

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS

BİR BOYUTLU KONFORM KESİRLİ
MERTEBEDEN DIRAC DENKLEMİ

Gülafer İSTANBUL

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2025

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Bir Boyutlu Konform Kesirli Mertebeden Dirac Denklemi**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

12/08 /2025

(İmza)

Gülafer İSTANBUL

ÖNSÖZ

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Hüseyin Tuna'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme özellikle kardeşim Abdullah'a sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Ağustos, 2025

Gülafer İSTANBUL



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Temel Kavramlar	4
3. MATERYAL VE YÖNTEM	9
3.1. Konform Kesirli Dirac Sistemler	9
3.2. Kendine Eş Konform Kesirli Dirac Sistem.....	17
3.3. Green Fonksiyonu	23
3.4. Eigen Fonksiyonu Açılım Formülü	26
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	34
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR	40

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^2}$	: $\mathbb{C}^2$ 'de Standart İç Çarpım
$(I_a^a f)(x)$	: a Mertebesinde f 'nin a 'dan Başlayan Konform Kesirli İntegrali
$(T_a^a f)(x)$	: f Fonksiyonun a Mertebesinden a 'dan Başlayan Sol Konform Kesirli Türevi
$(I_a^b f)(x)$	: f 'nin a mertebesinden b 'de Sonlanan Sol Konform Kesirli İntegrali
$(T_a^b f)(x)$	: f Fonksiyonunun a Mertebesinden b 'de Sonlanan Sol Konform Kesirli Türevi
$\mathbb{C}^2$	: Karmaşık Sayılarda İç Çarpım Uzayı
Γ_M	: Disk
$T_a f(x)$	: f Fonksiyonunun a Mertebesinden Konform Kesirli Türevi
T_a	: a Mertebesinden Konform
$\mathbb{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
W	: Wronskian
$\mathcal{H}$	: Hilbert Uzayı
Ω	: Ohm
Γ	: Ghe (Gama)
Φ	: Fi

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bir Boyutlu Konform Kesirli Mertebeden Dirac Denklemi Gülafer İSTANBUL

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ağustos, 2025

Dirac denklemi, modern fizik tarihinde devrim niteliğinde bir gelişme olarak kabul edilmektedir. Rölatif kuantum mekaniğinin temellerini atan bu denklem, yalnızca elektronun yarı-spin ($\text{spin}-\frac{1}{2}$) özelliğini başarılı bir şekilde açıklamakla kalmaz, aynı zamanda karşıt parçacıkların (antiparçacıklar) varlığını da öngörerek teorik fizikte yeni bir dönemin kapılarını aralamıştır. Ayrıca, hidrojen atomunun ince yapısına ilişkin spektrumun açıklanmasında da büyük bir başarı göstermiştir.

Bu tez çalışmasında, klasik Dirac denkleminin bir genellemesi olarak değerlendirilebilecek bir boyutlu konform kesirli mertebeden Dirac denklemi ele alınacaktır. Bu çalışmada öncelikle konunun tarihsel gelişimi incelenmiş ve konunun anlaşılmasına katkı sağlayacak gerekli ön bilgiler sunulmuştur. Ayrıca, çalışmada kullanılan bazı temel kavramlara ve ilerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulacak önemli matematiksel sonuçlara yer verilmiştir.

Tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinde, bir boyutlu konform kesirli mertebeden Dirac denklemi ayrıntılı olarak ele alınmış; bu denklemin yapısı, matematiksel özellikleri ve fiziksel anlamı incelenmiştir.

Son bölümde ise, söz konusu Dirac denklemi için tanımlanan bir boyutlu konform kesirli mertebeden Dirac operatörünün disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri araştırılmış ve bu genişlemeler sınır koşulları cinsinden ifade edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Bir boyutlu konform kesirli mertebeden Dirac sistemi, simetrik operatör, kendine eş operatör, dissipatif operatör, sınır değer uzayı, regüler durum

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

One Dimansional Conformable Fractional Order Dirac Equation Gülafer İSTANBUL

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

August, 2025

The Dirac equation is regarded as a revolutionary development in the history of modern physics. As a foundational equation of relativistic quantum mechanics, it not only successfully explains the half-spin (spin- $\frac{1}{2}$) nature of the electron but also predicts the existence of antiparticles, thereby opening a new era in theoretical physics. Furthermore, it provides an accurate description of the fine structure of the hydrogen atom spectrum.

In this thesis, a one-dimensional conformable fractional-order Dirac equation, which can be considered as generalization of the classical Dirac equation, is studied. The work begins with an overview of the historical development of the subject, accompanied by the necessary preliminary background to facilitate a better understanding of the topic. Additionally, essential concepts and fundamental mathematical results used throughout the thesis are introduced.

In the second and third chapters, the one-dimensional conformable fractional-order Dirac equation is examined in detail. The structure of the equation, its mathematical properties, and its physical interpretation are discussed comprehensively.

Finally, the one-dimensional conformable fractional-order Dirac operator associated with the equation is analyzed in terms of its dissipative, accretive, and self-adjoint extensions, which are expressed through appropriate boundary conditions.

Keywords: One-dimensional conformable fractional order Dirac system, symmetric operator, dissipative operator, boundary value space, regular

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz ve kuantum mekaniği gibi birçok matematiksel ve fiziksel kuramda merkezi bir rol oynayan operatörler teorisinde, simetrik operatörlerin genişlemeleri önemli bir araştırma konusunu teşkil etmektedir. Bu alandaki ilk sistematik çalışmalar, J. von Neumann tarafından gerçekleştirilmiş olup, 1929 yılında yayımladığı çalışmasında simetrik bir operatörün hangi koşullar altında kendine eş (self-adjoint) bir genişlemeye sahip olabileceğini ve bu genişlemelerin nasıl inşa edileceğini ortaya koymuştur (Neumann, 1929).

Von Neumann'ın öncülüğünü yaptığı bu alana sonraki yıllarda Krein, (1947; 1952), Rellich, (1951), Birman, (1956), Vishik, (1952) ve Phillips, (1959) gibi araştırmacılar katkıda bulunmuş, simetrik operatörlerin çeşitli türdeki genişlemeleri üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

1969 yılında Rofe-Beketov, simetrik operatörlerin genişlemelerini *linear bağıntılar* (linear relations) aracılığıyla tanımlayarak alana farklı bir bakış açısı kazandırmıştır (Rofe-Beketov, 1969). Rofe-Beketov, (1969)'un yöntemi temel alınarak, simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemelerinin sınır koşulları cinsinden ifadesine yönelik birçok çalışma gerçekleştirilmiştir. Bu doğrultudaki önemli katkılar Gorbachuk ve Gorbachuk, (1984), Allahverdiev, (1995; 2013; 2014; 2016; 2019), Tuna, (2013), Tuna ve Bayrak, (2018), Tuna ve Allahverdiev, (2018) ile Kholkin, (1981) tarafından sunulmuştur. Simetrik operatörlerin bunun gibi tüm genişlemeleri ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için Gorbachuk, vd., (1989) gibi çalışmalara bakılabilir.

Bu çalışmalar, simetrik (özellikle de tekil) diferansiyel operatörlerin spektral teorisi ve kuantum mekaniğindeki uygulamaları açısından derin sonuçlar doğurmuş, teorik ve uygulamalı matematikte geniş bir etki alanı oluşturmuştur.

Tek boyutlu Dirac sistemi, kuantum mekaniğinin temel ilkelerini yansıtan ve gerçekçi kuantum teorisinin matematiksel temellerini ortaya koyan önemli diferansiyel sistemlerden biridir. Bu sistem yalnızca temel parçacıkların davranışlarını tanımlamakla kalmaz, aynı zamanda elektron spini kavramına doğal bir açıklama getirir ve anti-maddenin varlığını teorik olarak öngörür. Dolayısıyla, Dirac sistemleri, hem kuramsal hem de uygulamalı fizik açısından büyük bir öneme sahiptir.

Bu bağlamda, klasik Dirac sistemi ve onun genelleştirilmiş üzerine çeşitli özellikler literatürde ele alınmıştır. Özellikle Weidmann, (1987), Levitan ve Sargsjan, (1991), Thaller, (1992) gibi araştırmacıların kitaplarında bu sistemlerin spektral teorisi, çözüm

yapısı ve fiziksel yorumları üzerine kapsamlı analizler yapılmıştır. Daha yakın dönemde ise Allahverdiev ve Tuna, (2017; 2020), bu sistemlere ilişkin yeni yöntemler ve sonuçlar ortaya koyarak kuramsal çerçevenin gelişimine katkıda bulunmuşlardır.

Kesirli kalkülüsün gelişmekte olan alt dallarından biri olan *konform kesirli kalkülüs*, son yıllarda birçok araştırmacının dikkatini çeken dinamik bir araştırma alanı hâline gelmiştir. Bu alanın temelleri, Khalil vd. (2014) tarafından atılmış olup, söz konusu çalışmada *konform kesirli türev* olarak adlandırılan yeni ve nispeten basit bir kesirli türev tanımı sunulmuştur. Bu tanımın ardından, Abdeljawad, (2015), konform kesirli kalkülüsü daha da geliştirerek sağ ve sol konform kesirli türevleri, kesirli zincir kuralını ve yüksek mertebeden kesirli integralleri tanımlamıştır.

Söz konusu gelişmelerin ardından, alana yönelik ilgi giderek artmış ve literatürde birçok önemli çalışma yer almıştır (Abu ve Khalil, 2014a, b; Abdeljawad, 2015; Abdeljawad vd., 2015; Anderson ve Ulness, 2015a, b; Atangana vd., 2015; Chung, 2015; Anderson, 2016; Benkhettou vd., 2016; Cenesiz vd., 2016; Eslami ve Rezazadeh, 2016; Karayer vd., 2016; Khalil vd., 2014; 2016; Pospisil ve Skripkova, 2016; Tasbozan ve Cenesiz, 2016; Wang vd., 2016; Abdeljawad vd., 2017; Al-Refai ve Abdeljawad, 2017; Gülşen vd., 2017; Abdeljawad vd., 2018; Jarad vd., 2018; Allahverdiev ve Tuna, 2019). Bununla birlikte, konform kesirli kalkülüs bağlamında Dirac sistemlerine yönelik çalışmalar oldukça sınırlıdır. Bu alandaki nadir çalışmalardan biri Gulsen ve arkadaşları, (2017) tarafından gerçekleştirilmiştir. Söz konusu çalışmada, keyfi bir zaman skalası üzerinde ayrık sınır koşulları ile konform kesirli Dirac sistemi incelenmiş ve klasik Dirac sisteminin bazı temel spektral özellikleri konform kesirli duruma başarılı bir şekilde genelleştirilmiştir. Allahverdiev ve Tuna, 2020 yılında aşağıdaki formda bir konform kesirli Dirac sistemini incelemiştir:

$$\begin{pmatrix} 0 & -T_\alpha \\ T_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Burada λ kompleks spektral parametredir ve $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$; $[a, b]$ üzerinde, $0 \leq x \leq b < \infty$ olacak şekilde sürekli reel-değerli ve konform kesirli integrallenebilir fonksiyonlardır. Bu sistemin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmıştır. Sonra formal kendine eş olmayan öz vektörlerinin ortogonalitesi, Green matrisi, öz vektörlerinin bir ortonormal bazı gibi problemin bazı spektral özellikleri incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında regüler durumda (1.1) denklemini ele alınmıştır. Bu denkleme karşılık gelen operatörler için sınır değeri uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir



2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere, $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $x > 0$ daki f 'nin a mertebesinden konform kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$$T_{\alpha} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{f(x + \varepsilon x^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon} \right) \quad (2.1)$$

ve 0 noktasında konform kesirli türev şu şekilde tanımlanır:

$$(T_{\alpha} f)(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (T_{\alpha} f(x)) \quad (\text{Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014}).$$

Tanım 2.1.2. α mertebesinden bir $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonun a 'dan başlayan sol konform kesirli türevi şu şekilde tanımlanır:

$$(T_{\alpha}^a f)(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon(x - a)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (2.2)$$

$a = 0$ olduğunda T_{α} yazılır. (a, b) 'de $(T_{\alpha} f)(x)$ varsa $(T_{\alpha}^a f)(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} (T_{\alpha}^a f)(x)$ (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014).

