(x)\varphi(x) dx$ $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli $f(x)$, $\varphi(x)$ ve $\Psi(x)$ fonksiyonları için aşağıdaki özelliklerin doğruluğu yukarıdaki tanımdan görülmektedir.

1. $(f, \varphi) = (\varphi, f)$
2. $(f, f) \geq 0$ ' dır ve $(f, f) = 0$ eşitliği, ancak ve ancak $[a, b]$ ' de $f(x) = 0$ olduğunda doğrudur ($[a, b]$ ' de sonlu veya sayılabilir sonsuz sayıda noktası hariç olabilir.)
3. Keyfi $\lambda, v \in \mathbb{R}$ için
 $(\lambda f + v\Psi, \varphi) = \lambda(f, \varphi) + v(\Psi, \varphi)$

eşitliği doğrudur.

$\int_a^b f(x)\varphi(x) dx = 0$ olduğunda $f(x)$ ve $\varphi(x)$ ' e, $[a, b]$ aralığında *ortogonal fonksiyonlar* denir. Sıfır fonksiyon her fonksiyona ortogonal olduğundan, fonksiyonların ortogonalliğinden konuşurken, sıfır fonksiyonunu göz ardı edilecektir. $(f, f) = \int_a^b f^2(x) dx$ sayısına $f(x)$ fonksiyonunun skaler karesi, $(f, f)^{\frac{1}{2}}$ sayısına ise $f(x)$ fonksiyonunun normu denir. Norm $\|f(x)\|$ veya $\|f(x)\|_{[a,b]}$ sembolleri ile gösterilir.

$$\|f(x)\| = \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

$[a, b]$ aralığında sıfıra denk olmayan $f(x)$ fonksiyonunun normunun pozitif olacağı ve her bir $C \in \mathbb{R}$ sabiti için $\|Cf(x)\| = |C| \|f(x)\|$ eşitliğini sağlayacağı skaler çarpımın özelliklerinden görülmektedir.

Teorem 1.2.1. $f(x)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğunda,

$$\left| \int_a^b f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe *Cauchy eşitsizliği* denir.

Özel olarak $\varphi(x) = 1$ durumunda Cauchy eşitsizliği

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \sqrt{(b-a)} \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

şeklini alır.

$[a, b]$ aralığında normu 1'e eşit olan fonksiyonu ($\|\varphi\| = 1$), normal fonksiyon olarak adlandırılınsın.

Şimdi, $[a, b]$ aralığında parçalı sürekli fonksiyonlardan oluşan

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (1.2)$$

fonksiyon sistemini ele alalım.

(1.2) fonksiyonlar sistemi için $[a, b]$ aralığında

$$(\varphi_k, \varphi_n) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } k \neq n \\ \|\varphi_k\|^2, & \text{eğer } k = n \end{cases}$$

eşitlikleri sağlandığında, ona, ele alınan aralıkta *ortogonal fonksiyonlar sistemi* denir.

$\|\varphi_k\| = 1 \quad (k = \overline{1, \infty})$ durumunda,

$$(\varphi_k, \varphi_n) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } k \neq n \\ 1, & \text{eğer } k = n \end{cases}$$

veya

$$(\varphi_k, \varphi_n) = \delta_{kn}$$

yazıldığında, (1.2) sistemine *ortonormal fonksiyonlar sistemi* denir. Burada,

$$\delta_{kn} = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ 1, & k = n \end{cases}$$

olup, *Kronecker* deltası olarak adlandırılır.

Ortogonal olan fakat ortonormal olmayan fonksiyonlar sistemi, her fonksiyonu kendi normuna bölme yolu ile ortonormal duruma getirebilir.

Gerçekten (1.2) sistemi $[a, b]$ aralığında ortogonal ise, o zaman,

$$\frac{1}{\|\varphi_1\|} \varphi_1(x), \frac{1}{\|\varphi_2\|} \varphi_2(x), \dots, \frac{1}{\|\varphi_n\|} \varphi_n(x), \dots$$

sistemi sözü edilen aralıkta ortonormaldir.

Teorem 1.2.2. (*Grönwall eşitsizliği*) Negatif olmayan $f, g, h \in C[a, b]$ fonksiyonları

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x g(t)h(t)dt, \quad x \in [a, b]$$

integral eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda

$$h(x) \leq f(x) + \int_a^x f(t)g(t)e^{\int_t^x h(s)ds}dt, \quad x \in [a, b]$$

dir.

Örnek 1.2.1. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\psi_n(x) = \cos nx$,

$n = 0$ için $\psi_0(x) = 1$,

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $\psi_{-n}(x) = \sin nx$

tanımlanan $\{\psi_z(x)\}_{z \in \mathbb{Z}}$ fonksiyon ailesi $[-\pi, \pi]$ aralığında ele alınsın.

$$m \neq 0 \text{ için } \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \, dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx = 0$$

$$m \neq n \text{ için } \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x + \cos(m+n)x}{2} \, dx = 0,$$

$$m \neq n \text{ için } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(m-n)x - \cos(m+n)x}{2} \, dx = 0,$$

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(m+n)x + \cos(m-n)x}{2} \, dx = 0$$

olduğundan $z_1 \neq z_2$ olmak üzere $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ için

$$\langle \psi_{z_1}(x), \psi_{z_2}(x) \rangle = 0$$

dır. O halde $\{\psi_z(x)\}_{z \in \mathbb{Z}}$ ailesi $\ell([- \pi, \pi])$ ve dolayısıyla $\overline{M([- \pi, \pi], \mathbb{R})}$ uzayında bir ortogonal aile teşkil eder (Saban, 1972).

1.4. Fourier Katsayıları ve Fourier Serisi

Bu kesimde matematiğin birçok dallarında ve uygulamalı alanlarında sık sık kullanılan trigonometrik Fourier serileri tanıtılacak ve bu serilerin yakınsaklığı üzerine belli olan bazı yakınsaklık testleri üzerinde durulacaktır.

Tanım 1.3.1. $a_n, b_n \in \mathbb{R}, n = (0, 1, 2, \dots)$ ve $u_0(x) = \frac{1}{2}a_0, u_n(x) = a_n \cos nx + b_n \sin nx$ ($n = 1, 2, \dots$) olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (1.3)$$

biçimindeki fonksiyon serisine **trigonometrik seri** adı verilir.

$$\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.4)$$

fonksiyonlar sistemine **trigonometrik sistem**, $a_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ ve $b_n (n = 0, 1, 2, \dots)$ sayılarına da (1.4) serilerinin katsayıları denir.

Lemma 1.3.1. (1.4) trigonometrik fonksiyonları

$$(a) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0, \quad m \neq n, m, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(b) \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0, \quad m \neq n, m, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$(d) \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi, \quad n = 1, 2, \dots;$$

özelliklere sahiptir.

Teorem 1.3.1. Eğer, (1.3) serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak ve toplamı $f(x)$ ise, yani

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.5)$$

ise

$$\begin{aligned} a_n &= a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ b_n &= b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.6)$$

dir.

İspat 1.3.1. (1.5) eşitliğinin sağ yanındaki seri $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak olduğuna göre, Teorem 1.1.4 gereğince bu seri $[-\pi, \pi]$ üzerinde terim terime integrallenebilir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \right) dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \quad (\text{lemma 1.3.1}) \\
&= \pi a_0 \Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx
\end{aligned}$$

bulunur.

(1.5) eşitliğinin her iki yanı $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı $\cos mx$ (veya $\sin mx$) fonksiyonu ile çarpıldığında elde edilen eşitliğin sağ yanındaki seri de $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsak kalacaktır. Elde edilen bu eşitliğin her iki yanının $[-\pi, \pi]$ aralığında integrali alınırsa

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} \cos mx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cos mx + b_n \sin nx \cos mx \right) dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \\
&(\text{Lemma 1.3.1}) = \pi a_m \Rightarrow a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx
\end{aligned}$$

bulunur.

Benzer şekilde $b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx$ eşitliğinin doğru olduğu ispatlanabilir.

Not 1.3.1. Eğer (1.5) eşitliğinin sağ yanındaki seri $\mathbb{R}$ üzerinde (noktasal) yakınsak ise bu serinin toplamı olan f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyotlu bir fonksiyon olduğu açıktır.

Tanım 1.3.2. Eğer bir f fonksiyonu için $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ve $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ ($n = 1, 2, \dots$) integralleri mevcut ise, a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) ve b_n ($n = 1, 2, \dots$) f nin (1.6) ile tanımlanan Fourier katsayıları olmak üzere,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

biçimindeki trigonometrik seriye f fonksiyonunun **Fourier serisi (veya açılımı)** denir.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 1.3.3. Kapalı ve sınırlı $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması verilsin. Eğer,

1. Her $[\zeta, \eta] \subset (x_{k-1}, x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) aralığı için $f \in R[\zeta, \eta]$;
2. $\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \, dx$, $k = 1, 2, \dots, n$ integrali mutlak yakınsaktır

koşulları sağlanıyorsa, f , $[a, b]$ üzerinde *mutlak integrallenebilirdir* denir.

Bu durumda, f nin $[a, b]$ üzerindeki integrali

$$\int_a^b f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x) \, dx$$

tanımı ile verilir.

