

T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR BOYUTLU Q-DİRAC DENKLEMİ

Betül YILDIRIM

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2024

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca **Yüksek Lisans** Tezi olarak sunduğum “**Bir Boyutlu q-Dirac Denklemi**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

13 /06 /2024

Betül YILDIRIM

ÖNSÖZ

Çalışma sürecinde her türlü yol gösterici olan, olumlu tavrıyla beni cesaretlendiren, bilgi birikimiyle çalışmama farklı açılardan bakmamı sağlayan, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli danışmanım **Prof. Dr. Hüseyin TUNA**'ya sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.,

Doğduğum andan beri beni yetiştiren, her zaman sırtımı yaslayabileceğim çınarlarım olan annem Kiraz YILDIRIM, babam Ali YILDIRIM, kardeşlerim Ahmet YILDIRIM ve Emir YILDIRIM'a teşekkür ediyorum.

Ayrıca yüksek lisans eğitimim boyunca bana maddi destek olan, TÜBİTAK 2210-A Yurt İçi Genel Yüksek Lisans Burs Programı ile destekleyen TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Haziran, 2024

Betül YILDIRIM

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖNSÖZ	i
İÇİNDEKİLER	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iii
ÖZET.....	iv
SUMMARY	v
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Temel Kavramlar	3
2.2. Bir Boyutlu q -Dirac Sistemleri	9
2.3. Özeşlenik q -Dirac Denklemi.....	19
2.4. Green Fonksiyonu ve Özfonksiyon Açılım Formülü.....	25
3. MATERYAL VE YÖNTEM	33
3.1. q –Dirac sistemlerinin Temel Çözümü	33
3.2. Limit-Çember ve Limit-Nokta Durumları	38
3.3. q -Dirac Sisteminde Limit-Çember Durumu	43
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	50
KAYNAKLAR	51

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$	: Sınır değer uzayı
$D_q f(t)$	: q-Fark operatörü
H	: Hilbert Uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$W_q[f, g]$	: f ile g fonksiyonlarının q – Wronskian’ı
$\int$	: İntegral
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$L_{\max}$	: Maksimal Operatör
$L_{\min}$	: Minimal Operatör

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Bir Boyutlu q -Dirac Denklemi

Betül YILDIRIM

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Haziran, 2024

Bu çalışmada ilk olarak konunun tarihsel gelişimi ifade edildi ve çalışmada kullanılan bazı tanım ve temel sonuçlar verildi.

Üçüncü bölümde, singüler durumda q -Dirac denklemi çalışıldı.

Son olarak singüler durumda q -Dirac operatörünün maximal disipatif, akretif, kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: q -Dirac operatörü, simetrik operatör, kendine eş operatör, disipatif operatör, akretif operatör, sınır değer uzayı.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

One Dimensional q -Dirac Equation

Betül YILDIRIM

**Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

June, 2024

In this study, firstly historical development of the topic is mentioned, some definitions and main results used in the work are given.

In the third section, the q -Dirac equation are studied in the singular case.

Finally a description of all maximal dissipative, accretive, self-adjoint extensions and some other extensions of singular q -Dirac operator is given in terms of boundary conditions.

Keywords: q -Dirac operator, symmetric operators, self-adjoint operators, dissipative operators, accretive operators, a space of boundary value.

1. GİRİŞ

Kuantum analizi matematikte son derece ilginç ve önemli bir konudur. Klasik limit kavramını kullanmadığından, klasik anlamda türevi alınamayan fonksiyonların kuantumda türevleri alınabilmektedir. Dolayısıyla, kuantum türevi alınabilir fonksiyonları içeren çeşitli fiziksel modeller ve farklı matematiksel alanlarda ilgili problemler vardır (Annaby ve Mansour, 2012) .

Kuantum türev

$$D_q[f](x) := \frac{f(qx) - f(x)}{(q-1)x},$$

formülü ile tanımlanır (Jackson, 1904; Kac ve Cheung, 2002; Gasper ve Rahman, 2004; Annaby ve Mansour, 2012).

Bir boyutlu q-Dirac sistemlerinin ele alalım:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q}D_{q^{-1}} \\ D_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ya da

$$ly := \begin{cases} -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}y_2 + p(x)y_1, \\ D_qy_1 + r(x)y_2 \end{cases}$$

$$ly = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq a < \infty. \quad (1.1)$$

Burada λ karmaşık bir özdeğer parametresi, $p(x)$ ve $r(x)$, $[0, a]$ aralığı üzerinde tanımlı ve sıfırda sürekli değerli fonksiyonlar olup $p(x), r(x) \in L^1_q(0, a)$ dır. Bu sisteme “Dirac sistemi” denir. Realist kuantum mekaniğinin temel fiziğini formüle etmesinden dolayı Dirac sistemi fizikteki en önemli denklemlerden biridir. Anti maddenin varlığını öngörmekte ve elektron spininin bir tanımını vermektedir. Dirac operatörü ilginç spektral özelliklere sahip olup Sturm-Liouville operatörlerine göre üzerinde çalışılması daha zordur. Örneğin, Sturm-Liouville

operatörleri aşağıdan yarı-sınırlı olmasına rağmen, Dirac operatörleri yukarıdan ya da aşağıdan sınırlı değildir. Literatürde bir boyutlu Dirac özdeğer problemlerinin bazı yönleri ele alınmıştır (Levitan ve Sargsjan, 1991; Weidmann, 1987; Thaller, 1992). Bu tip denklemler regüler ve singüler durumda Allahverdiev ve Tuna (Allahverdiev ve Tuna, 2017; Allahverdiev ve Tuna, 2019) tarafından incelenilmiştir. Regüler durumda simetrik q -Dirac operatörünün genişlemeleri Allahverdiev ve Tuna, 2018, 2020) de ele alınmıştır.

Operatörler teorisinde simetrik operatörlerin genişlemeleri önemli araştırma alanlarından birisidir. Bu alanda başlıca sonuçlara J. Von Neumann (von Neumann, 1929), ulaşmıştır. Von Neumann simetrik operatörlerin hangi koşullar altında kendine eş genişlemeye sahip olduğu ve bu genişlemenin nasıl yapılacağını göstermiştir. Krein (Krein, 1947, 1952), Rellich (Rellich, 1951), Birman (Birman, 1956), Vishik (Vishik, 1952), simetrik operatörlerin genişlemeleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır.

1969 yılında Rofe-Beketov (Rofe-Beketov, 1969) lineer bağıntıları kullanarak simetrik operatörlerin genişlemesini vermiştir. Aynı metodu kullanarak simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemeleri sınır koşulları cinsinden ifade eden matematikçiler: Gorbachuk ve Gorbachuk (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984), Bairamogly (Bairamogly, 1976), Allahverdiev (Allahverdiev, 1995, 2013, 2014, 2016, 2019), Tuna (Tuna, 2013), Tuna ve Bayrak (Tuna ve Bayrak, 2018), Tuna ve Allahverdiev (Tuna ve Allahverdiev, 2018) dir.

Bu tez çalışmasında, singüler durumda q -Dirac denklemi ele alınmıştır. Bu tip operatörler için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. U , bir kompleks lineer uzay olmak üzere her $u, v \in U$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ her için aşağıdaki şartları sağlayan ve (u, v) ile gösterilen kompleks sayısına u ve v elemanlarının iç çarpımı ve U lineer uzayına da iç çarpım uzayı olarak isimlendirilir:

- i. $(u, u) \geq 0; (u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$
- ii. $(u, v) = \overline{(v, u)}$
- iii. $(\lambda u, v) = \lambda(u, v)$
- iv. $(u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v)$.

Ayrıca verilenlerden yola çıkarak $(u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v)$ ve

$(u, v_1 + v_2) = (u, v_1) + (u, v_2)$ özelliklerine ulaşabiliriz (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.2. $(U, (.,.))$ bir iç çarpım uzayı ve $u \in U$ kabul edelim. u vektörünün normu,

$$\begin{aligned} \|u\| &= (u, u)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varepsilon_j|^2 \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Şeklinde gösterilir. Bu norma göre $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı bir normlu vektör uzayı olur (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.3. Bir $(U, (.,.))$ iç çarpım uzayı,

$$\|u\| = (u, u)^{1/2} \quad (2.1.2)$$

normuna göre tam ise, yani $(U, (.,.))$ içindeki her Cauchy dizisi U ' nun bir u_0 noktasına yakınsak ise bu iç çarpım uzayına Hilbert Uzayı ismi verilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.4. K, H Hilbert uzayının herhangi bir lineer alt uzayı ($K \subseteq H$) olarak kabul edelim.

$$T: K \subseteq H \rightarrow H \quad (2.1.3)$$

dönüşümü, her $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve her $u, v \in K$ için

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v \quad (2.1.4)$$

eşitliğini sağlanıyorsa T dönüşümüne lineer operatör ismi verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.5. H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan bir T lineer operatörü verilsin.

Her $u \in H$ için

$$\|Tu\| \leq k\|u\| \quad (2.1.5)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir k sayısı varsa T 'ye sınırlı lineer operatör denir. Bu k sayılarının en küçüğüne T sınırlı operatörünün normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir.

T operatörünün normu alternatif olarak

$$\|T\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\| \leq 1} \|Tu\| \quad (2.1.6)$$

eşitliği kullanılarak hesaplanabilir (Kreyszig, 1978).

Tanım 2.1.6. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T 'nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t) \quad (2.1.7)$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektörler kümesine T 'nin tanım kümesi olarak isimlendirilir ve $\mathcal{K}(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $(T^*)^* = T$
- ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$
- iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$
- iv. $(T)^* = L^*T^*$
- v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken)

(Naimark, 1968).

Tanım 2.1.7. $T^* = T$ ise T 'ye kendine eş operatör ismi verilir. (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.8. Tanım kümesin $\mathcal{D}(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in \mathcal{D}(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne Hermitian ismi verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.9. $A: D(A) \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = H$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise yani $A \subset A^*$ ise, A 'ya simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.1.10. $D(U), U$ operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise U 'ya izometrik operatör ismi verilir (Akhiezer ve Glazman, 1963).

Tanım 2.1.11. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne üniter operatör adı verilir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart $U^*U = UU^* = I$ olmasıdır (Akhiezer and Glazman, 1963).

Tanım 2.1.12. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\text{Im}(Th, h) \geq 0 \quad (2.1.8)$$

ise T lineer operatörüne dissipatif (dissipative) operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Tanım 2.1.13. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

i. $f, g \in D_{A^*}$ için

$$(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K;$$

ii. Keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır, şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı ismi verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.1.14. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1991).

Teorem 2.1.15. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1f + i(K + I)\Gamma_2f = 0 \quad (2.1.9)$$

$$(K - I)\Gamma_1 f - i(K + I)\Gamma_2 f = 0 \quad (2.1.10)$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (2.1.9) ve (2.1.10) koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (2.1.9), (2.1.10) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (2.1.9), (2.1.10) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere

$$(\cos C)\Gamma_2 f - (\sin C)\Gamma_1 f = 0$$

koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.1.11)$$

sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.1.12)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.1.11), (2.1.12) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984).

Tanım 2.1.16. $0 < q < 1, A \subset \mathbb{R}$, ve $a \in \mathbb{C}$ olsun. Bir q -fark denklemi, A üzerinde tanımlı bir fonksiyonun q -türevlerini içeren bir denklemdir. $y(x)$, A üzerinde karmaşık değerli bir fonksiyon olsun q -fark operatörü D_q şu şekilde tanımlanır.

$$D_q y(x) = \frac{y(qx) - y(x)}{\mu(x)}, \quad x \in A,$$

burada $\mu(x) = (q - 1)x$. Sıfır noktasındaki q -türevi şu şekilde verilir.

$$D_q y(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y(q^n x) - y(0)}{q^n x} (x \in A),$$

Eğer bu limit varsa ve x den bağımsızsa, D_q nun sağ-tersi olan Jackson q -integrali şu şekilde verilir.

$$\int_0^x f(t) d_q t = x(1-q) \sum_{n=0}^{\infty} q^n f(q^n x) (x \in A),$$

Burada sağ taraftaki serinin yakınsak olmalıdır. Ayrıca belirli q -integral aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t \quad (a, b \in A).$$

Sıfırı içeren bir A kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonunun sıfırda q – regüler denir. Her $x \in A$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(xq^n) = f(0).$$

Bu tezde sadece sıfırda q – regüler fonksiyonları ele alınmıştır.

$L_q^2(0, a)$, $[0, a]$ aralığı üzerinde tanımlı

$$\|f\| := \left(\int_0^a |f(x)| d_q x \right)^{1/2} < \infty.$$

koşulunu sağlayan tüm karmaşık değerli fonksiyonların uzayı olsun.

$L_q^2(0, a)$ uzayı, aşağıdaki iç çarpımı ile ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır.

$$(f, g) := \int_0^a f(x) \overline{g(x)} d_q x, \quad f, g \in L_q^2(0, a).$$

(Annaby ve Mansour, 2012)

$L_q^2((0, a) \times (0, a))$ uzayı $[0, a] \times [0, a]$ üzerinde tanımlanan

$$\|f\|_2 := \left(\int_0^a \int_0^a |f(x, t)|^2 d_q x d_q t \right)^{1/2} < \infty.$$

Koşulunu sağlayan tüm karmaşık değerli fonksiyonların uzayı olsun:

$L_q^2((0, a) \times (0, a))$ uzayı aşağıdaki iç çarpım ile ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır.

$$(f, g)_2 := \int_0^a \int_0^a f(x, t) \overline{g(x, t)}$$

(Annaby ve Mansour, 2012).

