

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**BİR BOYUTLU ISI DAĞILIM DENKLEMİ İÇİN
BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN
VE ISI İLETİM KATSAYISININ BİRLİKTE BULUNMASI**

YüksekLisansTezi

TeziHazırlayan:
Müjdat BAYER

İSTANBUL, 2016

T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**BİR BOYUTLU ISI DAĞILIM DENKLEMİ İÇİN
BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN
VE ISI İLETİM KATSAYISININ BİRLİKTE BULUNMASI**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Müjdat BAYER

Öğrenci No:

140860001

Tez Danışmanı:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2016

YEMİN METNİ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum “**Bir Boyutlu Isı Dağılım Denklemi İçin Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Çözümünün ve Isı İletim Katsayısının Birlikte Bulunması**” başlıklı bu çalışmanın; bilimsel ahlak ve geleneklere uygun şekilde tarafımdan yazıldığını, yararlandığım eserlerin tamamının kaynaklarda gösterildiğini ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde bunlara atıf yapıldığını belirtir ve bunu onurumla doğrularım. 15 / 08 / 2016

Müjdat BAYER



T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 140860001 no'lu Müjdat BAYER'in 15/08/2016 tarihinde yapılan tez savunma sınavı¹ sonucunda...55 dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında² oybirliği / oyçokluğu ile, ..kabul... kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı :Matematik Bilgisayar
Programı :Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı³ :Bir Boyutlu Isı Dağılım Denklemi İçin Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Çözümünün ve Isı İletim Katsayısının Birlikte Bulunması

Tez Sınav Jürisi

Öğretim Üyesi

İmza

Danışman : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Üye : Prof. Dr. İhsan ÜNVER
Üye : Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL



¹ Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

² Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında “kabul”, “düzeltme” veya “red” kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

³ İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV ve kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

Bu çalışmanın tüm safhalarında beni devamlı motive eden değerli kızım HevinBAYER'e sevgilerimi sunarım. Ayrıca bu süreçte bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım kıymetli arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

İstanbul, 2016

Müjdat BAYER

Adı ve Soyadı : Müjdat BAYER
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Türü ve Tarihi : Yüksek Lisans / Tez, 2016
Alanı : Uygulamalı Matematik
Anahtar Kelimeler : Ters Problem, Isı Dağılım Denklemi, İç Isı İletim Katsayısı

Z

BİR BOYUTLU ISI DAĞILIM DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN VE ISI İLETİM KATSAYISININ BİRLİKTE BULUNMASI

Tezde ikinci basamaktan kuzai lineer parabolik tür denklemler için yazılmış başlangıç sınır değer problemi için ters problem incelenmiştir.

nce göz önüne aldığımız problemin gerçek çözümünün özellikleri incelenmiştir. Gerçek çözümün diferansiyellenme özellikleri dikkate alınarak yardımcı problem önerilmiőtir.

Önerilen yardımcı problemin esas problemde bulunmayan avantajları kullanılarak esas problemin numerik çözümünü elde etmek için etkin algoritmalar önerilmiőtir. Gerçek zm birinci tür süreksizliğe sahip olduğu takdirde 2.tür yardımcı problem önerilir.

Önerilen yardımcı problemler esas problemin genelleőtirilmiş fonksiyonlar sınıfından sayısal çözümlerinin bulunmasına ve incelenmesine imkn verir.

Yazılmış algoritmalar üzerinde birok bilgisayar testleri yapılmıőtir.

Adı ve Soyadı : Müjdat BAYER
Danışmanı : Prof. Dr. Mahir RESULOV
Türü ve Tarihi : Master / 2016
Alanı : Applied Mathematics
Anahtar Kelimeler : Inverse Problem, Heat Distribution Equation, Interior Heat Conduction Coefficient

ABSTRACT

SIMULTANEOUS FINDING SOLUTION AND INTERIOR HEAT CONDUCTION COEFFICIENT OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE DIMENSIONAL HEAT EQUATION

The inverse problems were investigated, for the initial boundary value problems, for from these second quasilinear parabolic type equations written.

Properties of real solutions to the problems we consider first examined. Help problem considering the differential properties of real solutions have been proposed.

Recommended of the help problem using the without advantage in the main problem have been proposed efficient algorithms to achieve the main problem of the numerical solution. 2. type help problem recommended, if the real solution with of the first type discontinuity.

Recommended help problems finding the main problem of the numerical solution to the class of generalized functions and enable the examination.

Many computer test were performed on written algorithms.

İÇİNDEKİLER

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
GİRİŞ	1
1. İKİNCİ BASAMAKTAN KUAZİ LİNEER PARABOLİK DENKLEMLERİN BAZIÖZELLİKLERİ	2
1.1.Bir Boyutlu Isı İletim Denkleminde Fourier Yöntemi	4
1.2.Sonlu Farklar Yönteminin Uygulanması.....	11
1.2.1 Uzlaşma, Kararlılık ve Yakınsaklık	14
2. TERS PROBLEM	19
2.1.İyi Konumlandırılmış(Well-Posed) Problemi.....	20
2.2.Nümerik Çözüm Yöntemi	26
3. SONUÇLAR	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	32

GİRİŞ

Mühendisliğin bir çok problemlerinde problemi ifade edebilen matematiksel problemin çözümü ile birlikte, probleme dahil olan bir veya birkaç parametrelerin bulunması da talep olunur.

Genelde hidrodinamiğin problemlerinden olan tabakalı ortamda petrolün su ile sıkıştırılıp çıkarılması sürecinde zamanın ilerleyen değerlerinde basınç veya su ile doyma fonksiyonları ile birlikte tabakalı ortamın geçirgenliği, faz geçirgenliği vs gibi parametrelerin bulunması da talep olunur. Bu tür problemlere ters problemler denir.

Ters problemler artık tıpta, seysmik araştırmalarda vs gibi çok önemli yerlerde uygulanmaktadır. Geriye yansıyan dalga değerlerine göre ortamın yapısının incelenmesi de bu problemlere örnek olabilir.

Bu tezde basitlik için ikinci basamaktan kuazilineer parabolik tür denklem için ters problem incelenecektir.

Önce lineer denklemi için düz problem çözülür.

1. İKİNCİ BASAMAKTAN KUAZİLİNEER PARABOLİK DENKLEMİN BAZI ÖZELLİKLERİ

$R_t^2 = R_0^l \times R^t = \{(x, t) | x \in [0, \ell], t \in R^t = [0, \infty)\}$ olsun. R_t^2 da aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(v) \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right), \quad (1.1)$$

$$v(x, 0) = 0, \quad (1.2)$$

$$v(0, t) = 0, \quad (1.3)$$

$$k(l) \frac{\partial v(l, t)}{\partial x} = \mu(t) \quad (1.4)$$

göz önüne alalım.

(1.1) – (1.4) problemi mühendisliğin bir çok problemlerinde, örneğin ısı dağılımı, filtrasyon teorisi, difüzyon olayları v.b. gibi geniş alanlarda, kullanılmaktadır, [1].

Burada $v(x, t)$ sıcaklık, $k(v)$ ısı geçirgenliği, $k(l) \frac{\partial v(l, t)}{\partial x}$ ısı akışını, x - yer değişkeni, t - ise zaman değişkenini göstermektedir. Ayrıca $\mu(t)$ sınırlı ölçülebilen fonksiyon olmaktadır. Varsayalım ki, $k(v)$ ve $\mu(t)$ fonksiyonları verilmiş fonksiyonlardır.

Bu veriler çerçevesinde $v(x, t)$ fonksiyonunun bulunması problemine ısı dağılım denklemi için düz problem denir.

