T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLAR VE BAZI ÖRNEKLERİ

Şaban KENDİGELEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KIRŞEHİR
ARALIK - 2011

T.C.
AHİ EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLAR VE BAZI ÖRNEKLERİ

Şaban KENDİGELEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

DANIŞMAN:
Prof.Dr.Vagıf S.GULİYEV

KIRŞEHİR
ARALIK - 2011

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne

Bu çalışma jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr.Ayhan ŞERBETÇİ
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Prof.Dr.Vagıf S.GULİYEV
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Üye: Yrd.Doç.Dr.Ali AKBULUT
Akademik Ünvanı, Adı-Soyadı

Onay
Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2011

Doç.Dr.Mustafa KURT
Enstitü Müdürü

ÖZET

Hipergruplar teorisi 1970'li yıllarda Dunkl [5], Jewett [10] ve Spector [16] tarafından çalışılmış ve Harmonik analizin önemli konularından biri olmuştur. Bu üç matematikçi fonksiyonların desteklerinin sürekliliği, konvolüsyonun özellikleri, involüsyon ve etkisiz elemanın varlığı üzerinde çalışmışlardır. Frobenius'un ayrık ve sonlu hipergruplar üzerindeki ayrıntılı olmayan çalışmalarını Kawada, Bose ve Mesner geliştirmiştir. Çok değişkenli polinomsal hipergruplar üzerinde Zeuner, Koornwinder, Trimeche ve Annabi ve bir değişkenli polinomsal hipergruplar üzerinde ise Berezanskii, Kalyuzhnyi, Dunkl [5], Jewett [10], Lasser [11] ve Spector [16] çalışmışlardır. Bu çalışma 5 bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde temel kavramlar, 2. bölümde hipergruplar ve özellikleri, 3. bölümde çok değişkenli polinomsal hipergruplar, 4. bölümde bir değişkenli polinomsal hipergruplar ve 5. bölümde ise bir değişkenli polinomsal hipergrupların bazı örnekleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konvolüsyon, Hipergrup, Polinomsal Dizi, Normalizasyon, Ortogonallik, Haar Ölçüsü, Plancherel Ölçüsü.

ABSTRACT

The theory of hypergroups has been one of the basic themes in harmonic analysis and studied by Dunkl [5], Jewett [10] and Spector [16] in 1970's. They have studied the properties of convolution, continuity of supports, existence of neutral element and involution. Kawada, Bose and Mesner have developed the earlier work of Frobenius on the discrete and finite hypergroups. Zeuner, Koornwinder, Trimeche and Annabi have worked on the several polynomial hypergroups. Berezanskii, Kalyuzhnyi, Dunkl [5], Jewett [10], Lasser [11] and Spector [16] worked on the variable polynomial hypergroups. This theses consists of five chapters. The basic definitions are given in the first chapter. Hypergroups and their properties are given in the second chapter. Polynomial hypergroups are given in the third chapter. Polynomial hypergroups in one variable are given in the fourth chapter and the last chapter is denoted to the examples of polynomial hypergroups in one variable.

Keywords: Convolution, Hypergroup, Polynomial Sequence, Normalization, Ortogonality, Haar Measure, Plancherel Measure

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlamamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen değerli danışmanım Prof. Dr. Vagıf S. GULİYEV'e ve Yrd. Doç. Dr. Ali AKBULUT'a ayrıca bu çalışma boyunca hep destek olan eşime ve kızıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\|\mu\| := sup\{|\mu(f)| : f \in C_c(K), \|f\|_\infty \leq 1\}$ (Radon ölçüsü)

$M(K) := \{\mu : \mu -$ radon ölçüsü$\}$ (K kümesindeki radon ölçüleri)

$M_c(K) := \{\mu \in M(K) : supp\mu -$ kompakt$\}$ (Desteği kompakt olan radon ölçüleri kümesi)

$M^b(K) := \{\mu \in M(K) : \|\mu\| < \infty\}$ (K kümesindeki sınırlı radon ölçüleri)

$M^1(K) := \{\mu \in M(K) : \|\mu\| = 1, \mu \geq 0\}$(Olasılık fonksiyonu)