Not 1.3.2. Eğer f fonksiyonu $[-\pi, \pi]$ üzerinde mutlak integrallenebilir ise, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ için

$$|f(x) \cos nx| \leq |f(x)|, |f(x) \sin nx| \leq |f(x)|$$

eşitsizliklerinden $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) ve $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ ($n = 1, 2, \dots$) integrallerinin de mutlak yakınsak oldukları görülmektedir. Demek ki, $[-\pi, \pi]$ üzerinde mutlak integrallenebilir her $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için (1.6) ile verilen ifadeler anlam taşımaktadır.

Tanım 1.3.4. a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) reel sabit katsayılar olmak üzere

$$T(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t + \dots + a_n \cos nt + b_n \sin nt = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

biçimindeki ifadelere t cinsinden *trigonometrik polinom* veya *trigonometrik toplam* denir.

$a_n^2 + b_n^2 > 0$ (yani, a_n ve b_n sayılarından hiç değilse bir tanesi sıfırdan farklı) ise $T(t)$ polinomu n . derecedendir denir ve $T_n(t)$ ile gösterilir.

Tanım 1.3.5. $f, \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyotlu herhangi bir fonksiyon olsun. a_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) sayıları f nin (1.6) ile tanımlanan Fourier katsayıları olmak üzere

$$S_n(x) = S_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

şeklinde n . dereceden trigonometrik polinoma f nin *n.dereceden Fourier polinomu* veya f nin *Fourier serisinin n. dereceden kısmi toplamı* denir (Musayev, Vd., 2003).

Teorem 1.3.2. H bir Hilbert uzayı, I bir karakter kümesi ve $S = \{x_i : i \in I\} \subset H$ bir birim dikey alt küme olsun. Bu takdirde her bir $x \in H$ için,

$$\sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad (1.7)$$

dir. Bu eşitsizliğe *Bessel eşitsizliği* denir. Ayrıca (1.7) nin sol tarafında en fazla sayılabilir çoklukta terim sıfırdan farklıdır (Kızmaz,1993).

Fourier serilerinin hesaplanmasında aşağıdaki teorem kolaylık sağlar.

Teorem 1.3.3. Bir $f(x)$ fonksiyonu $(-a, a)$ aralığında çift fonksiyon, $f(-x) = f(x)$ ise

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$$

Tek fonksiyon, $f(-x) = -f(x)$ ise

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

dır. Böylece çift fonksiyonun Fourier serisi

$$b_n = 0, a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)dx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

ile

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \quad (1.8)$$

ve tek fonksiyonun Fourier serisi ise,

$$a_n = 0, a_0 = 0, b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \text{ ile}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx \quad (1.9)$$

olur.

Çift fonksiyonun açınımdan yalnız kosinüslü terimler, tek fonksiyonun açınımda ise yalnız sinüslü terimler bulunduğundan (1.8) serisine Fourier kosinüs serisi (1.9) serisine de Fourier sinüs serisi denir

Örnek 1.2.1. $f(x) = x$ fonksiyonunun Fourier serisini bulunuz.

$\forall n = 0, 1, 2, \dots$ için $x \cos nx$ fonksiyonu tek olduğundan

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx = 0$$

dır.

$\forall n = 1, 2, \dots$ için $x \sin nx$ fonksiyonu çift olduğundan dolayı

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx = a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \quad (\text{kısmi integrasyondan}) \\ &= -\frac{2x}{\pi n} \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \end{aligned}$$

bulunur. O halde, $[-\pi, \pi]$ aralığında

$$x \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nx \tag{1.10}$$

yazılabilir. $f(x) = x$ fonksiyonunu $(-\pi, \pi)$ açık aralığında $\mathbb{R}$ üzerine periyodik olarak genişletirsek (1.10) serisi bu yeni fonksiyonun Fourier serisi olacaktır.

O halde,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2}{n} \sin nx = \begin{cases} x, & |x| < \pi \text{ ise,} \\ 0, & |x| = \pi \text{ ise.} \end{cases}$$

olduğu elde edilir. Özel olarak, buradan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

bulunur.

1.5. Ard Arda Yaklaşımlar Metodu

Tanım 1.4.1. $f(x, y)$ fonksiyonu (x, y) düzleminin açık veya kapalı D bölgesinde tanımlanmış olan bir fonksiyon olsun. Eğer keyfi $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ noktaları için

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

koşulunu sağlıyorsa, bu halde $f(x, y)$ fonksiyonu y değişkenine göre *Lipschitz koşulunu sağlıyor* denir. Burada L , (x, y) değişkenlerine bağlı olmayan bir sabittir.

Örneğin, eğer D bölgesi dışbükey (konveks) bir bölgeyse ve $f(x, y)$ fonksiyonu bu bölgede y değişkenine göre sürekli ve bir L sayısı ile sınırlı kısmi türeve sahipse, bu halde $f(x, y)$ fonksiyonu bu bölgede Lipschitz koşulunu sağlamaktadır. Gerçekten, keyfi $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ noktaları için x 'i sabit tutarak y değişkenine göre ara değer teoremini uygularsak

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} (y_1 - y_2)$$

veya

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} \right|_1 |y_1 - y_2| \leq L|y_1 - y_2|$$

olduğu bulunur. Burada $(x, \bar{y})$ noktası (x, y_1) ve (x, y_2) noktalarını birleştiren doğru parçası üzerinde bir noktadır.

Şimdi

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1.11}$$

başlangıç değeri problemini göz önüne alalım. $f(x, y)$ fonksiyonu xy düzleminde bir D bölgesinde tanımlı olsun. Bu problemin D bölgesinde çözümünün varlığı göstermek için çeşitli yöntemler vardır. Bu yöntemlerden art arda yaklaşımlar yöntemi aynı zamanda çözümün kendisini de vermektedir. y_0 dan başlayarak

$$y_k(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{k-1}(t)) dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (1.12)$$

ile $\{y_k(x)\}$ fonksiyon dizisini tanımlayalım. $k = 1$ için,

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M|x - x_0| \leq M\rho \leq b$$

olur. Şimdi $k = n$ için $f(x, y_n(x))$ tanımlı ve sürekli ve $|y_n(x) - y_0| \leq b$ şartını sağladığını farz edelim. $k + 1$ için

$$|y_{n+1}(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_n)| dt \leq M|x - x_0| \leq M\rho \leq b$$

dir. Kısaca $E: |x - x_0| \leq \rho, |y - y_0| \leq \sigma$ dersek $(x, y_{k+1}(x)) \in E \subseteq D, k = 1, 2, \dots$ olur. Sonuç olarak $\{y_k(x)\}$ dizisi $|x - x_0| \leq \rho$ için tanımlı $|y_k(x) - y_0| \leq b$ eşitsizliğini gerçeğe çıkar.

Şimdi $\{y_k(x)\}$ dizisinin yakınsaklığını gösterelim. Bunun için

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [y_n(x) - y_{n-1}(x)] \quad (1.13)$$

serisini göz önüne alıp bu serinin $|x - x_0| \leq \rho$ için düzgün yakınsadığını ve limitinin sürekli olduğunu gösterelim. (1.12) ifadesinden

$$|y_1(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y_0(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y_0)| dt \leq M|x - x_0|$$

$$|y_2(x) - y_1(x)| = \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_1(t)) - f(t, y_0(t))] dt \right| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^2}{2! C} \leq \frac{M(C\rho)^2}{2! C}$$

elde edilir. $k = n$ için

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^n}{n! C} \leq \frac{M(C\rho)^n}{n! C}$$

doğru olsun. $n + 1$ için

$$\begin{aligned} |y_{n+1}(x) - y_n(x)| &= \left| \int_{x_0}^x [f(t, y_n(t)) - f(t, y_{n-1}(t))] dt \right| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)! C} \\ &\leq \frac{M(C\rho)^{n+1}}{(n+1)! C} \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece (1.13) serisinin majorantı, genel terimi $\frac{M(C\rho)^{n+1}}{C(n+1)!}$ olan seridir. (1.13) serisi $|x - x_0| \leq \rho$ için mutlak ve düzgün yakınsaktır, yani; $y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x)$ düzgün olarak mevcuttur. $f(x, y)$, D üzerinde düzgün sürekli olduğundan $|x - x_0| \leq \rho$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x, y_n(x)) = f(x, y(x))$ dir. Böylece (1.12) ifadesinden

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) &= y_0(x) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt = y_0(x) + \int_{x_0}^x \lim_{n \rightarrow \infty} f(t, y_{n-1}(t)) dt \\ &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (1.14)$$

elde edilir. Sağdaki integralde f fonksiyonu t 'nin sürekli fonksiyonudur. O halde x 'e göre türetilebilirdir ve türevi ise,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y(x))$$

dir, Yani (1.14) ile verilen $y(x)$ fonksiyonu (1.11) probleminin çözümüdür.

Çözümün tekliğini gösterelim. $|x - x_0| \leq \rho$ için (1.11) probleminin $\bar{y}(x_0) = y_0$ olan bir başka $\bar{y}(x)$ çözümü olsun. O halde

$$\bar{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \bar{y}(t)) dt$$

olur. Yukardaki işlemlere benzer şekilde $|x - x_0| \leq \rho$ için

$$|y_n(x) - \bar{y}(x)| \leq \frac{M(C|x - x_0|)^n}{n! C} \leq \frac{M(C\rho)^n}{n! C}$$

elde edilir. Buradan $n \rightarrow \infty$ alırsak $|y(x) - \bar{y}(x)| \leq 0$ ve bu durumda $y(x) = \bar{y}(x)$ bulunur. Böylece aşağıdaki teoremi elde edilmiş olur.