Tanım 2.1.17. $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ ve $a, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$, için q - faktöriyel, çoklu q -faktöriyel ve q -binom katsayıları şu şekilde tanımlanır.

$$(a; q)_0 = 1, (a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), (a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k),$$

$$(a_1, a_2, \dots, a_k; q) = \prod_{j=1}^k (a_j; q)_n$$

ve

$$\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1, \begin{bmatrix} a \\ n \end{bmatrix}_q = \frac{(1 - q^a)(1 - q^{a-1}) \dots (1 - q^{a-n+1})}{(q; q)_n},$$

(Annaby and Mansour, 2011). Genelleştirilmiş q - faktöriyel şu şekilde tanımlanır.

$$(a; q)_v = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^v; q)_\infty} \quad (v \in \mathbb{R})$$

(Annaby ve Mansour, 2011 ; Polya ve Alexanderson, 1971). q -Gamma fonksiyonu şu şekilde tanımlanır.

$$\Gamma_q(z) = \frac{(q; q)_\infty}{(q^z; q)_\infty} (1 - q)^{1-z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |q| < 1$$

(Gasper ve Rahman, 2004;). ν derecesinden q -Bessel fonksiyonlarının üçüncü türü, burada $\nu > -1$, şu şekilde tanımlanır.

$$J_\nu(z; q) = z^\nu \frac{(q^{\nu+1}; q)_\infty}{(q; q)_\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q; q)_n (q^{\nu+1}; q)_n} \quad (z \in \mathbb{C})$$

(İsmail, 1981). Ayrıca, $\cos(z; q)$ ve $\sin(z; q)$ şu şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
\cos(z; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n^2} (z(1-q))^{2n}}{(q; q)_{2n}} \\
&= \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}} (zq^{-1/2}(1-q))^{1/2} J_{-1/2}(z(1-q)/\sqrt{q}; q^2), \\
\sin(z; q) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{q^{n(n+1)} (z(1-q))^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}} \\
&= \frac{(q^2; q^2)_{\infty}}{(q; q^2)_{\infty}} (z(1-q)^{1/2}) J_{1/2}(z(1-q); q^2)
\end{aligned}$$

(Abu Risha ve diğ., 2007). $w_m^{(v)}$, $J_v(\cdot; q^2)$ nin pozitif sınırlarını $v > -1$ olmak üzere artan m derecesinde gösterebilir ve

$$x_m = w_m^{(-1/2)} \frac{\sqrt{q}}{1-q}, \quad y_m = w_m^{(-1/2)} \frac{1}{1-q}$$

sırasıyla $\cos(z; q)$ ve $\sin(z; q)$ nun pozitif sıfırlarını gösterir. Yeterince büyük m için şunlara sahibiz:

$$x_m = \frac{q^{-m+\frac{1}{2}}}{1-q} (1 + O(q^m)), \quad (2.1.13)$$

$$y_m = \frac{q^{-m}}{1-q} (1 + O(q^m)) \quad (2.1.14)$$

(Annaby ve Mansour, 2011).

2.2. Bir Boyutlu q-Dirac Sistemleri

Bu bölümde, q-Dirac denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini gösteren teoremi vereceğiz. Bir boyutlu q-Dirac sistemlerini ele alalım:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} \\ D_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

ya da

$$ly = \lambda y, \quad 0 \leq x \leq a < \infty. \quad (2.2.1)$$

Burada λ karmaşık bir özdeğer parametresi,

$$ly := \begin{cases} -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}y_2 + p(x)y_1 \\ D_qy_1 + r(x)y_2 \end{cases}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$p(x)$ ve $r(x)$,

$[0, a]$ üzerinde tanımlı ve sıfırda sürekli değerli fonksiyonlar olup $p(x), r(x) \in L_q^1(0, a)$.

Şimdi,

$$(f, g) := \int_0^a (f(x), g(x))_E d_q x$$

iç çarpımını kullanarak vektör değerli fonksiyonların $L_q^2((0, a); E)$ ($E = \mathbb{C}^2$) uygun Hilbert uzayını tanımlayacağız.

$C_q^2((0, a); E)$, $y(x)$ ve $D_q y(x)$ sıfırda sürekli olacak şekilde $[0, a]$ üzerinde tanımlı E 'deki tüm vektör değerli $y(x)$ fonksiyonlarının uzayı olsun. $C_q^2((0, a); E)$ nin $L_q^2((0, a); E)$ Hilbert uzayının bir alt uzayı olduğu açıktır.

Teorem 2.2.1. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ olsun. Denklem 2.2.1 in $C_q^2((0, a); E)$ uzayı içinde tek bir

$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, \lambda) \\ \Phi_2(x, \lambda) \end{pmatrix}$ çözümü vardır ve bu çözüm aşağıdaki koşulları sağlar.

$$\Phi_1(0, \lambda) = c_1, \Phi_2(0, \lambda) = c_2, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.2.2)$$

Her $x \in [0, a]$ için $\Phi(x, \lambda)$, λ 'nın vektör değerli bir tam fonksiyonudur (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

İspat. $p(x) = r(x) = 0$ olsun, o halde $ly = \lambda y$ eşitliğinin çözümü

$$S_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}(x, \lambda) \\ S_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \quad (x \in [0, a], \lambda \in \mathbb{C}),$$

ile verilir. Burada φ_1 ve φ_2 aşağıdaki tanımlanır.

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x; q) \\ \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \\ \cos(\lambda x; q) \end{pmatrix}, \text{ eğer } x \neq 0, \\ \varphi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x; q) \\ x \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x \\ \cos(\lambda x; q) \end{pmatrix}, \text{ eğer } x = 0 \text{ ise}$$

Sabitlerin deęiřimi yntemini uygulayarak aşağıdaki integral denklem sistemini bulunur:

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) &= c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \\ &+ q \int_0^x [\varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(qt, \lambda) - \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(qt, \lambda)] V(qt) S(qt, \lambda) d_q t. \end{aligned}$$

Burada $x \in [0, a], \lambda \in \mathbb{C}, T$ matris transpozesi ve $V(x) = \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$ dir. $x \in [0, a]$

ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned} S(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} S_{11}(x, \lambda) \\ S_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \frac{\sin(\lambda qt; q)}{\lambda}}{-\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \cos(\lambda qt; q)} \right] p(qt) S_1(qt, \lambda) d_q t \\ q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \cos(\lambda qt; q)}{+\frac{\sin(\lambda x;)}{\lambda} \frac{\sin(\lambda qt; q)}{\lambda}} \right] r(qt) S_2(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \cos(\lambda qt; q)}{+\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \frac{\sin(\lambda qt; q)}{\lambda}} \right] r(qt) S_2(qt, \lambda) d_q t \\ q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \frac{\sin(\lambda qt; q)}{\lambda}}{-\frac{\sin(\lambda x;)}{\lambda} \cos(\lambda qt; q)} \right] r(qt) S_2(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

şimdi, (2.2.3) integral denkleminin zmnn oluşturmak için ardışık yaklaşımlar yntemini kullanacağız. Aşağıdaki gibi bir $\{S_n(x, \lambda)\}_{n=1}^\infty$ dizisi tanımlayalım.

$$\begin{aligned} S_{n+1}(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} S_{11}(x, \lambda) \\ S_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \frac{\sin(\lambda qt; q)}{\lambda}}{-\frac{\sin(\lambda x, q)}{\lambda} \cos(\lambda qt; q)} \right] p(qt) S_{1n}(qt, \lambda) d_q t \\ q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \cos(\lambda qt; q)}{+\frac{\sin(\lambda x;)}{\lambda} \frac{\sin(\lambda qt, q)}{\lambda}} \right] p(qt) S_{1n}(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$+ \begin{pmatrix} -q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \cos(\lambda q t; q)}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda q t; q)}{\lambda} \right] r(qt) S_{2n}(qt, \lambda) d_q t \\ q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \sin(\lambda q t; q)}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \right] r(qt) S_{2n}(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix}.$$

Burada $x \in [0, a]$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ dır. O halde, her sabit $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\{S_n(x, \lambda)\}_{n=1}^{\infty}$ ($n \rightarrow \infty$) iken dizisinin düzgün limitinin var olduğunu (2.2.1) - (2.2.2) probleminin çözümü olduğunu göstereceğiz.

$\lambda \in \mathbb{C}$ sabit olsun. Öyle $N(\lambda)$ ve A gibi pozitif sayıları vardır ki, $x \in [0, a]$ için

$$\begin{aligned} |\varphi_{ij}(x, \lambda)| &\leq \frac{\sqrt{N(\lambda)}}{2}, \quad i, j = 1, 2, \\ \max_{x \in [0, a]} |p(x)| &= A_1, \quad \max_{x \in [0, a]} |r(x)| = A_2, \quad A = \max\{A_1, A_2\} \\ |S_{1j}(x, \lambda)| &\leq (|c_1| + |c_2|) \frac{\sqrt{N(\lambda)}}{2} = \frac{\widehat{N(\lambda)}}{2}, \quad j = 1, 2, \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bu durumda,

$$\|S_2(x, \lambda) - S_1(x, \lambda)\|$$

$$\leq \begin{pmatrix} q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \sin(\lambda q t; q)}{\lambda} - \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \right] p(qt) S_{11}(qt, \lambda) d_q t \\ q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \cos(\lambda q t; q)}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \sin(\lambda q t; q) \right] r(qt) S_{12}(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \cos(\lambda q t; q)}{\lambda} + \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \sin(\lambda q t; q) \right] p(qt) S_{11}(qt, \lambda) d_q t \\ -q \int_0^x \left[\frac{\cos(\lambda x; q) \sin(\lambda q t; q)}{\lambda} - \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \right] r(qt) S_{12}(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\leq q \left(N(\lambda) A_1 \frac{\widehat{N(\lambda)}}{2} + N(\lambda) A_2 \frac{\widehat{N(\lambda)}}{2} \right) \left| \int_0^x d_q t \right| \\
&+ q \left(N(\lambda) A_1 \frac{\widehat{N(\lambda)}}{2} + N(\lambda) A_2 \frac{\widehat{N(\lambda)}}{2} \right) \left| \int_0^x d_q t \right| \\
&\leq 2q N(\lambda) \widehat{AN(\lambda)} \frac{x(1-q)}{(1-q)}.
\end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Burada $|\cdot|$ normu $L_q^2((0, a); E)$ deki uygun normdur, ancak bu sunum için 1-normunu kullandık. Benzer şekilde, (2.2.5)'i

$$\|S_3(x, \lambda) - S_2(x, \lambda)\| \leq 2^2 q^3 \widehat{N(\lambda)} \frac{A^2 N^2(\lambda) x^2 (1-q)^2}{(1-q)(1-q^2)}, \tag{2.2.5}$$

ve matematiksel tümevarım kullanarak

$$\|S_{n+1}(x, \lambda) - S_n(x, \lambda)\| \leq 2^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \widehat{N(\lambda)} \frac{(AN(\lambda)x(1-q))^n}{(q; q)_n} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

elde edilir. Aşağıdaki seri

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \widehat{N(\lambda)} \frac{(AN(\lambda)x(1-q))^n}{(q; q)_n}$$

Weierstrass –M testine göre düzgün yakınsak olup bu seri

$$S_1(x, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \{S_{n+1}(x, \lambda) - S_n(x, \lambda)\} \tag{2.2.6}$$

$[0, a]$ aralığında düzgün yakınsar. O halde, bu serinin n 'inci kısmi toplamı

$$S_n(x, \lambda) = S_1(x, \lambda) + \sum_{k=1}^{n-1} \{S_{k+1}(x, \lambda) - S_k(x, \lambda)\}$$

$\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonuna $[0, a]$ aralığı üzerinde $n \rightarrow \infty$ için düzgün yakınsar yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x, \lambda) = \Phi(x, \lambda).$$

Tümevarım kullanarak $S_n(x, \lambda)$ ve $D_q S_n(x, \lambda)$ nin sıfırda sürekli olduğunu ispatlayabiliriz. Burada:

$$\begin{aligned} D_q S_n(x, \lambda) &= c_1 D_q \varphi_1(x, \lambda) + c_2 D_q \varphi_2(x, \lambda) \\ &+ q \int_0^x [D_q \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(qt, \lambda) - D_q \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(qt, \lambda)] V(qt) S_n(qt, \lambda) d_q t \end{aligned}$$

ve $n = 1, 2, \dots$ $S_n(x, \lambda)$ ve $D_q S_n(x, \lambda)$ nin sıfırda sürekli olduğu açıktır, yani, $\Phi(x, \lambda) \in C_q^2((0, a); E)$.

$\Phi(x, \lambda)$ nin (2.2.2) yi sağladığını görmek kolaydır yani,

$$\Phi(0, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(0, \lambda) \\ \Phi_2(0, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ dir.}$$

Şimdi, $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun Denklem 2.2.1 i sağladığını göstereceğiz. Eğer $x \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} D_q \Phi(x, \lambda) &= \begin{pmatrix} D_q \Phi_1(x, \lambda) \\ D_q \Phi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = c_1 D_q \varphi_1(x, \lambda) + c_2 D_q \varphi_2(x, \lambda) \\ &+ q \int_0^x [D_q \varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(qt, \lambda) - D_q \varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(qt, \lambda)] V(qt) \Phi(qt, \lambda) d_q t \end{aligned}$$

dir. Denklem 2.2.1'i kullanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} D_q \cos(\lambda x; q) &= (-r(x) + \lambda) \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda}, \\ D_q \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} &= (-r(x) + \lambda) \cos(\lambda x; q). \end{aligned}$$

Dolayısıyla, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$\begin{aligned}
& D_q \Phi_1(x, \lambda) \\
&= c_1 D_q \cos(\lambda x; q) - c_2 D_q \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \\
&+ q \int_0^x \left[\begin{array}{c} D_q \cos(\lambda x; q) \frac{\sin(\lambda q t; q)}{\lambda} \\ - D_q \frac{\sin(\lambda x q q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \end{array} \right] p(qt) \Phi_1(qt, \lambda) d_q t \\
&- q \int_0^x \left[\begin{array}{c} D_q \cos(\lambda x; q) \cos(\lambda q t; q) \\ + D_q \frac{\sin(\lambda x q)}{\lambda} \frac{\sin(\lambda q t q)}{\lambda} \end{array} \right] r(qt) \Phi_2(qt, \lambda) d_q t \\
&= c_1 (-r(x) + \lambda) \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} - c_2 (-r(x) + \lambda) (-\cos(\lambda x; q)) \\
&- q \int_0^x \left[\begin{array}{c} (-r(x) + \lambda) \frac{\sin(\lambda x, q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \\ + (-r(x) + \lambda) (-\cos(\lambda x; q)) \frac{\sin(\lambda q t, q)}{\lambda} \end{array} \right] r(qt) \Phi_2(qt, \lambda) d_q t \\
&= (-r(x) + \lambda) \Phi_2(x, \lambda).
\end{aligned}$$

Denklem 2.2.1 deki diğre eşitliğin geçerliliği de benzer şekilde ispatlanabilir.

Eğer $x = 0$ ise

$$\begin{aligned}
D_q \Phi_1(0, \lambda) &= c_1 D_q \varphi_{11}(0, \lambda) + c_2 D_q \varphi_{21}(0, \lambda) \\
&= c_1 (-r(0) + \lambda) \varphi_{12}(0, \lambda) + c_2 (-r(0) + \lambda) \varphi_{22}(0, \lambda) \\
&= (-r(0) + \lambda) \Phi_2(0, \lambda)
\end{aligned}$$

dir.