$C(K) := \{f : K \to \mathbb{C} : f -$ sürekli$\}$ (K kümesindeki sürekli fonksiyonlar)

$C_c(K) := \{f \in C(K) : suppf$kompakt$\}$(K kümesindeki sürekli fonksiyonlar kümesi)

$C_b(K) := \{f \in C(K) : |f(x)| < M; \exists M > 0\}$ (K kümesindeki sınırlı sürekli fonksiyonlar kümesi)

$C_0(K) := \{f \in C(K) : \lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0\}$ (K kümesinde sıfıra yakınsak sürekli fonksiyonlar kümesi)

$\Im(K)$:K nın boştan farklı kompakt alt kümeleri

Δ:Modüler fonksiyon

$supp(\mu) := \{x \in K : x \in N_x \in T, \mu(N_x) > 0\}$

$suppf(x) := \overline{\{x \in K : f(x) \neq 0\}}$

$\Upsilon(K)$:K kümesindeki sürekli çarpımsal fonksiyonların kümesi

$\mathbb{Z}_+$:=$\{0, 1, 2, ...\}$

μ^-: μ nün involüsyonu

$pos(f) := \{x \in X : f(x) > 0, \quad f \in B(K)\}$

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın baştan sonuna kadar X veya K lokal kompakt Hausdorff uzay olarak gösterilecektir. X üzerindeki Borel ölçülebilir fonksiyonların uzayı B(X) ve X üzerindeki genişletilmiş reel değerli Borel ölçülebilir fonksiyonların uzayı $[0, \infty]$ aralığında sırasıyla $B(X, \overline{\mathbb{R}})$ ve $B^{+}(X)$ biçiminde gösterilecektir. B(X) in kapsadığı $C(X)$, $C_b(X)$, $C_0(X)$ ve $C_c(X)$ altuzayları sırasıyla X üzerinde sürekli kompleks değerli, sınırlı, sıfıra yakınsayan ve kompakt destekli fonksiyonlardır. $C_b(X)$ ve $C_0(X)$ in topolojilendirilmesiyle elde edilen düzgün norm $\|.\|_\infty$ biçiminde olup $C_E(X) := \{f \in C_c(X) : supp(f) \subset E\}$ uzaylarının indüktif limiti olarak topolojilendirildiğinde E kompakt olup her biri düzgün norm taşır. Ayrıca kompakt yakınsak topoloji τ_{co} ile gösterilecektir.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1 Bir X uzayı ve birleşimleri X uzayını kaplayan herhangi açık kümeler verildiğinde, bu topluluğun içinden sonlu sayıda açık küme X uzayını kapsıyorsa X uzayına tıkız (kompakt) denir

Tanım 1.1.2 X bir topolojik uzay olsun. X in herhangi iki noktası x_1 ve x_2 için U_1 ve U_2 gibi iki açık komşuluk bulunabiliyorsa ve bu komşuluklar birbirinden ayrıksa, yani $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ ise X uzayına Hausdorff uzayı denir. Herhangi nokta çifti için böyle ayrık komşulukları bulunabilme koşuluna Hausdorff (T_2) koşulu denir.

Tanım 1.1.3 τ Hausdorff topolojisi ve lokal kompakt topolojik uzay (X_{LC}, τ) olmak üzere eğer her farklı $x, y \in X_{LC}$ için $U, V \in \tau$ olmak üzere $x \in U$ ve $y \in V$ olacak biçimde ayrık iki açık küme var ise H_{LC} ye lokal kompakt Hausdorff uzay denir.