Görüldüğü gibi $k(v)$ fonksiyonu, yani ısı geçirgenlik katsayısı $v(x, t)$ sıcaklığına bağlı olmaktadır, zaman ve yer değişkeni bazı değerlerinde ısıнын dağıldığı ortamın fiziksel özellikleri değişebilir. Bu tür problem orman yangınlarında, genellikle yüksek sıcaklı ortamlarda rastlanmaktadır [1], [2]. Bunun yanı sıra petrolün tabakalı ortamlarından çıkarılması problemlerinde de zaman büyük değerlerinde (yıllarla ölçülebilen) yatağın basıncının azalması sonucu, geçirgenlik katsayısı değişebilir (petrol yatakları esnek, plastik ortam olduğu için).

Böyle durumlarda $v(x, t)$ çözümü ile birlikte $k(v)$ fonksiyonunun bulunması da talep olunur. Bu tür problemlere ters problemler denir. Bunun için ekstra bir koşulun verilmesi gerekir. Söz konusu koşulu

$$v(l, t) = v(t) \quad (1.5)$$

şeklinde verelim. Burada $v(t)$ bilinen fonksiyondur. Sadelik için önce $k = k(x)$ olan durumu inceleyelim.

Şimdi $t > 0$ için $\mu(t)$ ve $v(t)$ fonksiyonları verilsin ve $k(x)$ fonksiyonunu bulalım. Varsayalım ki, $k(x)$ fonksiyonu parçalı sabittir, yani

$$k(x) = k_i, x_i \leq x \leq x_{i+1}, x_1 = 0,$$

$$x_{n+1} = l \text{ ve } 0 < C_0 \leq k_i \leq C_1, 1 \leq i \leq n$$

olmaktadır. $C_0 > 0$ olması (1.1) denkleminin degenere olmadığını, diğer deyimle denklemin parabolik tür denklem olduğunu göstermektedir.

$x_i, i = \overline{1, n+1}$ noktaları $k(x)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktaları gösterir.

$n = 1$ durumu için, yani $k(x), [0, l]$ sürekli fonksiyon olduğu durumunda (1.1) – (1.4) için düz problem, tezin birinci kısmında verilmiştir.

Ayrıca literatürden de bilindiği üzere (1.1) – (1.4) problemi korekt problemidir. Yani, problemin tek bir çözümü vardır ve bu çözümü başlangıç verilerden sürekli bağımlıdır, [3].

Bilindiği üzere [4], (1.1) – (1.5) ters probleminin çözümü tek değil, yani bu problem korekt değil.

Gerçektende, verilen $\{\mu(t), v(t)\}$ fonksiyonlarının küçük değişimine $C(0, \infty)$ normuna göre $k(x)$ ' in değişimi yeteri kadar büyük olabilir. Diğer deyimle söz konusu problemin tek çözümü olmayabilir. Eğer varsayarsak ki, başlangıç veriler $t > 0$ tanımlıdır ve ayrıca $t > T$ değerleri için (T- herhangi bir pozitif sabit) $f(t) = 0$ olduğunu kabul edersek, açıktır ki, $v(x, t)$ $t > T$ bölgesinde analitik fonksiyondur.

$\{\mu(t), v(t)\}$ verileri $[0, T + \varepsilon)$ (ε - yeteri kadar küçük pozitif bir sayı) bölgesinde tanımlı olduğundan $t > 0$ için veriler tek olarak bulunur. Böylelikle, eğer $t > T$ için $f(t) = 0$ ise ters problemin teklik teoreminin şartları bozulur, eğer verilen $t \in [0, T + \varepsilon)$ aralığında tanımlı ise.

1.1. Bir Boyutlu Isı İletim Denkleminde Fourier Yöntemi

ox ekseni yönünde yerleştirilen ve yüzeyi izole edilmiş bu çubuk boyunca zamana bağlı ısı dağılımı ile ilgilenelim. Çubuk homojen olduğundan, onun x apsisi kesitinin keyfi t anında tüm noktalarında aynı ısıya sahip olduğu dikkate alınırsa, ısı dağılım fonksiyonu, yani $u(x, t)$ olarak ifade edilebilir, [3].

Uzunluğu ℓ olan homojen çubukta ısı dağılımını modelleyen aşağıdaki problem göz önüne alalım

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), (1.6)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, (1.7)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), (1.8)$$

(1.6) denklemindeki $f(x, t)$ serbest terimi dahili ısı kaynaklarını belirlemektedir; a ise çubuğun ısı geçirgenliği ile ilgili bir sabittir. (1.8) deki $\varphi(x)$ fonksiyonu çubuğun başlangıç ısını göstermektedir. (1.7) sınır şartları ise, incelemenin keyfi t anında çubuğun uçlarındaki ısı miktarının sıfır olduğunu ifade etmektedir.

Öncelikle, (1.8) denkleme karşılık gelen homojen denklemi, yani $f(x, t) = 0$ olduğu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (1.9)$$

denklemini ele alalım. (1.9) denkleminin çözümünü

$$u(x, t) = T(t)y(x) (1.10)$$

biçiminde arayalım. (1.10) ifadesinin gerekli türevleri alınıp (1.6) da yerine yazılırsa

$$T'(t)y(x) = a^2 T(t)y''(x) \quad (1.11)$$

alırız. (1.11) yı kullanarak (1.9) denklemini aşağıdaki gibi iki adi diferansiyel denkleme parçalayabiliriz

$$y''(x) + \lambda y = 0, \quad (1.12)$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad (1.13)$$

(1.7) ve (1.8) sınır koşullarını da sırasıyla

$$u(0, t) = T(t)y(0) = 0, \quad u(\ell, t) = T(t)y(\ell) = 0$$

veya

$$y(0) = 0, \quad y(\ell) = 0 \quad (1.14)$$

şeklinde yazabiliriz. Böylece problemimiz, (1.12) denkleminin (1.14) sınır koşullarını sağlayan trivial olmayan çözümlerini bulmaya, yani

$$y''(x) + \lambda y = 0,$$

$$y(0) = 0,$$

$$y(\ell) = 0$$

Sturm-Liouville problemine dönüşür.

Şimdi, bu problemin trivial olmayan çözümlerinin λ nın hangi değerleri için mevcut olacağını araştıralım.

I. Öncelikle, $\lambda = 0$ durumunda $y(x) = c_1 x + c_2$ dir. (1.14) sınır koşullarını kullanarak $c_1 = c_2 = 0$ bulunur, yani $y \equiv 0$ olur.

II. $\lambda < 0$ olduğu durumda (1.12) denkleme karşılık gelen $k^2 + \lambda = 0$ karakteristik denkleminde $k_{1,2} = \pm \sqrt{-\lambda}$ bulunur. Bulunan bu sayılar yerine yazıldığında genel çözüm

$$y = c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

şeklinde ifade edilir. Yine, (1.14) sınır koşullarını kullanırsak,

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 e^{\sqrt{-\lambda}\ell} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} = 0 \end{cases}$$

veya

$$c_1 = -c_2, \quad c_1 (e^{-\sqrt{-\lambda}\ell} - e^{\sqrt{-\lambda}\ell}) = 0$$

elde ederiz. Reel λ lar için $e^{\sqrt{-\lambda}\ell} \neq e^{-\sqrt{-\lambda}\ell}$ olup, buradan $c_1 = 0, \quad c_2 = 0$ bulunur. Bu ise $y \equiv 0$ anlamına gelir.

III. $\lambda > 0$ olduğu durumda (1.12) denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 \sin \sqrt{\lambda} x + c_2 \cos \sqrt{\lambda} x$$

olur. (1.14) sınır koşullarını kullanırsak $c_2 = 0$ ve $c_1 \sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$ bulunur.

$c_1 = 0$ olamayacağı için $\sin \sqrt{\lambda} \ell = 0$ olmalıdır.