Denklem 2.2.1 deki öteki denklemin geçerliliği de benzer şekilde ispatlanabilir. Şimdi (2.2.1) ve (2.2.2.) ile tanımlanan problemin tek bir çözümü olduğunu kanıtlayacağız. $\psi_1(x, \lambda)$ ve $\psi_2(x, \lambda)$ nin bu problemin iki çözümü olduğunu varsayalım. $x \in [0, a]$ için $\chi(x, \lambda) = \psi_1(x, \lambda) - \psi_2(x, \lambda)$ tanımlayalım. Bu durumda, $\chi(x, \lambda)$ bu problemin tek çözümüdür. $\chi_1(0, \lambda) = \chi_2(0, \lambda) = 0$ olduğu açıktır. Basit bir hesaplamayla aşağıdaki eşitlik gösterilebilir.

$$\chi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \chi_1(x, \lambda) \\ \chi_2(x, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q \int_0^x (-r(qt) + \lambda) \chi_2(qt, \lambda) d_q t \\ -q \int_0^x (-p(qt) + \lambda) \chi_1(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

$\chi(x, \lambda)$, $r(x)$, ve $p(x)$ sıfırda sürekli olduğundan öyle $N_{x, \lambda}$ ve $M_{x, \lambda}$ pozitif sayıları mevcuttur ki

$$\begin{aligned}
\sup_{n \in \mathbb{N}} |\chi_1(xq^n, \lambda)| &= N_{x,\lambda}^{(1)}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |X_2(xq^n, \lambda)| = N_{x,\lambda}^{(2)}, \\
N_{x,i} &= \max\{N_{x,\lambda}^{(1)}, N_{x,\lambda}^{(2)}\}, \\
\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda - r(xq^n)| &= M_{x,\lambda}^{(1)}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda - p(xq^n)| = M_{x,\lambda}^{(2)}, \\
M_{x,i} &= \max\{M_{x,\lambda}^{(1)}, M_{x,\lambda}^{(2)}\},
\end{aligned}$$

O halde, şuna sahibiz.

$$\begin{aligned}
\|\chi(x, \lambda)\| &= \left| -q \int_0^x (-r(qt) + \lambda) \chi_2(qt, \lambda) d_q t \right| \\
&\quad + \left| -q \int_0^x (-p(qt) + \lambda) \chi_2(qt, \lambda) d_q t \right| \\
&\leq 2q N_{x,\lambda} M_{x,\lambda} \left| \int_0^x d_q t \right| = 2q N_{x,\lambda} M_{x,\lambda} \frac{x(1-q)}{(1-q)}
\end{aligned}$$

dir. Eğer matematiksel tümevarım uygularsak bu durumda (2.2.8)'i elde ederiz.

$$\|\chi(x, \lambda)\| \leq 2^k q^{\frac{(pk+\lambda)}{2}} M_{x,\lambda}^k N_{x,\lambda} \frac{x^k(1-q)^k}{(q;q)_k} \quad (2.2.8)$$

burada $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, a]$. Şimdi, formülün k için geçerli olduğunu varsalım ve $k+1$ için kanıtlayalım. (2.2.7)'e göre aşağıdaki elde edilir.

$$\begin{aligned}
\|\chi(x, \lambda)\| &= \left| -q \int_0^x (-r(qt) + \lambda) \chi_2(qt, \lambda) d_q t \right| \\
&\quad + \left| -q \int_0^x (-p(qt) + \lambda) \chi_2(qt, \lambda) d_q t \right| \\
&\leq 2^{k+1} q^{\frac{(k+2)}{2}+1} M_{x,\lambda}^{k+1} N_{x,\lambda} (1-q)^k \left| \int_0^x \frac{(q)^k}{(q;q)_k} d_q t \right| \\
&= 2^{k+1} q^{\frac{(k+3)}{2}+1} M_{x,\lambda}^{k+1} N_{x,\lambda} \frac{x^{k+1}(1-q)^{k+1}}{(q;q)_{k+1}}.
\end{aligned}$$

Böylece, (2.2.8)'nin tüm $k \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğu ispatlanmış olur. Cauchy kök testinden

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2^k q^{\frac{(kk+1)}{2}} M_{x,k}^k \frac{x^k(1-q)^k}{(q;q)_k} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla her $x \in [0, a]$ için $\chi(x, \lambda) = 0$ olur. Bu da tek bir çözümün olduğunu ispatlamaktadır.

Sonraki savımız $x \in [0, a]$ da $\Phi(x, \lambda)$ nin λ değişkenine göre tam fonksiyon olduğudur. Bu amaçla, $\Phi(x, \lambda)$ nin $\Gamma_M := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$ de her Γ_M diskinde analitik olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bu amaçla n üzerinde tümevarım yoluyla

$$S_n(x, \lambda) \text{ nin tüm } x \in [0, a] \text{ lar için } \Gamma_M' \text{ de analitik olduğunu, ve} \quad (2.2.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} S_n(x, \lambda) \text{ nin } (0, \lambda) \text{ da tüm } \lambda \in \Gamma_M \text{ için sürekli olduğunu ispatlayacağız} \quad (2.2.10)$$

$\varphi_1(x, \lambda)$ ve $\varphi_2(x, \lambda)$ are λ 'nın $x \in [0, a]$ için tam fonksiyonudur. Ayrıca, $\frac{d}{d\lambda} S_n(x, \lambda)$, $(0, \lambda)$ aralığında tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ için sürekli dir. Böylelikle (2.2.9) ve (2.2.10) $n = 1$ için sağlanmış olur. (2.2.9) ve (2.2.10) ün $n \geq 1$ için geçerli olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki ni elde ederiz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{n+1}(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} &= q \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_2(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{x_0} \varphi_1^T(qt, \lambda) V(qt) S_n(qt, \lambda) d_q t \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \lambda} S_1(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &\quad - q \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(x_0, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{x_0} \varphi_2^T(qt, \lambda) V(qt) S_n(qt, \lambda) d_q t \\ &\quad + q \varphi_2(x_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{x_0} \varphi_1^T(qt, \lambda) V(qt) S_n(qt, \lambda) d_q t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \\ &\quad - q \varphi_1(x_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{x_0} \varphi_2^T(qt, \lambda) V(qt) S_n(qt, \lambda) d_q t \right) \Big|_{\lambda=\lambda_0} \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

(2.2.10)'dan, $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_i^T(qt, \lambda) V(qt) S_{n-1}(qt, \lambda)$ nin $(0, \lambda_0)$ aralığında her $t = 1, 2$ için sürekli olduğun sonucuna varıyoruz. Dolayısıyla, $C, b > 0$ sabitleri mevcuttur şöyle ki

$$\left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\varphi_i^T(x_0 q^n, \lambda) V(x_0 q^n) S_n(x_0 q^n, \lambda) \right) \right\| \leq C, n \in \mathbb{N}, \|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta.$$

Bu yüzden aşağıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} & x_0(1-q)q^n \left\| \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\varphi_i^T(x_0 q^{n+1}, \lambda) V(x_0 q^{n+1}) S_n(x_0 q^{n+1}, \lambda) \right) \right\| \\ & \leq x_0 A(1-q)q^n \quad (n \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

$\|\lambda - \lambda_0\| \leq \delta$ diski içindeki tüm λ ler için geçerlidir. Buradan

$$\int_0^{t_0} \varphi_i^T(qt, \lambda) V(qt) S_n(qt, \lambda) d_q t \quad (i = 1, 2, \dots)$$

q – integrallerine karşılık gelen seriler $\lambda = \lambda_0$ noktasının komşuluğunda düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, (2.2.11)’de türev ve integral sırasını değiştirebiliriz. x_0 ve λ_0 keyfi değerler olduğu için,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \lambda} S_{n+1}(x, \lambda) \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} S_1(x, \lambda) - q \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_1(x, \lambda) \varphi_2^T(qt, \lambda) S_n(qt, \lambda)) V(qt) d_q t \\ & \quad - \int_0^{x_0} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\varphi_2(x, \lambda) \varphi_1^T(qt, \lambda) S_n(qt, \lambda)) V(qt) d_q t \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

tüm $x \in [0, a]$ ve $\lambda \in \Gamma_M$ için (2.2.12) denklem geçerlidir. (2.2.10)’den, (2.2.12) daki integraller $(0, \lambda)$ da süreklidir. O halde, $\frac{\partial}{\partial \lambda} S_{n+1}(x, \lambda)$ $(0, \lambda)$ de süreklidir. $x_0 \in [0, a]$ de keyfi değerler olsun. Bu durumda, $E(x_0)$, $\widetilde{E(x_0)} > 0$ mevcuttur şöyle ki

$$|\varphi_{ij}(x, \lambda)| \leq \frac{\sqrt{E(x_0)}}{2} \text{ ve } |s_{ij}(x, \lambda)| \leq \widetilde{E(x_0)}, \quad (2.2.13)$$

burada $i, j = 1, 2$ ve $\lambda \in \Gamma_M$. Son olarak, matematiksel tümevarım şu sonuçları verir.

$$\|S_{n+1}(x_0, \lambda) - S_n(x_0, \lambda)\| \leq 2^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \widetilde{E(x_0)} \frac{(AE(x_0)\lambda(1-q))^n}{(q; q)_n}.$$

Bu yüzden, (2.2.6)’da verilen seriler, Γ_M de $x = x_0$ ile. $\Phi(x, \lambda)$ ya düzgün olarak yakınsaktır.

Dolayısıyla, $\Phi(x, \lambda)$ Γ_M , de analitiktir yani tamdır.

2.3. Özeşlenik q-Dirac Denklemi

Bu bölümde, özeşlenik q-Dirac sistemini $L_q^2((0, a); E)$ uzayında formüle ediyoruz ve bu sistemin bazı spektral özelliklerini sunuyoruz.

Şimdi q-Dirac sistemini

$$ly = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \leq x \leq a < \infty \quad (2.3.1)$$

aşağıdaki sınır koşullarıyla düşünersek

$$L_1(y) := k_{11}y_1(0) + k_{12}y_2(0) = 0 \quad (2.3.2)$$

$$L_2(y) := k_{21}y_1(a) + k_{22}y_2\left(\frac{a}{q}\right) = 0 \quad (2.3.3)$$

olur burada λ kompleks spektral parametre,

$$ly := \begin{cases} -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}y_2 + p(x)y_1 \\ D_qy_1 + r(x)y_2 \end{cases}$$

$p(x)$ ve $r(x)$,

$[0, a]$ üzerinde tanımlanan ve sıfırda sürekli olan reel değerli fonksiyonlar, $\{k_{ij}\}_{i,j=1,2}$

(k_{ij}) matrisinin rankı 2 olacak şekilde rastgele reel sayılardır.

Teorem 2.3.1. (2.3.1) – (2.3.2) ile tanımlanan sınır-değer problemi formal olarak $C_q^2((0, a); E) \cap L_q^2((0, a); E)$ uzayı üzerinde öz-eşleniktir (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

İspat. Öncelikle Green formülünü ispatlayacağız. $y(x), z(x) \in L_q^2((0, a); E)$ olsun, bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
(ly, z) - (y, lz) &= \int_0^a \left(-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} y_2 + p(x) y_1 \right) \bar{z}_1 d_q x \\
&\quad + \int_0^a (D_q y_1 + r(x) y_2) \bar{z}_2 d_q x \\
&\quad - \int_0^a y_1 \overline{\left(-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} z_2 + p(x) z_1 \right)} d_q x \\
&\quad - \int_0^a y_2 \overline{(D_q z_1 + r(x) z_2)} d_q x \\
&= - \int_0^a \left[\left(\frac{1}{q} D_{q^{-1}} y_2 \right) \bar{z}_1 + y_2 \overline{(D_q z_1)} \right] d_q x \\
&\quad + \int_0^a \left[(D_q y_1) \bar{z}_2 + y_1 \overline{\left(\frac{1}{q} D_{q^{-1}} z_2 \right)} \right] d_q x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&D_q \left(\overline{z_1(x)} y_2(q^{-1}x) \right) \\
&= \left(D_q y_2(q^{-1}x) \right) D_q(q^{-1}x) \overline{z_1(x)} + y_2(x) \overline{(D_q z_1(x))} \\
&= \frac{1}{q} (D_{q^{-1}} y_2) \bar{z}_1 + y_2 \overline{(D_q z_1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&D_q \left(\overline{z_2(q^{-1}x)} y_1(x) \right) \\
&= \left(D_q z_2(q^{-1}x) \right) D_q(q^{-1}x) y_1(x) + \overline{z_2(x)} (D_q y_1(x)) \\
&= \frac{1}{q} (D_{q^{-1}} z_2) y_1 + \overline{z_2(x)} D_q y_1(x).
\end{aligned}$$

denklemlerinden aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
(ly, z) - (y, lz) &= - \int_0^a D_q \left(\overline{z_1(x)} y_2(q^{-1}x) \right) d_q x + \int_0^a D_q (y_1(x) \overline{z_2(q^{-1}x)}) d_q x \\
&= \int_0^a D_q [y_1(x) \overline{z_2(q^{-1}x)} - \overline{z_1(x)} y_2(q^{-1}x)] d_q x.
\end{aligned}$$

$[y, z]_x := y_1(x) \overline{z_2(q^{-1}x)} - \overline{z_1(x)} y_2(q^{-1}x)$ şeklinde tanımlarsak şunu elde ederiz.

$$(ly, z) - (y, lz) = [y, z]_a - [y, z]_0. \quad (2.3.4)$$

L operatörünün biçimsel/formal olarak özeşlenik olduğunu göstermeye devam edelim. Tüm $y(x), z(x) \in C_q^2((0, a); E)$ için $(ly, z) = (y, lz)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$$y(x), z(x) \in C_q^2((0, a); E) \cap L_q^2((0, a); E)$$

olsun bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$(ly, z) - (y, lz) = [y, z]_a - [y, z]_0.$$

Sınır koşulları (2.3.2) ve (2.3.3) den, $[y, z]_a = 0$ ve $[y, z]_0 = 0$ ı elde ederiz. Buradan

$$(ly, z) = (y, lz) \quad (2.3.5)$$

dir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.3.2. (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin tüm özdeğerleri reeldir (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

İspat. μ , $z(x)$ özfonksiyonuna karşılık gelen bir özdeğer olsun. (2.3.5) denkleminde aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$(lz, z) = (z, lz) = (z, \mu z) = \bar{\mu}(z, z). \quad (2.3.6)$$

Öte yandan,

$$(Lz, z) = (\mu z, z) = \mu(z, z). \quad (2.3.7)$$

dir. (2.3.6) ve (2.3.7)'ten,

$$\mu(z, z) = \bar{\mu}(z, z),$$

$$(\mu - \bar{\mu})(z, z) = 0$$

elde edilir. $z(x) \neq 0$, olduğundan $\mu = \bar{\mu}$ yi elde edilir.