Tanım 1.1.4 Boş kümeden farklı ve üzerinde bir tane ikili işlem tanımlanmış bir G kümesi
Bileşme: Her $a, b, c \in G$ için a(bc)=(ab)c.
Birim öğe: Her $a \in G$ için öyle bir $e \in G$ vardır ki ea=ae=a.
Tersinir öğe: Her $a \in G$ için öyle bir $a^{-1} \in G$ vardır ki $a^{-1}a = aa^{-1} = e$
koşullarını sağlıyorsa bu kümeye öbek (grup) adı verilir.
Eğer bir öbek,
Değişme: Her $a, b \in G$ için ab=ba.
koşulunu sağlıyorsa değişmeli öbek (değişmeli grup) ya da Abelyen öbek (abelyen grup) olarak adlandırılır. (G,.) biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.5 K bir cisim ve (V, + ,0) bir abelyen grup olsun. Ayrıca $K \times V$ den V ye giden bir fonksiyonun var olduğunu farzedelim.
Eğer $a \in K$ ve$v \in V$ ise bu fonksiyonun (a,v) çiftinde aldığı değeri av olarak yazalım. Bütün bunlar şu özellikleri sağlasın: Her $a, b \in K$ ve $v, w \in V$ için
V1. a(v + w) = av + aw
V2. (a + b)v = av + bv
V3. (ab)v = a(bv)
V4. 1v = v
O halde $(V, +, 0, K \times V \to V)$ yapısına K üzerinde bir vektör uzayı adı verilir. V kümesinin elemanlarına vektör denir.

Tanım 1.1.6 V,F(Reel yada Kompleks sayılar) cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olmak üzere

$$\dot{\mathrm{I}} : V \times V \to F$$

dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa bu dönüşüme V üzerinde bir iç çarpım denir ve $x, y \in V$ için$< x, y >$şeklinde gösterilir. Üzerinde iç çarpım tanımlanmış bir vektör uzyınada iç çarpım uzayı denir. Reel iç çarpım uzayına Euclidean uzayı, kompleks iç çarpım uzayına da Üniter uzay denir.
(İ1)$\forall x \in V$ için $< x, x > \geq 0$
(İ2)$\forall x \in V$ için $< x, x >= 0$ olması için gerek ve yeter şart x=0 olmasıdır.
(İ3)$\forall x, y \in V$için $< x, y >=< \overline{y, x} >$

(İ4)$\forall x, y \in V$ve $\forall \alpha \in F$ için$< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$

(İ5)$\forall x, y, z \in V$için $< x, y + z >=< x, y > + < y, z >$

Tanım 1.1.7 F cismi üzerinde herhangi bir vektör uzayı V olsun. Dual uzay V^* ile gösterilir ve $\phi : V \to F$ bütün lineer dönüşümlerin kümesi olarak tanımlanır. V^* dual uzay aşağıdaki toplama ve skaler çarpım ile F üzerinde bir vektör uzayı olur:

$\forall \phi, \psi \in V^*, x \in V \quad ve \quad a \in F$ olmak üzere

$$(\phi + \psi)(x) = \phi(x) + \psi(x)$$

$$(a\phi)(x) = a\phi(x)$$

V^* dual uzayının elemanları kovektör yada 1-form olarak adlandırılır. V^* dual uzayının ϕ fonksiyoneli ve V nin x elemanı $\phi(x) = [\phi, x]$ biçiminde yada $\phi(x) = (\phi, x)$ biçiminde gösterilir. Ayrıca bilineer dönüşüm

$$[.,.] : V^* \times V \to F$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.1.8 X bir K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer bir

$$\|.\| : X \to R \qquad x \to \|x\|$$

dönüşümü $\forall x, y \in X$ ve $\forall \alpha \in K$ için

(N1)$\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

(N2)$\|ax\| = |a|\|x\|$

(N3)$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ özelliklerini sağlıyorsa bu dönüşüme X üzerinde norm adı verilir. $(X, \|.\|)$ ikilisine normlu vektör uzayı denir ve kısaca X ile gösterilir.

Tanım 1.1.9 X bir küme olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa bu durumda $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir cebirdir denir. (i)$X \in \mathcal{A}$

(ii)$\forall E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \backslash E \in \mathcal{A}$

(iii) k=1,2,...,n için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer (iii) şartı yerine

$$\forall n \in N \text{için} \quad E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

şartı konulursa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma-$ cebiri adı verilir.

Tanım 1.1.10 Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan σ-cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) σ-cebiri denir. $\mathbb{R}^n$'deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu σ-cebirine Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. n=1 olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir.