Tanım 2.1.3. f fonksiyonu için $0 < \alpha \leq 1$ mertebesinde sağdan konform kesirli türev şu şekilde tanımlanır:

$$({}^b T_{\alpha} f)(x) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon(b - x)^{1-\alpha}) - f(x)}{\varepsilon}. \quad (2.3)$$

Burada f , b 'de sonlanıyor ve $({}^b T_{\alpha} f)(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} ({}^b T_{\alpha} f)(x)$ (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014).

Lemma 2.1.4. f , g bir x noktasında α ($0 < \alpha \leq 1$) mertebesinden konform türevlenebilir olsun. O halde,

- i. $T_\alpha(\lambda f + \beta g) = \lambda T_\alpha(f) + \beta T_\alpha(g)$, $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$,
- ii. $T_\alpha(fg) = fT_\alpha(g) + gT_\alpha(f)$,
- iii. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_\alpha(f) - fT_\alpha(g)}{g^2}$,
- iv. f diferansiyellenebilir olduğunda $T_\alpha^a(f)(x) = (x - a)^{1-\alpha}f'(x)$,
- v. $\forall n \in \mathbb{R}$, $T_\alpha(x^{n-a})$ (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014).

Tanım 2.1.5. $0 < \alpha \leq 1$ mertebesinde bir f fonksiyonunun a ' dan başlayan konform kesirli integrali şu şekilde tanımlanır:

$$(I_\alpha^a f)(x) = \int_a^x f(t) d\alpha(t, a) = \int_a^x (t - a)^{\alpha-1} f(t) dt$$

Buna benzer olarak ,

$$({}_x^b I_\alpha f)(x) = \int_x^b f(t) d\alpha(b, t) = \int_x^b (b - t)^{\alpha-1} f(t) dt$$

elde edilir (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014).

Lemma 2.1.6. Farz edelim ki $f, (a, \infty)$ aralığında sürekli bir fonsiyon ve $0 < \alpha < 1$ olsun. O zaman, tüm $x > a$ için;

$$T_\alpha^a I_\alpha^a f(x) = f(x)$$

elde edilir (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014).

Teorem 2.1.7. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyondur. Öyle ki f ve g konform kesirli türevlenebilir olsun. O halde,

$$\int_a^b f(x) T_\alpha(g)(x) d\alpha(x, a) + \int_a^b g(x) T_\alpha^a f(x) d\alpha(x, a) = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

elde edilir (Abdeljawad, 2015; Khalil vd., 2014).

$[a, b]$ aralığında tanımlı bütün kompleks değerli fonksiyonların aşağıdaki özelliği sağlayan uzayı $L_\alpha^2(a, b)$ ile gösterilecektir.

$$\|f\| := \left(\int_a^b |f(x)|^2 d^\alpha x \right)^{1/2} = \left(\int_a^b |f(x)|^2 x^{\alpha-1} dx \right)^{1/2} < \infty.$$

$L_\alpha^2(a, b)$ uzayı aşağıdaki iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır (Wang vd., 2016).

$$(f, g)_1 := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} d^\alpha x, \quad f, g \in L_\alpha^2(a, b)$$

Tanım 2.1.8. $\mathcal{H}$ bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T' nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \tag{2.4}$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in \mathcal{H}$ vektörler kümesine T' nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $(T^*)^* = T$
- ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
- iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$
- iv. $(T)^* = L^* T^*$
- v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken) (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.9. $T^* = T$ ise T' ye kendine eş operatör adı verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.10. Tanım kümesin $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne Hermitian ismi verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.11. $A: D(A) \rightarrow \mathcal{H}$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = \mathcal{H}$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise yani $A \subset A^*$ ise, A 'ya simetrik operatör denir (Naimark,1968).

Tanım 2.1.12. $D(U), U$ operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise U 'ya izometrik operatör ismi verilir (Naimark,1968).

Tanım 2.1.13. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm $\mathcal{H}$ Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne üniter operatör denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$U^*U = UU^* = I$$

olmasıdır (Naimark,1968).

Tanım 2.1.14. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\text{Im}(Th, h) \geq 0 \tag{2.5}$$

ise T lineer operatörüne dissipatif (dissipative) operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.1.15. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

- i. $f, g \in D_{A^*}$ için
- ii. $(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K$;

Keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır, şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı ismi verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.1.16. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.1.17. $K, \mathcal{H}$ Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.6)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.7)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (2.6) ve (2.7) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (2.6), (2.7) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (2.6), (2.7) koşulları, $C, \mathcal{H}$ üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C)\Gamma_2 f - (\sin C)\Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.8)$$

Sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.9)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.8), (2.9) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Konform Kesirli Dirac Sistemler

Bu bölümde bir boyutlu konform kesirli Dirac sistem için bir varlık teoremi verilecektir. Bu sistem

$$\tau y := \begin{cases} -T_\alpha y_2 + p(x)y_1 \\ T_\alpha y_1 + r(x)y_2 \end{cases} \text{ ve } y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

olmak üzere

$$\tau y = \lambda y, 0 \leq x \leq b < \infty \quad (3.1)$$

ile verilir. Burada λ bir kompleks parametredir, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$, $[0, b]$ aralığında reel değerli sürekli ve konform kesirli integrallenebilir fonksiyonlardır.

Şimdi, aşağıdaki iç çarpım yardımıyla verilen vektör değerli fonksiyonların Hilbert uzayı, $\mathcal{H} = L_\alpha^2((0, b); \mathbb{C}^2)$ uzayı tanıtılacaktır:

$$(f, g) := \int_0^b (f(x), g(x))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha x,$$

burada $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}^2}$, $\mathbb{C}^2$ 'de standart iç çarpımı ifade etmektedir :

$$(\xi, \eta)_{\mathbb{C}^2} = \sum_{j=1}^2 \xi_j \overline{\eta_j}.$$

Teorem 3.1.1. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ için (3.1) denkleminin $\mathcal{H}$ 'de,

$$\Phi_1(0, \lambda) = c_1, \quad \Phi_2(0, \lambda) = c_2, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

koşullarını sağlayan bir tek çözümü

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, \lambda) \\ \Phi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} \text{ vardır.} \quad (3.2)$$

Her $x \in [0, b]$, $\Phi(x, \lambda)$ λ 'nın bir tam fonksiyonudur.

İspat. $p(x) = r(x) = 0$ olsun. O halde (3.1) denkleminin çözümü;

$$U_{\bar{z}}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} U_{z_1}(x, \lambda) \\ U_{z_2}(x, \lambda) \end{pmatrix} = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \quad (x \in [0, b], \lambda \in \mathbb{C}), \text{ ile verilir. Burada}$$

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \\ -\sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \\ \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \text{ dir.}$$

Sabitlerin değişimi yöntemini kullanarak aşağıdaki integral denklem sistemi bulunur.

$$U(x, \lambda) = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) + \int_0^x [\varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(t, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(t, \lambda)] \Omega(t) U(t, \lambda) d^\alpha t$$

Burada $x \in [0, b]$, $\lambda \in \mathbb{C}$, T matris transpoze işlemini ifade eder ve

$$\Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

$x \in [0, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} U(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} U_1(x, \lambda) \\ U_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = U_{\bar{z}}(x, \lambda) \\ &+ \begin{pmatrix} \int_0^x \begin{bmatrix} -\cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ +\sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} p(t) U_1(t, \lambda) d^\alpha t \\ \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ +\sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} p(t) U_1(t, \lambda) d^\alpha t \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} +\int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ +\sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} r(t) U_2(t, \lambda) d^\alpha t \\ +\int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ -\sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} r(t) U_2(t, \lambda) d^\alpha t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ardışık yaklaşımlar yöntemini kullanarak (3.3) denkleminin bir çözümü oluşturulacaktır. Bir $\{U_n(x, \lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisini $x \in [0, b]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$U_{n+1}(x, \lambda) = U_z(x, \lambda) + \left(\int_0^x \begin{bmatrix} -\cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ + \sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} p(t) U_{1n}(t, \lambda) d^\alpha t \right) - \left(\int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ + \sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} r(t) U_{2n}(t, \lambda) d^\alpha t \right) - \left(\int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \sin(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \\ - \sin(\int_0^x \lambda d^\alpha t) \cos(\int_0^t \lambda d^\alpha s) \end{bmatrix} r(t) U_{2n}(t, \lambda) d^\alpha t \right).$$

Şimdi her $\lambda \in \mathbb{C}$ sabiti için $\{U_n(x, \lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin düzgün yakınsak limitinin ($n \rightarrow \infty$) var olduğunu ve (3.1) - (3.2) sisteminin çözümünü tanımladığı gösterilecektir.