Buradan, $\sqrt{\lambda} \ell = \pi n, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$, veya

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.15)$$

elde edilir. λ_n lere (1.12), (1.14) probleminin özdeğerleri denir. λ_n değerleri yerine yazılırsa

$$y_n(x) = c_1 e^{\frac{n\pi i}{\ell}} + c_2 e^{-\frac{n\pi i}{\ell}} = c_1 \left(e^{\frac{n\pi i}{\ell}} - e^{-\frac{n\pi i}{\ell}} \right) = 2c_1 i \sin \frac{n\pi i}{\ell}$$

elde edilir. $y_n(x) = 2c_1 i \sin \frac{n\pi x}{\ell}$ ifadesindeki c_1 sabitini,

$$\int_0^\ell y_n^2(x) dx = 1 \quad (1.16)$$

olacak şekilde seçelim. Bu koşula, öz fonksiyonların normleştirilme şartı denir. Bu şarta göre,

$$\begin{aligned}
-4c_1^2 \int_0^\ell \sin^2 \frac{\pi n x}{\ell} dx &= \frac{-4}{2} c_1^2 \int_0^\ell \left(1 - \cos \frac{2\pi n x}{\ell}\right) dx = -2c_1^2 \left[\int_0^\ell dx - \int_0^\ell \cos \frac{2\pi n}{\ell} x dx \right] \\
&= -2c_1^2 \left[\ell - \frac{1}{2\pi n} \sin \frac{2\pi n x}{\ell} \Big|_0^\ell \right] = -2c_1^2 \ell = 1
\end{aligned}$$

olup, $c_1^2 = -\frac{1}{2L}$ veya $c_1 = \frac{i}{\sqrt{2L}}$ olarak bulunur.

$$y_n(x) = \sin \frac{\pi n}{\ell} x \quad (1.17)$$

fonksiyonlarına (1.12), (1.14) denkleminin λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları denir. (1.15) da ifade edilen özdeğerler (1.13) de yerine konulursa,

$$T_n(t) = B_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{\ell^2} t} \quad (1.18)$$

bulunur. Burada B_n ler bilinmeyen sabitlerdir.

Şimdi, (1.17) ile (1.18) ü kullanarak (1.7), (1.8), (1.9) probleminin çözümünü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} e^{-\frac{n^2 \pi^2 a^2}{\ell^2} t} \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx \quad (1.19)$$

formunda ifade edebiliriz. Böylece (1.19) ifadesinden faydalanarak homojen olmayan (1.6)-(1.8) probleminin genel çözümü bulunur. Ayrıca, (1.19) ifadesinin içerdiği

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

sabitleri $\varphi(x)$ fonksiyonunun Fourier seri açılımından bulunabilir.

Şimdi, $\varphi(x)$ fonksiyonunun $\sin \frac{n\pi x}{\ell}$ fonksiyonlarına göre Fourier seri açılımını

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (1.20)$$

formunda yazalım. Burada,

$$\varphi_n = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

dır. (1.19) ifadesinin (1.8) koşulunu gerçeklemesi ve (1.20) ifadesi dikkate alınırsa,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} \int_0^\ell \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

olur. Böylelikle, (1.6) – (1.8) probleminin çözümü elde edilir.

Şimdi, $f(x, t) \neq 0$ durumunu göz önüne alalım. Fourier serileri konusundaki temel kavramlara dayanarak, (1.6) – (1.8) probleminin çözümünü $y_n(x)$ fonksiyonlarına göre

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (1.21)$$

seri şeklinde arayalım. Burada, $u_n(t)$ ler şimdilik belli olmayan Fourier katsayılarıdır. $f(x, t)$ fonksiyonunun

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (1.22)$$

Fourier serisine açılabilildiğini varsayalım. Burada,

$$f_n(t) = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell f(x, t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

olmaktadır. Şimdi, (1.21) ve (1.22) ifadelerini formal olarak (1.6) de yerine yazarsak,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell} = -a^2 \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

veya

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u'_n(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 u_n - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} = 0 \quad (1.23)$$

buluruz. Buradan,

$$u'_n(t) + \left(a \frac{n\pi}{\ell}\right)^2 u_n(t) = f_n(t) \quad (1.24)$$

elde ederiz. Diğer taraftan, (1.21) ifadesi (1.8) koşulunda yerine konulursa

$$u_n(0) = \varphi_n \quad (1.25)$$

bulunur. (1.24), (1.25) probleminin çözümünü ise kolayca elde ederiz. Bunun için öncelikle,

$$u'_n(t) = -\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 u_n(t)$$

homojen denkleminin çözümünü

$$u_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$$

olarak elde edip, bunu kullanarak homojen olmayan (1.24) denkleminin çözümünü

$$u_n(t) = c_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \quad (1.26)$$

biçiminde buluruz. (1.21) koşulundan $c_n = \varphi_n$ olur.

Nihayet, (1.6) – (1.8) probleminin çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (1.27)$$

şeklinde elde edilir.

$\varphi(x)$ fonksiyonunun birinci mertebeden parçalı sürekli türevlere sahip olduğu ve $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$ koşulunu sağladığı varsayılırsa, bu koşullar çerçevesinde

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (1.28)$$

fonksiyonunun (1.6) e karşılık gelen homojen denklemin (1.7), (1.8) koşullarını gerçekleyen çözümü olduğu gösterilebilir. $t > 0$ olduğu durumda (1.28) ün homojen denklemi sağladığını ispatlamak için bu serinin t ye göre bir defa, x e göre iki defa diferansiyellenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. Bu seri zaten t ye ve x e göre keyfi defa diferansiyellenebilir. Çünkü, $e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 t}$ çarpanı $t \rightarrow \infty$ olduğunda hızla sıfıra yaklaşmaktadır. Seriyi diferansiyellerken ortaya çıkan n^k gibi çarpanlar, sıfıra yakınsamayı engellemezler.

Homojen parabolik tür denklemin çözümünün sonsuz defa diferansiyellenebilir olmasından, Cauchy probleminin çözümünü elde ederken de bahsetmiştik. $t > 0$ olduğu durumda, $x \rightarrow 0$ ve $x \rightarrow \ell$ için (1.28) de limit alma işlemleri de geçerli olmaktadır ve (1.7) koşulu da korunmaktadır. (1.8) koşulunun korunması için,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

olmalıdır. Bu ise, $\varphi(x)$ 'in Fourier serisinin kendisine yakınsak olması demektir. Zaten, $\varphi(x)$ fonksiyonu için kabul ettiğimiz şartla söz konusu yakınsaklık temin edilmektedir.

Eğer $f(x, t)$ fonksiyonu sürekliyse, $f(0, t) = f(\ell, t) = 0$ koşulları gerçekleşirse ve ayrıca $f_x(x, t)$ türevleri parçalı sürekliyse gösterilebilir ki,

$$u_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^t e^{-\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)} f_n(\tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

fonksiyonu (1.6) ve (1.7) yi sağlamaktadır ve $t = 0$ durumunda $u_2(x, 0) = 0$ dır.

Böylelikle, yukarıdaki koşullar çerçevesinde (1.27) formülü ile bulunan çözüm, (1.6)-(1.8) probleminin çözümü olmaktadır.

Örnek 1. Yan yüzlerinden ve uç noktalarından izole edilmiş, uzunluğu ℓ çubuğun başlangıç sıcaklığı

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < \ell/2, \\ \ell - x, & \ell/2 \leq x \leq \ell \end{cases}$$

ise, çubuğun $t > 0$ anında keyfi noktasındaki sıcaklığı bulunuz.

Çözüm. Uzunluğu ℓ ve $a^2 = 1$ olan çubuğun ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

olup, problemin verilerine göre $u(x, t)|_{t=0} = \varphi(x)$ ve $u(x, 0) = 0$, $u(t, \ell) = 0$ olur. (1.19) formülüne göre

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{\ell^2}\right)t} \int_0^{\ell} \varphi(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

ise,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\ell} e^{-\left(\frac{n^2 \pi^2 a^2}{\ell^2}\right)t} \left[\int_0^{\ell} \varphi'(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} + \frac{n\pi}{\ell} \cdot \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \right]$$

dir.