Tanım 1.1.11 A bir Banach uzayı olmak üzere A nın Banach cebri olması için A içerisinde tanımlı çarpım;

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad x, y \in A$$

eşitsizliğini ve

$$x(yz) = (xy)z$$

dağılma özelliği,

$$x(y+z) = xy + xz \quad (y+z)x = yx + zx \quad x, y, z \in A$$

birleşme özelliği ve α bir skaler olmak üzere

$$(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

eşitliklerini sağlıyorsa A ya Banach cebri denir.

Tanım 1.1.12 X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$ cebiri olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$-ölçülebilir küme veya kısaca ölçülebilir küme adı verilir.

Tanım 1.1.13 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $f : X \to R$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \alpha \in R$ için

$$f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

oluyorsa f ye ölçülebilir fonksiyon denir. X üzerindeki ölçülebilir fonksiyonların ailesi $M(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.14 $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu
(i) $\mu(\emptyset) = 0$
(ii) Her ayrık (A_n) dizisi için

$$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona ölçü denir. Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye sonlu ölçü adı verilir.

Tanım 1.1.15 X lokal kompakt Hausdorff uzayı üzerinde kompleks bir fonksiyon f olmak üzere $\forall \epsilon > 0$ için $K \subset X$ vardır öyleki $x \notin K$ için $f(x) < \epsilon$ ise f ye sıfıra yakınsıyor denir.

Tanım 1.1.16 Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ-cebri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne ölçü uzayı adı verilir.

Tanım 1.1.17 X bir küme ve $P(X)$ X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu
(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$
(ii) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
(iii)$A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$
(iv)Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise
$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$
şartlarını sağlıyorsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

Tanım 1.1.18 (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve $\tau_A = \{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\}$ olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A\}$$

biçiminde tanımlanan m^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye Lebesgue dış ölçüsü denir. Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığının uzunluğuna karşılık getirir. $n-$boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayında Lebesgue dış ölçüsünü tanımlamak için

$$I = \{x : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, ..., n\}$$

$n-$ boyutlu kapalı aralıklarını göz önüne alalım. Bu aralıkların hacimleri $v(I) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i)$ biçimindedir. Keyfi bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin Lebesgue dış ölçüsünü

$$m^*(E) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k, I_k \text{ bir aralık}\}$$

ile tanımlanır. $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ için eğer

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap (\mathbb{R}^n - E))$$

ise E kümesine Lebesgue ölçülebilirdir denir.

Tanım 1.1.19 Bir f fonksiyonunun desteği $f(x) \neq 0$ şartını sağlayan x noktalarının kapanışıdır ve $suppf = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$ ile gösterilir. Eğer f fonksiyonunun desteği kompakt bir küme ise bu durumda f ye kompakt destekli fonksiyon denir.

Tanım 1.1.20 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$L^p = \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{A}) : \int_X |f|^p d\mu < \infty\}$$

kümesine p- inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir. L^p uzayında bir f fonksiyonunun normu

$$\|f\|_p = \begin{cases} (\int_X |f|^p d\mu < \infty) & 1 \prec p < \infty \\ esssup|f(x)| & p = \infty \end{cases}$$

ile tanımlanır.

Tanım 1.1.21 f ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere her kompakt K kümesi üzerinde

$$\int_K |f| d\mu < \infty$$

ise f fonksiyonuna lokal integrallenebilirdir denir.

Tanım 1.1.22 f,(a,b) açık aralığında tanımlı, reel değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a, b)$ olsun. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

Tanım 1.1.23 A ve B topolojik uzaylar olmak üzere A dan B ye sürekli, birebir, örten ve tersi de sürekli bir fonksiyona homeomorfizma denir. Homeomorfizmalar tüm topolojik uzaylar topluluğu üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlar. Böylece oluşturulan denklik sınıflarının her birine homeomorfizma sınıfı denir.

Tanım 1.1.24 Topolojik uzayın bir A alt kümesine ait bir a elemanı için a nın bir V komşuluğunun A ile arakesitinin yalnızca a dan oluşması durumunda a noktasına izole nokta adı verilir.