Teorem 1.4.1. Reel değerli $f(x, y)$ fonksiyonu $D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ bölgesinde sürekli olup y 'ye göre Lipschitz şartını gerçeklesin. Ayrıca D 'de $f(x, y)$ sınırlı olsun. Bu durumda $|f(x, y)| \leq M$. $\rho = \frac{b}{M}$ olmak üzere (1.11) başlangıç değer probleminin $|x - x_0| \leq \rho$ için çözümü var ve tektir (Tuncer, 1969).

Çözümler genel ya da özel olur. Örneğin $y = y'$ olan diferansiyel denkleminin çözümü $y = ce^x$ biçimindedir. Buna diferansiyel denklemin genel çözümü denir. Eğer yan koşulu veya başlangıç koşulu $y(0) = 3$ şeklinde verilmişse bu halde $3 = ce^0 = c$ olur. Buna göre denklem $y = 3e^x$ biçimini alır. Buna da verilen diferansiyel denklemin özel çözümü denir. Şüphesiz, diferansiyel denklemin çözümünün olması da ilk koşuldur. Bundan sonra ancak çözümün tekliği aranır. Tek çözümün varlığı için gerekli ve yeterli

koşulu Fransız matematikçi Picard (1856-1941) tarafından yukarıdaki teoremle ifade edilmiştir. Örneğin,

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$$

diferansiyel denklemi için $f(x, y) = x^2 + y^2$ denirse, $f(x, y)$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ fonksiyonları tüm $\mathbb{R}^2$ düzleminde sürekli olduklarından, (x_0, y_0) noktasından geçen bir tek $y(x)$ fonksiyonu vardır. Kısmi türev ve Lipschitz arasındaki ilişkiyi örnekte doğrudan kullanabiliriz.

Picard teoremindeki koşul yeterlidir. Fakat gerekli değildir. Yani bu koşullar olmadan çözüm olmayacağı gibi, tek çözüm de olabilir çok çözümde olabilir

Tanım 1.4.2. (*Değişkenlerine ayırma*) Eğer diferansiyel denklem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{1.15}$$

biçiminde yazılabiliyorsa, diferansiyel denkleme değişkenlere ayrılabilir denilir. Bu halde bu eşitlik,

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer $h(y) = 1$ ise (1.15) denklemi

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

olur. Bu halde verilen ifade

$$y = \int g(x) dx$$

olarak yazılabilir. Eğer $y = f(x)$, (1.15) denkleminin bir çözümü ise, $h(f(x))f'(x) = g(x)$ ve

$$\int h(f(x))f'(x) dx = \int g(x) dx + C \quad (1.16)$$

olur. $dy = f'(x) dx$ olduğundan (1.16) denklemi

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx + C$$

olarak yazılır.

Örnek 1.4.1. $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$ ve $\frac{dy}{dx} = \sin x$ biçimlerindeki diferansiyel denklemleri çözünüz.

Çözüm 1.4.1. Bir kere,

$$\frac{dy}{dx} = 1 + e^{2x}$$

denklemi $dy = (1 + e^{2x})dx$ biçiminde yazılabilir. Her iki yanın integrali alınırsa

$$\begin{aligned} y &= \int (1 + e^{2x}) dx \\ &= x + \frac{1}{2}e^{2x} + C \end{aligned}$$

olarak bulunur.

İkinci denklem de,

$$y = \int \sin x dx = -\cos x + C$$

biçiminde bir çözümdür.

Örnek 1.4.2. $(1 + x) dy - y dx = 0$ şeklindeki diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm 1.4.2. Verilen denklemin her iki yanını $(1 + x)y$ terimi ile bölünürse, $y \neq 0$ ve $x + 1 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 + x}$$

olarak yazılabilir. Her iki yanın integralinden,

$$\begin{aligned}\ln|y| &= \ln|1 + x| + C_1 \\ y &= e^{\ln|1+x|} + C_1 \\ &= e^{\ln|1+x|} e^{C_1} \quad (C = e^{C_1}) \\ &= C(1 + x)\end{aligned}$$

olarak çözülür. Özel olarak $y = 0$ ve $x = -1$ de çözümdür.

Örnek 1.4.3. $y(4) = 3$ başlangıç koşulu sağlayan

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

şeklindeki diferansiyel denklemi çözünüz.

Çözüm 1.4.3. Verilen diferansiyel denklem, $y dy = -x dx$ olarak yazılabilir. Her iki yanın integralinden,

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C_1$$

veya

$$x^2 + y^2 = C^2$$

yazılır. Eğri (4,3) noktasından geçtiği için, bu denklemden $16 + 9 = 25 = C^2$ yazılır ve diferansiyel denklemin çözümü

$$x^2 + y^2 = 25$$

olarak bulunur.

1.6. İkinci Mertebeden Lineer Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

İkinci mertebeden iki bağımsız değişkenli en genel lineer denklem

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_x + Ez_y + Fz = G \quad (1.17)$$

şeklindedir. Burada A, B, C, D, E, F ve G ; xy - düzleminin bir Ω bölgesinde x ve y bağımsız değişkenlerinin verilmiş fonksiyonlarıdır. (1.17) denklemi

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \quad D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ve $D^0 \equiv I$ özdeşlik operatörü olmak üzere

$(AD_x^2 + 2BD_x D_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + FI)z = G$ şeklinde de yazılabilir. Buna göre (1.17) denklemiyle bir

$$L \equiv L(D_x D_y) = AD_x^2 + 2BD_x D_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + FI$$

kısmi diferansiyel operatörü tanımlanır. Bu operatör lineerdir; yani her C_1, C_2 sabiti ve Ω da ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir her z_1, z_2 fonksiyon çifti için

$$L(C_1 z_1 + C_2 z_2) = C_1 Lz_1 + C_2 Lz_2$$

özellğine sahiptir. L operatörü yardımıyla (1.17) denklemi kısaca

$$Lz \equiv L(D_x, D_y)z = G$$

şeklinde de yazılabilir.

Ω bölgesinde ikinci mertebeden sürekli türevlere sahip bir $\phi(x, y)$ fonksiyonu, (1.17) denklemini bağımsız değişkenlere göre özdeş olarak sağlıyorsa, bu fonksiyona denklemin bir *çözümüdür* denir. Bu çözüme karşılık gelen $z = \phi(x, y)$ yüzeyine denklemin *integral yüzeyi* denir.

Eğer (1.17) denkleminin ikinci tarafındaki G fonksiyonu sıfır ise, denklem

$$Az_{xx} + 2Bz_{xy} + Cz_{yy} + Dz_x + Ez_y + Fz = 0 \quad (1.18)$$

olur. Bu L operatörü yardımıyla kısaca

$$Lz \equiv L(D_x, D_y)z = 0$$

şeklinde de yazılabilir. Bu denkleme, (1.17) denklemine karşı gelen *homojen denklem* denir. (1.18) homojen denklemin genel çözümü iki keyfi fonksiyon ihtiva eden bir bağıntıdır, öyle ki keyfi fonksiyonların her bir seçimi (1.18) nin bir çözümünü verir. Bu genel çözüme, (1.17) denkleminin *tamamlayıcı fonksiyonu* denir.

Teorem 1.5.1. Eğer u , (1.17) denkleminin tamamlayıcı fonksiyonu ve z_p (1.17) denkleminin bir özel çözümü ise,

$$z = u + z_p$$

fonksiyonu (1.17) denkleminin genel çözümüdür.

Teorem 1.5.2. Eğer $z_1, z_2, \dots, z_n$ (1.18) denkleminin çözümleri ise, $C_1, C_2, \dots, C_n$ keyfi sabitleri için

$C_1z_1 + C_2z_2 + \dots + C_nz_n$ fonksiyonu da (1.18) denkleminin bir çözümüdür.

Daha yüksek mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemler için benzer tanım ve teoremler ifade edilebilir.

Özel olarak L operatöründeki A, B, C, D, E , ve F katsayıları reel sabitlerse, (1.17) denklemin ikinci mertebeden sabit katsayılı lineer denklem denir. Denklemin ikinci tarafındaki G fonksiyonunun xy - düzleminin bir Ω bölgesinde analitik olması halinde sabit katsayılı lineer denklemin daima bir çözümü vardır ve gerçekte sonsuz çoklukta çözümü vardır.

İkinci mertebeden hemen hemen lineer

$$L(z) = A(x, y)z_{xx} + 2B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} = F(x, y, z, p, q) \quad (1.19)$$

denklemini göz önüne alalım. Burada A, B ve C ; x, y 'nin iki defa sürekli türevlenebilir fonksiyonları olup aynı anda üçünün birden sıfır olmadığını kabul ediyoruz.

$$AD_x^2 + 2BD_xD_y + CD_y^2$$

ifadesine L operatörünün *esas kısmı* denir. Denklemin çözümlerinin özelliklerini tayin eden bölüm esas kısımdır.

(1.19) şeklindeki ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler, normal (kanonik) formlarına göre sınıflandırılırlar. Böyle bir denkleme eğer

$$\Delta = B^2 - AC \text{ olmak üzere}$$

- $\Delta > 0$ ise hiperbolik
- $\Delta = 0$ ise parabolik
- $\Delta < 0$ ise eliptik

t iptendir denir (Çağlayan ve Çelebi,2002).