Lemma 2.3.3. Eğer μ_1 ve μ_2 , (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin iki farklı özdeğeriye, o zaman bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olan v_1 ve v_2 ortogonaldır.

İspat. μ_1 ve μ_2 sırasıyla v_1 ve v_2 özfonksiyonlarına karşılık gelen iki farklı reel özdeğer olsun. (2.2.5)'den şunu elde ederiz:

$$(\mu_1 - \mu_2) \int_0^a (v_1(x), v_2(x))_E d_q x = 0.$$

$\mu_1 \neq \mu_2$ olduğundan, $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ nin ortogonal olduğunu elde ederiz. (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Şimdi,

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, z(x) = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix} \in L_q^2((0, a), E)$$

olsun. O halde,

$W(y, z)(x) = y_1(x)z_2(q^{-1}(x)) - z_1(x)y_2$ formülünden $y(x)$ ve $z(x)$ nin Wronskian'ı tanımlanır.

Teorem 2.3.4. Denklem 2.3.1 in herhangi iki çözümünün Wronskian x' den bağımsızdır.

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$, Denklem 2.3.1 in iki çözümü olsun. Green formülüne göre

$$(ly, z) - (y, lz) = [y, z]_a - [y, z]_0.$$

elde edilir.

$$ly = \lambda y \text{ ve } lz = \lambda z,$$

olduğundan aşağıdaki denklem bulunur.

$$\begin{aligned} (\lambda y, z) - (y, \lambda z) &= [y, z]_a - [y, z]_0, \\ (\lambda - \bar{\lambda})(y, z) &= [y, z]_a - [y, z]_0. \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ olduğundan, $[y, z]_a = [y, z]_0 = W(y, \bar{z})(0)$, olur yani Wronskian x den bağımsızdır. (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Sonuç 2.3.5. Eğer $y(x)$ ve $z(x)$ in her ikisi de Denklem 2.3.1 in çözümleriyse tüm $x \in [0, a]$ için ya $W(y, z)(x) = 0$ ya da $W(y, z)(x) \neq 0$ dır. (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Teorem 2.3.6. Denklem 2.3.1 in herhangi iki çözümü lineer bağımlıdır ancak ve ancak çözümlerin Wronskian ı sıfırdır.

İspat. $y(x)$ ve $z(x)$ Denklem 2.3.1 in lineer bağımlı iki çözümü olsun. Bu durumda $c > 0$ olacak şekilde $y(x) = cz(x)$ eşitliğini sağlayan bir sabit mevcuttur. Böylece

$$W(y, z) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(q^{-1}(x)) \\ z_1(x) & z_2(q^{-1}(x)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cz_1(x) & cz_2(q^{-1}(x)) \\ z_1(x) & z_2(q^{-1}(x)) \end{vmatrix} = 0.$$

elde edilir. Tersine Wronskian $W(y, z) = 0$ ve dolayısıyla $y(x) = cz(x)$ dir, yani $y(x)$ ve $z(x)$ doğrusal olarak bağımlıdır (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Lemma 2.3.7. (2.3.1) - (2.3.3) ile tanımlanan problemin tüm özdeğerleri geometrik açıdan basittir.

İspat. μ , $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ nin özfonksiyonları için bir özdeğer olsun. (2.3.2) sınır koşulundan aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$W(z_1, z_2)(0) = z_{11}(0)z_{22}(0) - z_{12}(0)z_{21}(0) = 0.$$

O halde, $\{z_1(x), z_2(x)\}$ kümesi lineer bağımlıdır. Artık, bir sonraki hedefimiz özdeğerleri ve karşılık gelen özfonksiyonları belirlemektir.

$$\phi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x, \lambda) \\ \phi_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} \text{ ve } \phi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_{21}(x, \lambda) \\ \phi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix} \text{ Denklem 2.3.1 in}$$

lineer bağımsız çözümleri olsun ve aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlasın,

$$\phi_{ij}(0, \lambda) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Bu durumda, Denklem 2.3.1'in her bir çözümü aşağıdaki forma sahip olacaktır

$$y(x, \lambda) = K_1 \phi_1(x, \lambda) + K_2 \phi_2(x, \lambda)$$

Burada K_1 ve K_2 x' e bağlı değildir.

$$\begin{aligned} K_1 L_1(\phi_1) + K_2 L_1(\phi_2) &= 0 \\ K_1 L_2(\phi_1) + K_2 L_2(\phi_2) &= 0 \end{aligned}$$

Lineer sistemin aşikar olmayanı çözümünü bulabilirsek bu durumda $y(x, \lambda)$ çözümü Denklem 2.3.1 in özfonksiyonu olarak adlandırılır. Bu yüzden $\lambda \in \mathbf{R}$ bir özdeğerdir ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} L_1(\phi_1) & L_1(\phi_2) \\ L_2(\phi_1) & L_2(\phi_2) \end{vmatrix} = 0.$$

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu, (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan q -Dirac sistemi ile ilişkili karakteristik determinant olarak adlandırılır. (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır değerleridir. Öte yandan, $\Delta(\lambda)$, λ nın tam fonksiyonudur çünkü her bir $x \in [0, a]$ sabiti için $\phi_1(x, \lambda)$ ve $\phi_2(x, \lambda)$, λ değişkenine göre tamdır.

Teorem 2.3.8. (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin tüm μ_n özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun basit sıfır değerleridir.

İspat. $\theta_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \theta_{11}(x, \lambda) \\ \theta_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ ve $\theta_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \theta_{21}(x, \lambda) \\ \theta_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \theta_1(x, \lambda) &= L_1(\phi_2)\phi_1(x, \lambda) - L_1(\phi_1)\phi_2(x, \lambda), \\ \theta_2(x, \lambda) &= L_2(\phi_2)\phi_1(x, \lambda) - L_2(\phi_1)\phi_2(x, \lambda) \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

fonksiyonları tanımlayalım.

O halde, $\theta_1(x, \lambda)$ ve $\theta_2(x, \lambda)$, Denklem 2.3.1 in aşağıdaki koşulları sağlayan çözümleridir:

$$\theta_1(0, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{pmatrix} \text{ ve } \theta_2(a, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix}. \quad (2.3.9)$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} &W(\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda)) \\ &= \begin{vmatrix} \theta_{11}(x, \lambda) & \theta_{12}(q^{-1}x, \lambda) \\ \theta_{21}(x, \lambda) & \theta_{22}(q^{-1}x, \lambda) \end{vmatrix} \\ &= \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(q^{-1}x, \lambda) - \theta_{12}(q^{-1}x, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda) \\ &= (L_1(\phi_2)\phi_{11}(x, \lambda) - L_1(\phi_1)\phi_{21}(x, \lambda)) \\ &\times (L_2(\phi_2)\phi_{12}(x, \lambda) - L_2(\phi_1)\phi_{22}(x, \lambda)) \\ &- (L_1(\phi_2)\phi_{12}(x, \lambda) - L_1(\phi_1)\phi_{22}(x, \lambda)) \\ &\times (L_2(\phi_2)\phi_{11}(x, \lambda) - L_2(\phi_1)\phi_{21}(x, \lambda)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= L_1(\phi_2)L_2(\phi_1)(-\theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(q^{-1}x, \lambda) + \theta_{12}(q^{-1}x, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda)) \\
&+ L_1(\phi_1)L_2(\phi_2)(\theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(q^{-1}x, \lambda) - \theta_{12}(q^{-1}x, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda)) \\
&= (\theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(q^{-1}x, \lambda) - \theta_{12}(q^{-1}x, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda)) \\
&\times (L_1(\phi_1)L_2(\phi_2) - L_1(\phi_2)L_2(\phi_1)) \\
&= W(\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda))\Delta(\lambda) = \Delta(\lambda).
\end{aligned} \tag{2.3.10}$$

dir. λ_0 , (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin bir özdeğeri olsun. λ_0 , reel bir sayı olduğundan, $\theta_i(x, \lambda_0)$ ($i = 1, 2$) reel değerli sayı olarak alınabilir. Bu durumda (2.3.10) denkleminde $\theta_1(x, \lambda_0)$ ve $\theta_2(x, \lambda_0)$ lineer bağımlı özfonksiyonlardır. Dolayısıyla, aşağıdaki gibi η_0 sıfır olmayan bir sabit vardır

$$\theta_2(x, \lambda_0) = \eta_0 \theta_1(x, \lambda_0).$$

(2.3.8) ve (2.3.9)'dan, (2.3.11) bulunur.

$$\theta_{21}(0, \lambda_0) = \eta_0 a_{12} = \eta_0 \theta_{11}(0, \lambda), \theta_{22}(0, \lambda_0) = -\eta_0 a_{11} = -\eta_0 \theta_{12}(0, \lambda) \tag{2.3.11}$$

Eğer (2.3.4) de $y(x) = \theta_2(x, \lambda)$ ve $z(x) = \theta_2(x, \lambda_0)$ alırsak,

$$\begin{aligned}
&(\lambda - \lambda_0) \int_{\omega_0}^a (\theta_2(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda_0)) d_q x \\
&= -(\theta_{21}(0, \lambda)\theta_{22}(0, \lambda_0) - \theta_{21}(0, \lambda_0)\theta_{22}(0, \lambda)) \\
&= -(\theta_{21}(0, \lambda)(-\eta_0 \theta_{12}(0, \lambda)) - \eta_0 \theta_{11}(0, \lambda)\theta_{22}(0, \lambda)) \\
&= \eta_0(\theta_{11}(\omega_0, \lambda)\theta_{22}(\omega_0, \lambda) - \theta_{12}(0, \lambda)\theta_{21}(0, \lambda)) \\
&= \eta_0 W(\theta_1(x, \lambda), \theta_2(x, \lambda)) = \eta_0 \Delta(\lambda)
\end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$, λ nın bir tam fonksiyon olduğundan,

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) := \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_0} \frac{\Delta(\lambda)}{\lambda - \lambda_0} = \frac{1}{\eta_0} \int_0^a \theta_2^2(x, \lambda_0) d_q x \neq 0.$$

Dolayısıyla, $\lambda_0, \Delta(\lambda)$ nın basit bir sıfırır (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

2.4. Green Fonksiyonu ve Özfonksiyon Açılım Formülü

Bu bölümde aşağıdaki homojen olmayan q-Dirac sistemin $0 \leq x \leq a < \infty$ ve $f(x) =$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix} \in L_q^2([0, a]; E) \text{ için çözümünü araştıracağız.}$$

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}y_2 + \{\lambda + p(x)\}y_1 = -f_1(x), \quad (2.4.1)$$

$$D_q y_1 + \{\lambda + r(x)\}y_2 = -f_2(x), \quad (2.4.2)$$

$$L_1(y) := k_{11}y_1(0) + k_{12}y_2(0) = 0, \quad (2.4.3)$$

$$L_2(y) := k_{21}y_1(a) + k_{22}y_2\left(\frac{a}{q}\right) = 0. \quad (2.4.4)$$

Bunun için, (2.4.1)-(2.4.4) homojen olmayan sisteminin Green fonksiyonunu oluşturalım.

Teorem 2.4.1. Eğer λ , (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin bir özdeğeri değilse, bu durumda homojen olmayan (2.4.1) -(2.4.4) sistemi, $L^2_{\omega,q}((\omega_0, a); E)$ uzayında herhangi bir vektör değerli $f(x)$ fonksiyon için çözülebilir. Buna karşın, λ , (2.3.1)-(2.3.3) ile tanımlanan problemin bir özdeğeriye, bu durumda homojen olmayan sistem (2.4.1) - (2.4.4) genellikle çözülemez.

İspat. Green matrisi

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\theta_2(x, \lambda)\theta_1^T(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, & 0 \leq t \leq x, \\ -\frac{\theta_1(x, \lambda)\theta_2^T(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, & x < t \leq a \end{cases} \quad (2.4.5)$$

ile tanımlanır.

$$y(x, \lambda) = \int_0^a G(x, t, \lambda)f(t)d_q t \quad (2.4.6)$$

olsun. Yukarıdaki fonksiyonun homojen olmayan (2.4.1)-(2.4.4) sisteminin çözümü olduğunu göstereceğiz.

Green matrisinin tanımından

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \theta_{21}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)\theta_{21}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda) \\ \theta_{22}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)\theta_{22}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix}, & 0 \leq t \leq x, \\ \frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)\theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda) \\ \theta_{12}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)\theta_{12}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}, & x < t \leq a. \end{cases}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$G(x, t, \lambda)f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \left(\theta_{21}(x, \lambda)\theta_{11}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{21}(x, \lambda)\theta_{12}(t, \lambda)f_2(t) \right), \\ \quad 0 \leq t \leq x, \\ \frac{1}{\Delta(\lambda)} \left(\theta_{11}(x, \lambda)\theta_{21}(t, \lambda)f_1(t) + \theta_{11}(x, \lambda)\theta_{22}(t, \lambda)f_2(t) \right), \\ \quad x < t \leq a. \end{cases}$$

(2.4.6)'dan aşağıdaki eşitlik bulunur.

$$\begin{aligned} y_1(x, \lambda) &= -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_{21}(x, \lambda) \int_0^x (\theta_{11}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{12}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_{11}(x, \lambda) \int_x^a (\theta_{21}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{22}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t, \\ y_2(x, \lambda) &= -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_{22}(x, \lambda) \int_0^x (\theta_{11}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{12}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_{12}(x, \lambda) \int_x^a (\theta_{21}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{22}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t. \end{aligned}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} D_q y_1(x, \lambda) &= -\frac{q}{\Delta(\lambda)} D_q \theta_{21}(x, \lambda) \int_0^x (\theta_{11}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{12}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -\frac{q}{\Delta(\lambda)} D_q \theta_{11}(x, \lambda) \int_x^a (\theta_{21}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{22}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -W(\theta_1, \theta_2)f_2(x) \\ &= -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \{\lambda + r(x)\} \theta_{22}(x, \lambda) \int_0^x (\theta_{11}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{12}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \{\lambda + r(x)\} \theta_{12}(x, \lambda) \int_x^a (\theta_{21}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{22}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -\Delta(\lambda)f_2(x) \\ &= -\{\lambda + r(x)\} \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_{22}(x, \lambda) \int_0^x (\theta_{11}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{12}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -\{\lambda + r(x)\} \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_{12}(x, \lambda) \int_x^a (\theta_{21}(qt, \lambda)f_1(qt) + \theta_{22}(qt, \lambda)f_2(qt)) d_q t \\ &\quad -f_2(x) = -\{\lambda + r(x)\} y_2(x) - f_2(x), \end{aligned}$$

elde edilir. Denklem 2.4.1 in geçerliliği de benzer şekilde ispatlanır. Dolayısıyla (2.4.6)'daki $y(x, \lambda)$ fonksiyonu, (2.4.1)-(2.4.2) sistemlerinin çözümüdür. Ayrıca (2.4.3)-(2.4.4) sınır koşullarını sağlayıp sağlamadığını kolayca kontrol edilir (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Teorem 2.4.2. (2.4.5) ile tanımlanan Green matrisi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i. Green matrisi $G(x, t, \lambda)$ tektir, yani homojen olmayan sistem (2.4.2)-(2.4.4) için başka bir Green matrisi mevcutsa, o halde $L_{qC}^2((0, a) \times (0, a); E)$ de $G(x, t, \lambda) = \bar{G}(x, t, \lambda)$ dir.
- ii. $G(x, t, \lambda)$, $(0,0)$ noktasında süreklidir.
- iii. $G(x, t, \lambda) = G^T(t, x, \lambda)$
- iv. λ_0 , $\Delta(\lambda)$ 'nin sıfırı olsun. Bu durumda λ_0 , $G(x, t, \lambda)$ matrisinin basit bir kutbu olabilir.