$\lambda \in \mathbb{C}$ sabit olsun. $N(\lambda)$ ve A pozitif sayıları vardır öyle ki;

$$|\varphi_{ij}(x, \lambda)| \leq \frac{\sqrt{N(\lambda)}}{2}, \quad i, j = 1, 2,$$

$$\max_{x \in [0, b]} |p(x)| = A_1, \quad \max_{x \in [0, b]} |r(x)| = A_2, \quad A = \max[A_1, A_2],$$

$$|U_{1j}(x, \lambda)| \leq (|c_1| + |c_2|) \frac{\sqrt{N(\lambda)}}{2} = \frac{\widetilde{N(\lambda)}}{2}, \quad j = 1, 2, \quad x \in [0, b].$$

O halde;

$$\|U_2(x, \lambda) - U_1(x, \lambda)\|$$

$$\begin{aligned}
& \leq \left| \int_0^x \begin{bmatrix} -\cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \\ + \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \end{bmatrix} p(t) U_{11}(t, \lambda) d^\alpha t \right. \\
& \quad \left. + \int_0^x \begin{bmatrix} \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \\ + \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \end{bmatrix} p(t) U_{12}(t, \lambda) d^\alpha t \right| \\
& + \left| \int_0^x \begin{bmatrix} \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \\ + \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \end{bmatrix} r(t) U_{11}(t, \lambda) d^\alpha t \right. \\
& \quad \left. - \int_0^x \begin{bmatrix} \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \\ - \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^t \lambda d^\alpha s\right) \end{bmatrix} r(t) U_{12}(t, \lambda) d^\alpha t \right| \\
& \leq \left(N(\lambda) A_1 \frac{\widetilde{N(\lambda)}}{2} + N(\lambda) A_2 \frac{\widetilde{N(\lambda)}}{2} \right) \left| \int_0^x d^\alpha t \right| \\
& + \left(N(\lambda) A_1 \frac{\widetilde{N(\lambda)}}{2} + N(\lambda) A_2 \frac{\widetilde{N(\lambda)}}{2} \right) \left| \int_0^x d^\alpha t \right| \\
& \leq 2N(\lambda) A \widetilde{N(\lambda)} \frac{x^\alpha}{\alpha}, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

buradaki $\|\cdot\|$ normu $\mathbb{C}^2$ 'deki uygun normdur. Benzer şekilde;

$$\|U_3(x, \lambda) - U_2(x, \lambda)\| \leq 2^2 \widetilde{N(\lambda)} \frac{A^2 N^2(\lambda) x^{2\alpha}}{2\alpha^2} \tag{3.5}$$

elde edilir ve matematiksel tümevarım kullanarak aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\|U_{n+1}(x, \lambda) - U_n(x, \lambda)\| \leq 2^n (\widetilde{N(\lambda)})^n \frac{(AN(\lambda)x^\alpha)^n}{\alpha^n n!} \quad (n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}).$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (\widetilde{N(\lambda)})^n \frac{(AN(\lambda)x^\alpha)^n}{\alpha^n n!}$$

serisi düzgün yakınsak olduğundan Weierstrass testine göre;

$$U_1(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \{U_{n+1}(x, \lambda) - U_n(x, \lambda)\} \quad (3.6)$$

serisi $[0, b]$ 'de düzgün yakınsaktır. O zaman bu serinin n . kısmi toplamı

$$U_n(x, \lambda) = U_1(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{n-1} \{U_{k+1}(x, \lambda) - U_k(x, \lambda)\},$$

bir $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonuna $[0, b]$ ' de $n \rightarrow \infty$ düzgün bir şekilde yakınsar yani;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda).$$

n üzerinde tümevarım kullanarak $U_n(x, \lambda)$ ve $T_\alpha U_n(x, \lambda)$ ' nin sürekli olduğu ispatlanabilir. Burada,

$$\begin{aligned} T_\alpha U_n(x, \lambda) &= c_1 T_\alpha \varphi_1(x, \lambda) + c_2 T_\alpha \varphi_2(x, \lambda) \\ &+ \int_0^x [T_\alpha \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(t, \lambda) - T_\alpha \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(t, \lambda)] \Omega(t) U_n(t, \lambda) d^\alpha t \end{aligned}$$

ve $n = 1, 2, \dots$ 'tür. $U_n(x, \lambda)$ ve $T_\alpha U_n(x, \lambda)$ 'nin sürekli olduğunu kolayca elde edilir, yani, $\Phi(x, \lambda) \in \mathcal{H}$.

$\Phi(x, \lambda)$, (3.2) denklemini sağlar, yani,

$$\Phi(0, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(0, \lambda) \\ \Phi_2(0, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Şimdi, $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun (3.1) denklemini sağladığı ispatlanacaktır:

$x \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} T_\alpha \Phi(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} T_\alpha \Phi_1(x, \lambda) \\ T_\alpha \Phi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = c_1 T_\alpha \varphi_1(x, \lambda) + c_2 T_\alpha \varphi_2(x, \lambda) \\ &+ \int_0^x [T_\alpha \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(t, \lambda) - T_\alpha \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(t, \lambda)] \Omega(t) \Phi(t, \lambda) d^\alpha t. \end{aligned}$$

(3.1) denklemi ile

$$T_\alpha \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) = -\lambda \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right),$$

$$T_\alpha \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) = \lambda \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right)$$

elde edilir. Öyleyse aşağıdakiler elde edilir;

$$T_\alpha \Phi_1(x, \lambda) = c_1 T_\alpha \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) + c_2 T_\alpha \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right)$$

$$+ \int_0^x \left[-T_\alpha \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right. \\ \left. + T_\alpha \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right] p(t) \Phi_1(t, \lambda) d^\alpha t$$

$$- \int_0^x \left[T_\alpha \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right. \\ \left. + T_\alpha \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right] r(t) \Phi_2(t, \lambda) d^\alpha t$$

$$- r(x) \Phi_2(x, \lambda) = -c_1 \lambda \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) + c_2 \lambda \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right)$$

$$+ \int_0^x \left[\lambda \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right. \\ \left. + \lambda \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right] p(t) \Phi_1(t, \lambda) d^\alpha t$$

$$- \int_0^x \left[-\lambda \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right. \\ \left. - \lambda \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^t \lambda d^\alpha s \right) \right] r(t) \Phi_2(t, \lambda) d^\alpha t$$

$$- r(x) \Phi_2(x, \lambda) = (-r(x) + \lambda) \Phi_2(x, \lambda).$$

(3.1)'deki diğer denklem benzer şekilde ispatlanır.

Şimdi, (3.1) ve (3.2)'da tanımlanan problemin bir tek çözümünün olduğu gösterilecektir. Farz edelim ki, $\psi_1(x, \lambda)$ ve $\psi_2(x, \lambda)$ bu problemin iki çözümü olsun. $\chi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) - \psi_2(x, \lambda)$, $x \in [0, b]$ olacak şekilde tanımlansın. O zaman, $\chi(x, \lambda)$ bu problemin bir çözümüdür. $\chi_1(0, \lambda) = \chi_2(0, \lambda) = 0$ eşitliği aşıkardır. Basit bir hesaplama gösteriyor ki;

$$\chi(x, \lambda) = \left(- \int_0^x (-r(t) + \lambda) \chi_2(t, \lambda) d^\alpha t \right. \\ \left. \int_0^x (-p(t) + \lambda) \chi_1(t, \lambda) d^\alpha t \right). \quad (3.7)$$

$\chi(x, \lambda), r(x), p(x)$ sürekli olmak üzere $N_{x, \lambda}$ ve $M_{x, \lambda}$ pozitif sayıları vardır öyle ki;

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0, b]} |\chi_1(x, \lambda)| &= N_\lambda^{(1)}, \quad \sup_{x \in [0, b]} |\chi_2(x, \lambda)| = N_\lambda^{(2)}, \\
N_\lambda &= \max\{N_\lambda^{(1)}, N_\lambda^{(2)}\}, \\
\sup_{x \in [0, b]} |\lambda - r(x)| &= M_\lambda^{(1)}, \quad \sup_{x \in [0, b]} |\lambda - p(x)| = M_\lambda^{(2)}, \\
M_\lambda &= \max\{M_\lambda^{(1)}, M_\lambda^{(2)}\}.
\end{aligned}$$

O zaman aşığıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}
\|\chi(x, \lambda)\| &= \left| -\int_0^x (-r(t) + \lambda)\chi_2(t, \lambda)d^\alpha t \right| \\
&+ \left| \int_0^x (-p(t) + \lambda)\chi_1(t, \lambda)d^\alpha t \right| \\
&\leq 2N_\lambda M_\lambda \left| \int_0^x d^\alpha t \right| = 2N_\lambda M_\lambda \frac{x^\alpha}{\alpha}.
\end{aligned}$$

$k \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, b]$ olmak üzere k 'de matematiksel tümevarım uygulandığında

$$\|\chi(x, \lambda)\| \leq 2^k M_\lambda^k N_\lambda^k \frac{x^{k\alpha}}{\alpha^k k!}. \quad (3.8)$$

elde edilir.

(3.7)'in k için sağılandığını varsayarak $(k + 1)$ için ispatlanacaktır. (3.7) düzenlenirse aşığıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}
\|\chi(x, \lambda)\| &= \left| -\int_0^x (-r(t) + \lambda)\chi_2(t, \lambda)d^\alpha t \right| \\
&+ \left| \int_0^x (-p(t) + \lambda)\chi_1(t, \lambda)d^\alpha t \right| \\
&\leq 2^{k+1} M_\lambda^{k+1} N_\lambda^{k+1} \left| \int_0^x \frac{t^{k\alpha}}{\alpha^k k!} d^\alpha t \right| \\
&= 2^{k+1} M_\lambda^{k+1} N_\lambda^{k+1} \frac{x^{(k+1)\alpha}}{\alpha^{k+1} (k+1)!}.
\end{aligned}$$

Buradan, (3.8)'nin bütün $k \in \mathbb{N}$ için sağlandığı gösterilmektedir.

$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k M_\lambda^k N_\lambda^{k+1} \frac{x^{k\alpha}}{\alpha^k k!} = 0$ olduğunda bütün $x \in [0, b]$ için $\chi(x, \lambda) = 0$ elde edilir. Bu tekliği ispatlar.

Şimdi, $x \in [0, b]$ olacak şekilde, $\Phi(x, \lambda)$ 'nin λ 'da tam fonksiyon olduğu gösterilecektir. $\Phi(x, \lambda)$ 'nin her Γ_M diskinde analitik olduğunu kanıtlamak yeterlidir, burada $\Gamma_M := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$. Şimdi tümevarım ile aşağıdakiler ispatlanacaktır;

tüm $x \in [0, b]$ için $U_n(x, \lambda)$ analitiktir, (3.9)

tüm $\lambda \in \Gamma_M$ için $\frac{\partial}{\partial \lambda} U_n(x, \lambda), (0, \lambda)$ 'da süreklidir. (3.10)

$\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ 'nin $x \in [0, b]$ için λ 'nın tam fonksiyonları olduğu aşıkardır. Buna ek olarak tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\frac{\partial}{\partial \lambda} U_n(x, \lambda), (0, \lambda)$ 'da süreklidir. Böylece $n = 1$ için (3.9) ve (3.10) sağlanır. Farz edelim ki, (3.9) ve (3.10) $n \geq 1$ için sağlansın. O zaman şu elde edilir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} U_{n+1}(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_2(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{x_0} \varphi_1^T(t, \lambda) \Omega(t) U_n(t, \lambda) d^\alpha t \\ &+ \frac{\partial}{\partial \lambda} U_1(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &- \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{x_0} \varphi_2^T(t, \lambda) \Omega(t) U_n(t, \lambda) d^\alpha t \\ &+ \varphi_2(x_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{x_0} \varphi_1^T(t, \lambda) \Omega(t) U_n(t, \lambda) d^\alpha t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &- \varphi_1(x_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{x_0} \varphi_2^T(t, \lambda) \Omega(t) U_n(t, \lambda) d^\alpha t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

(3.10)'ten dolayı şu sonuç çıkarılır; her bir $i = 1, 2$ için $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_i^T(t, \lambda) \Omega(t) U_{n-1}(t, \lambda) d^\alpha t, (0, t)$ 'de süreklidir. Sonuç olarak; $|\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ diskinde tüm λ için sabit $C, \delta > 0$ vardır, öyle ki;

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\varphi_i^T(x_0, \lambda) \Omega(x_0) U_n(x_0, \lambda) \right) \right\| \leq C, n \in \mathbb{N}.$$