1.2. Sonlu Farklar Yönteminin Uygulanması

Bilindiği üzere (1.6) – (1.8) probleminin genelde gerçek çözümünü elde etmek belli bir zorluklarla karşılaşır veya gerçek çözümü bulmak imkansız olur. Böyle durumlarda tek çıkış yolu nümerik yöntemlerin kullanılmasıdır.

Geniş yaygın olan nümerik yöntemlerden birisi sonlu farklar yöntemidir. Fakat, herhangi bir sonlu farklar yöntemini kullanmadan önce diferansiyel problemin çözümünün özelliklerini incelemek gerekir. Çünkü, bazı durumda çözümün diferansiyellenebilme özellikleri denklemin çözümünden talep ettiği mertebeden düşük olabilir. Bu özellik ise söz konusu probleme herhangi bir sayısal yöntemin uygulanmasına zorluk çıkarır.

Ayrıca, denklemi sonlu farklara ayırlaştırdığımızda sonlu farklar şeması diferansiyel denklem ile ne kadar uzlaşır problemini de incelemek gerekmektedir. Bu amaçla sonlu farklar şemalarının uzlaşması ve dayanıklılık problemlerini de incelemek gerekmektedir.

Bu bölümde kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sonlu farklar karşılıklarını irdedeceğiz. Stasyoner olmayan süreçleri ifade edebilen kısmi türevli diferansiyel denklemlerde değişkenlerden birini zaman değişkeni oluşturmaktadır. Bu değişkeni özel olarak t ile gösterelim. Zamana göre değişmez kalan süreçlere “stasyoner” süreçler denir. Zamana göre değişken süreçlere ise “stasyoner olmayan” süreçler denir. Şimdi $D_t = \{[a, b] \times [0, T)\}$ bölgesinde yazılmış

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.29)$$

lineer ısı denklemini gözönüne alalım, burada α bilinen pozitif sabit olmaktadır. D_t bölgesini

$$\Omega_{h_x h_t} = \{(x_i, t_k), x_i = \alpha + i h_x, t_k = k h_t, h_x > 0, i = 0, 1, \dots, n, k = 0, 1, 2, \dots\}$$

ağı ile örtelim. $t = t_k$ doğrularına zaman katları denir.

(1.29) denklemini oluşturan $\frac{\partial u}{\partial t}$ türevini ileri, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ türevini ise merkezi sonlu farklara ayrıklaştırırsak,

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{h_t} = \frac{\alpha}{h_x^2} (U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}) \quad (1.30)$$

elde ederiz.

Böylelikle (1.29) denklemini (1.30) cebirsel denklemler sistemine dönüştürmüş oluruz. Elde edilen cebirsel denklemler sisteminin özelliğini, (1.29) denklemini oluşturan diferansiyel operatörün yapısı ve denklemin hangi şablonda sonlu farklara ayrıklaştırıldığı belirler. Burada, $U_{i,k}$ ağ fonksiyonu $u(x, t)$ fonksiyonun (x_i, t_k) noktasındaki yaklaşık değerini göstermektedir. Görüldüğü gibi, (1.30) cebirsel denklemler sisteminden bilinmeyen

$$U_{i,k+1} = (U_{1,k+1}, U_{2,k+1}, U_{3,k+1}, \dots, U_{n-1,k+1})$$

ağ fonksiyonunu, çözümün $t = t_k$ katındaki değerlerine göre

$$U_{i,k+1} = U_{i,k} + \alpha \frac{h_t}{h_x^2} (U_{i+1,k} - 2U_{i,k} + U_{i-1,k}), \quad (1.31)$$

$$(i = 0, 1, 2, \dots, n-1), (k = 0, 1, 2, \dots)$$

olarak açık şekilde bulabiliriz. Söz konusu cebirsel denklemler sisteminin her bir denkleminde bir tane bilinmeyen bulunmaktadır. (1.30) sonlu fark karşılığına “açık” sonlu fark karşılığı veya açık şema denir. (1.29) lineer ısı denklemi olduğundan, başlangıç verileri kullanılarak (1.30) formülü ile bilinmeyen $U_{i,k+1}$ ağ fonksiyonlarını elde ederiz.

Şimdi de (1.29) denklemini aşağıdaki gibi sonlu farklara

$$\frac{U_{i,k+1}-U_{i,k}}{h_t} = \frac{\alpha}{h_x^2} (U_{i+1,k+1} - 2U_{i,k+1} + U_{i-1,k+1}) \quad (1.32)$$

ayrıklaştıralım. (1.32) cebirsel denklemler sistemini

$$a_i U_{i+1,k+1} - b_i U_{i,k+1} + c_i U_{i-1,k+1} = f_i \quad (1.33)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$a_i = c_i = \alpha \frac{h_t}{h_x^2}, \quad b_i = \left(1 + 2 \frac{h_t}{h_x^2}\right), \quad f_i = -U_{i,k}$$

olmaktadır.

(1.33) dan görüldüğü gibi cebirsel denklemler sisteminin her bir denkleminde üç tane bilinmeyen olmaktadır ve söz konusu bilinmeyenleri elde etmek için bir yöntem uygulanmak zorundadır. (1.32) cinsinden olan sonlu fark karşılığına “kapalı” sonlu fark karşılığı denir.

Şimdi (1.29) denklemini sonlu farklara ayrıklaştırdığımızdaki hataları hesaplayalım. Bu hatalara kesme hataları da denir.

Önce açık şemanın hatasını bulalım. Bu amaçla (1.30) sistemine dâhil olan $U_{i,k+1} = U(x_i, t_k + h_t)$ ve $U_{i\pm 1,k} = U(x_i \pm h_x, t_k)$ fonksiyonlarını Taylor serisine ayrıklaştırmak ve alınan ifadeleri (1.30) da yerine yazarsak

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} - \left\{ \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k}}{h_t} - \frac{\alpha}{h_x^2} (U_{i-1,k} - 2U_{i,k} + U_{i+1,k}) \right\} \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Big|_{(i,k)} \frac{h_t}{2} + \alpha \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{(i,k)} \frac{h_x^2}{12} + \end{aligned}$$

... (1.34)

olur. Elde edilen son eşitliği şematik olarak ifade edebiliriz.

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{Kesme} \\ \text{Hatası} \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{Diferansiyel} \\ \text{Denklem} \end{array}} - \boxed{\begin{array}{c} \text{Sonlu Fark} \\ \text{Karşılığı} \end{array}}$$

Şekil 1

Burada 1. ve 2. parantezler sırasıyla verilmiş diferansiyel denklemi ve onun sonlu fark karşılığını, eşitliğin sağ tarafındaki ifade ise kesme veya ayırıklaştırma hatasını göstermektedir. (1.34) denklemindeki ayırıklaştırma hatasını şematik olarak Şekil 1 de gösterildiği gibi ifade edebiliriz.

Görüldüğü gibi kesme hatasını bulurken uygun fonksiyonların Taylor serilerinin ilk terimlerini kullandık. Bu nedenle (1.34) deki hata teriminin derecesi $O(h_t, h_x^2)$ mertebeden olmaktadır. Eğer, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ve $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ sınırlı fonksiyonlar ise ağın adımları sıfıra yaklaştığında hata terimi de sıfıra yaklaşır. Açık olmayan şemalar için de kesme hatası benzer yolla hesaplanabilir.

Diferansiyel denklemleri sonlu farklara ayırıklaştırdığımızda kesme hatasının yeteri kadar küçük olduğunu varsayabiliriz. Bu ilk bakışta hiçbir sorun yaratmamaktadır. Fakat kesme hatasının küçük olması için hangi koşulların gerektiğini incelemek zorunluluğu ortaya çıkar. Bu sorulara cevap vermek için aşağıdaki kavramları inceleyelim.