O yüzden, şuna sahibiz

$$G(x, t, \lambda) = \frac{-v(x)v^T(t)}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{G}(x, t, \lambda),$$

burada, $\tilde{G}(x, t, \lambda)$ λ 'nın λ_0 ve $v(x)$ komşuluğunda bir analitik fonksiyondur ve λ_0 'a karşılık gelen normalleştirilmiş bir özfonksiyondur. (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Bu teoremin ispatı q -Sturm Liouville denklemleri için yapılan ispata (Annaby ve Mansour, 2012) benzer olduğu için atlıyoruz.

Tanım 2.4.3. E uzayı üzerinde $0 \leq x$, ve $t \leq a$ koşuluna sahip iki değişkenli bir matris-değerli $M(x, t)$ fonksiyonuna q - Hilbert- Schmidt çekirdeği denir. Eğer

$$\int_0^a \int_0^a \| M(x, t) \|_E^2 d_q x d_q t < +\infty \text{ koşulu sağlanıyorsa (Allahverdiev ve Tuna, 2017).}$$

Teorem 2.4.4. A operatörünü

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k, i = 1, 2, \dots \quad (2.4.7)$$

olmak üzere

$$A\{x_i\} = \{y_i\},$$

ile tanımlayalım. Eğer

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty \quad (2.4.8)$$

ise A operatörü l^2 dizi uzayında kompakttır (Naimark, 1969).

Teorem 2.4.5. (Hilbert-Schmidt). A bir Hilbert uzayını kendi içine eşleyen kompakt bir özeşlenik operatör olsun. O halde, A operatörünün sıfırdan farklı $\lambda_1, \lambda_2, \dots$

özdeğerlerine karşılık gelen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ ortonormal özvektör sistemi mevcuttur öyle ki her $x \in H$ elemanı

$$x = \sum_n c_n \varphi_n + x',$$

Olacak biçimde tek türlü bir gösterimi vardır .Burada $x', Ax' = 0$ koşulunu sağlar. Ayrıca sonsuz sayıda sıfır olmayan özdeğerin olduğu durumda

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n \theta_n,$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$$

sağlanır (Kolmogorov ve Fomin, 1970).

D_L ile tüm $y(x) \in L_q^2((0, a); E)$ vektörlerinin lineer kümesini gösterelim, öyle ki $D_q y(x), D_{q-1} y(x)$ sıfırda q -regüler ve $L_1(y) = 0, L_2(y) = 0$ olsun. L operatörünü, D_L üzerinde $Ly = ly$ eşitliği ile tanımlayalım.

L operatörünün, (2.3.1) – (2.3.3) ile tanımlanan q -Dirac problemi ile aynı özdeğerlere sahip olduğu açıktır. Genelliği kaybetmeden, $\lambda = 0$ bir özdeğer olmadığını varsayabiliriz. O halde, $\text{Ker } L = \{0\}$. Böylece

$$(Ly)(x) = f(x), f(x) \in L_q^2((0, a); E)$$

problemin çözümü aşağıdaki denklemle verilir:

$$y(x) = \int_0^a G(x, t) f(t) d_q t.$$

Burada

$$G(x, t) = G(x, t, 0) = \begin{cases} -\frac{\theta_2(x)\theta_1^T(t)}{W(\theta_1, \theta_2)}, & 0 \leq t \leq x, \\ -\frac{\theta_1(x)\theta_2^T(t)}{W(\theta_1, \theta_2)}, & x < t \leq a \end{cases} \quad (2.4.9)$$

dır.

Teorem 2.4.6. (2.4.11) ile tanımlanan $G(x, t)$ bir q -Hilbert-Schmidt kernelidir.

İspat. Formül (2.4.11) un üst yarısına göre,

$$\int_0^a d_q x \int_{0_0}^x \|G(x, t)\|^2 d_q t < +\infty;$$

ve (2.4.11) in alt yarısına göre de

$$\int_0^a d_q x \int_x^a \|G(x, t)\|^2 d_q x d_q t < +\infty \quad (2.4.10)$$

elde edilir, zira içindeki integral mevcut olup $\theta_{ij}(x)\theta_{kl}(t)(i, j, k, l = 1, 2)$ çarpımların lineer bir birleşimidir ve bu çarpımların her biri, her bir faktör $L_q^2(0, a)$ ya ait olduğu için $L_q^2((0, a); E)$ ye aittir. Bu durumda aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\int_0^a \int_0^a \|G(x, t)\|^2 d_q x d_q t < +\infty$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Teorem 2.4.7.

$$(Kf)(x) = \int_0^a G(x, t)f(t)d_q t$$

ile tanımlanan K operatörü kompakt ve özeşleniktir.

İspat. $\theta_i = \theta_i(t), i = 1, 2, 3 \dots L_q^2((0, a); E)$ nin bir tam ve ortonormal tabanı olsun. $G(x, t)$ bir q-Hilbert-Schmidt kerneli olduğundan, şu eşitlikleri tanımlayabiliriz

$$x_i = (f, \phi_i) = \int_0^a (f(t), \phi_i(t))_E d_q t$$

$$y_i = (g, \phi_i) = \int_0^a (g(t), \phi_i(t))_E d_q t$$

$$a_{ik} = \int_0^a \int_0^a (G(x, t)\phi_i(x), \phi_k(t))_E d_q x d_q t.$$

O halde, $L_q^2((\omega_0, a); E)$, l^2 izometrik olarak dönüşür. Dolayısıyla, integral operatörümüz bu eşleme ile l^2 uzayında formül (2.4.10) ile tanımlanan operatöre

dönüşür ve (2.4.12) koşulu, (2.4.9) koşuluna dönüşür. Teorem 2.2.9'e göre, bu operatör kompakttır. Dolayısıyla, orijinal operatör de kompakttır.

$m, n \in L_q^2((0, a); E)$, $G(x, t) = G^T(t, x)$ ve $G(x, t)$ gibi $[0, a] \times [0, a]$ üzerinde tanımlanan reel değerli bir matris fonksiyonu olsun, bu durumda aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} (Km, n) &= \int_0^a ((Km)(x), n(x))_E d_q x \\ &= \int_0^a \left(\int_0^a G(x, t) m(t) d_q t, n(x) \right)_E d_q x \\ &= \int_0^a \left(m(t), \int_0^a G(x, t) n(x) d_q x \right)_E d_q t \\ &= (m, Kn). \end{aligned}$$

Böylece, K 'nın özeşlenik olduğunu ispatlanır (Allahverdiev ve Tuna, 2017).

Teorem 2.4.8. L operatörünün özdeğerleri, şu şekilde sıralanabilen $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ sonsuz bir reel sayılar dizisi oluşturur:

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < \dots \rightarrow \infty \text{ ve } n \rightarrow \infty.$$

Tüm normleştirilmiş L özfonksiyonların kümesi $L_q^2((0, a); E)$ için bir ortonormal baz oluşturur.

İspat. Teorem 2.4.5 ve Teorem 2.4.7'ye göre, K operatörünün sıfır olmayan reel özdeğerlerden oluşan $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ şartına sahip sonsuz bir dizisi vardır. O halde,

$$|\lambda_n| = \frac{1}{|\xi_n|} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

$\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$, $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ ye karşılık gelen bir ortonormal özfonksiyonlar kümesini gösterebiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
y &= Kf = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(f, \chi_n) \chi_n = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(ly, \chi_n) \chi_n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n(y, l_{\chi_n}) \chi_n = \sum_{n=0}^{\infty} (y, \chi_n) \chi_n
\end{aligned}$$

dir. (Allahverdiev ve Tuna, 2017).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, q-Dirac denkleminin $x = \infty$ singüler (tekil) noktasının limit-çember ve limit-nokta olarak nasıl sınıflandırıldığını ele alacağız.

3.1. q –Dirac sistemlerinin Temel Çözümü

Bir-boyutlu q-Dirac sistemlerinin ele alalım.

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q}D_{q^{-1}} \\ D_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{denklemini ya da } \tau y := \begin{cases} -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}y_2 + p(x)y_1, \\ D_q y_1 + r(x)y_2, \end{cases} \text{ olmak üzere}$$

$$\tau y = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, 0 \leq x < \infty, \quad (3.1.1)$$

denklemini ele alalım. Burada λ karmaşık spectral parametre, p ve r , $[0, \infty)$ aralığı üzerine tanımlı olup sıfırda reel değerli fonksiyonlar ve $p, r \in L^1_{q,loc}(0, \infty)$ olsun. $C^1_q(0, \infty)$, y ve $D_q y$ sıfırda sürekli olacak şekilde $[0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm y fonksiyonlarının bir kümesi olsun.

Teorem 3.1.1. $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ için, Denklem 3.1 in

$$\Phi(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x, \lambda) \\ \psi_1(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

şeklinde tek bir çözümü vardır, burada $\Phi_1(\cdot, \lambda)$ ve $\psi_1(\cdot, \lambda)$, $C^1_q(0, \infty)$ içinde, aşağıdaki koşulu sağlar

$$\Phi_1(0, \lambda) = c_1, \Phi_2(0, \lambda) = c_2, \lambda \in \mathbb{C}. \quad (3.1.2)$$

Tüm $x \in [0, \infty)$ için, $\Phi(x, \lambda)$, λ 'nın vektör değerli tam fonksiyonudur (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

Lemma 3.1.2. Denklem 3.1.1 in $\Phi(x, \lambda)$ çözümü aşağıdaki

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(xq^n, \lambda) = \Phi(0, \lambda),$$

q-regülerlik koşulunu her $x > 0$ için λ -düzleminin herhangi bir kompakt alt kümesi üzerinde düzgün olarak sağlar.

İspat. $\Phi(x, \lambda)$ 'nin çözümü,

$$\Phi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} S_{11}(x, \lambda) \\ S_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi_2(x, \lambda) \quad (x \in [0, \infty), \lambda \in \mathbb{C}),$$

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(x, \lambda) = & \begin{pmatrix} S_{11}(x, \lambda) \\ S_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} q \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\lambda x; q) \frac{\sin(\lambda q t; q)}{\lambda} \\ -\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \end{bmatrix} p(qt) \Phi_{n1}(qt, \lambda) d_q t \\ q \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\lambda x; q) \cos(\lambda q t; q) \\ +\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \frac{\sin(\lambda q t; q)}{\lambda} \end{bmatrix} p(qt) \Phi_{n1}(qt, \lambda) d_q t \\ -q \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\lambda x; q) \cos(\lambda q t; q) \\ +\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \frac{\sin(\lambda q t; q)}{\lambda} \end{bmatrix} r(qt) \Phi_{n2}(qt, \lambda) d_q t \\ +q \int_0^x \begin{bmatrix} \cos(\lambda x; q) \frac{\sin(\lambda q t; q)}{\lambda} \\ -\frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \cos(\lambda q t; q) \end{bmatrix} r(qt) \Phi_{n2}(qt, \lambda) d_q t \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ardışık yaklaşımlar dizisinin, $n \rightarrow \infty$ kadar düzgün limitidir. Burada

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \lambda) = & \begin{pmatrix} \cos(\lambda x; q) \\ \frac{\sin(\lambda x; q)}{\lambda} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \varphi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} -\frac{\sin(\lambda x, q)}{\lambda} \\ \cos(\lambda x, q) \end{pmatrix} \quad \text{eğer } x \neq 0 \\ \varphi_1(x, \lambda) = & \begin{pmatrix} \cos(\lambda x, q) \\ x \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \varphi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} x \\ \cos(\lambda x; q) \end{pmatrix} \quad \text{eğer } x = 0 \end{aligned}$$

dır. $\{\varphi_1(x, \lambda), \varphi_2(x, \lambda)\}$ fonksiyonları, q -Wronskian $W_q(\varphi_1, \varphi_2) = 1$ ile denklem 3.1.1 in temel bir çözüm kümesini oluşturur. Kolayca görüleceği üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_n(xq^n, \lambda) = \Phi_n(0, \lambda)$$

$\varphi_i, i = 1, 2$ aynı regülerlik özelliğine sahip olduğundan, C 'nin herhangi bir kompakt alt kümesinde düzgündür. Bu yüzden, $\Phi(x, \lambda)$ da aynı regülerlik özelliğine sahiptir zira $\Phi_n(x, \lambda)$ 'nin $[0, a], a > 0$ tüm kapalı alt aralık değerlerinde ve C 'nin herhangi bir kompakt alt kümesinde düzgün limitidir (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

Şimdi $L_q^2((0, \infty); E) (E = C^2)$ Hilbert uzayını

$$(f, g) = \int_0^\infty (f(x), g(x))_E d_q x.$$

İç çarpımı yardımıyla tanımlayalım.

$C_a^1((0, \infty); E)$, $[0, \infty)$ aralığında tanımlı tüm y vektör değerli fonksiyonların kümesi olsun, öyle ki, y ve $D_q y$ sıfırda sürekli olsun.