Buradan,

$$\int_0^{x_0} \varphi_i^T(t, \lambda) \Omega(t) U_n(t, \lambda) d^\alpha t \quad (i = 1, 2, \dots)$$

α -integrallerine karşılık gelen serilerin $\lambda = \lambda_0$ 'ın bir komşuluğunda düzgün yakınsak olduğu görülür. Böylece, (3.11)'deki türev ve integralin sırası değiştirilebilir. x_0 ve λ_0 keyfi olduğunda, tüm $x \in [0, b]$ ve $\lambda \in \Gamma_M$ için şuna sahip olunur:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} U_{n+1}(x, \lambda) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} U_z(x, \lambda) - \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(t, \lambda) U_n(t, \lambda)) \Omega(t) d^\alpha t \\ & - \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(t, \lambda) U_n(t, \lambda)) \Omega(t) d^\alpha t. \end{aligned} \quad (3.12)$$

(3.10)'ten dolayı (3.12)'daki integraller $(0, \lambda)$ 'da süreklidir. Böylelikle; $\frac{\partial}{\partial \lambda} U_{n+1}(x, \lambda)$, $(0, \lambda)$ 'da süreklidir. $x_0 \in [0, b]$ keyfi olsun. O zaman, $i, j = 1, 2$ ve $\lambda \in \Gamma_M$ olacak şekilde $Y(x_0), \widetilde{Y(x_0)} > 0$ vardır, öyle ki;

$$|\varphi_{ij}(x_0, \lambda)| \leq \frac{\sqrt{Y(x_0)}}{2} \text{ ve } |U_{1j}(x_0, \lambda)| \leq \widetilde{Y(x_0)}. \quad (3.13)$$

Son olarak, matematiksel tümevarım şunu verir:

$$\|U_{n+1}(x_0, \lambda) - U_n(x_0, \lambda)\| \leq 2^n \frac{(\widetilde{Y(x_0)} Y(x_0) x_0^\alpha)^n}{n! \alpha^n}.$$

Sonuç olarak; (3.6) serisi $x = x_0$ ile Γ_M 'de $\Phi(x, \lambda)$ 'ya düzgün bir şekilde yakınsar. Bu yüzden $\Phi(x, \lambda)$, Γ_M 'de analitiktir (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

3.2. Kendine Eş Konform Kesirli Dirac Sistem

Bu bölümde $\mathcal{H}$ 'de bir kendine eş (self-adjoint) konform kesirli Dirac sistemi ele alınarak bu sistemin bazı spektral özelliklerini verilecektir.

Şimdi,

$$\begin{aligned} \tau y &:= \begin{cases} -T_\alpha y_2 + p(x)y_1 \\ -T_\alpha y_1 + r(x)y_2, \end{cases} \\ \tau y &= \lambda y, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq x \leq b < \infty, \end{aligned} \quad (3.14)$$

konform kesirli Dirac sistemi,

$$L_1(y) := k_{11}y_1(0) + k_{12}y_2(0) = 0, \quad (3.15)$$

$$L_2(y) := k_{21}y_1(b) + k_{22}y_2(b) = 0 \quad (3.16)$$

sınır koşulları ile ele alınmaktadır. Burada; λ bir kompleks parametre, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$ reel değerli sürekli ve konform kesirli integrallenebilir fonksiyonlardır, $k_{ij} \in \mathbb{R}(i, j = 1, 2)$ ve k_{ij} matrisinin rankı 2'dir.

Teorem 3.2.1. (3.14) – (3.16)'de tanımlanan sınır değer problemi $\mathcal{H}$ 'de kendine eşittir.

İspat. İlk olarak Green formülü ispatlanacaktır. $y, z \in \mathcal{H}$ olsun. O zaman şu elde edilir:

$$\begin{aligned} (\tau y, z) - (y, \tau z) &= \int_0^b (-T_\alpha y_2 + p(x)y_1) \overline{z_1} d^\alpha x \\ &+ \int_0^b (T_\alpha y_1 + r(x)y_2) \overline{z_2} d^\alpha x \\ &- \int_0^b y_1 \overline{(-T_\alpha z_2 + p(x)z_1)} d^\alpha x \\ &- \int_0^b y_2 \overline{(T_\alpha z_1 + r(x)z_2)} d^\alpha x \\ &= - \int_0^b [(T_\alpha y_2) \overline{z_1} + y_2 \overline{(T_\alpha z_1)}] d^\alpha x \\ &\quad + \int_0^b [(T_\alpha y_1) \overline{z_2} + y_1 \overline{(T_\alpha z_2)}] d^\alpha x. \end{aligned}$$

Dolayısıyla şu elde edilir:

$$\begin{aligned} (\tau y, z) - (y, \tau z) &= - \int_0^b T_\alpha (\overline{z_1(x)} y_2(x)) d^\alpha x + \int_0^b T_\alpha (y_1(x) \overline{z_2(x)}) d^\alpha x \end{aligned}$$

$$= \int_0^b T_\alpha [y_1(x) \overline{z_2(x)} - \overline{z_1(x)} y_2(x)] d^\alpha x.$$

$[y, z]_x := y_1(x) \overline{z_2(x)} - \overline{z_1(x)} y_2(x)$ ' i tanımlayalım. Böylelikle şu elde edilir:

$$(\tau y, z) - (y, \tau z) = [y, z]_b - [y, z]_0. \quad (3.17)$$

Şimdi L operatörünün kendine eş olduğu kanıtlanacaktır. $y(\cdot), z(\cdot) \in \mathcal{H}$ olsun. O zaman şu elde edilir:

$$(\tau y, z) - (y, \tau z) = [y, z]_b - [y, z]_0.$$

(3.15) ve (3.16) koşulları ile $[y, z]_b = 0$ ve $[y, z]_0 = 0$ olduğu anlaşılır. Böylece teoremi kanıtlayan şu eşitlik elde edilir:

$$(\tau y, z) = (y, \tau z) \quad (3.18)$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Lemma 3.2.2. (3.14) – (3.16) sınır değer probleminin tüm öz değerleri reeldir.

İspat. Bir $z(x)$ özvektörü ile bir μ öz değeri verilsin. (3.18)'den şu elde edilir:

$$(\tau z, z) = (z, \tau z) = (z, \mu z) = \bar{\mu}(z, z). \quad (3.19)$$

Bununla birlikte;

$$(\tau z, z) = (\mu z, z) = \mu(z, z). \quad (3.20)$$

(3.19) ve (3.20)'den şu elde edilir:

$$\mu(z, z) = \bar{\mu}(z, z), \quad (\mu - \bar{\mu})(z, z) = 0.$$

$z(x) \neq 0$ olduğunda, $\mu = \bar{\mu}$ elde ederiz (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Lemma 3.2.3. μ_1 ve μ_2 (3.14) – (3.16) ile tanımlanmış olan problemin iki farklı öz değeri ise o zaman v_1 ve v_2 özvektörleri ortogonaldır.

İspat. Sırasıyla, v_1 ve v_2 öz vektörleri ile μ_1 ve μ_2 iki farklı reel öz değer olsun. (3.18)'den şu elde edilir:

$$(\mu_1 - \mu_2) \int_0^b (v_1(x), v_2(x))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha x = 0.$$

$\mu_1 \neq \mu_2$ olduğunda $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ 'in ortogonal olduğu bulunur (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Şimdi, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, $z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}$ olsun. O halde, $y(x)$ ve $z(x)$ 'in Wronskian'ını şöyle tanımlarız:

$$W(y, z)(x) = y_1(x)z_2(x) - z_1(x)y_2(x).$$

Teorem 3.2.4. Denklem (3.14)'in keyfi iki çözümünün Wronskian'ı x 'ten bağımsızdır.

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$ (3.14)'in iki çözümü olsun. Green' in formülü (3.17) ile şu elde edilir:

$$\int_0^x (\tau y, \bar{z})_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t - \int_0^x (y, \tau \bar{z})_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t = [y, \bar{z}]_x - [y, \bar{z}]_0.$$

$\tau y = \lambda y$ ve $\tau \bar{z} = \bar{\lambda} \bar{z}$ olduğunda şunu elde ederiz:

$$\int_0^x (\lambda y, \bar{z})_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t - \int_0^x (y, \bar{\lambda} \bar{z})_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t = [y, \bar{z}]_x - [y, \bar{z}]_0,$$

$$(\lambda - \lambda) \int_0^x (y, \bar{z})_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t = [y, \bar{z}]_x - [y, \bar{z}]_0 = 0.$$

O halde, $W(y, z)(x) = [y, \bar{z}]_x = [y, \bar{z}]_0 = W(y, z)(0)$ elde ederiz yani Wronskian x 'den bağımsızdır (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Teorem 3.2.5. Denklem (3.14)'in herhangi iki çözümünün lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart onların Wronskian'ının sıfır olmasıdır.

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$, denklem (3.14)'in lineer bağımlı iki çözümü olsun. O halde, bir sabit $c \neq 0$ vardır öyle ki; $y(x) = cz(x)$. Dolayısıyla,

$$W(y, z) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ z_1(x) & z_2(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cz_1(x) & cz_2(x) \\ z_1(x) & z_2(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Diğer taraftan, Wronskian $W(y, z) = 0$ ve bu sebeple, $y(x) = cz(x)$ yani $y(x)$ ve $z(x)$ lineer bağımlıdır (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Lemma 3.2.6 (3.14) – (3.16) 'de tanımlanan problemin tüm öz değerleri geometrik açıdan basittir (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Şimdi, bir sonraki amacımız öz değerleri ve karşılık gelen öz vektörleri belirlemektir. $\Phi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x, \lambda) \\ \Phi_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ ve $\Phi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_{21}(x, \lambda) \\ \Phi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$; $\delta_{ij}(i, j = 1, 2)$ ' nin Kronecker delta olduğu

$$\Phi_{ij}(0, \lambda) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

başlangıç koşullarını sağlayan (3.14)'in lineer bağımsız çözümleri olsun. O zaman (3.14)'in her çözümü,

$$y(x, \lambda) = K_1 \Phi_1(x, \lambda) + K_2 \Phi_2(x, \lambda)$$

şeklinde ifade edilir ve burada K_1 ile K_2 , x 'e bağımlı değildir. Eğer;

$$K_1 L_1(\Phi_1) + K_2 L_1(\Phi_2) = 0,$$

$$K_1 L_2(\Phi_1) + K_2 L_2(\Phi_2) = 0,$$

lineer sisteminin aşıkâr olmayan bir çözümü bulunabilirse o zaman $y(x, \lambda)$ çözümüne (3.14)'in bir öz vektörü denir. Dolayısıyla, $\lambda \in \mathbb{R}$ bir öz değerdir ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(\Phi_1) & L_1(\Phi_2) \\ L_2(\Phi_1) & L_2(\Phi_2) \end{vmatrix} = 0.$$

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu (3.14) – (3.16) ile tanımlanan konform kesirli Dirac sistemi ile ilişkili karakteristik determinant olarak adlandırılır. (3.14) – (3.16) ile tanımlanan problemin öz değerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır noktalarıdır. $\Phi_1(x, \lambda)$ ve $\Phi_2(x, \lambda)$ her sabit $x \in [0, b]$ için λ ' da tam olduğundan $\Delta(\lambda)$, λ ' da bir tam fonksiyondur. Buradan; (3.14) – (3.16) ile tanımlanan sistemin öz değerleri limit sonsuza giderken sayılabilir çoğunluktadır.