1.7. Periyodik Sınır Değer Problemleri

İkinci mertebeden adi türevli

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x) \quad (1.20)$$

lineer diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $x \in [a, b]$ için P, Q, R ve G fonksiyonları sürekli fonksiyonlardır. Eğer (1.20) denkleminde periyodik sınır şartları denilen

$$\begin{aligned} y(a) &= y(b) \\ y'(a) &= y'(b) \end{aligned} \tag{1.21}$$

şartları ilave edilirse (1.20), (1.21) problemine *periyodik sınır değer* problemi denir (Allan, 2002).

Bir telde oluşan enine dalgalar bir davul yüzeyinin titreşimleri veya bir gazda basınç dalgasının iletimi, vs. gibi hareketlerin dinamiği *Dalga denklemi* ile belirlenir:

$$\Delta^2 u = \frac{1}{v} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Burada v dalganın ilerleme hızı olup ortamın özelliğine bağlı bir sabittir. Yine değişken ayrımı yöntemiyle

$$u(x, y, z, t) = V(x, y, z)T(t)$$

şeklinde bir çözüm denenirse, zamana bağlı problem hemen çözülebilir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \Delta^2 V &= \frac{1}{v^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -k^2 \\ \Delta^2 V + k^2 V &= 0 \\ T'' + k^2 v^2 T &= 0 \end{aligned}$$

Zamana göre ıraksak olmayan çözümler bulmak için $-k^2$ seçilmesi zorunludur. k sabiti dalga sayısı, $w = kv$ açısal frekans olarak bilinir. Buna göre problemin zamana bağlı olan kısmı çözülmüş olur:

$$T(t) = A \cos wt + B \sin wt \quad (w = kv)$$

konuma bağılı kısmı çözmek için sınır koşullarına uygun bir koordinat sistemi seçmek gerekir.

Örnek 1.5.1. En basit dalga problemi olarak, L uzunlukta bir teldeki enine dalgaları inceleyelim. Bu telin iki ucu sabit tutulmuş ve $t = 0$ anında $F(x)$ ile verilen bir profile getirilip ilk hızsız olarak serbest bırakılmıştır. Telin daha sonraki hareketini $u(x, t)$ şeklindeki bir fonksiyon olarak bulmak istiyoruz.

Bu durumda, tek boyutlu dalga denklemini almak yeterli olur:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Bu denklemin $u(x, y) = X(x)T(t)$ şeklindeki çözümü arandığında zamana bağılı kısmı yukarıda bulunmuştu:

$$T'' + k^2 v^2 T = 0 \quad \rightarrow \quad T(t) = A \cos wt + B \sin wt \quad (w = kv)$$

Telin başlangıçtaki $F(x)$ konumunda bırakıldığında, her noktası bir an için hareketsizdir. Bunun anlamı

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = X \left[\frac{dT}{dt} \right]_{t=0} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dt} = 0$$

Bulunan $T(t)$ çözümünün zamana göre türevi $t = 0$ anında sıfıra eşitlenirse,

$$T'(t) = -Aw \sin wt + Bw \cos wt$$

$$T'(0) = 0 \rightarrow B = 0$$

olur ve $T(t)$ çözümü yazılabilir:

$$T(t) = A \cos wt$$

Konuma bağılı kısım da benzer şekilde çözülür:

$$X'' + k^2 X = 0 \rightarrow X(x) = C \cos kx + D \sin kx$$

Telin ucundaki sınır koşulları, k sabitinin alabileceği değerleri verir.

$$x = 0 \text{ ucunda } u(0, t) = 0 \rightarrow C = 0$$

$x = L$ ucunda $u(L, t) = 0 \rightarrow \sin kL = 0$

Bu sonuncu bağıntıya göre, k nin alacağı değerler

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

olur.

O halde, $u(x, t)$ için bulunan en genel çözüm

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x \cos w_n t$$

A_n katsayılarını bulmak için, telin $t = 0$ anındaki profili yazılır:

$$u(x, 0) = F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x$$

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Fiziksel açıdan bakıldığında, telin titreşim sırasında aldığı şekil, $k_n = \frac{n\pi}{L}$ dalga sayısı veya $\lambda_n = \frac{2\pi}{k_n} = \frac{L}{n}$ dalga boylarındaki sinüsel dalgaların bir süperpozisyonudur. Bu nedenle, $\sin k_n x$ dalgalarının her birine normal titreşim kipleri, bunların frekansları olan w_n değerine de karakteristik frekanslar denir (Karaoğlu, 2007).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada,

$\forall (x, t) \in D := \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ olmak üzere aşağıdaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_t); \quad (0 < t < T; 0 < x < \pi; -\infty < u_t < \infty)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t), u_x(0, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T)$$

başlangıç ve (karışık) sınır şartlarıyla verilen homojen olmayan bir boyutlu dalga denkleminin çözümünün varlığı ve tekliğini değişken katsayılı Fourier serisi yardımıyla $\mathcal{B}$ Banach uzayında inceliyoruz.

Burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$, $[0, \pi]$ aralığında, $f(x, t, u_t)$, $D \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde tanımlı ve gerekli özelliklere sahip bilinen fonksiyonlardır. $u(x, t)$ ise aranan (çözüm) fonksiyondur.

Problemin çözümü katsayıları t 'ye bağlı olan

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx]$$

Fourier serisi şeklinde aranır. Bilinmeyen $a_0(t)$, $a_n(t)$ ve $b_n(t)$ katsayılarını belirlemek için bulunan sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer denklemler sistemi için başlangıç değer problemi bilinen yöntemlerle çözülmektedir. Burada Lagrange veya sabitlerin değişimi yöntemi olarak bilinen yöntem kullanılmaktadır. Elde edilen çözümün de art arda yaklaşımlar metodu kullanılarak varlığı ve tekliği gösterilmektedir.

3. BULGULAR

Bu kısımda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t, u_t); \quad (0 < t < T; 0 < x < \pi; -\infty < u_t < \infty) \quad (3.1)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (0 \leq x \leq \pi) \quad (3.2)$$

$$u(0, t) = u(\pi, t), u_x(0, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T) \quad (3.3)$$

yarı lineer hiperbolik denklem için periyodik sınır şartlı karışık probleminin önce zayıf çözümünü tanımlayalım. (3.1) denklemini $v(x, t)$ ile çarpıp integral alalım.

$$\int_0^T \int_0^\pi [u_{tt} - c^2 u_{xx} - f(x, t, u_t)] v(x, t) dx dt = 0 \quad (3.4)$$

$$v(x, T) = v_t(x, T) = 0; v(0, t) = v(\pi, t); v_x(0, t) = v_x(\pi, t)$$

(3.4) ifadesinde kısmi integrasyon alıp sınır şartlarını uygularsak;

$$\int_0^T \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dt = -v(x, 0) \psi(x) + v_t(x, 0) \varphi(x) + \int_0^T u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dt$$

olur. Böylece,

$$\int_0^T \int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} v dx dt = \int_0^T \int_0^\pi u \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} dx dt + \int_0^\pi \varphi(x) \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} dx - \int_0^\pi \psi(x) v(x, 0) dx$$

elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\int_0^\pi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx = \int_0^\pi u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx$$

olur. (3.4) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^\pi [u_{tt} - c^2 u_{xx} - f(x, t, u_t)] v(x, t) \, dx \, dt = \\ & \int_0^T \int_0^\pi [u(v_{tt} - c^2 v_{xx}) - f(x, t, u_t) v] \, dx \, dt + \\ & \int_0^\pi [\varphi(x) v_t(x, 0) - \psi(x) v(x, 0)] \, dx = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

elde edilir.

Tanım 3.1. $\bar{D} = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq t \leq T < \infty\}$ bölgesinde sürekli, x 'e t 'ye göre (denklemin içerdiği mertebeden) sürekli kısmi türevlere sahip ve $v(x, T) = v_t(x, T) = 0$, $v(0, t) = v(\pi, t)$, $v_x(0, t) = v_x(\pi, t)$ şartlarını sağlayan $v(x, t)$ fonksiyonuna test fonksiyonu denir.

Tanım 3.2. Keyfi $v(x, t)$ test fonksiyonu için (3.5) eşitliğini sağlayan $u(x, t) \in C(\bar{D})$ fonksiyonuna (3.1) -(3.3) probleminin *zayıf genelleştirilmiş çözümü* denir (Chandirov, 1970).