1.2.1 Uzlaşma, Kararlılık ve Yakınsaklık

Kısmi türevli diferansiyel denklemlere yaklaşan sonlu fark karşılığına uzlaşan şema denir. Yukarıdaki bölümde görüldüğü gibi, diferansiyel denklem ile onun sonlu fark karşılığı arasındaki fark yakınsaklık hatasını oluşturur. Sonlu fark karşılığının uzlaşabilen olması için ağın adımları sıfıra yaklaştığı takdirde yakınsaklık hatasının sıfıra yaklaşması gerekmektedir. Eğer ayırıklaşma hatası $O(h_t)$, $O(h_x)$ mertebedense, sonlu fark karşılığı uzlaşan olur. Yakınsaklık hatası $O(\frac{h_t}{h_x})$ mertebeden olduğu takdirde sonlu farklar karşılığının uzlaşabilen olması için ağın adımlarının sıfıra yaklaşması ile birlikte $\frac{h_t}{h_x} \rightarrow 0$ olması da gerekmektedir, [4].

Yukarıda söylediklerimizi detaylı şekilde göstermek için Dufort ve Frankel tarafından ısı dağılım denklemi için önerilmiş

$$\frac{U_{i,k+1} - U_{i,k-1}}{2h_t} = \alpha \frac{U_{i+1,k} - U_{i,k+1} - U_{i,k-1} + U_{i-1,k}}{h_x^2} \quad (1.35)$$

sonlu fark karşılığını gözönüne alalım. (1.35) sonlu fark karşılığı (1.31) şemasında $2U_{i,k}$ nın yerine $U_{i,k+1} + U_{i,k-1}$ ifadesinin yazılmasıyla elde edilmiştir. (1.35) sonlu farklar karşılığının ayrıklaştırma hatası

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i,k+1} - U_{i,k-1}}{2h_t} - \alpha \frac{U_{i+1,k} - U_{i,k+1} - U_{i,k-1} + U_{i-1,k}}{h_x^2} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) |_{(i,k)} + \alpha \left(\frac{h_t}{h_x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + |_{(i,k)} + \\ & O(h_t^2 + h_x^2) + O\left(\frac{h_t^2}{h_x^2}\right) \end{aligned} \quad (1.36)$$



Şekil 2

olmaktadır. Şemanın uzlaşabilen olması için $h_x, h_t \rightarrow 0$ koşulunun yanı sıra $\frac{h_t}{h_x} \rightarrow 0$ koşulunun korunması da gerekmektedir. Eğer $\frac{h_t}{h_x} \rightarrow \beta$ olursa, (β – sabit sayıdır) (1.36) sonlu fark karşılığı ısı denklemiyle değil

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

denklemleriyle uzlaşır.

Stasyonier problemlerin çözüm yöntemlerinden farklı olarak stasyonier olmayan problemlerin çözümünü elde etme sürecinde herhangi bir zaman katından diğer zaman katına geçerken belli bir hata ortaya çıkar. Bu açıdan herbir zaman katında elde edilmiş çözümün

kararlılığını ciddi şekilde kontrol etmek gerekir.

Eğer zaman değişkenine göre olan herhangi bir hata (yuvarlama hatası, ayırıklaştırma hatası vs.) bir zaman katından diğerine geçerken artmazsa, bu tür şemaya kararlı veya dayanıklı şema denir.

Sonlu fark karşılığının kararlılığını sağlamak, onun uzlaşan olmasını sağlamaktan daha zordur ve daha titiz araştırmalar talep eder. Şemanın uzlaşan olduğunu kontrol etmek çok da zor değildir. Gerçekten de, yazılan sonlu fark karşılıkları gözönüne alınan denklemi ayırıklaştırdığından bir kural olarak uzlaşma koşulu otomatik sağlanır. Şemanın dayanıklılığı ise daha hassas özellik olduğundan onu ciddi teorik yolla ispatlamak gerekmektedir.

Sonlu fark karşılığının kararlılığının tanımını vermeden önce stasyoner olmayan problemi gözönüne alalım. Problemin başlangıç verilerinin k . katta verildiğini ve problemin çözümünün $(k + 1)$. katta bulunmasının talep edildiğini varsayalım. Eğer, verilmiş diferansiyel problemin sonlu fark karşılığını ifade eden operatörü bir “kara kutu” gibi yorumlarsak söylediklerimizi formel olarak Şekil 2 de gösterildiği gibi ifade edebiliriz. Böyle olduğu takdirde kararlılık teorisi, sonlu fark operatörünün k . kattaki verilerin $(k + 1)$. kata geçtiğinde nasıl değiştiğini inceleyen metotlardan oluşur.

Sonlu fark karşılığının dayanıklılığını incelemek için formel olarak aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

$D \in \mathbb{R}^n$ Euclid uzayında sınırlı bir bölgeyi, ∂D ile sözkonusu bölgenin sınırını gösterelim. D bölgesi ve ∂D sınırında uygun olarak L ve ℓ_j ($0 \leq j \leq v$) diferansiyel operatörlerinin verildiğini varsayalım. Ayrıcı f ve g_j , ($0 \leq j \leq v$) sırasıyla F ve G_j uzaylarında tanımlı fonksiyonlar olsun. Burada F uzayı D de G_j ise ∂D_j üzerinde kurulmuş fonksiyonel uzaylar olmaktadır.

D üzerinde kurulmuş uzayın herhangi bir elemanı için

$$Lu = f, \quad (1.37)$$

$$\ell_j u = g_j, \quad 0 \leq j \leq v \quad (1.38)$$

problemini koruyan u fonksiyonunun bulunmasına diferansiyel problem denir.

O halde (1.37),(1.38) problemini vektörel şekilde

$$\Re u = \Phi \quad (1.39)$$

yazalım. Burada,

$$\Re u = \begin{cases} Lu, & D \text{ de} \\ \ell_j u, & \partial D \text{ de} \end{cases}$$

ve

$$\Phi = \begin{cases} f, \\ g_j \end{cases}$$

olmaktadır.

Stasyoner olmayan problemleri incelerken Banach uzayının bazı kavramlarını kullanarak problemi somut şekilde yazalım. Bile Banach uzayını gösterelim ve B de aşağıdaki problemi

$$\frac{du(t)}{dt} = Lu(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(0) = u_0$$

gözönüne alalım. Burada, $u(t)$ bir parametreye bağlı fonksiyon ailesi, L bir lineer diferansiyel operatör, u_0 ise sistemin başlangıç durumunu göstermektedir.

$$L_{h_x h_t} U_{h_x h_t} = \Phi_{h_x h_t} \quad (1.40)$$

ifadesinin (1.39) probleminin $\Phi_{h_x h_t}$ ağındaki sonlu farklar karşılığı olduğunu varsayalım. Sonlu farklar karşılıklarının kurulması kendi başına bir problem olmaktadır. Şimdilik burada formel sonlu fark karşılığı kastedilmektedir. Genel olarak, (1.39) eşitliğini net olarak koruyan $[u]_{h_x h_t}$ ağ fonksiyonunu seçmek mümkün olmamaktadır. Söz konusu $[u]_{h_x h_t}$ ağ fonksiyonunu (1.39) de yerine yazarsak

$$L_{h_x h_t}[u]_{h_x h_t} = \Phi_{h_x h_t} + \delta\Phi_{h_x h_t} \quad (1.41)$$

denklemini elde ederiz.