Teorem 3.2.7 (3.14) – (3.16) probleminin tüm öz değerleri, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır noktalarıdır.

İspat.

$$\begin{aligned}\theta_1(x, \lambda) &= L_1(\Phi_2)\Phi_1(x, \lambda) - L_1(\Phi_1)\Phi_2(x, \lambda), \\ \theta_2(x, \lambda) &= L_2(\Phi_2)\Phi_1(x, \lambda) - L_2(\Phi_1)\Phi_2(x, \lambda)\end{aligned}\quad (3.21)$$

ile $\theta_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \theta_{11}(x, \lambda) \\ \theta_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ ve $\theta_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \theta_{21}(x, \lambda) \\ \theta_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ tanımlayalım. O zaman; $\theta_1(x, \lambda)$ ve $\theta_2(x, \lambda)$, (3.14)'in çözümleridir öyle ki:

$$\theta_1(0, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{pmatrix} \text{ ve } \theta_2(b, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Diğer taraftan şu elde edilir:

$$\begin{aligned}W(\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda)) &= \begin{vmatrix} \theta_{11}(x, \lambda) & \theta_{12}(x, \lambda) \\ \theta_{21}(x, \lambda) & \theta_{22}(x, \lambda) \end{vmatrix} \\ &= \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(x, \lambda) - \theta_{12}(x, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda) \\ &= (L_1(\Phi_2)\Phi_{11}(x, \lambda) - L_1(\Phi_1)\Phi_{21}(x, \lambda)) \\ &\quad \times (L_2(\Phi_2)\Phi_{12}(x, \lambda) - L_2(\Phi_1)\Phi_{22}(x, \lambda)) \\ &\quad - (L_1(\Phi_2)\Phi_{12}(x, \lambda) - L_1(\Phi_1)\Phi_{22}(x, \lambda)) \\ &\quad \times (L_2(\Phi_2)\Phi_{11}(x, \lambda) - L_2(\Phi_1)\Phi_{21}(x, \lambda)) \\ &= L_1(\Phi_2)L_2(\Phi_1)(-\Phi_{11}(x, \lambda)\Phi_{22}(x, \lambda) + \Phi_{12}(x, \lambda)\Phi_{21}(x, \lambda)) \\ &\quad + L_1(\Phi_1)L_2(\Phi_2)(\Phi_{11}(x, \lambda)\Phi_{22}(x, \lambda) - \Phi_{12}(x, \lambda)\Phi_{21}(x, \lambda)) \\ &= (\Phi_{11}(x, \lambda)\Phi_{22}(x, \lambda) - \Phi_{12}(x, \lambda)\Phi_{21}(x, \lambda)) \\ &\quad \times (L_1(\Phi_1)L_2(\Phi_2) - L_1(\Phi_2)L_2(\Phi_1)) \\ &= W(\Phi_1(x, \lambda), \Phi_2(x, \lambda))\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda).\end{aligned}\quad (3.23)$$

λ_0 , (3.14) – (3.16) ile tanımlı problemin bir öz değeri olsun. $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olduğundan, $\theta_i(x, \lambda_0)$ ($i = 1, 2$) reel değerli olarak alınabilir. O halde, (3.23) ile $\theta_1(x, \lambda_0)$ ve

$\theta_2(x, \lambda_0)$ lineer bağımlı eigen fonksiyonlarıdır. Dolayısıyla sıfırdan farklı bir η_0 vardır, öyle ki;

$$\theta_2(x, \lambda_0) = \eta_0 \theta_1(x, \lambda_0).$$

(3.21) ve (3.22) 'dan şu elde edilir:

$$\begin{aligned}\theta_{21}(0, \lambda_0) &= \eta_0 \alpha_{12} = \eta_0 \theta_{11}(0, \lambda), \\ \theta_{22}(0, \lambda_0) &= -\eta_0 \alpha_{11} = -\eta_0 \theta_{12}(0, \lambda).\end{aligned}\tag{3.24}$$

(3.17) 'de $y(x) = \theta_2(x, \lambda)$ ve $z(x) = \theta_2(x, \lambda_0)$ alırsak şu elde edilir:

$$\begin{aligned}(\lambda - \lambda_0) \int_0^b (\theta_2(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda_0))_{\mathbb{C}^2} d^a x \\ = -(\theta_{21}(b, \lambda) \theta_{22}(b, \lambda_0) - \theta_{21}(b, \lambda_0) \theta_{22}(b, \lambda)) \\ = -(\theta_{21}(b, \lambda) (-\eta_0 \theta_{12}(b, \lambda_0)) - \eta_0 \theta_{11}(b, \lambda) \theta_{22}(b, \lambda)) \\ = \eta_0 (\theta_{11}(b, \lambda) \theta_{22}(b, \lambda) - \theta_{12}(b, \lambda) \theta_{21}(b, \lambda)) \\ = \eta_0 W(\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda)) = \eta_0 \Delta(\lambda).\end{aligned}$$

$\Delta(\lambda)$, λ 'da bir tam fonksiyon olduğunda şu elde edilir:

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{1}{\eta_0} \int_0^b \theta_2^2(x, \lambda_0) d^a x \neq 0.$$

Sonuç olarak; λ_0 , $\Delta(\lambda)$ 'nın bir basit sıfırır (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

3.3. Green Fonksiyonu

Bu bölümde aşağıdaki sistemin çözümü incelenecektir:

$$T_a y_2 + \{-\lambda + p(x)\} y_1 = f_1(x), \tag{3.25}$$

$$T_a y_1 + \{-\lambda + r(x)\} y_2 = f_2(x), \tag{3.26}$$

burada; $0 \leq x \leq b < \infty$, $p(\cdot)$ ile $r(\cdot)$ $[0, b]$ 'de reel değerli sürekli ve kesirli integrallenebilir fonksiyonlardır ve $f(\cdot) := \begin{pmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. Bu sistem ((3.25) – (3.26)) aşağıda verilmiş olan sınır koşullarını sağlamaktadır:

$$L_1(y) := k_{11} y_1(0) + k_{12} y_2(0) = 0, \tag{3.27}$$

$$L_2(y) := k_{21} y_1(b) + k_{22} y_2(b) = 0, \tag{3.28}$$

burada; $k_{ij} \in \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) ve k_{ij} matrisinin rankı 2'dir. Böylece (3.25) – (3.28) sisteminin Green fonksiyonu oluşturulacaktır.

Teorem 3.3.1. λ , (3.14) – (3.16) ile tanımlanan problemin bir öz değeri değil ise homojen olmayan (3.25) – (3.28) sistemi, herhangi bir $f(x)$ vektör-değer fonksiyonu için çözümlenebilirdir. Aksine λ , (3.14) – (3.16) ile tanımlanan problemin bir öz değeri ise homojen olmayan (3.25) – (3.28) sistemi genellikle çözümsüzdür.

İspat. Green matrisi şu şekilde tanımlayalım:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\theta_2(x, \lambda)\theta_1^T(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, & 0 \leq t \leq x \\ -\frac{\theta_2(x, \lambda)\theta_1^T(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, & x < t \leq b. \end{cases} \quad (3.29)$$

Şimdi,

$$y(x, \lambda) = \int_0^b G(x, t, \lambda) f(t) d^\alpha t \quad (3.30)$$

fonksiyonunun (3.25) – (3.28) sisteminin çözümü olduğu ispatlanacaktır.

Green matrisinin tanımı ile şu ifade elde edilir:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \theta_{21}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda) \\ \theta_{22}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)\theta_{22}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq x \\ -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)\theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda) \\ \theta_{12}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)\theta_{12}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}, & x < t \leq b. \end{cases}$$

Buradan;

$$\begin{aligned} & G(x, t, \lambda) f(t) \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \theta_{21}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{21}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda)f_2(t) \\ \theta_{22}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{22}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda)f_2(t) \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq x \\ -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda)f_2(t) \\ \theta_{12}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{12}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda)f_2(t) \end{pmatrix}, & x < t \leq b. \end{cases} \end{aligned}$$

(3.30)'dan şunlar elde edilir:

$$\begin{aligned}
y_1(x, \lambda) = & -\frac{\theta_{21}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^x (\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{12}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t \\
& -\frac{\theta_{11}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_x^b (\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{22}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
y_2(x, \lambda) = & -\frac{\theta_{22}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^x (\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{12}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t \\
& -\frac{\theta_{12}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_x^b (\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{22}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

(3.31)'den dolayı şu sonuç çıkar ki;

$$\begin{aligned}
& T_\alpha y_1(x, \lambda) \\
& = -\frac{T_\alpha \theta_{21}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^x (\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{12}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t \\
& \quad -\frac{T_\alpha \theta_{11}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_x^b (\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{22}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t \\
& \quad + \frac{1}{\Delta(\lambda)} W(\theta_1, \theta_2)f_2(x) \\
& = \frac{\theta_{22}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \{-\lambda + r(x)\} \int_0^x (\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{12}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t \\
& \quad + \frac{\theta_{12}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \{-\lambda + r(x)\} \int_x^b (\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{22}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t + f_2(x) \\
& = \{-\lambda + r(x)\} \frac{\theta_{22}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_0^x (\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{12}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t \\
& \quad + \{-\lambda + r(x)\} \frac{\theta_{12}(x, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \int_x^b (\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{22}(t, \lambda)f_2(t))d^\alpha t + f_2(x) \\
& = -\{-\lambda + r(x)\}y_2(x) + f_2(x).
\end{aligned}$$

(3.25)'in doğruluğu benzer şekilde ispatlanır. Dolayısıyla (3.30)'teki $y(x, \lambda)$ fonksiyonu (3.25) ve (3.26) sisteminin çözümüdür. (3.30)'ün (3.27) ve (3.28) koşullarını sağladığını hemen kontrol edilebilir (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Teorem 3.3.2. (3.29)'teki formül ile tanımlanan Green matrisi şu özelliklere sahiptir:

- i. $G(x, t, \lambda)$ Green matrisi tektir.
- ii. $G(x, t, \lambda)$, $(0,0)$ noktasında süreklidir.
- iii. $G(x, t, \lambda) = G^T(t, x, \lambda)$

- iv. $\lambda_0, \Delta(\lambda)$ 'nın bir sıfır noktasıdır. O halde $\lambda_0, G(x, t, \lambda)$ matrisinin bir basit kutbu olabilir. Öyleyse şu elde edilir:

$$G(x, t, \lambda) = \frac{-\varrho(x)\varrho(t)}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{G}(x, t, \lambda),$$

Burada $\tilde{G}(x, t, \lambda), \lambda_0$ 'ın komşuluğundaki λ 'nın bir analitik fonksiyonudur ve $\varrho(x), \lambda_0$ 'a karşılık gelen normallenmiş bir eigen fonksiyonudur.