Lemma 3.1.3. $y, z \in C_q^1((0, \infty); E)$ olsun. O halde $x \in (0, \infty)$ için şu eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \int_0^x ((\tau y)(t), z(t))_E d_q t - \int_0^x (y(t), (\tau z)(t))_E d_q t \\ &= [y, z]_x - [y, z]_0. \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Burada $[y, z]_t := y_1(t) \overline{z_2(q^{-1}t)} - \overline{z_1(t)} y_2(q^{-1}t)$ dir.

İspat. $y, z \in C_q^1((0, \infty); E)$ için şu eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \int_0^x ((\tau y)(t), z(t))_E d_q t - \int_0^x (y(t), (\tau z)(t))_E d_q t \\ &= \int_0^x \left(-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} y_2(t) + p(t) y_1(t) \right) \overline{z_1(t)} d_q t \\ &+ \int_0^x (D_q y_1(t) + r(t) y_2(t)) \overline{z_2(t)} d_q t \\ &- \int_0^x y_1(t) \overline{\left(-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} z_2(t) + p(t) z_1(t) \right)} d_q t \\ &- \int_0^x y_2(t) \overline{(D_q z_1(t) + r(t) z_2(t))} d_q t \\ &= - \int_0^x \left[\left(\frac{1}{q} D_{q^{-1}} y_2(t) \right) \overline{z_1(t)} + y_2(t) \overline{D_q z_1(t)} \right] d_q t \\ &+ \int_0^x \left[(D_q y_1(t)) \overline{z_2(t)} + y_1(t) \overline{\frac{1}{q} D_{q^{-1}} z_2(t)} \right] d_q t. \end{aligned}$$

Diğer yandan,

$$\begin{aligned} D_q \left(\overline{z_1(t)} y_{y_2}(q^{-1}t) \right) &= (D_q y_2)(q^{-1}t) D_q(q^{-1}t) \overline{z_1(t)} + y_2(t) \overline{D_q z_1(t)} \\ &= \frac{1}{q} (D_q - 1) y_2(t) \overline{z_1(t)} + y_2(t) \overline{D_q z_1(t)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} D_\varphi \left(\overline{z_2(q^{-1}t)} y_1(t) \right) &= \overline{(D_q z_2)(q^{-1}t)} D_\varphi(q^{-1}t) y_1(t) + \overline{z_2(t)} D_q y_1(t) \\ &= \frac{1}{q} (D_{q^{-1}} z_2(t)) y_1(t) + \overline{z_2(t)} D_q y_1(t) \end{aligned}$$

olduğundan, aşağıdaki sonucu ele ederiz.

$$\begin{aligned}
& \int_0^x ((\tau y)(t), z(t))_E d_q t - \int_0^x (y(t), (\tau z)(t))_E d_q t \\
&= \int_0^x (D_q y_1(t)) \overline{z_2(q^{-1}t)} d_q t - \int_0^x (D_q \overline{z_1(t)}) y_2(q^{-1}t) d_q t \\
&= \int_0^x D_q [y_1(t) \overline{z_2(q^{-1}t)} - \overline{z_1(t)} y_2(q^{-1}t)] d_q t = [y, z]_x - [y, z]_0
\end{aligned}$$

(Allahverdiev ve Tuna , 2019).

Denklem 3.1.1'in aşağıdaki koşulları sağlayan $\varphi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ şeklinde iki çözümünü göz önüne alalım.

$$\varphi_1(0, \lambda) = \cos \alpha, \quad \varphi_2(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad (3.1.4)$$

$$\psi_1(0, \lambda) = \sin \alpha, \quad \psi_2(0, \lambda) = -\cos \alpha, \quad (3.1.5)$$

Burada $\alpha \in \mathbb{R}$ sabit olsun.

Lemma 3.1.4. $x \in [0, \infty)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$\overline{\varphi(x, \lambda)} = \varphi(x, \lambda), \quad \overline{\psi(x, \lambda)} = \psi(x, \lambda)$$

İspat. Şayet $\varphi(x, \lambda)$, Denklem 3.1.1'in bir çözümü ise o halde şu eşitliğe sahip oluruz.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} \varphi_2 + p(x) \varphi_1 &= \lambda \varphi_1, \\
D_q \varphi_1 + r(x) \varphi_2 &= \lambda \varphi_2, \quad x \in [0, \infty).
\end{aligned}$$

Karmaşık eşlenik alarak şunu elde ederiz.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{q} D_{q^{-1}} \bar{\varphi}_2 + p(x) \bar{\varphi}_1 &= \bar{\lambda} \bar{\varphi}_1, \\
D_q \bar{\varphi}_1 + r(x) \bar{\varphi}_2 &= \bar{\lambda} \bar{\varphi}_2.
\end{aligned}$$

3.1.4 koşullarına göre $\overline{\varphi(x, \lambda)}$ aşağıdaki denklemin çözümüdür.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{q} D_q - 1 z_2 + p(x) z_1 &= \bar{\lambda} z_1, \\
D_q z_1 + r(x) z_2 &= \bar{\lambda} z_2.
\end{aligned}$$

Aynı zamanda, $z = \varphi(x, \bar{\lambda})$ de Denklem 3.1.1 in 3.3.4 koşullarına sahip bir çözümdür. Bu durumda, çözümlerin tekliğinden istenilen sonuca ulaşılır (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

Teorem 3.1.5 Denklem 3.1.1 in her hangi iki çözümünün q -Wronskian'ı, x ($0 \leq x < \infty, \lambda \in \mathbb{C}$) değişkeninden bağımsızdır.

İspat. $y(x, \lambda)$ ve $z(x, \lambda)$, Denklem 3.1.1'in iki çözümü olsun. Green'in formülü ile aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \int_0^x ((\tau y)(t, \lambda), z(t, \lambda))_E d_q t - \int_0^x (y(t, \lambda), (\tau z)(t, \lambda))_E d_q t \\ = W_q(y, z)(x, \lambda) - W_q(y, z)(0, \lambda). \end{aligned}$$

$\tau y - \lambda y$ ve $\tau z - \lambda z$, olduğuna göre

$$\begin{aligned} \int_0^x (\lambda y(t, \lambda), \bar{z}(t, \lambda))_E d_q t - \int_0^x (y(t, \lambda), \overline{\lambda z}(t, \lambda))_E d_q t \\ = (\lambda - \lambda) \int_0^x (y(t, \lambda), \bar{z}(t, \lambda))_E d_q x = 0 = W_q(y, z)(x, \lambda) - W_q(y, z)(0, \lambda) \text{ dir.} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

O halde, $W_q(y, z)(x, \lambda) = W_q(y, z)(0, \lambda)$ 'dir yani q -Wronskian x 'ten bağımsızdır (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

Lemma 3.1.6. Eğer $y(x, \lambda)$, Denklem 3.1.1'in bir çözümüyse aşağıdaki formül geçerlidir

$$\begin{aligned} \int_0^a \|y(x, \lambda)\|_E^2 d_q x &= \frac{1}{2iv} (W_q(y, \bar{y})(a, \lambda) - W_q(y, \bar{y})(0, \lambda)), \\ v &= \text{Im } \lambda, \quad a > 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

İspat. (3.1.6) ifadesinde $\bar{z}(x, \lambda) = y(x, \lambda)'$ yi yerine koyarsak (3.1.7) elde edilir (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

3.2. Limit-Çember ve Limit-Nokta Durumları

Şimdi $[0, q^{-n}]$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ aralığı üzerinde q-Dirac sistemi incelenecektir. Bu amaçla, bir çember ailesi tanımlayacağız. Eğer çemberler bir çembere yakınsıyorsa, sonsuzda bir sınır koşulu gereklidir. Eğer çemberler bir noktaya yakınsıyorsa bu durumda sınır koşuluna gerek yoktur.

Sistem 3.3.1'in genel çözümü şu şekilde gösterilebilir

$$\psi(x, \lambda) + l\varphi(x, \lambda)$$

ve (3.2.1) sınır koşulunu sağlar.

$$(\psi_1(q^{-\infty}, \lambda) + l\varphi_1(q^{-n}, \lambda)) \cos \beta + (\psi_2(q^{-n-1}, \lambda) + l\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)) \sin \beta = 0 \quad (3.2.1)$$

O halde, l şu bağıntıyı sağlar:

$$l = -\frac{\psi_1(q^{-\infty}, \lambda) \cot \beta + \psi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\psi_1(q^{-\infty}, \lambda) \cot \beta + \psi_2(q^{-n-1}, \lambda)}, \quad (3.2.2)$$

$\psi(x, \lambda)$ ve $\varphi(x, \lambda)$, λ değişkenine göre tam fonksiyonlar olduğundan, l 'nin λ değişkenine göre meromorfik bir fonksiyonu olduğu açıktır. Ayrıca, regüler probleminin özdeğerleri gerçel olduğundan, l 'nin tüm kutupları gerçel ve basittir. Eğer $\cot \beta$ yerine karmaşık bir değişken olan z konulursa o halde (3.2.1)'e sahip oluruz

$$l = -\frac{\psi_1(q^{-n}, \lambda)z + \psi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-\infty}, \lambda)z + \varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)}. \quad (3.2.3)$$

Teorem 3.1.5 den

$$\begin{aligned} & \psi_1(q^{-n}, \lambda)\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda) - \psi_1(q^{-\infty}, \lambda)\psi_2(q^{-n-1}, \lambda) \\ & = W_q(\psi, \varphi)(q^{-n}, \lambda) = W_q(\psi, \varphi)(0, \lambda) = 1 \neq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Her λ için Denklem 3.2.3, z değişkenine göre bire-bir konform bir dönüşümdür. Dolayısıyla, $\text{Im } \lambda \neq 0$ ise, z -düzleminin gerçek eksenini üzerinde z değiştikçe, $l(\lambda, z)$ l -düzleminde sonlu bir yarıçapa sahip $C_{q^{-n}}(\lambda)$ çemberi üzerinde değişir.

Şimdi, bu çemberlerin merkezini ve yarıçapını hesaplayalım. $P_n(\lambda), R_n(\lambda)$ ile sırasıyla dairelerin merkezini ve yarıçapını gösterelim. Bu durumda aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Teorem 3.2.1 $\lambda \in \mathbb{C}, v = \text{Im } \lambda \neq 0$ olsun o halde,

$$P_n(\lambda) = -\frac{W_q(\psi, \bar{\psi})(q^{-n}, \lambda)}{W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}, \quad (3.2.4)$$

$$R_n(\lambda) = \left(2v \int_0^{q^{-n}} \|(\varphi, \lambda)\|_E^2 d_q x \right)^{-1} \quad (3.2.5)$$

dir.

İspat. $P_n(\lambda)$, ∞ 'daki simetrik noktadır. z' ve z''

$$l(\lambda, z') = \infty, l(\lambda, z'') = P_n(\lambda)$$

olacak şekilde z -düzleminde iki nokta olsun. O halde z' and z'' , z -düzleminin gerçek eksenine göre simetrik yani, $z' = \bar{z''}$ olmalıdır. Fakat $l(\lambda, z') = \infty$ ancak ve ancak

$$z' = -\frac{\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-n}, \lambda)} \text{ dir.}$$

Dolayısıyla, $P_n(\lambda)$ aşağıdaki formülle verilir.

$$\begin{aligned} P_n(\lambda) &= l\left(\lambda, -\frac{\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-n}, \lambda)}\right) \\ &= -\frac{\psi_1(q^{-n}, \lambda) \left(-\frac{\bar{\varphi}_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\bar{\varphi}_1(q^{-n}, \lambda)}\right) + \psi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-n}, \lambda) \left(-\frac{\bar{\varphi}_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\bar{\varphi}_1(q^{-n}, \lambda)}\right) + \varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)} \\ &= -\frac{\psi_1(q^{-n}, \lambda) \varphi_2(q^{-n-1}, \bar{\lambda}) - \varphi_1(q^{-n}, \bar{\lambda}) \psi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-n}, \lambda) \varphi_2(q^{-n-1}, \bar{\lambda}) - \varphi_1(q^{-n}, \bar{\lambda}) \varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)} \\ &= -\frac{W_q(\psi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}. \end{aligned}$$

Şimdi, $R_n(\lambda)$, $C_{q^{-n}}$ nin merkezi ile $C_{q^{-n}}(\lambda)$ çemberi üzerindeki $l(\lambda, 0)$ noktası arasındaki uzaklıktır. Böylece,

$$\begin{aligned} R_n(\lambda) &= \left| \frac{\psi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)} - \frac{W_q(\psi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{W_q(q, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \right| \\ &= \left| \frac{\varphi_2(q^{-n-1}, \bar{\lambda}) W_q(\psi, \varphi)(q^{-n}, \lambda)}{\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda) W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \right| \\ &= \left| \frac{W_q(\psi, \varphi)(q^{-n}, \lambda)}{W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)} \right| = \frac{1}{|W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)|} \end{aligned}$$

elde edilir, çünkü $W_q(\psi, \varphi)(q^{-n}) = 1$ 'dir. Lemma 3.1.6 ile aşağıdaki denkleme sahibiz.

$$W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda) = 2iv \int_0^{q^{-n}} \|\varphi(x, \lambda)\|_{E^2}^2 d_q x.$$

Dolayısıyla aşağıdaki eşitlik

$$|W_q(\varphi, \bar{\varphi})(q^{-n}, \lambda)| = 2|v| \int_0^{q^{-n}} \|\varphi(x, \lambda)\|_{E^2}^2 d_q x$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

Diğer taraftan, z -düzleminin reel ekseninin $C_{q^{-n}}$ çemberinin görüntüsü olduğunu biliyoruz, bu yüzden bir sonraki ele alacağımız konu $\{C_{q^{-n}}(\lambda), n \in \mathbb{N}\}$ çember ailesinin davranışı olacaktır.

Teorem 3.2.2 $\lambda = u + iv$ olsun. Eğer $\text{Im } \lambda = v > 0$ ise, bu durumda üst yarı-düzlem $C_{q^{-\infty}}$ çemberinin dışı ile eşleşir.