Eğer $h_x, h_t \rightarrow 0$ iken $\delta\Phi_{h_x h_t} \rightarrow 0$ ise $L_{h_x h_t}$ fark operatörü L diferansiyel operatörüne yaklaşır. Bu takdirde $[u]_{h_x h_t}$ ağ fonksiyonun koruduğu (1.41) denklemi (1.39) denkleminde $\Phi_{h_x h_t}$ fonksiyonunun üzerine $\delta\Phi_{h_x h_t}$ küçük değişmesini eklemekle elde edilmektedir.

Böylelikle, (1.30) probleminin $u_{h_x h_t}$ çözümü $\Phi_{h_x h_t}$ fonksiyonunun herhangi bir küçük değişmesine göre dayanıklı kalırsa ve $h_x, h_t \rightarrow 0$ iken $\delta\Phi_{h_x h_t} \rightarrow 0$ oluyorsa $u_{h_x h_t}$ fonksiyonu da $[u]_{h_x h_t}$ fonksiyonuna yaklaşır, yani $U_{h_x h_t}$ yaklaşık çözümü $[u]_{h_x h_t}$ gerçek çözümüne yaklaşır. Böylece $U_{h_x h_t} \rightarrow [u]_{h_x h_t}$ olur.

Sonlu farklar karşılıklarının uzlaşması, kararlılığı ve yaklaşık çözümün gerçek çözüme yakınsaklı, göz önüne alınan herhangi bir problem için ayrıca incelenmelidir. Sonlu farklar yöntemi ters problemler için de uygulanabilir.

2. TERS PROBLEM

Yine de sadelik için (1.1) – (1.4) problemin yerine daha basit problemi inceleyelim. Burada amaç ters problemler nasıl çözülür ve uygulanan yöntemlerden birinin incelenmesi olmaktadır.

Yukarıda da belirttiğimiz gibi, genelde ters problemin birden fazla çözümü olabilir. Fiziksel gerçek çözümü bulunması fiziksel problemlerde elde edilen teorik bulgularla pratik verileri karşılaştırmak gerekir. Bu soru teorik olarak bir fonksiyonelin minimize problemine indirgenir.

Fakat ters problem için diğer yöntemlerde mevcut olmaktadır.

Tezin bu bölümünde lineer ısı denklemi için yazılmış ters problemin çözümü incelenmiştir.

Böylelikle aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(0, t) = g(t),$$

$$u(1, t) = h(t),$$

$$\kappa \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = g(t),$$

göz önüne alalım. $(u(x, t), \kappa)$ çiftinin bulunmasına ters problem denir.

Homojen olmayan sınır koşullarını homojen sınır koşullarına dönüştürelim. Bunun için sınır koşullarını koruyan $\omega(x, t)$ fonksiyonu şeklinde

$$\omega(x, t) = Ax + B$$

arayalım. Bilinmeyen A ve B leri

$$B = g(t)$$

$$A + B = h(t)$$

$$A = h(t) - g(t)$$

olarak buluruz. Buradan

$$\omega(x, t) = (h(t) - g(t))x + g(t)$$

olur. Aşağıdaki dönüşümü

$$v(x, t) = u(x, t) - \omega(x, t)$$

yaparsak

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \kappa^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x, t)$$

$$v(x, 0) = v_0(x)$$

$$v(0, t) = 0$$

$$v(1, t) = 0$$

alırız. Burada $v_0(x)$ bilinen fonksiyondur.

2.1. İyi Konumlandırılmış (Well-Posed) Problemi

Giriş bölümündeki söylediklerimizi detaylı şekilde ifade edebilmemiz için (1.1)-(1.4) problemine Laplace dönüşümünü uygulayalım. Eğer $v(x, t)$ Laplace orijinalı ise

$$V(x, \lambda) = \mathcal{L}(v) \equiv \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} v(x, t) dt$$

ifadesine $v(x, t)$ 'nin Laplace dönüşü denir.

(1.1)-(1.4) problemine bu dönüşümü uygularsak

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(K(x) \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right\}$$

Laplace dönüşümü özelliğine göre sonuncu denklemi alırsınız.

$$\lambda V(x, \lambda) - \frac{d}{dx}\left(k(x) \frac{dV(x, \lambda)}{dx}\right) = 0 \quad (2.1)$$

$$0 \leq x \leq l,$$

$$V(0, \lambda) = 0, \quad (2.2)$$

$$k(l) \frac{dV(l, \lambda)}{dx} = M(\lambda), \quad V(l, \lambda) = N(\lambda) \quad (2.3)$$

olarak yazabiliriz.

Burada $M(\lambda) = \mathcal{L}\{\mu(t)\}$ ve $N(\lambda) = \mathcal{L}\{v(t)\}$ olmaktadır. Bu notasyanlarda ters problemi aşağıdaki gibi formüle edelim.

Önce

$$\psi(x) = k(x) \frac{d}{dx} V(x, \lambda)$$

olarak gösterelim. Bu durumda (2.1) – (2.3) ‘ ü

$$-\psi''(x) + \frac{\lambda}{k(x)} \psi(x) = 0 \quad (2.4)$$

$$\psi(l, \lambda) = M(\lambda) \quad (2.5)$$

$$\frac{d\psi(0, \lambda)}{dx} = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{d\psi(l, \lambda)}{dx} = N(\lambda) \quad (2.7)$$

şeklinde yazabiliriz.

Ters problemi şöyle ifade edelim.

$M(\lambda)$ ve $N(\lambda)$ verilerine göre $k^{-1}(x) = q^2$ bulunuz.

$$L_\psi \equiv -\psi'' + K^2 q^2(x) \quad \psi = 0, (2.8)$$

$$\lambda = K^2, \quad q^2(x) = K^{-1}(x)$$

$$C_1^{-1} \leq q^2(x) \leq C_0^{-1}$$

ile gösterelim ve aşağıdaki problemi göz önüne alalım,

$$l_j \psi_j = 0 (2.9)$$

$$\psi_j(0, k) = 0, \quad \psi'_j(0, k) = 1 (2.10)$$

burada

$$l_j = -\frac{d^2}{dx^2} + K^2 q^2(x)$$

olmaktadır.

Teorem 1. (2.1) – (2.2) probleminin en fazla bir çözümü vardır.

İspat. Varsayalım ki, V_j ve $K_i \in \Pi$, ($j = 1, 2$) (2.1), (2.2) probleminin çözümleridir.

$W = V_1 - V_2$ olarak gösterirsek,

$$\lambda V_1 - \frac{d}{dx} \left(K_1(x) \frac{dV_1}{dx} \right) = 0$$

$$\lambda V_2 - \frac{d}{dx} \left(K_2(x) \frac{dV_2}{dx} \right) = 0$$

dır. Buradan

$$0 = \lambda W - \frac{d}{dx} \left[K_1(x) \frac{dV_1}{dx} - K_2(x) \frac{dV_2}{dx} \right] = \lambda W - \frac{d}{dx} \left[K_1(x) \frac{dV_2}{dx} + K_1(x) \frac{dV_2}{dx} \right]$$

$K_1(x) - K_2(x) = q(x)$ dersek sonuncu eşitliği

$$0 = \lambda w - \frac{d}{dx} \left(k_1(x) \frac{dw}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(q(x) \frac{dw}{dx} \right)$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$\lambda w - \frac{d}{dx} \left(k_1(x) \frac{dw}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(q(x) \frac{dw}{dx} \right) \quad (2.11)$$

olur. (2.3) için koşullar

$$w(0, \lambda) = 0, \quad w(\ell, \lambda) = 0,$$

$$k_1 \frac{dV_1(\ell, \lambda)}{dx} = k_2 \frac{dV_2(\ell, \lambda)}{dx}$$

olmaktadır. (2.3) denklemini V_1 'e çarpıp integrallersek

$$\int_0^\ell q(x) V_1' V_2' dx = q(x) V_2' V_1 \big|_0^\ell + k_1 w' V_1 \big|_0^\ell - k_1 w V_1' \big|_0^\ell = 0$$

elde ederiz.