Tanım 1.1.25 x ve y iki vektör ve iç çarpım vektör uzayı V olmak üzere $< x, y >= 0$ ise x ile y ortogonaldir denir ve $x \perp y$ biçiminde gösterilir. Ayrıca $degP_n = n$ olmak üzere ortogonal polinomların sınıfı $\{P(x)\}$ ile gösterilir ve [a,b] aralığında ortogonalliği $m \neq n$ olmak üzere

$$< P_n, P_m >= \int_a^b P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = \delta_{mn}c_n = 0$$

Tanım 1.1.26 $degP_n = n$ olmak üzere iki polinom ortonormal ise m=n için $< P_n, P_m >= \int_a^b P_n(x)P_m(x)\omega(x)dx = 1$.

Tanım 1.1.27 Bir $(a)_n$ dizisi için üreteç fonksiyon

$$G(a_x; x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 1.1.28 Gama fonksiyonu Matematikte faktöriyel fonksiyonunun karmaşık sayılar ve tam sayı olmayan reel sayılar için genellenmesi olan bir fonksiyon olup Γ simgesiyle gösterilir.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1}e^{-t}dt$$

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

Kompleks düzlemde Analitik devamlılık için n negatif tamsayı olmamalıdır, pozitif tamsayı olmalıdır.

Tanım 1.1.29 Boş olmayan herhangi bir X kümesi ve $\tau = P(X)$ ailesi verilsin. τ ailesi X üzerinde bir topoloji olup $\forall x \in X$ için $\{x\} \subset X$ alt kümesi bir açık küme olup $\tau = P(X)$ topolojisine X üzerinde ayrık topoloji denir.

Tanım 1.1.30 **(Micheal Topolojisi)** X in boştan farklı kompakt altkümelerinin uzayı $\Upsilon(X)$ ile gösterilsin. $A, B \subset X$ için $\Upsilon_A(B) := \{C \in \Upsilon(X) : C \cap A \neq \emptyset \quad ve \quad C \subset B\}$. X in açık alt kümeleri U ve V olmak üzere bütün $\Upsilon_A(B)$ nin alt tabanlarıyla genelleştirilmiş topoloji Υ_X olmak üzere bu topoloji aşağıdaki özelliklere sahiptir.[Michael 1951]

(i) X kompakt ise Υ_X kompakttır.

(ii) Υ_X lokal kompakt Hausdorff uzaydır.

(iii) Υ_X in kapalı bir alt kümesinin üzerine $x \to \{x\}$ dönüşümü X in bir homeomorfizmidir.

(iv) X'in boştan farklı sonlu alt kümelerinin koleksiyonu Υ_X içinde yoğundur.

(v) Eğer $\Omega \quad \Upsilon_X$ in kompakt alt kümesi ise $B := \cup\{A : A \in \Omega\}$ X in kompakt bir alt kümesidir.

d metriği ile X metriklenebilir ise $A, B \in \Upsilon_X$ olmak üzere Υ_X Micheal topolojisi ρ Hausdorff metriği ile verilen Hausdorff topolojisinden daha kuvvetlidir ve

$$h(A, B) := sup\{d(x, B) : x \in A\}$$

iken

$$\rho(A, B) := max\{h(A, B), h(B, A)\}.$$

1.2. ÖLÇÜLER

X üzerinde kompleks bir Radon ölçüsü μ olmak üzere μ ölçüsü $C_c(X)$ üzerinde sürekli lineer bir fonksiyoneldir. Böylece her $E \subset X$ için α_E sabiti var olup öyleki $\forall f \in C_E(X)$ için $|\mu(f)| \leq \alpha_E \|f\|_\infty$.
X üzerindeki Radon ölçülerinin kümesi $M(X)$ ile gösterilir.
$\forall \mu \in M(X)$ için μ nün eşleniği $\overline{\mu}$ biçiminde gösterilir ve $\forall f \in C_E(X)$ için

$$\overline{\mu}(f) = \mu(\overline{f})$$

$\mu = Re(\mu) + iIm(\mu)$ biçiminde yazılabileceğinden reel ve imajiner olmak üzere 2 kısımdan oluşur. Burada

$$Re(\mu) := \frac{1}{2}(\mu + \overline{\mu})$$

ve

$$Im(\mu) := \frac{1}{2i}(\mu - \overline{\mu})$$

biçimindedir. $\forall \mu \in M(X)$ için

$$\|\mu\| := sup\{|\mu(f)| : f \in C_c(X), \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