Şimdi (3.1) -(3.3) probleminin zayıf genelleştirilmiş çözümüne bakalım. Çözümü

$$u(x, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(t) \cos nx + b_n(t) \sin nx] \quad (3.6)$$

şeklinde arayalım. Burada $a_0(t)$, $a_n(t)$ ve $b_n(t)$ bilinmeyen katsayılardır (Fourier katsayıları). Biçimsel olarak (3.6) ile verilen $u(x, t)$ fonksiyonunu (3.1) denkleminde yazalım.

$$\frac{a_0''(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n''(t) + c^2 n^2 a_n(t)) \cos nx + (b_n''(t) + c^2 n^2 b_n(t)) \sin nx] =$$

$$f(x, t, \frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n'(t) \cos nx + b_n'(t) \sin nx]).$$

Her iki tarafı $1, \cos 2kx, \sin 2kx, k = 1, 2, \dots$ ile çarpıp $[0, \pi]$ aralığında integral alırsak;

$$a_0''(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) d\xi$$

$$a_n''(t) + c^2 n^2 a_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) \cos n\xi d\xi \quad (3.7)$$

$$b_n''(t) + c^2 n^2 b_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) \sin n\xi d\xi, \quad n = 1, 2, \dots$$

sonsuz integro-diferansiyel denklemler sistemi elde edilir. (3.2) başlangıç şartlarını göz önüne alırsak (3.7) sisteminin başlangıç şartları;

$$a_0(0) = \varphi_0, \quad a_0'(0) = \psi_0$$

$$a_n(0) = \varphi_n, \quad a_n'(0) = \psi_n \quad (3.8)$$

$$b_n(0) = \varphi_n, \quad b_n'(0) = \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

olur. Burada $\mathcal{A}u(\xi, t) = \frac{a_0(t)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k(t) \cos k\xi + b_k(t) \sin k\xi]$ ve $\mathcal{A}u_t(\xi, t) = \frac{a_0'(t)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n'(t) \cos nx + b_n'(t) \sin nx]$ olarak alındı. (3.7) sistemindeki $f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t))$ fonksiyonu (3.8) sisteminin Fourier katsayıları olduğu aşikârdır.

$$f_0(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) d\xi$$

$$f_{cn}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) \cos n\xi d\xi$$

$$f_{sn}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, t, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) \sin n\xi d\xi, n = 1, 2, \dots$$

$$\varphi_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi) d\xi, \quad \varphi_{cn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi) \cos n\xi d\xi,$$

$$\varphi_{sn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(\xi) \sin n\xi d\xi, n = 1, 2, \dots$$

$$\psi_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(\xi) d\xi, \quad \psi_{cn}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(\xi) \cos n\xi d\xi,$$

$$\psi_{sn} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \psi(\xi) \sin n\xi d\xi, n = 1, 2, \dots$$

Bu durumda (3.7), (3.8) problemini aşağıdaki şekilde ele alabiliriz.

$$a_0''(t) = f_0(t); \quad a_0(0) = \varphi_0, \quad a_0'(0) = \psi_0$$

$$a_n''(t) + (cn)^2 a_n(t) = f_{cn}(t); \quad a_n(0) = \varphi_{cn}, \quad a_n'(0) = \psi_{cn}$$

$$b_n''(t) + (cn)^2 b_n(t) = f_{sn}(t); \quad b_n(0) = \varphi_{sn}, \quad b_n'(0) = \psi_{sn}, n = 1, 2, \dots$$

İkinci basamaktan sonsuz sayıda sabit katsayılı lineer denklemlerden oluşan başlangıç değer problemi elde edilir. Bu sistemi sabitlerin değişimi yöntemiyle çözersek;

$$a_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t - \tau) f_0(\tau) d\tau$$

$$a_n(t) = \varphi_{cn} \cos cnt + \frac{\psi_{cn}}{cn} \sin cnt + \frac{1}{cn} \int_0^t f_{cn}(\tau) \sin cn(t - \tau) d\tau \quad (3.9)$$

$$b_n(t) = \varphi_{sn} \cos cnt + \frac{\psi_{sn}}{cn} \sin cnt + \frac{1}{cn} \int_0^t f_{sn}(\tau) \sin cn(t - \tau) d\tau$$

$$n = 1, 2, \dots$$

elde edilir. Burada $f_0(\tau)$, $f_{cn}(\tau)$ ve $f_{sn}(\tau)$ yerine yazılırsa;

$$a_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \int_0^t (t - \tau) f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) d\xi d\tau$$

$$a_n(t) = \varphi_{cn} \cos cnt + \frac{\psi_{cn}}{cn} \sin cnt +$$

$$\frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^\pi f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) \sin cn(t - \tau) \cos n\xi \, d\xi d\tau$$

$$b_n(t) = \varphi_{sn} \cos cnt + \frac{\psi_{sn}}{cn} \sin cnt +$$

$$\frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^\pi f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, t)) \sin cn(t - \tau) \sin n\xi \, d\xi d\tau$$

$$n = 1, 2, \dots$$

çözümü elde edilir.

Çözümün varlığını ve tekliğini incelemek için,

$\{\bar{u}(t)\} := \{\frac{a_0(t)}{2}, a_1(t), b_1(t), \dots, a_n(t), b_n(t), \dots\}$ fonksiyon dizilesini göz önüne alalım ve aşağıdaki normu tanımlayalım;

$$\|\bar{u}(t)\|_{\mathcal{B}} := \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |a_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in [0, T]} |a_n(t)| + \max_{t \in [0, T]} |b_n(t)| < +\infty.$$

Bu tür fonksiyonların kümesini $\mathcal{B}$ ile gösterelim. Kolayca gösterilebilir ki $\mathcal{B}$ bir Banach uzayıdır (Edwards, 1994). Diğer yandan

$$\|\bar{\bar{u}}(t)\|_{\mathcal{B}} := \frac{1}{2} \max_{t \in [0, T]} |a'_0(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [\max_{t \in [0, T]} |a'_n(t)| + \max_{t \in [0, T]} |b'_n(t)|] < +\infty$$

normunu tanımlayalım. Ayrıca $\|\bar{\bar{u}}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\bar{u}(t)\|_{\mathcal{B}}$ farz edelim.

(3.9) sisteminin $\mathcal{B}$ de çözüm olduğunu incelemek için art arda yaklaşımlar metodunu kullanacağız. Yaklaşım bağıntılarını

$$a_0^{(k)}(t) = a_0^{(0)}(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) f(\xi, \tau, \frac{a_0'^{(k-1)}(\tau)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n'^{(k-1)}(\tau) \cos n\xi + b_n'^{(k-1)}(\tau) \sin n\xi]) d\xi d\tau,$$

$$a_0^{(0)}(t) = \varphi_0 + \psi_0 t$$

$$a_n^{(k)}(t) = a_n^{(0)}(t) + \frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^\pi (t-\tau) f(\xi, \tau, \frac{a_0'^{(k-1)}(\tau)}{2} + \sum_{m=1}^\infty [a_m'^{(k-1)}(\tau) \cos m\xi + b_m'^{(k-1)}(\tau) \sin m\xi]) \cos n\xi \sin cn(t-\tau) d\xi d\tau,$$

$$a_n^{(0)}(t) = \varphi_{cn} \cos cnt + \frac{\psi_{cn}}{cn} \sin cnt$$

$$b_n^{(k)}(t) = b_n^{(0)}(t) + \frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^\pi (t-\tau) f(\xi, \tau, \frac{a_0'^{(k-1)}(\tau)}{2} + \sum_{m=1}^\infty [a_m'^{(k-1)}(\tau) \cos m\xi + b_m'^{(k-1)}(\tau) \sin m\xi]) \sin n\xi \sin cn(t-\tau) d\xi d\tau,$$

$$b_n^{(0)}(t) = \varphi_{sn} \cos cnt + \frac{\psi_{sn}}{cn} \sin cnt, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde alalım. Basitlik için,

$$\frac{a_0'^{(k)}(\tau)}{2} + \sum_{m=1}^\infty (a_m'^{(k)}(\tau) \cos m\xi + b_n'^{(k)}(\tau) \sin m\xi) := \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)$$

olarak alalım.

$$\begin{aligned} & \max_{0 \leq \tau \leq T} |\mathcal{A}u^{(k)}| \\ & \leq \frac{1}{2} \max_{0 \leq \tau \leq T} |a_0^{(k)}(\tau)| + \sum_{m=1}^\infty \max_{0 \leq \tau \leq T} |a_m^{(k)}(\tau)| + \max_{0 \leq \tau \leq T} |b_m^{(k)}(\tau)| \\ & = \|\bar{u}^{(k)}(\xi, \tau)\|_{\mathcal{B}}, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad 0 \leq \tau \leq T \end{aligned}$$

ve

$$\left\{ \frac{1}{2} a_0^{(k)}(t), a_1^{(k)}(t), b_1^{(k)}(t), \dots, a_n^{(k)}(t), b_n^{(k)}(t), \dots \right\} := \{\bar{u}^{(k)}(t)\}$$

ile gösterelim.

Sistemin önce $\max_{0 \leq t \leq T} |\bar{u}^{(k)}(t)| < \infty$ sağladığını yani $\bar{u}^{(k)}(t) \in \mathcal{B}$ olduğunu ispat edelim.

$$\begin{aligned}
& \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \max_{0 \leq t \leq T} |a_0^{(0)}(t)| \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \max_{0 \leq t \leq T} |a_m^{(0)}(t)| + \max_{0 \leq t \leq T} |b_m^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{1}{2} (|\varphi_0| + |\psi_0|T) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(|\varphi_{cm}| + \left| \frac{\psi_{cm}}{cm} \right| + |\varphi_{sm}| + \left| \frac{\psi_{sn}}{cm} \right| \right)
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları sağdaki seri yakınsak olacak şekilde seçilir. Buradan $\max_{0 \leq t \leq T} |\bar{u}^{(0)}(t)| < +\infty$ yani $\bar{u}^{(0)}(t) \in \mathcal{B}$ olur.

Şimdi $k = 1, 2, \dots$ için eşitsizliklere bakalım.

$$\begin{aligned}
a_0^{(1)}(t) &= a_0^{(0)}(t) + \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi d\tau \\
&+ \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) f(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau,
\end{aligned}$$

üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
|a_0^{(1)}(t)| &\leq |a_0^{(0)}(t)| + \frac{2}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)] d\xi d\tau \right| \\
&+ \frac{2}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) f(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right|.
\end{aligned}$$

bulunur.