İspat. i. Tam tersine farz edelim ki; (3.25) – (3.28) sistemi için ikinci bir $\tilde{G}(x, t, \lambda)$ Green matrisi vardır. (3.30) formülü ile şu elde edilir:

$$\int_0^b \{G(x, t, \lambda) - \tilde{G}(x, t, \lambda)\} f(t) d^\alpha t = 0.$$

$f(t) = \overline{(x, t, \lambda) - \tilde{G}(x, t, \lambda)}^T$ alalım. O zaman;

$$\int_0^b \|G(x, t, \lambda) - \tilde{G}(x, t, \lambda)\|_{\mathbb{C}^2}^2 d^\alpha t = \|G(x, t, \lambda) - \tilde{G}(x, t, \lambda)\|^2 = 0.$$

Öyleyse; $G(x, t, \lambda) = \tilde{G}(x, t, \lambda)$ sonucu çıkar.

ii, iii ve iv kolaylıkla sağlanır (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

3.4. Eigen Fonksiyonu Açılım Formülü

Bu bölümde, (3.25) – (3.29) sınır değer probleminin sonsuza giderken sayılabilir bir öz değer dizisinin varlığını ve karşılık gelen öz vektörlerin $\mathcal{H}$ 'nin bir ortonormal bazını oluşturduğunu kanıtlanacaktır.

Şimdi, aşağıdaki tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 3.4.1. $0 \leq x$ ve $t \leq b$ olmak üzere iki değişkenli $\mathbb{C}^2$ 'deki $M(x, t)$ matris-değer fonksiyonu eğer;

$$\int_0^b \int_0^b \|M(x, t)\|^2 d^\alpha x d^\alpha t < +\infty$$

ise a -Hilbert-Schmidt çekirdeği olarak adlandırılır.(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Teorem 3.4.2.

A operatörü aşağıdaki formül ile tanımlansın:

$$A\{x_i\} = \{y_i\}.$$

Burada;

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k, i = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Eğer

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty \quad (3.34)$$

ise A operatörü l^2 dizi uzayında kompakttır (Naimark, 1968).

Teorem 3.4.3. (Hilbert-Schmidt) A, bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında kompakt, kendine eş operatör olsun. O halde, A'nın öz vektörlerinin bir ortonormal sistemi $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ile buna karşılık gelen sıfırdan farklı öz değerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ vardır öyle ki; her $x \in \mathcal{H}$ elemanı

$$x = \sum_n c_n \varphi_n + x'$$

formunun tek türlü bir temsiline sahiptir. Burada $x', Ax' = 0$ şartını sağlar. Dahası;

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n \varphi_n$$

ve sonsuz sayıda sıfırdan farklı öz değer var olduğu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0 \text{ (Kolmogorov ve Fomin, 1970).}$$

Tüm $y \in \mathcal{H}$ vektörlerinin lineer kümesini D_L şeklinde ifade edelim öyle ki; $L_1(y) = 0, L_1(y) = 0$. $Ly = \tau Y$ eşitliği ile D_L üzerinde L operatörü tanımlayalım. L operatörünün (3.14) – (3.16) ile tanımlanan konform kesirli Dirac problemi ile aynı öz değerlere sahip olduğu hemen anlaşılır. $\lambda = 0$ ’ın bir öz değer olmadığı varsayımında genellik kaybı yoktur. O zaman, $L = \{0\}$. Böylelikle, $(Ly)(x) = f(x)$, $f(\cdot) \in \mathcal{H}$ probleminin çözümü şu şekilde verilir:

$$y(x) = \int_0^b G(x, t) f(t) d^\alpha t,$$

burada;

$$G(x, t) = G(x, t, 0) = \begin{cases} -\frac{\theta_2(x)\theta_1^T(t)}{W(\theta_1, \theta_2)}, & 0 \leq t \leq x \\ -\frac{\theta_1(x)\theta_2^T(t)}{W(\theta_1, \theta_2)}, & x < t \leq b \end{cases}. \quad (3.35)$$

Teorem 3.4.4. (3.35) ile tanımlanan $G(x, t)$, bir α -Hilbert-Schmidt çekirdeğidir.

İspat. (3.35) formülün üst yarısına göre,

$$\int_0^b d^\alpha x \int_0^x \|G(x, t)\|^2 d^\alpha t < +\infty;$$

(3.35) formülün alt yarısına göre,

$$\int_0^b d^\alpha x \int_x^b \|G(x, t)\|^2 d^\alpha t < +\infty$$

elde ederiz çünkü; iç integral vardır ve $L_\alpha^2(0, b)$ ’ye ait $\theta_{ij}(x)\theta_{kl}(t)$ ($i, j, k, l = 1, 2$) çarpımlarının lineer bir kombinasyonudur çünkü çarpanların her biri $L_\alpha^2(0, b) \times L_\alpha^2(0, b)$ ’ye aittir. O halde şu elde edilir:

$$\int_0^b \int_x^b \|G(x, t)\|^2 d^\alpha x d^\alpha t < +\infty. \quad (3.36)$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Teorem3.4.5.

$$(\mathbf{S}f)(x) = \int_0^b G(x, t)f(t)d^\alpha t$$

formülü ile tanımlanan $\mathbf{S}$ operatörü kompakt ve kendine eştir (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

İspat. $\Phi_i = \Phi_i(t), i \in \mathbb{N}$; $\mathcal{H}$ 'nin bir tam, ortonormal bazı olsun. $G(x, t)$, α -Hilbert-Schmidt çekirdeği olduğundan şu tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} x_i &= (f, \Phi_i) = \int_0^b (f(t), \Phi_i(t))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t, \\ y_i &= (g, \Phi_i) = \int_0^b (g(t), \Phi_i(t))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t, \\ a_{ik} &= \int_0^b \int_0^b (G(x, t)\Phi_i(x), \Phi_k(t))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha x d^\alpha t, \quad i, k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

o halde, $\mathcal{H}$ izometrik olarak l^2 ile eşlenir. Sonuç olarak; integral operatörümüz bu eşleme ile l^2 uzayında (3.35) formülü ile tanımlanan operatöre dönüşür ve (3.36), (3.34) durumuna dönüştürülür. Teorem 3.4.2. ile bu operatör kompakttır. Öyleyse orijinal operatör kompakttır.

$f, g \in \mathcal{H}$ olsun. $G(x, t) = G^T(t, x)$ olacak şekilde ve $G(x, t) \in \mathbb{C}^2$ 'de $[0, b] \times [0, b]$ üzerinde tanımlanan bir matris-değer fonksiyonu olduğundan, şu elde edilir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}f, g) &= \int_0^b ((\mathbf{S}f)(x), g(x))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha x = \int_0^b \left(\int_0^b G(x, t)f(t)d^\alpha t, g(x) \right)_{\mathbb{C}^2} d^\alpha x \\ &= \int_0^b \left(f(t), \int_0^b G(x, t)g(x)d^\alpha x \right)_{\mathbb{C}^2} d^\alpha t = (f, \mathbf{S}g). \end{aligned}$$

Böylelikle, $\mathbf{S}$ 'nin kendine eş olduğunu ispatlanmış olur.

Teorem3.4.6. L operatörünün öz değerleri, sıralanabilen reel sayıların sonsuz bir $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ dizisini oluşturur öyle ki;

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < \dots \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

L 'nin normalleştirilmiş öz fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{H}$ için bir ortonormal baz oluşturur.

İspat. 3.4.3 ve 3.4.4 teoremlerine göre $\mathbf{S}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ olmak üzere sıfırdan farklı reel öz değerlerin bir $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ sonsuz dizisine sahiptir. O halde,

$$|\lambda_n| = \frac{1}{|\xi_n|} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ayrıca $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 'ne karşılık gelen bir ortonormal öz fonksiyonlar kümesini gösterebilir. Böylece;

$$\begin{aligned} y = \mathbf{S}f &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(f, \chi_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\tau y, \chi_n) \chi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(y, \tau \chi_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(y, \chi_n) \chi_n. \end{aligned}$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Örnek 3.4.7.

$$\begin{cases} -T_{\alpha} y_2 = \lambda y_1, \\ T_{\alpha} y_1 = \lambda y_2, \end{cases} \quad (3.37)$$

konform kesirli Dirac sistemini,

$$L_1(y) = y_1(0) = 0, \quad L_2(y) = y_1(1) = 0 \quad (3.38)$$

Dirichlet koşulları ile ele alınacak olursa (3.37)'in çözümleri şunlardır:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \cos \int_0^x \lambda d^{\alpha} t \\ -\sin \int_0^x \lambda d^{\alpha} t \end{pmatrix}, \\ \Phi_2(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \sin \int_0^x \lambda d^{\alpha} t \\ \cos \int_0^x \lambda d^{\alpha} t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

O zaman, (3.37)'in öz değerleri şu determinantın sıfırlarıdır:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(\Phi_1) & L_1(\Phi_2) \\ L_2(\Phi_1) & L_2(\Phi_2) \end{vmatrix} = -\sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right).$$

Dolayısıyla, $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ öz değerleri $\sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right)$ 'nin sıfırlarıdır ve

$$\left\{ \begin{pmatrix} \sin \int_0^x \lambda d^\alpha t \\ \cos \int_0^x \lambda d^\alpha t \end{pmatrix} \right\}_{n=1}^\infty$$

eigen fonksiyonlarına karşılık gelen $L_\alpha^2((0,1); \mathbb{C}^2)$ 'nin bir ortogonal bazıdır. Açıkça görülür ki;

$$\begin{aligned} \theta_1(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \sin \int_0^x \lambda d^\alpha t \\ \cos \int_0^x \lambda d^\alpha t \end{pmatrix} \text{ ve} \\ \Phi_1(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) - \cos\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \\ -\sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) - \cos\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla λ bir öz değer değil ise Green matrisi şu şekilde ifade edilir:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\theta_2(x, \lambda) \theta_1^T(t, \lambda)}{\sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right)}, & 0 \leq t \leq x \\ -\frac{\theta_1(x, \lambda) \theta_2^T(t, \lambda)}{\sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right)}, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Örnek 3.4.8. Şimdi (3.37) denklemini Neumann sınır koşulları olan

$$L_1(y) = y_2(0) = 0, \quad L_2(y) = y_2(1) = 0$$

ile ele alınacak olursa şunu elde ederiz:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(\Phi_1) & L_1(\Phi_2) \\ L_2(\Phi_1) & L_2(\Phi_2) \end{vmatrix} = -\sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right).$$

Böylece $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ öz değerleri $\sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right)$ 'nin sıfırlarıdır. Buna ek olarak;

$$\theta_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos \int_0^x \lambda d^\alpha t \\ -\sin \int_0^x \lambda d^\alpha t \end{pmatrix} \text{ ve}$$

$$\theta_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) + \sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \\ -\cos\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \sin\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) + \sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) \cos\left(\int_0^x \lambda d^\alpha t\right) \end{pmatrix}.$$

λ bir öz değer değil ise Green matrisi şu şekilde ifade edilir:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\theta_2(x, \lambda) \theta_1^T(t, \lambda)}{\sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right)}, & 0 \leq t \leq x \\ \frac{\theta_1(x, \lambda) \theta_2^T(t, \lambda)}{\sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right)}, & x < t \leq 1. \end{cases}$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