Sonuncu eşitlikte sınır koşullarını dikkate alırsak $q(x) = 0$ elde ederiz. Buradan da $k_1 = k_2$ alırsız.

Teorem 2. Herhangi $k > 0, (k = \sqrt{\lambda})$ için $\{\psi_1(x, k), \psi_2(x, k)\}$ kümesi $[0, 1]$ de tanımlı parçalı sabit fonksiyonlar sınıfında tamdır.

İspat. Önce aşağıdaki özelliği hatırlayalım. Herhangi bir $f(x, t) \in \Pi$ ve $h(x) \in \Pi$ için

$$\int_0^1 h(x) \psi_1(x, k) \psi_2(x, k) dx = 0 \quad (2.12)$$

ise $h(x) = 0$ olmaktadır.

Benzer sonuçlar $\psi_j(x, k)$ fonksiyonlarının yerine $v_j'(x, k)$ fonksiyonları yazıldığında da geçerli olmaktadır.

Şimdi, Teorem 2 yi ispatlayabiliriz. Bunun için $\{\psi_1(x, k), \psi_2(x, k)\}$ ifadesinin tam olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki, $h(x) \in \Pi$ ise (2.12) geçerli olmaktadır. $\psi_j(x, k), (j = 1, 2)$ fonksiyonu k ya göre tam fonksiyondur. Bu sonuç

$$\psi_j(x, k) = 1 + k^2 \int_0^x (x-s) q_j^2(s) \psi_j(s, k) ds, x \geq 0, j = 1, 2 \quad (2.13)$$

eşitliğinden de elde edilir. (2.13) eşitliği herhangi bir sabitlenmiş k için

$$\forall x \in [0,1] \text{ için, } \psi_j(x) := \psi_j(x, k) \geq 1, j = 1, 2$$

$$\psi_j'(x, k) \geq 0, \quad \psi_j''(x, k) \geq 0, \text{ ve her } m = 0, 1, 2, \dots \text{ için } \partial^m \psi_j(x, k) / \partial k^m$$

olduğunu ima etmektedir. Böylelikle $\psi_j(x), (j = 1, 2)$ fonksiyonları $x > 0$ yarı düzleminde konveks fonksiyonlardır. $\psi_j(x, k)$ fonksiyonları pozitif olduğundan dolayı (2.13) eşitliğini korur ve x ve k ya göre artan fonksiyonlardır. Böylelikle $\forall k > 0$ için

$$\psi_j(x, k) > 0, \quad \psi_j'(x, k) > 0, \quad \psi_j''(x, k) > 0, j = 1, 2 \quad (2.14)$$

elde ederiz. Varsayalım ki,

$$0 < x_{11} < x_{12} < \dots < x_{1N_1} < 1 < x_{21} < x_{22} < \dots < x_{2N_2} < 1$$

noktaları sırasıyla $a_1(x)$ ve $a_2(x)$ fonksiyonlarının süreksizlik noktaları olsun. (2.12) dan $h = 0$ olduğunu çıkartabilmek için $x_0 := \max(x_{1N_1}, x_{2N_2})$ olmak üzere $\forall x \in [x_0, 1]$ için $h(x) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. q_{jN_j} , $[x_0, 1]$ aralığındaki q_j lerin değerleri olmak üzere

$$\psi_j''(x, k) = k^2 q_{jN_j}^2(x) \psi_j(x, k), \forall k > 0, \forall x \in [x_0, 1] \quad (2.15)$$

elde ederiz. (2.15) dan

$$\psi_j(x_0, k) = a_j(k) e^{k q_{jN_j}(x-x_0)} + b_j(k) e^{-k q_{jN_j}(x-x_0)}, \quad \forall k \geq 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.16)$$

alırız. (2.14) ve (2.16) den

$$\psi_j(x_0, k) = a_j(k) + b_j(k) > 0, \quad \psi_j'(x_0, k) = k q_{jN_j} [a_j(k) - b_j(k)] \geq 0 \quad (2.17)$$

ve

$$2a_j(k) = \psi_j(x_0, k) + \frac{\psi_j'(x_0, k)}{k q_{jN_j}} > \psi_j(x_0, k) \quad (2.18)$$

olduğu görülür. Buradan

$$a_j(k) \geq |b_j(k)| \geq 0, \quad \forall k > 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.19)$$

bulunur. $h \in \Pi$ olduğundan, genellikle bir şey kaybetmeksizin

$$h(x) = C \geq 0, \quad \forall x \in [x_0, 1] \quad (2.20)$$

olduğunu varsayabiliriz. (2.12) dan

$$-\int_0^{x_0} \psi_1(x, k) \psi_2(x, k) h(x) dx = \int_{x_0}^1 \psi_1(x, k) \psi_2(x, k) h(x) dx, \quad \forall k > 0 \quad (2.21)$$

elde edilir. (2.14), (2.16) ve (2.19) den

$$1 \leq \psi_j(x, k) \leq \psi_j(x_0, k) < 2a_j(k), \quad 0 \leq x \leq x_0, \quad \forall k > 0, \quad j = 1, 2 \quad (2.22)$$

alınır. Buradan

$$\left| \int_0^{x_0} \psi_1(x, k) \psi_2(x, k) h(x) dx \right| \leq 4a_1(k)a_2(k) \int_0^{x_0} |h(x)| dx \quad (2.23)$$

olur. Tekrar (2.14), (2.16) ve (2.19) yi dikkate alırsak

$$\psi_j(x, k) \geq a_j(k) \left[e^{kq_j N_j (x-x_0)} - e^{-kq_j N_j (x-x_0)} \right], \quad x \in [x_0, 1], \quad j = 1, 2 \quad (2.24)$$

elde ederiz. Keyfi ve sabit bir $y \in (x_0, 1)$ noktasını gözönüne alalım. $\forall x \in [y, 1]$ için

$\psi_j(x, k) \geq \psi_j(y, k)$ olduğundan, $\forall k > 0$ için

$$\int_{x_0}^1 \psi_1(x, k) \psi_2(x, k) h(x) dx \geq C(1-y) \psi_1(y, k) \psi_2(y, k) \quad (2.25)$$

olur. Böylece, (2.21)-(2.23) dikkate alınarak aşağıdaki

$$\infty > 4 \int_0^{x_0} |h(x)| dx \geq C(1-y) \frac{\psi_1(y, k) \psi_2(y, k)}{a_1(k)a_2(k)}, \quad \forall k > 0 \quad (2.26)$$

eşitsizliğini elde ederiz. (2.24) den görüldüğü üzere,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\psi_j(y, k)}{a_j(k)} = \infty \quad (2.27)$$

dır. (2.27) ifadesini kullanarak, (2.26) ifadesinde $k \rightarrow \infty$ iken limit alırsak, $C = 0$ olur ve böylece her $x \in [x_0, 1]$ için $h(x) = 0$ sonucuna ulaşırız.

2.2. Nümerik Çözüm

Belirttiğimiz gibi, eğer çözümün diferansiyellenebilme özelliği denklemin çözümünden talep ettiğinden az olduğunda diferansiyel probleme hatta iyi bilinen yöntemleri de uygulamak yanlış sonuçlara neden olabilir.

Bu gibi durumlarda [2], takip ederek yardımcı problem kullanılabilir. Önerilen yardımcı problemin esas problemde bulunmayan avantajları vardır.

Şimdi (1.1) – (1.4) problemine karşılık gelen yardımcı problemi dahil edelim.