Sağ tarafa τ 'ya göre Cauchy eşitsizliği uygulayalım.

$$\leq |a_0^{(0)}(t)| + \frac{2}{\pi} \left[\int_0^t (t - \tau)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \left[\int_0^\pi (t - \tau)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bu sefer ξ 'ye göre Cauchy eşitsizliği uygularsak (fonksiyonlardan biri 1 olarak alınmaktadır.)

$$\begin{aligned} &\leq |a_0^{(0)}(t)| + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\left(\int_0^\pi 1^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\left(\int_0^\pi 1^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \\ &|a_0^{(1)}(t)| \leq |a_0^{(0)}(t)| + \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{\pi} \left(\int_0^t \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{\pi} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Lipschitz şartını uygularsak

$$\begin{aligned} |a_0^{(1)}(t)| &\leq |a_0^{(0)}(t)| + \sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) (\mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \\ &\sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned} |a_0^{(1)}(t)| &\leq |a_0^{(0)}(t)| \\ &+ 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_B + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

elde edilir. Benzer yolla $a_n^{(1)}(t)$ 'yi değerlendirelim.

$$a_n^{(1)}(t) = a_n^{(0)}(t) + \frac{2}{cn\pi} \int_0^t \int_0^\pi f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) \sin cn(t - \tau) \cos n\xi \, d\xi d\tau$$

$$|a_n^{(1)}(t)| \leq |a_n^{(0)}(t)| +$$

$$\frac{2}{cn\pi} \left| \int_0^t \sin cn(t - \tau) \, d\tau \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)] \cos n\xi \, d\xi \right|$$

$$+ \frac{2}{cn\pi} \left| \int_0^t \sin cn(t - \tau) \, d\tau \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right|.$$

τ 'ya gore Cauchy eşitsizliği uygulanırsa,

$$|a_n^{(1)}(t)| \leq |a_n^{(0)}(t)| + \frac{2}{cn\pi} \left(\int_0^t \sin^2(t - \tau) \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\left(\int_0^t \left[\left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0) \right) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\frac{2}{cn\pi} \left(\int_0^t \sin^2 cn(t - \tau) \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \int_0^\pi [f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi]^2 \, d\tau \right)^{1/2}$$

$$\leq |a_n^{(0)}(t)| + \frac{2\sqrt{T}}{cn\pi} \left(\int_0^t \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \, d\tau \right)^{1/2}$$

$$+ \frac{2\sqrt{T}}{cn\pi} \left(\int_0^t \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \, d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Burada

$$\int_0^t \sin^2 cn(t - \tau) \, d\tau \leq \max_{\tau \in [0, T]} \int_0^t \sin^2 cn(t - \tau) \, d\tau \leq \int_0^t 1 \cdot d\tau \leq T$$

kullanıldı.

Böylece $n = 1, 2, \dots$ üzerinden toplam alırsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}(t)| \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi)^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Toplam ve integral yer değişebilir olduğunu varsayıp, Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}(t)| + \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ &\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} = \\ &\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}(t)| + \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Burada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

eşitliği kullanıldı.

Şimdi Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}(t)| \\ &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\ &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Lipschitz şartını uygulayalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}(t)| + \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) (\mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\ &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

$t \in [0, T]$ aralığında maksimum alalım,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t)| &\leq \\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(0)}(t)| &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_B + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) \end{aligned} \tag{3.12}$$

Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(1)}(t)| &\leq \\ \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(0)}(t)| + \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

olduğu görülür.

(3.11), (3.12), (3.13) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{|a_0^{(1)}(t)|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^{(1)}(t)| + |b_n^{(1)}(t)|) &\leq \frac{|a_0^{(0)}(t)|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^{(0)}(t)| + |b_n^{(0)}(t)|) \\ &+ \left(T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} + \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right) (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)}) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan t 'ye göre maksimum alırsak

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} &\leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \\ &+ \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} (\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)}) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} &\leq \left(1 + \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \right) \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \\ &+ \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} < +\infty \end{aligned}$$

bulunur. Benzer yolla;

$$\|\bar{u}^{(2)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(1)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) < +\infty$$

bulunur.

Süreci devam ettirirsek

$$\|\bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(k-1)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) < \infty$$

elde edilir. Şimdi art arda yaklaşımlar için sırasıyla

$$\left| a_0^{(k+1)}(t) - a_0^{(k)}(t) \right|, \left| a_n^{(k+1)}(t) - a_n^{(k)}(t) \right|, \left| b_n^{(k+1)}(t) - b_n^{(k)}(t) \right|; k = 0, 1, 2, \dots$$

farklarını değerlendirelim.

$$\begin{aligned} \left| a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t) \right| &= \frac{2}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) d\xi d\tau \right| \\ &\leq \frac{2}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi d\tau \right| \\ &+ \frac{2}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) f(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right| \end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t)| &\leq \left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
&\left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Sağ taraftaki integralleri hesaplayıp bu sefer ξ 'ye göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
|a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t)| &\leq \sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)]^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \\
&+ \sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Birinci integralde Lipschitz şartını kullanırsak

$$\begin{aligned}
&|a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t)| \\
&\leq \sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) (\mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \max_{0 \leq t \leq T} |\mathcal{A}u_t^{(0)}(t)| + \left(\int_0^t \int_0^\pi f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \right).
\end{aligned}$$

Netice olarak

$$\begin{aligned}
& |a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t)| \\
& \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.14}$$

elde edilir. Şimdi diğer değerlendirmelere bakalım.

$$\begin{aligned}
& |a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| \leq \frac{2}{cn\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) \cos n\xi \, d\xi d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{cn} \left| \int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)] \cos n\xi \, d\xi d\tau \right| \\
& + \frac{1}{cn} \left| \int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi d\tau \right|
\end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
& |a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right)^{1/2} + \\
& \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi)^2 d\tau \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$ üzerinden toplam alıp Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{\sqrt{T}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right]^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{T}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2} \\
& + \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2}.
\end{aligned}$$

Eşitsizliğin sağ tarafında toplamla integralin değişebilir olduğunu varsayıp (gerekli şartlardan sonra belirtilecek)

Bessel eşitsizliğini uygulayalım ($\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ olduğunu göz önüne alıyoruz).

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0)) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2} \\
& + \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi, \tau, 0) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^t \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, 0))^2 d\xi d\tau \right]^{1/2} \\
& + \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^t \int_0^{\pi} f^2(\xi, \tau, 0) d\xi d\tau \right]^{1/2}
\end{aligned}$$

Lipschitz şartını uygulayalım.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left[\left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right].
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| \leq \\
& \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(1)}(t) - b_n^{(0)}(t)| \\
& \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

(3.14), (3.15) ve (3.16) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} |a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} \left[|a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| + |b_n^{(1)}(t) - b_n^{(0)}(t)| \right] \\
& \leq \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \left(\|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|\bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} + \|f(x, t, 0)\|_{L_2(D)} \right) = A_T
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Burada $0 \leq A_T < +\infty$ olduğu açıktır. O halde (3.17) eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2} |a_0^{(1)}(t) - a_0^{(0)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n^{(1)}(t) - a_n^{(0)}(t)| + |b_n^{(1)}(t) - b_n^{(0)}(t)|] \leq A_T,$$

Buradan

$$\|\bar{u}^{(1)}(t) - \bar{u}^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq A_T. \quad (3.18)$$

bulunur.

Şimdi $|a_0^{(2)}(t) - a_0^{(1)}(t)|$ farkını değerlendirelim.

$$|a_0^{(2)}(t) - a_0^{(1)}(t)| = \left| \frac{2}{\pi} \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))) d\xi d\tau \right|.$$

τ 'ya ve ξ 'ye göre Cauchy eşitsizliği ardından Lipschitz şartını uygularsak

$$\begin{aligned} & |a_0^{(2)}(t) - a_0^{(1)}(t)| \\ & \leq \left(\int_0^t (t - \tau)^2 d\tau \right)^{1/2} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\ & \leq \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))]^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \|\bar{u}_0^{(1)}(t) - \bar{u}_0^{(0)}(t)\|_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

(3.18) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left| u_0^{(2)}(t) - u_0^{(1)}(t) \right| \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \quad (3.19)$$

elde edilir.