İspat. q -Wronskian tanımından

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ \frac{\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-n}, \lambda)} \right\} &= \frac{1}{2}i \left\{ -\frac{\varphi_2(q^{-n-1}, \lambda)}{\varphi_1(q^{-n}, \lambda)} + \frac{\varphi_2(q^{-n-1}, \bar{\lambda})}{\varphi_1(q^{-n}, \bar{\lambda})} \right\} \\ &= \frac{1}{2}i \frac{W_q(\psi, q)(q^{-n}, \lambda)}{|q_1(q^{-n}, \lambda)|^2} = -\frac{1}{2}i \frac{W_q(q, \varphi)(q^{-n}, \lambda)}{|\varphi_1(q^{-n}, \lambda)|^2} \\ &= \frac{v}{\|p_1(q^{-n}, \lambda)\|^2} \int_0^{q^{-n}} \|\varphi(x, \lambda)\|_E^2 d_q x > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu hesaplama $v > 0$ ise, $C_{q^{-n}}(\lambda)$ 'nın dışının z -düzleminin üst yarı-düzlemine eşlendiğini göstermektedir (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

Şimdi artık, aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 3.2.3 $\psi(x, \lambda), \varphi(x, \lambda)$ aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan Sistem 3.1 in lineer bağımsız iki çözümü olsun.

$$\begin{aligned}\varphi_1(0, \lambda) &= \cos \alpha, \quad \varphi_2(0, \lambda) = \sin \alpha, \\ \psi_1(0, \lambda) &= \sin \alpha, \quad \psi_2(0, \lambda) = -\cos \alpha, \quad \operatorname{Im} \lambda \neq 0.\end{aligned}$$

O halde

$$x(x, \lambda) = \psi(x, \lambda) + l \varphi(x, \lambda)$$

çözümü

$$\{\psi_1(q^{-n}, \lambda) + l\varphi_1(q^{-n}, \lambda)\}\cos \beta + \{\psi_2(q^{-n}, \lambda) + l\varphi_2(q^{-n}, \lambda)\}\sin \beta = 0$$

sınır koşulunu sağlar ancak ve ancak $l, C_{q^{-n}}$ üzerindedir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_\varphi(x, \bar{x})(q^{-n}, \lambda) = 0 \text{ dir.}$$

Eğer $n \rightarrow \infty$, bu durumda $C_{q^{-n}}$ ya C_∞ limit çemberine ya da m_∞ limit noktasına yaklaşır. Birinci durumda sistemin tüm çözümleri $L_q^2((0, \infty); E)$ uzayındadır. İkinci durumda, $\operatorname{Im} \lambda \neq 0$ ise bir lineer bağımsız çözüm $L_q^2((0, \infty); E)$ uzayındadır. Limit çember durumunda, bir nokta C_∞ çemberi üzerindedir ancak ve ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_q(x, \bar{x})(q^{-n}, \lambda) = 0 \text{ dir.}$$

İspat $\lambda \in C$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki sonucu bulunur:

$$\begin{aligned}W_\varphi(\psi + l\varphi, \overline{\psi + l\varphi})(0, \lambda) &= W_q(\psi, \bar{\psi})(0, \lambda) + lW_\varphi(\varphi, \bar{\psi})(0, \lambda) \\ &\quad + \bar{l}W_\varphi(\psi, \bar{\varphi})(0, \lambda) + |\eta|^2 W_q(\varphi, \bar{\varphi})(0, \lambda) \\ &= -l + \bar{l} = -2i \operatorname{Im} l.\end{aligned}$$

Lemma 3.1.6 kullanılarak

$$2v \int_0^{q^{-n}} \|\psi(x, \lambda) + l\varphi(x, \lambda)\|_E^2 d_\varphi x$$

$$= \frac{1}{i} (W_q(\psi + l_\varphi, \psi + l_\varphi)(q^{-n}, \lambda) + 2i \operatorname{Im} l) \quad (3.2.6)$$

elde edilir. Teorem 3.2.2'den $\operatorname{Im} z < 0$, ise bu durumda, $v > 0$ için l , $C_{q^{-n}}$ içindedir. Denklem 3.2.3 ile aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$z = - \frac{\psi_2(q^{-n-1}, \lambda) + l_{q_2}(q^{-n-1})}{\psi_1(q^{-n}, \lambda) + l_{p_1}(q^{-n}, \lambda)}$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned} & i(z - \bar{z}) \\ &= i \left\{ - \frac{\psi_2(q^{-n-1}, \lambda) + l_{\varphi_2}(q^{-n-1}, \lambda)}{\psi_1(q^{-n}, \lambda) + l_{\varphi_1}(q^{-n}, \lambda)} + \frac{\overline{\psi_2(q^{-n-1}, \lambda) + l_{\varphi_2}(q^{-n-1}, \lambda)}}{\overline{\psi_1(q^{-n}, \lambda) + l_{\varphi_1}(q^{-n}, \lambda)}} \right\} \\ &= i \frac{W_q(\psi + l_\varphi, \overline{\psi + l_\varphi})(q^{-n}, \lambda)}{|\psi_1(q^{-n}, \lambda) + l_{\varphi_1}(q^{-n}, \lambda)|^2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

Bu durumda, $\operatorname{Im} z < 0$ ancak ve ancak

$$iW_q(\psi + l_\varphi, \overline{\psi + l_\varphi})(q^{-n}, \lambda) > 0 \text{ dir.} \quad (3.2.7)$$

(3.2.6) ve (3.2.7) den aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_0^{q^{-n}} \|\psi(x, \lambda) + l_\varphi(x, \lambda)\|_E^2 d_q x < \frac{\operatorname{Im} l}{v} \quad (3.2.8)$$

Öte yandan, l , $C_{q^{-n}}$ çemberi üzerindedir ancak ve ancak $\operatorname{Im} z = 0$ ise. Bundan dolayı, şunu elde ederiz

$$W_q(\psi + l_\varphi, \overline{\psi + l_\varphi})(q^{-n}, \lambda) = 0$$

Böylece

$$\int_0^{q^{-n}} \|\psi(x, \lambda) + l_\varphi(x, \lambda)\|_E^2 d_q x = \frac{\operatorname{Im} l}{v}$$

denklemini elde edilir. Ayrıca, l $C_{q^{-n}}$ çemberinin içindeyse ve $0 < k < n$ ise

$$\int_0^{q^{-k}} \|\psi(x, \lambda) + l_\varphi(x, \lambda)\|_E^2 d_q x < \int_0^{q^{-n}} \|\psi(x, \lambda) + l_\varphi^q(x, \lambda)\|_E^2 d_q x < \frac{\text{Im } l}{v},$$

dir. Yani, $k < n$ ise, $C_{q^{-k}}$ çemberi $C_{q^{-n}}$ çemberini içerir.

$n \rightarrow \infty$, olduğunda $C_{q^{-n}}$ çemberleri ya C_∞ limit çemberine ya da m_∞ limit noktasına yakınsar. Eğer $C_{q^{-n}} \rightarrow C_\infty$ ise yarıçapı pozitiftir, bu yüzden (3.2.5) ile $\varphi(\cdot, \lambda) \in L_q^2((0, \infty); E)$ dir. ξ , C_∞ limit çemberi üzerindeki herhangi bir nokta olsun. (3.2.8) denklemi ile aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\int_0^{q^{-n}} \|\psi(x, \lambda) + l_p(x, \lambda)\|_E^2 d_q x < \frac{\text{Im } \xi}{v}.$$

Böylece, $\psi(\cdot, \lambda) + l_\varphi(\cdot, \lambda) \in L_q^2((0, \infty); E)$ elde edilir. Eğer $C_{q^{-n}} \rightarrow C_\infty, n \rightarrow \infty$ ve $\text{Im } \lambda \neq 0$ ise bu durumda, 3.1.1 sisteminin tüm çözümleri $L_q^2((0, \infty); E)$ 'ye aittir; çünkü, $\varphi(\cdot, \lambda)$ ve $\psi(\cdot, \lambda) + \xi\varphi(\cdot, \lambda)$ çözümleri $L_q^2((0, \infty); E)$ uzayında yer alır. Şayet, $C_{q^{-n}} \rightarrow m_\infty, n \rightarrow \infty$ ise o halde $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(\lambda) = 0$ olur. (3.2.5) denkleminde $\varphi(\cdot, \lambda) \notin L_q^2((0, \infty); E)$ 'yi elde ederiz. Dolayısıyla, $L_q^2((0, \infty); E)$ 'nin yalnızca bir çözümü vardır. Ayrıca, l, C_∞ üzerindedir ancak ve ancak

$$\int_0^\infty \|\psi(x, \lambda) + l_\varphi(x, \lambda)\|_E^2 d_\varphi x = \frac{\text{Im } l}{v} \quad (3.2.9)$$

dir. (3.2.9), (3.2.6) ve (3.2.8) ifadeleri kullanılırsa, l, C_∞ çemberi üzerindedir ancak ve ancak

$$\lim_{n \rightarrow \infty} W_q(\psi + l_\varphi, \overline{\psi + l_\varphi})(q^{-n}, \lambda) = 0$$

dir (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

3.3. q-Dirac Sisteminde Limit-Çember Durumu

Bu bölümde sadece klasik Dirac sistemi gibi q-Dirac sistemde limit nokta durumu oluşmaktadır bir başka deyişle limit-çember durumu gerçekleşmediğini ele alıyoruz.

Teorem 5.1.1. q -Dirac sistemi ∞ noktasında limit-nokta durumundadır.

İspat.

$$\theta(x) = \begin{pmatrix} \theta_1(x) \\ \theta_2(x) \end{pmatrix} \text{ ve } \phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

$\tau y = 0 (x \in (0, \infty))$ denkleminin lineer bağımsız iki çözümü olsun.

$W_q(\theta, \phi)(x) = \kappa \neq 0, x \in (0, \infty)$ olduğu açıktır. O halde

$$\rho(x) = \begin{pmatrix} \theta_1(x) \\ \theta_2(q^{-1}x) \end{pmatrix}, \omega(x) = \begin{pmatrix} \overline{\theta_2(q^{-1}x)} \\ -\overline{\phi_1(x)} \end{pmatrix},$$

için aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\begin{aligned} |\kappa| &= |W_q(\theta, \phi)(x)| = |\theta_1(x)\phi_2(q^{-1}x) - \phi_1(x)\theta_2(q^{-1}x)| \\ &= |(\rho(x), \omega(x))_E| \leq \|\rho(x)\|_E \|\omega(x)\|_E \leq \frac{1}{2} (\|\rho(x)\|_E^2 + \|\omega(x)\|_E^2). \end{aligned}$$

Vektör değerli ρ ve ω fonksiyonlarının (ayrıca θ ve ϕ) her ikisinin de $L_q^2((0, \infty); E)$ içinde sağ tarafta olmayacağı sonucu çıkar. Dolayısıyla, q –Dirac sistemi ∞ 'da limit-nokta durumundadır (Allahverdiev ve Tuna, 2019).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde singüler durumdaki q -Dirac operatörlerinin genişlemelerinde ulaştığımız sonuçlar, sınır koşulları ile elde ettiğimiz sınır değer uzayı yardımıyla simetrik q -Dirac operatörünün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri ile elde edilen bulgular incelenecektir.

Şimdi

$$l_1 y(x) = \lambda A(x)y(x), \quad 0 \leq x < \infty,$$

q -Dirac denklemini göz önüne alalım. Burada λ karmaşık bir spektral parametredir,

$$l_1 y := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} \\ D_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & c(x) \\ c(x) & b(x) \end{pmatrix}, A^* = A > 0, \text{ dir ve } p(\cdot), r(\cdot), a(\cdot), b(\cdot), c(\cdot) \text{ reel değerli ve } 0$$

noktasında q -regüler fonksiyonlardır.

$$\ell(y) := A^{-1}(x)l_1(y)(x \in (0, \infty)), \quad (4.1)$$

denklemden operatöre geçiş yapmak için,

$$(f, g) = \int_0^\infty (A(x)f(x), g(x))_E d_q x$$

iç çarpımı yardımıyla $L_A^2((0, \infty); \mathbb{C}^2)$ Hilbert uzayını göz önüne alalım.

Şimdi (4.1) denklemine karşılık gelen maksimal ve minimal operatörlerin tanım kümelerini verelim.

$$D_{max} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in H: \begin{array}{l} y_1 \text{ ve } y_2 \text{ fonksiyonları } 0 \text{ noktasında } q - \text{regüler ve} \\ \ell(y) \in H \end{array} \right\}.$$

$$D_{min} = \{y \in D_{max}: y_1(0) = y_2(0) = 0, \forall z \in D_{max} \text{ için } [y, z]_\infty = 0\}.$$

D_{max} kümesi üzerinde $L_{max}y = \ell y$ ile L_{max} maksimal operatörünü tanımlayalım. Eğer L_{max} operatörünü D_{min} kümesine kısıtlarsak L_{min} minimal operatörü elde edilir.

$L_{min}^* = L_{max}$ ve L_{min} kapalı simetrik operatörüdür (Naimark, 1968).

L_{min} simetrik operatörü Weyl 'in limit-çember durumunda olsun yani indis defekti (2,2) olsun.

$\ell(y) = 0$ denkleminin,

$$u_{11}(0) = 1, \quad u_{12}(0) = 0, \quad u_{21}(0) = 0, \quad u_{22}(0) = 1 \quad (4.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ olarak gösterelim.

Açıktır ki $u_1(t)$ ve $u_2(t)$ lineer bağımsızdır ve onların Wronskian 1 e eşittir;

$$W_q[u_1, u_2](t) = W_q[u_1, u_2](0) = 1, \quad (t \in [0, \infty)).$$

Sınır değer uzayının ilk koşulunu ispatlamak için ilk olarak aşağıdaki lemmayı ispatlamamız gerekiyor.