μ sınırlı ise $|\mu(f)| < \infty$ biçiminde, kontraktif ise $|\mu(f)| \leq 1$ ve olasılık ölçüsü ise $\mu \geq 0$ ve $\|\mu\| = 1$.
M(X) in bazı alt kümeleri $M^b(X), M_c(X), M_+(X), M^{(1)}(X) ve M^1(X)$ olup bunlar sırasıyla sınırlı Radon ölçüleri, kompakt desteğe sahip ölçüler, kontraktif ölçüler ve olasılık ölçüleri kümesi olarak adlandırılır. Burada $M_c(X) \subset M^b(X)$ ve $M^1(X) \subset M^{(1)}(X) \subset M^b(X)$ olduğu görülür.

1.2.1. Haar Ölçüsü

G lokal kompakt topolojik grup ve G nin kapalı kompakt alt kümeleri tarafından üretilmiş σ cebri $\mathcal{B}$ olsun. $\mathcal{B}$ üzerindeki bir μ ölçüsünün sol Haar ölçüsü olması için;
(i)Her $B \in \mathcal{B}$kümeleri üzerinde dış regüler

$(\mu(B) = inf\{\mu(U)|U \supset B, U\text{açık}\})$
(ii)Her $U \in \mathcal{B}$ kümeleri üzerinde iç regüler
$(\mu(B) = sup\{\mu(K)|K \subset B, K\text{kompakt}\})$
(iii)Her $K \in \mathcal{B}$ kompakt kümeleri üzerinde sonlu
(iv)Her $B \in \mathcal{B}$ için $\mu(gB) = \mu(B)$
(v)Her boştan farklı $B \in \mathcal{B}$ için $\mu(B) > 0$
Benzer biçimde sağ Haar ölçüsü için Her $B \in \mathcal{B}$ için $\mu(Bg) = \mu(B)$ olmalıdır.

1.2.2. Radon Ölçüsü

X üzerindeki Radon ölçülerinin kümesi $M(X)$ ile gösterilir. $\forall \mu \in M(X)$ için

$$\|\mu\| := sup\{|\mu(f)| : f \in C_c(X), \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

1.2.3. Plancherel Ölçüsü

G sonlu bir grup olsun. G nin indirgenemez temsillerinin kümesini $G^\wedge$ ile gösterdiğimizde $G^\wedge$ kümesi üzerindeki Plancherel ölçüsü

$$\mu(\pi) = \frac{(dim\pi)^2}{|G|}$$

olup $\pi \in G^\wedge$ ve indirgenemez π temsilinin boyutu $dim\pi$ olarak gösterilir.

1.2.4. Lebesque Ölçüsü

$\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$, m^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı olsun. m^* Lebesgue dış ölçüsünün $\mathcal{M}(\mathbb{R}, m^*)$ sınıfınada $B(\mathbb{R})$ sınıfında olan kısıtlanmasına Lebesgue ölçüsü denir ve m ile gösterilir.

2. HİPERGRUPLAR

2.1. HİPERGRUPLAR

$K \neq \emptyset$ lokal kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(K, *)$ a bir hipergrup denir.

HG1: $(M^b(K), +, *)$ vektör uzayı üzerinde tanımlanan $*$ ikili işlemi ile birlikte bir cebir oluşturur.

HG2: $\varepsilon_x * \varepsilon_y \in M^1(K)$ ve $x, y \in K$ kompakt olmalı.

HG3: $K \times K \to M^1(K)$ şeklinde tanımlanan $(x, y) \to \varepsilon_x * \varepsilon_y$ dönüşümü süreklidir.

HG4: $K \times K \to \Im(K)$ şeklinde tanımlanan $(x, y) \to supp(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ dönüşümü süreklidir.