Şimdi $\left| a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t) \right|$ ve $\left| b_n^{(2)}(t) - b_n^{(1)}(t) \right|$ farklarını değerlendirelim.

$$\begin{aligned} & \left| a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t) \right| \\ &= \frac{2}{cn\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi \, d\xi d\tau \right|. \end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliği alalım.

$$\begin{aligned} & \left| a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t) \right| \\ &\leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \left[\int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi [f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau))] \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2} \end{aligned}$$

$n = 1, 2, \dots$ için toplam alıp Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t) \right| \leq \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left[\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(0)}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi \, d\xi \right)^2 d\tau \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Toplam ve integralin yerini değiştirip Bessel eşitsizliğini uygulayalım;

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lipschitz şartını da uygulayalım.

$$\leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^{\pi} b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau \right)^{1/2} \left\| \bar{u}_{cn}^{(1)}(t) - \bar{u}_{cn}^{(0)}(t) \right\|_{\mathcal{B}}$$

(3.18) eşitsizliğini de göz önüne alırsak

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \quad (3.20)$$

Benzer yolla,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(2)}(t) - b_n^{(1)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \quad (3.21)$$

olur. Bulunan (3.19), (3.20) ve (3.21) eşitsizlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} & \frac{|a_0^{(2)}(t) - a_0^{(1)}(t)|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n^{(2)}(t) - a_n^{(1)}(t)| + |b_n^{(2)}(t) - b_n^{(1)}(t)|) \\ & \leq \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \end{aligned}$$

yani

$$|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)| \leq \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \quad (3.22)$$

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & |a_0^{(3)}(t) - a_0^{(2)}(t)| \\ & \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)))^2 d\xi d\tau \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Lipschitz uygulayalım.

$$\begin{aligned} & |a_0^{(3)}(t) - a_0^{(2)}(t)| \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\mathcal{A}u_t^{(2)}(\xi, \tau) - \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(\tau) - \bar{u}^{(1)}(\tau)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ & = 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \|\bar{u}^{(2)}(\tau) - \bar{u}^{(1)}(\tau)\|_B \|b(x, t)\|_{L_2(D)}. \end{aligned}$$

Son eşitsizlikte (3.22) eşitsizliğini dikkate alıp gereken işlemi yapalım;

$$\begin{aligned} & |a_0^{(3)}(t) - a_0^{(2)}(t)| \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \|\bar{u}^{(2)}(\tau) - \bar{u}^{(1)}(\tau)\|_B \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \\ & \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2. \end{aligned}$$

Sonuç olarak

$$|a_0^{(3)}(t) - a_0^{(2)}(t)| \leq 2T \left[A_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right] \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2 \quad (3.23)$$

ve

$$|a_n^{(3)}(t) - a_n^{(2)}(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(2)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(1)}(\xi, \tau))) \cos n\xi d\xi \right)^2 d\tau \right)^{1/2}.$$

n 'ye göre toplam alıp Hölder, Bessel ve Lipschitz eşitsizliklerini uygularsak,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(3)}(t) - a_n^{(2)}(t)| &\leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \|\bar{u}^{(2)}(t) - \bar{u}^{(1)}(t)\| \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3.22) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(3)}(t) - a_n^{(2)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) A_T \|b(x, t)\|_{L_2(D)} \|b(x, t)\|_{L_2(D)}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n^{(3)}(t) - a_n^{(2)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(A_T \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right) \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2 \quad (3.24)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(3)}(t) - b_n^{(2)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(A_T \left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right) \|b(x, t)\|_{L(D)}^2 \quad (3.25)$$

(3.23), (3.24) ve (3.25) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |a_0^{(3)}(t) - a_0^{(2)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [|a_n^{(3)}(t) - a_n^{(2)}(t)| + |b_n^{(3)}(t) - b_n^{(2)}(t)|] \\ & \leq \left[T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} + \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right] \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2 \end{aligned}$$

bulunur.

Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra,

$$|\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)| \leq A_T \left[\sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2 \quad (3.26)$$

elde edilir. Benzer yolla

$$|a_0^{(4)}(t) - a_0^{(3)}(t)| \leq \sqrt{\frac{4T^3}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

(3.26) eşitsizliği dikkate alınırsa,

$$\left| a_0^{(4)}(t) - a_0^{(3)}(t) \right| \leq 2T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3 \quad (3.27)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \left| a_n^{(4)}(t) - a_n^{(3)}(t) \right| \\ & \leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(3)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(2)}(\xi, \tau)) \right) \cos n\xi \, d\xi d\tau \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

toplam alıp gerekli eşitsizlikleri uyguladıktan sonra,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^{(4)}(t) - a_n^{(3)}(t) \right| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(3)}(t) - \bar{u}^{(2)}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

(3.26) eşitsizliğinden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^{(4)}(t) - a_n^{(3)}(t) \right| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^2$$

elde edilir.

Sonuç olarak;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n^{(4)}(t) - a_n^{(3)}(t) \right| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3 \quad (3.28)$$

ve benzer şekilde

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n^{(4)}(t) - b_n^{(3)}(t)| \leq \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{a} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^2 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3 \quad (3.29)$$

elde edilir.

(3.27), (3.28) ve (3.29) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |u_0^{(4)}(t) - u_0^{(3)}(t)| + \sum_{n=1}^{\infty} [|u_{cn}^{(4)}(t) - u_{cn}^{(3)}(t)| + |u_{sn}^{(4)}(t) - u_{sn}^{(3)}(t)|] \\ & \leq \left(T \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^2 + \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^2 \right) \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3 \end{aligned}$$

elde edilir.

Düzenlersek,

$$|\bar{u}^{(4)}(t) - \bar{u}^{(3)}(t)| \leq A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^3 \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^3$$

elde edilir. Tümevarımla

$$\|\bar{u}^{(k+1)}(t) - \bar{u}^{(k)}(t)\|_{\mathcal{B}} \leq A_T \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right]^k \|b(x, t)\|_{L_2(D)}^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

elde edilir.

Sonuç olarak,

$$b(x, t) \in L_2(D), f(x, t, 0) \in L_2(D), |f(x, t, u_t) - f(x, t, v_t)| \leq b(x, t)|u_t(x, t) - v_t(x, t)|, \left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \|b(x, t)\| < 1 \right.$$

ve $\varphi(x), \psi(x)$ fonksiyonları (3.10) şartını sağladığında

$$\left\{ \frac{1}{2} a_0^{(k)}(t), a_1^{(k)}(t), b_1^{(k)}(t), \dots, a_n^{(k)}(t), b_n^{(k)}(t), \dots \right\} := \{\bar{u}^{(k)}(t)\}$$

dizisi $\mathcal{B}$ Banach uzayında düzgün yakınsaktır.

$$\bar{u}^{(k)}(t) = \bar{u}^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^k (\bar{u}^{(j)}(t) - \bar{u}^{(j-1)}(t))$$

olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{u}^{(k)}(t) := \bar{u}(t) := \left\{ \frac{1}{2} a_0(t), a_1(t), b_1(t), \dots, a_n(t), b_n(t), \dots \right\}$$

$\bar{u}(t)$ 'nin (3.9) sistemini sağladığını gösterelim.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |a_0^{(k+1)}(t) - a_0(t)| \\ &= \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) d\xi d\tau \right|. \end{aligned}$$

τ 'ya göre Cauchy eşitsizliğini kullanıp, integral alalım;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |a_0^{(k+1)}(t) - a_0(t)| \\ & \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Diğer değerlendirmelere bakalım.

$$\begin{aligned}
& \left| a_n^{(k+1)}(t) - a_n(t) \right| = \\
& \frac{2}{cn\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) \sin an(t - \tau) \cos n \xi d\xi d\tau \right| \\
& \leq \frac{1}{cn} \left(\int_0^t \sin^2(t - \tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \times \\
& \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) \cos n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\
& \leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) \cos n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
& \left| b_n^{(k+1)}(t) - b_n(t) \right| \leq \\
& \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 1, 2, \dots$ için toplam alıp, taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned}
M(t) &= \frac{1}{2} \left| a_0^{(k+1)}(t) - a_0(t) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| a_n^{(k+1)}(t) - a_n(t) \right| + \left| b_n^{(k+1)}(t) - b_n(t) \right| \right) \\
&\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{\sqrt{T}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) \cos n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{\sqrt{T}}{c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau)) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t(\xi, \tau)) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}$$

elde edilir.

Hölder eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} M(t) &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right) \cos n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2} \\ &+ \frac{\sqrt{T}}{c} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right) \sin n \xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Toplam ve integralleri değişip Bessel eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} M(t) &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &+ \frac{\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{6}} \left(\int_0^t \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Birinci integrale tekrar Cauchy eşitsizliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned}
M(t) &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \sqrt{\frac{4}{\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ \frac{2\pi}{c} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^{2\pi} \left(f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t^{(k)}) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Lipschitz şartından,

$$\begin{aligned}
M(t) &\leq \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) \left(\mathcal{A}u_t^{(k)}(\xi, \tau) - \mathcal{A}u_t(\xi, \tau) \right)^2 d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}^{(k)}(\tau) - \bar{u}(\tau)| d\xi d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tümevarım hipotezi gereği $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\bar{u}^{(k)}(\tau) - \bar{u}(\tau)\| = 0$ olduğundan $\bar{u}(t)$ (3.9) sistemini sağlar.

Çözümün tekliğini gösterelim.

$$\bar{v}(t) = \left\{ \frac{\bar{a}_0(t)}{2}, \bar{a}_1(t), \bar{b}_1(t), \dots, \bar{a}_n(t), \bar{b}_n(t), \dots \right\}$$

(3.9) sisteminin bir diğer çözümü olsun.

$$\frac{1}{2} |a_0(t) - \bar{a}_0(t)| = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (t - \tau) (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) d\xi d\tau \right|$$

$$\leq \frac{1}{2} \left(\int_0^t (t-\tau)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |a_0(t) - \bar{a}_0(t)| &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T^3}{3}} \left(\int_0^t \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi b(\xi, \tau) |\mathcal{A}u_t - \mathcal{A}v_t| d\xi \right)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |a_n(t) - \bar{a}_n(t)| &= \frac{2}{cn\pi} \left| \int_0^t \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) \sin n(t-\tau) \cos n\xi d\xi d\tau \right| \\ &\leq \frac{1}{cn} \left(\int_0^t \sin^2 an(t-\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |a_n(t) - \bar{a}_n(t)| &\leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) \cos n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Benzer olarak,

$$|b_n(t) - \bar{b}_n(t)| \leq \frac{\sqrt{T}}{cn} \left(\int_0^t \left[\frac{2}{\pi} \int_0^\pi (f(\xi, \tau, \mathcal{A}u_t) - f(\xi, \tau, \mathcal{A}v_t)) \sin n\xi d\xi \right]^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur.