[1], [3] takip ederek

$$\frac{\partial w_{(x,t)}}{\partial t} = k(x) \frac{\partial v_{(x,t)}}{\partial x} \quad (2.28)$$

$$w(x, 0) = w_0(x) \quad (2.29)$$

$$v(0, t) = 0 \quad (2.30)$$

$$k(l) \frac{\partial v(l,t)}{\partial x} = \mu(t) \quad (2.31)$$

$$v(l, t) = v(t) \quad (2.32)$$

Burada $w_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dw_0(x)}{dx} = v_0(x)$$

denklemin herhangi bir çözümü olmaktadır.

Aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 3. Eğer $w(x, t)$ fonksiyonu (2.28) – (2.32) probleminin çözümü ise

$$v(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}$$

fonksiyonu da esas problemin çözümü olmaktadır.

(2.28) – (2.32) probleminde bulunan avantajlar söz konusu probleme sonlu farklar yöntemini uygulamaya imkân sağlamaktadır.

Bunun için önce argümanların sürekli değiştiği bölge üzerinde $\omega_{h\tau}$ ağını kuralım

$$\omega_{h\tau} = \{(x_i, t_k) | x_i = ih, t_k = k\tau, h > 0, \tau > 0, i = 0, 1, 2, \dots, n, K = 0, 1, 2, \dots\}$$

ω_{hi} ağının herhangi bir (x_i, t_k) noktasında sonlu fark şemasını yazalım

$$\frac{W_{i,K+1} - W_{i,K}}{\tau} = K(x_i) \frac{V_{i+1,K+1} - V_{i,K+1}}{h} \quad (2.33)$$

$$W_{i,0} = W_0(x_i) \quad (2.34)$$

$$V_{0,k} = 0 \quad (2.35)$$

$$K(l) \frac{V_{n,K} - V_{n-1,K}}{h} = \mu(t_k) \quad (2.36)$$

$$V_{n,K} = v(t_k) \quad (2.37)$$

Burada $W_0(x)$ fonksiyonu

$$\frac{dW_0(x)}{dx} = v_0(x) \quad (2.38)$$

denklemini koruyan herhangi bir sürekli fonksiyondur.

Kolayca aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4. Herhangi bir τ, h için

$$V_{i,K+1} = \frac{W_{i,K+1} - W_{i-1,K+1}}{h} \quad (2.39)$$

eşitliği

$$\frac{V_{i,K+1} - V_{i,K}}{\tau} = \frac{1}{h} \left[K(x_{i+1}) \frac{V_{i+1,K} - V_{i,K}}{h} - K(x_i) \frac{V_{i,K} - V_{i-1,K}}{h} \right] \quad (2.40)$$

denklemini korur.

İspat.(2.33) denklemler sistemini önce $(i-1, K)$ noktasında yazıp sonra (2.33) denkleminden çıkarıp h ' a bölersek (2.40) ' ün doğru olduğunu elde ederiz.

(2.39) dikkate alarak (2.33)' yı

$$\frac{W_{i,K+1} - W_{i,K}}{\tau} = K(x_i) \frac{W_{i+1,K+1} - 2W_{i,K+1} + W_{i-1,K+1}}{h^2}$$

ve sonuncu denklemi

$$A_i W_{i-1,K+1} - C_i W_{i,K+1} + B_i W_{i+1,K+1} = -F_i \quad (2.41)$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada,

$$A_i = K(x_i) \frac{\tau}{h^2}, \quad B_i = \frac{\tau}{h^2} K(x_i), \quad C_i = 1 + 2 \frac{\tau}{h^2} K(x_i), \quad F_i = -W_{i,0}$$

olmaktadır.

(2.41) denkleminin çözümünü

$$W_{i,k+1} = \alpha_{i+1,k+1} W_{i+1,k+1} + \beta_{i+1,k+1}$$

şeklinde arayalım.

$W_{i,K+1} = \widehat{W}_i$ olsun. Bu ifadeler (2.24) de yerine konursa

$$\widehat{W}_{i-1} = \alpha_i \widehat{W}_i + \beta_i = \alpha_i (\alpha_{i+1} \widehat{W}_{i+1} + \beta_{i+1}) + \beta_i,$$

$$\widehat{W}_i = \alpha_i \alpha_{i+1} \widehat{W}_{i+1} + \alpha_i \beta_{i+1} + \beta_i,$$

$$A_i \alpha_i \alpha_{i+1} \widehat{W}_{i+1} + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \alpha_{i+1} \widehat{W}_{i+1} - C_i \beta_{i+1} + B_i \widehat{W}_{i+1} = -F_{ik}$$

elde ederiz.

Sonuncu denklemi

$$\widehat{W}_{i+1} (A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1} + B_i) + A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \beta_{i+1} + F_{ik} = 0$$

şeklinde yazarak sınır değer problemini üç tane Cauchy problemine indirgeyebiliriz. Gerçektende sonuncu eşitliğin korunabilmesi için

$$A_i \alpha_i \alpha_{i+1} - C_i \alpha_{i+1} + B_i = 0$$

$$A_i \alpha_i \beta_{i+1} + A_i \beta_i - C_i \beta_{i+1} + F_{ik} = 0$$

olmak zorundadır. Buradan

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (2.42)$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_{ik} + \beta_i A_i}{C_i - \alpha_i A_i} \quad (2.43)$$

olur. α_{i+1} ve β_{i+1} leri bulmak için $v_{0k} = 0$ koşulundan

$$\alpha_1 = 0, \quad \beta_1 = 0 \quad (2.44)$$

başlangıç koşullarını kullanabiliriz. Dolayısıyla tüm α_{i+1} ve β_{i+1} (2.42) - (2.44) Cauchy problemlerinden bulunur. Bu ifadeler

$$w_{i,k+1} = \alpha_{i+1,k+1} w_{i+1,k+1} + \beta_{i+1,k+1}$$

ifadesinde yerine yazılarak ve ikinci sınır koşulu da kullanılarak

$w_{i,k+1}$ lerin hepsi $i = n-1, \dots, 0$ olmak suretiyle bulunabilir.

3. SONUÇLAR

Tezdeki sonuçları aşağıdakilerdir.

- Isı denklemi için iyi konumlandırılmış başlangıç değer probleminin gerçek çözümü elde edilmiştir.
- Isı denklemi için iyi yazılmış ters problemin Laplace dönüşümü yardımıyla uygun spektral probleme indirgenmiştir
- spektral problem kullanılarak problemin tek bir çözümünün olduğu ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Barenblatt G. I., Entov V. M., Rijk V. M., The Theory of Nonstationary Filtration of Oil and Gas, Nedra Pub., Moscow, 1972.
- [2] Rasulov, M., Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Korunum Kuralları, 1. Baskı, Seçkin Yayınları, 2011, Bölüm 8, sayfa 203-207.
- [3] Petrovsky I. G., Lectures on Partial Differential Equations, Int. Pub., 1954.
- [4] Tikhonov, A. N., Samarski, A. A., On Discontinuous Solution of First-Order Quasi-Linear Equation, DAN SSSR, 99, 1 (1954), 27-30.

ÖZGEÇMİŞ

Müjdat Bayer, 25.11.1983 tarihi Diyarbakır ili Hani ilçesi doğumluyum. İlk, Orta ve Liseyi yine aynı ilçede tamamladıktan sonra, Dicle Üniversitesi Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik bölümüne kaydoldum. Bu bölümden 2005 yılından mezun olduktan sonra, aynı yılda kamu personeli olarak atandım. 2007 yılında askerlik görevimi, Kocaeli Gölcük Donanma Komutanlığı'nda tamamladım. 2005 yılından beri kamu personeli olarak çeşitli okullarda idari birimde, matematik öğretmeni olarak görevimi sürdürmekteyim. 2015 yılında da, Beykent Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladım.

Özel ilgi alanlarım, matematiksel programlar, bilgisayar programcılığı, matematiksel analizlerle matematik problemlerine farklı çözüm yolları üretme.

Yabancı dilim İngilizce olup, evli ve bir çocuk babasıyım.

Müjdat BAYER