HG5: $\varepsilon_e * \varepsilon_x = \varepsilon_x * \varepsilon_e = \varepsilon_x$ şartını sağlayan birtek $e \in K$ vardır.

HG6: $(\varepsilon_x * \varepsilon_y)^- = \varepsilon_{y^-} * \varepsilon_{x^-}$ şartını sağlayan tek bir involüsyon vardır.($K \to K$ ya tanımlı $x \to x^-$ homeomorfizmi $\forall x \in K$ için $(x^-)^- = x$)

HG7: $e \in supp(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$ olması için gerek ve yeter şart $x = y^- \quad x, y \in K$.

Genellikle literatürde ve bu çalışmada hipergrup $(K, *)$ ile gösterilecektir. Hipergrubun en yaygın örneği lokal kompakt Hausdorff G grubu ile $M^b(G)$ yi kendisine taşıyan normal konvolüsyon yapısıdır.
Ayrıca $\mu \to \mu^-$ dönüşümü $M^b(K)$ üzerinde zayıf sürekli, pozitif ve lineerdir.
$\mu \in M^b(K)$ nın adjointi $\mu^\sim$ ile gösterilir ve $\forall A \in \Upsilon(K)$ için

$$\mu^\sim(A) := \overline{\mu^-(A)}.$$

K hipergrubu komütatif ise $(M^b(K), +, *)$ komütatif cebirdir. Bir hipergrubun involüsyonu birim dönüşüm ise hermityen olarak adlandırılır. Her hermityen hipergrup komütatifdir çünkü

$$\varepsilon_x * \varepsilon_y = (\varepsilon_x * \varepsilon_y)^- = \varepsilon_{y^-} * \varepsilon_{x^-} = \varepsilon_y * \varepsilon_x.$$

Konvolüsyon dönüşümün pozitif ve sürekliliği ile birlikte herbir $\mu, \nu \in M^b(K)$ için

$$\mu * \nu = \int_K \int_K \varepsilon_x * \varepsilon_y \mu(dx)\nu(dy)$$

dönüşümün tek olduğu garantilenmiş olur.

Tanım 2.1.1

$$\tau : M^b(K_1) \to M^b(K_2)$$

dönüşümü bir (hipergrup) homeomorfizm olarak adlandırılır ise $\forall \mu, \nu \in M^b(K_1)$ için

$$\tau(\mu * \nu) = \tau(\mu) * \tau(\nu)$$

ve

$$\tau(\mu^-) = \tau(\mu)^-$$

ve $\forall x \in K_1$ için $\tau(\varepsilon_x)$ bir nokta ölçüsüdür. Eğer ek olarak

$$\tau : M^b(K_1) \xrightarrow{1-1} M^b(K_1)$$

ise izomorfizm olarak adlandırılır.

2.1.1. Dönüşüm Ve Konvolüsyon

Hipergrubun tanımında ilk olarak nokta ölçüleri için konvolüsyon verilmiştir. Konvolüsyon üzerinde süreklilik ve pozitiflik varsayıldığında bütün kompleks ölçülere kolayca genişletilebilir. Fonksiyonların dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

2.1.2. Fonksiyonların Dönüşümü

$f \in B(K)$ $x, y \in K$ için

$$f(x * y) := \int_K f d(\varepsilon_x * \varepsilon_y)$$

integrali vardır. Yukardaki notasyonda f(xy) nin anlamı K lokal kompakt semigrup olması durumudur. Ancak $x * y$ kendi başına bir anlam içermez. Burada

$$f^-(x * y) = f(y^- * x^-)$$

olduğuna dikkat etmeliyiz. f nin x ten y ye soldan dönüşümü

$$T^x f(y) = f(x * y)$$

ve f nin x ten y ye sağdan dönüşümü

$$T_x f(y) = f(y * x).$$

Ayrıca

$$(T^x \mu)(f) = \mu(T^x f)$$

ve $\mu \in M(K)$ ve $\forall f \in C_c(K), x \in K$ için

$$(T_x \mu)(f) = \mu(T_x f).$$

$f \in C_c(K)$ iken $T^x f \in C_c(K)$ olduğu kolayca görülür. $f \in C_b(K)$ için [HG3] ten dolayı $K \times K$ üzerinde

$$(x, y) \to f(x * y)$$

dönüşümü sürekli fonksiyondur ve bundan dolayı K üzerinde $T^x f \;\; ve \;\; T_x f$ sürekli fonksiyondur.