$n = 1, 2, \dots$ için toplam alıp Hölder eşitsizliği uygulayalım.

$$|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)| \leq \left(T + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right) \left(\int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau \right)^{1/2}$$

$$|\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 \leq \left(T + \frac{2\pi}{a} \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \right)^2 \int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 d\xi d\tau.$$

Burada Grönwall eşitsizliğini uygularsak;

$$\max_{0 \leq t \leq \tau} |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 \leq 0 \times \exp \int_0^t \int_0^\pi b^2(\xi, \tau) d\xi d\tau = 0,$$

elde edilir. Böylece $\max_{0 \leq t \leq \tau} |\bar{u}(t) - \bar{v}(t)|^2 = 0 \Rightarrow \bar{u}(t) = \bar{v}(t)$ bulunur. Yani çözüm tektir. Böylece aşağıdaki teoremleri elde etmiş olduk;

Teorem 3.1. Aşağıdaki şartların sağlandığını kabul edelim;

1. $f(x, t, u_t)$ bütün bağımsız değişkenlerine göre $\bar{D} \times (-\infty, \infty)$ bölgesinde sürekli,
2. $|f(x, t, u_t) - f(x, t, v)| \leq b(x, t)|u_t - v_t|$, $b(x, t) \in L_2(D)$, $b(x, t) \geq 0$ ve $\left[\left(T + \frac{2\pi}{c} \right) \sqrt{\frac{T}{3\pi}} \|b(x, t)\| < 1, \right.$
3. $f(x, t, 0) \in L_2(D)$,
4. $\varphi(0) = \varphi(\pi)$, $\varphi'(0) = \varphi'(\pi)$, $\varphi(x) \in C^1[0, \pi]$,
 $\psi(0) = \psi(\pi)$; $\psi(x) \in C[0, \pi]$.

Bu durumda (3.9) sistemi $\mathcal{B}$ Banach uzayında tek çözüme sahiptir.

Teorem 3.2. Teorem 3.1.'in şartları gerçekleşsin. Bu durumda (3.1) -(3.3) probleminin tek bir zayıf genelleştirilmiş çözümü vardır ve bu çözüm katsayı fonksiyonları $D = \{(x, t) | 0 < x < \pi, 0 < t < T < \infty\}$ 'de sürekli olan düzgün yakınsak (3.6) serisi ile verilir.

4. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu çalışmada bir boyutlu dalga denkleminin başlangıç değer ve periyodik sınır değer şartlı $\forall (x, t) \in D := \{(x, t) | -\pi < x < \pi, 0 < t < T\}$ olmak üzere aşağıdaki

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t, u_t); \quad (0 < t < T; -\pi < x < \pi; -\infty < u_t < \infty) \\ u(x, 0) &= \varphi(x), u_t(x, 0) = \psi(x); \quad (-\pi \leq x \leq \pi) \\ u(-\pi, t) &= u(\pi, t), u_x(-\pi, t) = u_x(\pi, t); \quad (0 \leq t \leq T) \quad (f \in \bar{D} \times (-\infty, \infty)) \end{aligned}$$

(ve Lipschitz şartını sağlar) probleminin (zayıf) genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

Burada incelenen denklem bir lineer denklem tipidir. Lineer olmayan kısmi türevli denklemler için bir genel çözüm vermek imkânsız olduğundan lineer, yarı lineer veya hemen hemen lineer denklemler uygulamada öne çıkmaktadır. Bu tür denklemler çeşitli başlangıç ve sınır şartlarında farklı yöntemler uygulayarak pek çok araştırmacının inceleme konusu olmuştur (örneğin Lavrenyuk and Ptashnyk, 1999; Bouziani and Mesloub, 2002; Halilov and Çiftçi, 2009 vs.). Ancak Fourier yöntemiyle periyodik sınır şartlı problemler nispeten daha az araştırılmıştır.

5. ÖNERİLER

Burada elde ettiğimiz sonuçlar ve yaklaşımlar için aranan $u(x, t)$ fonksiyonu ve bilinen $f(x, t, u_t)$ fonksiyonu üzerine konulan koşullar biraz “ağır” olabilir. Daha “hafif” şartlar altında problemin çözümünün varlığının ve tekliğini araştırmak da olasıdır, ancak tahmin edilemeyen bir takım zorluklar çıkabilir.

Fourier metodu bazı lineer ikinci veya daha yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler için periyodik sınır şartlı karışık problemlerin çözümüne de uygulanabilir. Farklı başlangıç ve sınır şartları altında genelleştirilmiş çözüm tanımlanıp problemin varlığı ve tekliği incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Allan, K., 2002.** Hilbet Spaces, Boundary Value Problem and Orthonal Polinoms, Birkhauser, 1st. Edition, ISBN: 3-7643-6701-6, 352 p.
- Bouziani, A. and Mesloub, S., 2002.** Mixed Problem with a Weighted Integral Condition for a Parabolic Equation with the Bessel Operator, Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis, 15(3), 277-286.
- Chandirov, G.I., 1970.** On Mixed Problem for a Class of Quasilinear Hiporbolic Equation, Ph.D. Thesis, Tbilisi, Georgia, 96 p.
- Çağlıyan, M. ve Çelebi, O., 2002.** Kısmi Diferansiyel Denklemler. Vipaş A.Ş, yayın no:72, ISBN:975-564-134-3, 311 s., 115-139.
- Dönmez, A., 2005.** Diferansiyel Denklemler. Arıkan Basım Yayım Dağıtım LTD. ŞTİ., Yayın no: 3 ISBN: 975-6145-02-1, 584 s., 95-97.
- Edwards, R.E., 1994.** Functional Analysis, Theory and Applications, Dover Publications, New York, ISBN: 0-486-68143-2, 783 p.
- Halilov, H. and Çiftçi İ., 2009.** Fourier Method for Quasilinear Pseudo-Parabolic Equation with Periodic Boundary Condition, International Journal of Pure and Applied Matematics, 52(5), 717-727.
- Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M., 1999.** Yüksek Matematik 1 Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi. Literatür Yayınları, 1. Cilt, ISBN: 975-8431-08-0, 470 s.,336.
- Halilov, H., Hasanoğlu, A. ve Can, M., 2001.** Matematik 2 Çok Değişkenli Fonksiyonlar Analizi. Literatür Yayınları, 2. Cilt, ISBN: 975-8431-09-9, 977 s., 925-928.
- Hasanov, E., Uzgören, G. ve Büyükaksoy, A., 2002.** Diferansiyel Denklemler. Papatya Yayıncılık, 1. Basım, ISBN:975-6797-25-8, 368 s., 24.
- Karaoğlu, B., 2007.** Fizik ve Mühendislikte Matematik Yöntemler. Seçkin Yayıncılık, 5. Baskı, ISBN: 978-975-02-0295-23, 320 s, 276-277.
- Kızmaz, H., 1993.** Fonksiyonel Analize Giriş., Karadeniz Teknik Üniversitesi Basımevi Trabzon Genel yayın no: 169, 322 s., 17.
- Lavrenyuk, S.P. and Ptashnyk, M.B., 1999.** On Certain Nonlinear Pseudoparabolic Variational Inequalities without Initial Conditions, Ukrainian Mathematics Journal, 51(3), 34-46.

Musayev, B., Alp. M. ve Mustafayev, N., 2003. Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz. Tekagaç Eylül Yayıncılık, Cilt 2, 1204 s., 1110-1114.

Saban, G., 1972. Analiz Dersleri II. Fen Fakültesi Basımevi, İstanbul, 362 s., 317.

Spiegel, R.M., 1974. İleri Matematik. Nobel yayın dağıtım, ISBN: 07-060229-8, 385 s., Hacısalihoğlu, H. H.(Ç. Ed.), 227-229.

Tuncer, T., 1969. Alıştırmalarla Diferensiyel Denklemler, 1969. Matbaa Teknisyenleri Basımevi, İstanbul, 187 s.

Yarasa, R., 1976. Fourier Analiz. Çağlayan Basımevi, 221 s.,



ÖZGEÇMİŞ

Nevra TURGUT, 22/12/1989 tarihinde Trabzon-Ortahisar’da doğdu. İlköğretimini 2002 yılında Yomra ilçesinde Yomra Merkez İlköğretim Okulu’nda ve Ortaöğretimini 2006 yılında Yomra ilçesinde Yomra Lisesi’nde tamamladı. 2009 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümünü kazandı. Bir yılın sonunda aynı Üniversitenin Fizik Bölümünden Matematik Bölümüne yatay geçiş yaptı. 2013 yılında Matematik Bölümünü bitirdi. Bir dönem MEB’e bağlı vekil öğretmenlik yaptı. 2014 yılında aynı üniversiteden Pedagojik Formasyon Eğitim Sertifikasını aldı. 2015 yılında Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda başladığı yüksek lisansa devam etmektedir.