Örnek 3.4.9. Burada (3.37) şu sınır koşulları ile ele alınacaktır:

$$L_1(y) = y_1(0) = 0, \quad L_2(y) = y_1(1) + y_2(1) = 0.$$

O zaman şu elde edilir:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(\Phi_1) & L_1(\Phi_2) \\ L_2(\Phi_1) & L_2(\Phi_2) \end{vmatrix} = -\cos\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) - \sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right).$$

Bu problemin öz değerleri aşağıdaki denklemin çözümleridir:

$$\cos\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right) = -\sin\left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t\right).$$

$\theta_1(x, \lambda)$ ve $\theta_2(x, \lambda)$ fonksiyonları şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned}
\theta_1(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} -\sin \int_0^x \lambda d^\alpha t \\ -\cos \int_0^x \lambda d^\alpha t \end{pmatrix} \text{ ve} \\
\theta_2(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} \sin \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) + \cos \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \\ + \sin \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) - \cos \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} -\cos \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) - \sin \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \sin \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \\ -\cos \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) + \sin \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) \cos \left(\int_0^x \lambda d^\alpha t \right) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

λ bir öz değeri değil ise Green matrisi şu şekilde ifade edilir:

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\sin \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) + \cos \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right)} \theta_2(x, \lambda) \theta_1^T(t, \lambda), & 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{\sin \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right) + \cos \left(\int_0^1 \lambda d^\alpha t \right)} \theta_1(x, \lambda) \theta_2^T(t, \lambda), & x < t \leq 1. \end{cases}$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2020).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu kısımda, regüler konform kesirli Dirac operatörleri için bir sınır değer uzayı inşa edilecektir. Sınır koşulları açısından, tüm maksimal dissipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri karakterize edilecektir.

Aşağıda konform kesirli dinamik Dirac sistemi ele alınacak olursa:

$$Y_1 y(\xi) = \lambda y(\xi), \xi \in (0, b), \quad 0 < b < \infty. \quad (4.1)$$

Burada

$$Y_1 y(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & -T_\alpha \\ T_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(\xi) & -T_\alpha \\ T_\alpha & r(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$ gerçekteğer fonksiyonları $(0, b)$ de tanımlıdır ve $p(\cdot), r(\cdot) \in L^1_\alpha(0, b)$.

Dirac sisteminden operatörlere geçiş yapmak için aşağıdaki Hilbert uzayı tanımlanır:

$$\mathcal{H} := L^2_\alpha((0, b); \mathbb{C}^2).$$

Bu uzay $(0, b)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir fonsiyonlardan oluşur ve iç çarpımı şu şekilde tanımlanır:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} := \int_0^b (f(\xi), g(\xi))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha \xi.$$

$x(\xi, \lambda)$ ve $z(\xi, \lambda)$ çözümleri için Green formülü aşağıdaki gibidir:

$$\int_0^b ((Yx)(\xi), z(\xi))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha \xi - \int_0^b ((x)(\xi), (Yz)(\xi))_{\mathbb{C}^2} d^\alpha \xi = [x, z]_b - [x, z]_0, \quad (4.2)$$

burada

$$[x, z]_{\xi} := W_{\alpha}(x, \bar{z})(\xi) = x_1(\xi)\overline{z_2(\xi)} - \overline{z_1(\xi)}x_2(\xi)$$

şeklinde tanımlanır (Allahverdiev ve Tuna, 2020).

D_{maks} , $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$ şeklindeki tüm fonksiyonlardan oluşan küme olarak tanımlanacaktır. Burada y_j ve $T_{\alpha}y_j$ ($j = 1, 2$), $(0, b)$ aralığında sürekli fonksiyonlardır ve $Y(y) \in \mathcal{H}$. D_{maks} üzerinde Γ_{maks} maksimal operatörü $\Gamma_{maks}y = Yy$ eşitliğiyle tanımlanır.

D_{min} , tüm $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in D_{maks}$ vektörlerinin oluşturduğu ve aşağıdaki koşulları sağlayan lineer kümesi olsun:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_1(b) = y_2(b) = 0. \quad (4.3)$$

Eğer Γ_{maks} operatörünü D_{min} kümesine kısıtlarsak Γ_{min} minimal operatörü elde edilir. Buradan $\Gamma_{min}^* = \Gamma_{maks}$ ve Γ_{min} 'in kapalı simetrik olduğu açıkça görülür (Naimark, 1968).

Tanım 4.1. Bir $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında tanımlı tanım kümesi $D(M)$ ' de yoğun olan bir M lineer operatörü, her $f \in D(M)$ için $Im(Mf, f) \leq 0$ ($Im(Mf, f) \geq 0$) sağlanıyorsa dissipatif(accumulative) olarak adlandırılır (Allahverdiev, 2003).

Tanım 4.2. $\mathcal{H}$ Hilbert uzayında tanımlı $(\mathcal{H}, \Phi_1, \Phi_2)$ üçlüsü kapalı, simetrik bir M operatörünün sınır değerler uzayı olarak adlandırılır. Eğer Γ_1 ve Γ_2 $D(M)$ 'den $\mathcal{H}'$ 'ye lineer dönüşümler olup

- i. Her $(f, g) \in D(M^*)$ $\langle M^*f, g \rangle_{\mathcal{H}} - \langle f, M^*g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Phi_1f, \Phi_2g \rangle_{\mathcal{H}} - \langle \Phi_2f, \Phi_1g \rangle_{\mathcal{H}}$;
- ii. Her $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ için $\Gamma_1f = F_1$ ve $\Gamma_2f = F_2$

olacak şekilde bir $f \in D(M^*)$ vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984).

Şimdi regular konform kesirli Dirac operatörleri ele alınacak olup tüm maksimal, dissipatif, accretive, self-adjoint ve diğer genişlemeleri sınır koşulları aracılığıyla tanımlanacaktır.

Teorem 4.3. Ω_1 ve Ω_2 , D_{maks} 'tan $\mathbb{C}^2$ 'ye lineer dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\Omega_1 x = \begin{pmatrix} -x_1(0) \\ x_1(b) \end{pmatrix}, \Omega_2 x = \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2(b) \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

O halde $(\mathbb{C}^2, \Omega_1, \Omega_2)$ üçlüsü Γ_{min} operatörünün bir sınır uzayıdır.

İspat. Her $x, z \in D_{maks}$ için

$$\langle \Omega_1 x, \Omega_2 z \rangle - \langle \Omega_2 x, \Omega_1 z \rangle = -x_1(0)\bar{z}_2(0) - x_2(0)\bar{z}_1(0) + x_1(b)\bar{z}_2(b) - x_2(b)\bar{z}_1(b).$$

Buradan şu bulunur:

$$\langle \Omega_1 x, \Omega_2 z \rangle - \langle \Omega_2 x, \Omega_1 z \rangle = [x, z]_b - [x, z]_0.$$

(4.2)'teki Green formülü bize şunu verir:

$$\langle \Omega_1 x, \Omega_2 z \rangle - \langle \Omega_2 x, \Omega_1 z \rangle = \langle \Gamma_{maks} x, z \rangle_H - \langle x, \Gamma_{maks} z \rangle_H,$$

Bu ifade sınır değerler uzayının tanımındaki birinci koşulun (sınır değer uzayının var olması için gerekli olan simetri koşulunun) sağlandığını gösterir.

Şimdi ikinci şart ispatlanacaktır. $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ verilsin. O halde vektör değer fonksiyonu

$$y(\xi) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha_1(\xi)u_1(\xi) + \alpha_2(\xi)v_1(\xi) + \beta_1(\xi)u_2(\xi) + \beta_2(\xi)v_2(\xi),$$

Burada

$$\alpha_1(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\xi) \\ \alpha_{12}(\xi) \end{pmatrix}, \alpha_2(\xi) = \begin{pmatrix} \alpha_{21}(\xi) \\ \alpha_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \beta_1(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\xi) \\ \beta_{12}(\xi) \end{pmatrix}, \beta_2(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_{11}(\xi) \\ \beta_{12}(\xi) \end{pmatrix} \in H$$

aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\alpha_{11}(0) = -1, \alpha_{12}(0) = \alpha_{11}(b) = \alpha_{12}(b) = 0,$$

$$\alpha_{22}(0) = 1, \alpha_{21}(0) = \alpha_{21}(b) = \alpha_{22}(b) = 0,$$

$$\beta_{11}(b) = 1, \beta_{11}(0) = \beta_{12}(0) = \beta_{12}(b) = 0,$$

$$\beta_{22}(b) = 1, \beta_{21}(0) = \beta_{21}(b) = \beta_{22}(0) = 0$$

Bu eleman D_{max} kümesine aittir ve $\Omega_1 y = u$, $\Omega_2 y = v$.

O zaman Teorem 2.1.16 dan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.4. $\mathbb{C}^2$ de keyfi bir K daralan dönüşümü (contraction) için, Γ_{min} operatörünün $x \in D_{maks}$ olmak üzere

$$(K - I)\Omega_1 x + i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (4.5)$$

ya da

$$(K - I)\Omega_1 x - i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (4.6)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesine kısıtlanması sırasıyla Γ_{min} operatörünün maksimal dissipative ve maksimal accretive genişlemesidir.

Tersine Γ_{min} operatörünün her maksimal dissipative(accretive) genişlemesi Γ_{maks} operatörünün (4.5) ((4.6)) koşulunu sağlayan $x \in D_{maks}$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmasıdır ve bu genişleme, contraction (daralan dönüşüm) K' yi tek türlü olarak belirler. Eğer K bir izometri ise (4.5) ve (4.6) koşulları, Γ_{min} operatörünün H uzayındaki maksimal simetrik genişlemelerini verir. Eğer K üniter ise; bu koşullar self-adjoint genişlemeleri tanımlar.

Özel olarak,

$$x_1(0) - h_1 x_2(0) = 0$$

$$x_1(b) - h_2 x_2(b) = 0$$

Sınır koşulları $Im h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$ ve $Im h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty$ ($Im h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$ ve $Im h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty$) Γ_{min} operatörün maksimal dissipative(self-adjoint) genişlemelerini ayrılmış sınır koşulları ile tanımlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dirac sistemi, modern teorik fiziğin temel taşlarından biri olarak kabul edilmektedir. Bu sistem, elektron spinini doğal bir biçimde tanımlaması, antimaddenin varlığını öngörmesi ve hidrojen atomunun spektrumunu yüksek bir doğrulukla yeniden üretmesi gibi çığır açıcı özelliklere sahiptir. Paul Dirac tarafından geliştirilen bu denklem, relativistik kuantum mekaniği çerçevesinde parçacıkların davranışlarını anlamada kritik bir rol oynamış ve kuantum elektrodinamiğinin temellerini atmıştır. Dirac sisteminin ortaya koyduğu teorik sonuçlar, yalnızca temel parçacık fiziğinde değil, aynı zamanda katı hâl fiziği ve kozmoloji gibi farklı disiplinlerde de önemli uygulama alanları bulmuştur. Tüm bu nedenlerle, Dirac sistemi günümüzde hâlen çok sayıda araştırmacının ilgisini çeken ve üzerine yoğun çalışmalar yürütülen bir konu olmaya devam etmektedir.