Lemma 4.1. $u(x)$ ve $v(x)$, $\ell(y) = 0$ denkleminin $[u, v]_x = 1$ ($a \leq x \leq b$) koşulunu sağlayan iki çözümü olsunlar. O zaman aşağıdaki eşitlik geçerlidir.

$$[y, z]_x = [y, u]_x [\bar{z}, v]_x - [y, v]_x [\bar{z}, u]_x.$$

İspat. $y_i(x)$ ve $z_i(x)$ ($i=1,2$) fonksiyonları reel değerli ve $[u, v]_x = 1$ ($a \leq x \leq b$), olduğundan aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{aligned} & [y, u]_x [\bar{z}, v]_x - [y, v]_x [\bar{z}, u]_x \\ &= (y_1(x)u_2(q^{-1}x) - y_2(q^{-1}x)u_1(x))(\bar{z}_1(x)v_2(q^{-1}x) \\ & \quad - \bar{z}_2(q^{-1}x)v_1(x)) \\ &= (y_1(x)v_2(q^{-1}x) - y_2(q^{-1}x)v_1(x))(\bar{z}_1(x)u_2(q^{-1}x) \\ & \quad - \bar{z}_2(q^{-1}x)u_1(x)) \\ &= y_1(x)u_2(q^{-1}x)\bar{z}_1(x)v_2(q^{-1}x) - y_1(x)u_2(q^{-1}x)\bar{z}_2(q^{-1}x)v_1(x) \\ & \quad - y_2(q^{-1}x)u_1(x)\bar{z}_1(x)v_2(q^{-1}x) + y_2(q^{-1}x)u_1(x)\bar{z}_2(q^{-1}x)v_1(x) \\ & \quad - y_1(x)v_2(q^{-1}x)\bar{z}_1(x)u_2(q^{-1}x) - y_2(q^{-1}x)v_1(x)\bar{z}_2(q^{-1}x)u_1(x) \\ & \quad + y_2(q^{-1}x)v_1(x)\bar{z}_1(x)u_2(q^{-1}x) \\ &= (-y_1(x)\bar{z}_2(q^{-1}x) + y_2(q^{-1}x)\bar{z}_2(q^{-1}x))(u_2(q^{-1}x)v_1(x) - u_1(x)v_2(q^{-1}x)) \end{aligned}$$

$$= [y, z]_x.$$

Şimdi,

$$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{max} \rightarrow \mathbb{C}^2,$$

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y_1(0) \\ [y, u_1]_\infty \end{pmatrix}, \quad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} y_2(0) \\ [y, u_2]_\infty \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

dönüşümlerini ile ispat tamamlanır.

Teorem 4.2. (4.3) dönüşümleri yardımı ile tanımlanan $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ üçlüsü, $L_{\min}$ operatörünün sınır değer uzayıdır.

İspat. $\forall y(t), z(t) \in D_{max}$ için

$$\begin{aligned} (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} &= -y_1(0)\overline{(z_2(0))} + (y_2(0))\overline{(z_1(0))} + \\ &[y, u_1]_\infty \cdot [\bar{z}, u_2]_\infty - [y, u_2]_\infty \cdot [\bar{z}, u_1]_\infty. \end{aligned}$$

Lemma 4.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$(\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} = [y, \bar{z}]_\infty - [y, \bar{z}]_0.$$

O zaman,

$$(L_{max} y, z)_H - (y, L_{max} z)_H = (\Gamma_1 y, \Gamma_2 z)_{\mathbb{C}^2} - (\Gamma_2 y, \Gamma_1 z)_{\mathbb{C}^2} \quad (4.4)$$

elde edilir. Böylece sınır değer uzayının ilk şartı yerine getirilmiştir. İkinci şartı aşağıdaki lemma kullanılarak ispatlanır.

Lemma 4.3. $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0$ ve β_1 keyfi sabitler olsunlar. O zaman

$$y_1(0) = \alpha_0$$

$$y_2(0) = \alpha_1$$

$$[y, u_1]_\infty = \beta_0$$

$$[y, u_2]_\infty = \beta_1 \quad (4.5)$$

koşullarını sağlayan vektör değerli bir $y \in D_{max}$ vardır.

İspat. $f \in H$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir keyfi vektör olsun.

$$(f, u) = \beta_0 + \alpha_1 \quad (f, v) = \beta_0 - \alpha_1 \quad (4.6)$$

u_1 ve u_2 fonksiyonlarının lineer birleşimi olarak böyle bir f vardır. Eğer $f = c_1 u_1 + c_2 u_2$ yazarsak (4.6) koşulları c_1 ve c_2 *sabitleri için bir denklem sistemidir*. Bu sistemin determinantı u_1 ve u_2 lineer bağımsız vektörlerinin Gram determinantıdır ve dolayısıyla sıfırdan farklıdır.

$$l(y) = f(x) (0 \leq x < \infty)$$

denkleminin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü y ile gösterelim.

$$y_1(0) = \alpha_0, \quad y_2(0) = \alpha_1$$

şimdi bu y nin aradığımız vektör olduğunu gösterelim. Açıktır ki

$$U(x) = \begin{pmatrix} u_{11}(x) & u_{21}(x) \\ u_{12}(x) & u_{22}(x) \end{pmatrix}, \quad U^{-1}(x) = \begin{pmatrix} u_{22}(x) & -u_{21}(x) \\ -u_{12}(x) & u_{11}(x) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$y(x) = \alpha_0 u_1(x) + \alpha_1 u_2(x) + U(x) \int_0^x U^{-1}(\xi) J^{-1}(\xi) f(\xi) d_q \xi$$

şeklinde ifade edilebilir.

Dikkat edilirse $u_1, u_2 \in H$ olduğundan $y \in H$ aynı zamanda $y \in D_{max}$ dır.

$y(x)$ ve u_1 fonksiyonlarına q – Green formülünü uygularsak

$$(f, u_1) = (l(y), u_1) = [y, u_1]_\infty - [y, u_1]_0 + (y, l(u_1)) \text{ elde edilir.}$$

$l(u_1) = 0$ olduğundan $(y, l(u_1)) = 0$ elde edilir. $y_1(0) = \alpha_0, y_2(0) = \alpha_1$, olduğundan $[y, u_1]_0 = y_1(0)u_{12}(0) - y_2(0)u_{11}(0) = -\alpha_1$ bulunur.

Buradan

$$(f, u_1) = [y, u_1]_\infty + \alpha_1 \quad (4.7)$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7) eşitlikleri kullanılarak

$$[y, u_1]_\infty = \beta_0.$$

Benzer şekilde

$$(f, u_2) = (l(y), u_2) = [y, u_2]_\infty - [y, u_2]_0 + (y, l(u_2)) = [y, u_2]_\infty - \alpha_0 \quad (4.8)$$

dir. (4.6) ve (4.8) eşitliklerinden $[y, u_2]_\infty = \beta_1$ elde edilir. Böylece Lemma 4.3 ve dolayısıyla Teorem 4.2 ispatlanmış olur.

Teorem 4.4. $K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzölme operatörü ise $L_{\min}$ operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.9)$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (4.10)$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{\max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla $L_{\min}$ operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine $L_{\min}$ operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (4.9) ve (4.10) koşulları yardımıyla verilir. K büzölme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (4.9) ve (4.10) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa $L_{\min}$ operatörünün maksimal simetrik genişlemesini verir.

Eğer (4.9) ve (4.10) ifadesindeki K operatörü üniter olursa $L_{\min}$ operatörünün kendine eş genişlemesini verir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dirac denklemleri realist kuantum mekaniğinin temel fiziğini formüle etmesinden dolayı fizikteki en önemli denklemlerden birisidir. Anti maddenin varlığını öngörmekte ve elektron spininin bir tanımını vermektedir. Kuantum analizi kullanılarak Dirac sistemlerini incelemek ilginç ve oldukça yeni bir problemidir.

Bu tez çalışmasında, klasik Dirac sistemlemlerindeki adi türev kavramı yerine q-türev kavramı kullanılarak oluşturulan

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q}D_{q^{-1}} \\ D_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a(x) & c(x) \\ c(x) & b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

formundaki singüler q-Dirac denklemleri ele alındı. Burada λ karmaşık bir spektral parametredir ve $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $0 \leq x < \infty$ dir ve $p(\cdot)$, $r(\cdot)$, $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot)$ reel değerli sıfır noktasında q-regüler fonksiyonlardır.

$$D_{max} = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in H: \begin{matrix} y_1 \text{ ve } y_2 \text{ fonksiyonları } 0 \text{ noktasında } q - \text{regüler ve} \\ \ell(y) \in H \end{matrix} \right\},$$

$$D_{min} = \{y \in D_{max}: y_1(0) = y_2(0) = 0, \forall z \in D_{max} \text{ için } [y, z]_\infty = 0\}$$

kümeleri tanımlanarak q-Dirac denklemlerine karşılık gelen L_{min} minimal ve L_{max} maximal operatörleri oluşturuldu.

$\Gamma_1, \Gamma_2: D_{max} \rightarrow \mathbb{C}^2$ olmak üzere

$$\Gamma_1 y = \begin{pmatrix} -y_1(0) \\ [y, u_1]_\infty \end{pmatrix}, \quad \text{ve} \quad \Gamma_2 y = \begin{pmatrix} y_2(0) \\ [y, u_2]_\infty \end{pmatrix},$$

dönüşümlerini yardımıyla Weyl'in ünlü limit-çember durumunda, yani indis defektin (2,2) olduğu durumda simetrik operatörün $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ sınır değer uzayı inşa edildi. $(\mathbb{C}^2, \Gamma_1, \Gamma_2)$ sınır değer uzayı yardımıyla simetrik operatörün maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeler sınır koşulları cinsinden şu şekilde ifade edildi:

$K, \mathbb{C}^2$ uzayında büzölme operatörü ise $L_{\min}$ operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1 y + i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (5.1)$$

ve

$$(K - I)\Gamma_1 y - i(K + I)\Gamma_2 y = 0 \quad (5.2)$$

koşullarını sağlayan $y \in D_{\max}$ fonksiyonlarının kümesine kısıtlanması sırasıyla $L_{\min}$ operatörünün maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemesidir.

Tersine $L_{\min}$ operatörünün keyfi maksimal disipatif ve maksimal akretif genişlemeleri (5.1) ve (5.2) koşulları yardımıyla verilir. K büzölme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir.

Eğer (5.1) ve (5.2) ifadesindeki K operatörü izometrik olursa $L_{\min}$ operatörünün maksimal simetrik genişlemesini verir.

Eğer (5.1) ve (5.2) ifadesindeki K operatörü üniter olursa $L_{\min}$ operatörünün kendine eş genişlemesini verir.

Böylece, operatörler teorisinde önemli bir yeri olan simetrik operatörlerin genişlemeleri ile ilgili literatürde var olan sonuçlar kuantum analizin kavramları kullanılarak genişletilmiştir.

Bu çalışma

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q}D_{q^{-1}} \\ D_q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a(x) & c(x) \\ c(x) & b(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

$$0 \leq x < \infty$$

singüler q -Dirac denklemlerinin Weyl limit-nokta durumu için yani indis defektin (1,1) olduğu durumda ele alınarak araştırma daha da genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Akhiezer, N. I. ve Glazman, I. M., (1963). *Theory of linear operators in Hilbert Spaces*, New York: Frederick Ungar.
- Allahverdiev, B. P. (1995). On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potentials, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Serriya Matematicheskaya* 59, 19-54 (English translet in *Izvestiya Mathematics* 59, 45-62).
- Allahverdiev, B. P. (2013). Extensions of symmetric second-order difference. Operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations Applications* 19(5), 839-849.
- Allahverdiev, B. P. (2014). Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra*, 62(9), 1146-1152.
- Allahverdiev, B. P. (2016). Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat*, 30(6), 1475-1484.
- Allahverdiev, B. P. (2016). Spectral problems of non-self-adjoint q -Sturm–Liouville operators in limit-point case, *Kodai Mathematical Journal*, 39, 1–15.
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H. (2017). One-dimensional q -Dirac equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, 7287–7306. <https://doi.org/10.1002/mma.4529>
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H. (2018). Dissipative q -Dirac operator with general boundary conditions, *Quaestiones Mathematicae*, 41:2, 239-255.
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H. (2019). Titchmarsh-Weyl theory for q -Dirac systems, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, Vol. 22, No. 2. 1950010
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H. (2020). Dissipative q -Dirac Operator, *Palestine Journal of Mathematics*, Vol. 9(1), 200–211.
- Annaby, M. H. ve Mansour Z. S. (2011). Asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of q -Sturm-Liouville problems. *Math Nachr*, 284(4), 443-470.
- Annaby, M. H. ve Mansour, Z. S. (2012). *Q-fractional calculus and equations*. Berlin: Springer.
- Bairamogly, M. (1976). Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, *Izvestiya Akademii Nauk Azerb. SSR Serriya Fiziko-Tekhnicheskiki Matematicheskikh Nauk*. 2, 140-143.
- Birman, M.Sh., (1956). On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Mathematical*, 38, 4, 431-450.

- Gasper, G. ve Rahman, M. (2004). *Basic hypergeometric series*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Gorbachuk, M. L. ve Gorbachuk, V. I. (1984). *Boundary value problems for operator differential equations*, Kiev: Naukova Dumka.
- Jackson, F. H. (1904). A generalization of the function $\Gamma(n)$ and x_n . *Proc Roy Soc London*. 74, 64-72.
- Kac, V. ve Cheung, P. (2002). *Quantum calculus*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 10.
- Kolmogorov A. N. ve Fomin S. V. (1970) *Introductory Real Analysis*. Translated by RA Silverman. New York, NY, USA: Dover Publications, 1970.
- Krein, M. G. (1947). The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators and its applications I, *Mathematics Sbornik* 20, 431-495; II, *Mathematics Sbornik*, 21, 365-404.
- Krein, M. G. (1952). On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$, *Akademii Nauk SSSR. Serriya Matematicheskaya* 16, 292-324.
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory functional analysis with applications*, New York: John Willey and Sons.
- Levitan, B. M. ve Sargsjan, I. S. (1991). *Sturm-Liouville and Dirac operators, Mathematics and its Applications (Soviet Series)*. Kluwer Academic Publishers Group: Dordrecht.
- Naimark., M.A., 1968. Linear Differential Operators, 2nd edn., Nauka, Moscow, (English transl. of 1st. edn., 1,2, 1969, New York).
- Neumann, J. (1929). Allgemeine Eigenwer theorie Hermitischer Functional operatoren, *Mathematische Annalen* 102, 49-131.
- Polya, G. ve Alexanderson, G. L. (1971). Gaussian binomial coefficients. *Elem Math*, 26, 102-109.
- Rellich, F. (1951). Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung', *Mathematische Annalen* 122, 343-368.
- Rofe-Beketov, F. S. (1969). Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 184, 1034-1037.
- Thaller, B. (1992). The dirac equation, Berlin Heidelberg: Springer-Verlag,
- Tuna, H. (2013). Lim-3 durumundaki 4. mertebe operatörlerin dissipatif genişlemeleri, *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 2(2), 75-79.

- Tuna, H. ve Allahverdiev, B. P. (2018). Dissipative extensions of fourth order differential operators, *Thai Journal of Mathematics*, 16(1), 275-285.
- Tuna, H. ve Bayrak, S. (2018). On extensions of singular Fourth- Order Dynamic Operators on Time Scales. *Filomat*, 32(11), 3843–3851.
- Vishik, M. I., (1952). On general boundary-value problems for elliptic differential equations', Trudy Moskov. *Mathematical Obshch*, 1, 187-246.
- Weidmann, J. (1987). *Spectral theory of ordinary differential operators, lecture notes in mathematics 1258*. Berlin: Springer.