Bu tez çalışmasında,

$$Y_1 y(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & -T_\alpha \\ T_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(\xi) & -T_\alpha \\ T_\alpha & r(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Y_1 y(\xi) = \lambda y(\xi), \xi \in (0, b), \quad 0 < b < \infty$$

konform kesirli Dirac sistemi ele alınmıştır. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$ gerçekteğer fonksiyonları $(0, b)$ de tanımlıdır ve $p(\cdot), r(\cdot) \in L^1_\alpha(0, b)$.

Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal operatörler ve maksimal operatörler tanımlandı.

Ω_1 ve Ω_2 , D_{maks}' 'tan $\mathbb{C}^2$ 'ye lineer dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlandı:

$$\Omega_1 x = \begin{pmatrix} -x_1(0) \\ x_1(b) \end{pmatrix}, \Omega_2 x = \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2(b) \end{pmatrix}.$$

Bu dönüşümler yardımıyla sınır değer uzayı oluşturuldu. Bu kavram yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edildi:

$\mathbb{C}^2$ de keyfi bir K daralan dönüşümü (contraction) için, Γ_{min} operatörünün $x \in D_{maks}$ olmak üzere

$$(K - I)\Omega_1 x + i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (5.1)$$

ya da

$$(K - I)\Omega_1 x - i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (5.2)$$

Şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesine kısıtlanması sırasıyla Γ_{min} operatörünün maksimal dissipative ve maksimal accretive genişlemesidir.

Tersine Γ_{min} operatörünün her maksimal dissipative(accretive) genişlemesi Γ_{maks} operatörünün (5.1) ((5.2)) koşulunu sağlayan $x \in D_{max}$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmasıdır ve bu genişleme, contraction (daralan dönüşüm) K' yi tek türlü olarak belirler. Eğer K bir izometri ise (5.1) ve (5.2) koşulları, Γ_{min} operatörünün H uzayındaki maksimal simetrik genişlemelerini verir. Eğer K üniter ise; bu koşullar self-adjoint genişlemeleri tanımlar.

Özel olarak,

$$x_1(0) - h_1 x_2(0) = 0$$

$$x_1(b) - h_2 x_2(b) = 0$$

Sınır koşulları $Im h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$ ve $Im h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty$ ($Im h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$ ve $Im h_2 = 0$ veya $h_2 = \infty$) Γ_{min} operatörün maksimal dissipative(self-adjoint) genişlemelerini ayrılmış sınır koşulları ile tanımlar.

Bu çalışma aynı problem için singüler durumda ele alınarak genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 279, 57–66
- Abdeljawad, T., Al Horani, M., ve Khalil, R. (2015). Conformable fractional semigroup operators. *Journal of Semigroup Theory and Applications*, (7).
- Abdeljawad, T., Alzabut, J., ve Jarad, F. (2017). A generalized Lyapunov-type in-equality in the frame of conformable derivatives. *Advances in Difference Equations*, 321.
- Abdeljawad, T., Agarwal, R.P., Alzabut, J., Jarad, F., ve Ozbekler, A. (2018). Lyapunov-type inequalities for mixed non-linear forced differential equations within conformable derivatives. *Journal of Inequalities and Applications*, 143.
- Abu, Hammad M., ve Khalil, R. (2014). Conformable fractional heat differential equations. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 94(2), 215–221.
- Abu, Hammad M., ve Khalil, R. (2014). Abel’s formula and Wronskian for conformable fractional differential equations. *International Journal of Differential Equations and Applications*, 13(3), 177–183.
- Al-Refai, M., ve Abdeljawad, T. (2017). Fundamental results of conformable Sturm–Liouville eigenvalue problems. *Complexity* , 2017, Article ID 3720471. <https://doi.org/10.1155/2017/3720471>
- Allahverdiev, B. P. (1995). On extensions of symmetric Schrödinger operators with matrix potentials. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 59, 19–54. (English translation in *Izvestiya Mathematics*, 59, 45–62)
- Allahverdiev, B. P. (2003). Spectral analysis of dissipative Dirac operators with general boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 283, 287–303.
- Allahverdiev, B. P. (2013). Extensions of symmetric second-order difference operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations and Applications*, 19(5), 839–849.
- Allahverdiev, B. P. (2014). Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear and Multilinear Algebra*, 62(9), 1146–1152.
- Allahverdiev, B. P. (2016). Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat*, 30(6), 1475–1484.
- Allahverdiev, B. P., ve Tuna, H. (2017). One-dimensional q-Dirac equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 7287–7306.

- Allahverdiev, B. P., Tuna, H., ve Yalçinkaya, Y. (2019). Conformable fractional Sturm–Liouville equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 1-19. <https://doi.org/10.1002/mma.5595>
- Allahverdiev, B. P., ve Tuna, H. (2020). One-dimensional conformable fractional Dirac system. *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana*, 26(1), 121–146.
- Anderson, D. R., ve Ulness, D. J. (2015). Newly defined conformable derivatives. *Advances in Dynamical Systems and Applications*, 10(2), 109–137.
- Anderson, D. R., ve Ulness, D. J. (2015). Properties of the Katugampola fractional derivative with potential application in quantum mechanics. *Journal of Mathematical Physics*, 56(6), 063502. <https://doi.org/10.1063/1.4926894>
- Anderson, D. R. (2016). Taylor’s formula and integral inequalities for conformable fractional derivatives. *Contributions in Mathematics and Engineering, in Honor of Constantin Caratheodory* (s. 25–43). New York: Springer.
- Atangana, A., Baleanu, D., ve Alsaedi, A. (2015). New properties of conformable derivative. *Open Mathematics*, 13, 889–898.
- Benkhettou, N., Hassani, S., ve Torres, D. F. M. (2016). A conformable fractional calculus on arbitrary time scales. *Journal of King Saud University - Science*, 28(1), 93–98.
- Birman, M. Sh. (1956). On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Matematicheskii Sbornik*, 38(4), 431–450.
- Bruk, V. M. (1976). On a class of boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions. *Matematicheskii Sbornik*, 100, 210–216.
- Calkin, J. W. (1939). Abstract boundary conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 45(3), 369–442.
- Cenesiz, Y., Baleanu, D., Kurt, A., ve Tasbozan, O. (2016). New exact solutions of Burgers type equations with conformable derivative. *Waves in Random and Complex Media*. <https://doi.org/10.1080/17455030.2016.1205237>
- Chung, W. S. (2015). Fractional Newton mechanics with conformable fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 290, 150–158.
- Eslami, M., ve Rezazadeh, H. (2016). The first integral method for Wu–Zhang system with conformable time-fractional derivative. *Calcolo*, 53(3), 475–485.
- Gorbachuk, M. L., ve Kochubei, A. N. (1989). The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations. *Ukrainian Mathematical Journal*, 41(1989), 1117–1129. (Original work published in *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, 41, 1299–1312). In *Theory of operators in function spaces and its applications* (s. 174–183). Kiev: Naukova Dumka.

- Gorbachuk, M. L., ve Gorbachuk, V. I. (1984). *Boundary value problems for operator differential equations*. Kiev: Naukova Dumka. (English translation, 1991, Birkhäuser Verlag)
- Gülşen, T., Yılmaz, E., ve Göktaş, S. (2017). Conformable fractional Dirac system on time scales. *Journal of Inequalities and Applications*, 2017, Article 161. <https://doi.org/10.1186/s13660-017-1414-y>
- Karayer, H., Demirhan, D., ve Büyükkılıç, D. (2016). Conformable fractional Nikiforov–Uvarov method. *Communications in Theoretical Physics*, 66, 12–18.
- Jarad, F., Adjabi, Y., Baleanu, D., ve Abdeljawad, T. (2018). On defining the distributions δ^r and δ^r by conformable derivatives. *Advances in Differential Equations*, 2018, Article 407. <https://doi.org/10.1186/s13662-018-1816-9>
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., ve Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 264, 65–70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2013.09.027>
- Khalil, R., ve Abu Hammad, M. (2016). Systems of linear fractional differential equations. *Asian Journal of Mathematics and Computer Research*, 12(2), 120–126.
- Khol'kin, A. M. (1981). Self-adjoint boundary conditions at infinity for a quasiregular system of even-order differential equations. In *Theory of operators in function spaces and its applications* (pp. 174–183). Kiev: Naukova Dumka.
- Kochubei, A. N. (1975). Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. *Matematicheskie Zametki*, 17, 41–48. (English transl. in *Mathematical Notes*, 17, 25–28)
- Kolmogorov, A. N., ve Fomin, S. V. (1970). *Introductory real analysis* (R. A. Silverman, Trans.). New York: Dover Publications
- Krein, M. G. (1947). The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications. I. *Matematicheskii Sbornik*, 20, 431–495. II. *Matematicheskii Sbornik*, 21, 365–404.
- Krein, M. G. (1952). On the indeterminate case of the Sturm–Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$. *Akademiya Nauk SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 16, 292–324.
- Levitan, B. M., ve Sargsjan, I. S. (1991). *Sturm–Liouville and Dirac operators*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Naimark, M. A. (1968). *Linear differential operators* (2nd ed.). Moscow: Nauka. (English translation of 1st ed., New York, 1969)

- Philips, R. S. (1959). Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90, 193–254. (Russian translation in *Matematika*, 6(4), 11–70, 1962)
- Pospisil, V., & Skripkova, L. P. (2016). Sturm's theorems for conformable fractional differential equations. *Mathematical Communications*, 21, 273–281.
- Rellich, F. (1951). Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung. *Mathematische Annalen*, 122, 343–368.
- Rofe-Beketov, F. S. (1969). Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 184, 1034–1037. (English translation in *Soviet Mathematics Doklady*, 10, 188–192, 1969)
- Tasbozan, O., Cenesiz, Y., ve Kurt, A. (2016). New solutions for conformable fractional Boussinesq and combined KdV–mKdV equations using Jacobi elliptic function expansion method. *The European Physical Journal Plus*. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16244-x>
- Thaller, B. (1992). *The Dirac equation*. New York, NY: Springer
- Tuna, H. (2013). Lim-3 durumundaki 4. mertebe operatörlerin dissipatif genişlemeleri. *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 2(2), 75–79.
- Tuna, H. ve Allahverdiev, B. P. (2018). Dissipative extensions of fourth order differential operators. *Thai Journal of Mathematics*, 16(1), 275–285.
- Tuna, H., ve Bayrak, S. (2018). On extensions of singular fourth-order dynamic operators on time scales. *Filomat*, 32(11), 3843–3851.
- Vishik, M. I. (1952). On general boundary-value problems for elliptic differential equations. *Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva*, 1, 187–246.
- Von Neumann, J. (1929). Allgemeine Eigenwertheorie Hermitescher Functionaloperatoren. *Mathematische Annalen*, 102, 49–131.
- Wang, Y., Zhou, J., & Li, Y. (2016). Fractional Sobolev's space on time scale via conformable fractional calculus and their application to a fractional differential equation on time scale. *Advances in Mathematical Physics*, 2016, Article ID 963491. <https://doi.org/10.1155/2016/963491>
- Weidmann, J. (1987). *Spectral theory of ordinary differential operators* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1258). Berlin, Germany: Springer.