2.1.3. Fonksiyonların Dönüşümü İle İlgili Özellikler

(i) $(x, y) \to f(x * y)$ dönüşümü $B(K \times K)$ ya aittir.

(ii) Eğer $x, y \in K$ ve $|f|(x*y)$ sonlu ise $f(x*y)$ tanımlı olup $|f(x*y)| \leq |f|(x*y)$.

(iii) $T^x f, T_x f \in B(K)$.

(iv) $\int_K f d(\mu * \nu) = \int_K \int_K f(x * y)\mu(dx)\nu(dy)$.

(v) $\int_K T^x f d\mu = \int_K f d(\varepsilon_x * \mu)$.

(vi) $T^x f(y * z) = T_z f(x * y)$.

2.1.4. Kümelerin Konvolüsyonu

$A, B \subset K$ için
$A * B := \cup\{supp(\varepsilon_x * \varepsilon_y) : x \in A, y \in B\}$. [1]
Şimdi kümelerin konvolüsyonu ile ilgili bir önerme vereceğiz.
Önerme 2.1.1 $(A * B) \cap C \neq \emptyset \Longleftrightarrow B \cap (A^- * C) \neq \emptyset$.

Aşağıda ölçülerin konvolüsyonunun supportları ile ilgili bir önerme verilecektir.

Önerme 2.1.2 $\mu, \nu \in M^b(K)$ verildiğinde

(i) $supp(\mu * \nu) \subset (supp(\mu) * supp(\nu))^c$

(ii) $supp(\mu * \nu) = (supp(\mu) * supp(\nu))^c \quad \mu, \nu \geq 0$

(iii) $supp(\mu * \nu) = supp(\mu) * supp(\nu) \quad \mu, \nu \in M_{c,+}(K)$

2.1.5. Fonksiyonlarin Konvolüsyonu

$f, g \in B(K)$ için en az bir tanesi σ sonlu ise K kümesinde $f * g$ konvolüsyon tanımı

$$\begin{aligned}(f * g)(x) :&= \int_K f(x * y) g(y^-) \omega_K(dy) \\ &= \int_K (T^x f) g^- d\omega_K.\end{aligned}$$

2.1.6. Fonksiyonların Konvolüsyonunun Özellikleri

(i) $f, g \in B(K)$,$p, q \in [1, \infty]$ ile $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\|f\| < \infty$ ve $\|g\|_p < \infty$ olduğu farzedilsin. Bu durumda $f * g^-$ süreklidir ve $\|f * g^-\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_p$

[1] Jewett,R.I. *Spaces with an abstract convolution of measures*,Adv.in Math.**1975**,no.1,1-101.

(ii) $1 < p < \infty$ iken $f * g^{-} \in C_0(K)$

(iii) $\|f\|_1$ ve $\|g\|_p < \infty$ ise $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$

2.1.7. Fonksiyonlar Ve Ölçülerin Konvolüsyonu

$\mu \in M^b(K)$ ve $f \in B(K)$

(i) $(\mu * f)(x) := \int_K f(y^{-} * x)\mu(dy)$ ve

(ii) $(f * \mu)(x) := \int_K f(x * y^{-})\mu(dy)$

2.1.8. Fonksiyonlar Ve Ölçülerin Konvolüsyonunun Özellikleri

Burada fonksiyonlar ve ölçüler arasındaki konvolüsyunun özelliklerini vereceğiz.
$\mu \in M^b(K)$ ve $f, g \in B(K)$ olsun.

(i) f σ sonlu ise $\mu * f$ de σ sonludur.

(ii) $\|f\|_1 < \infty$ ise $(\mu * f)\omega_K = \mu * (f\omega_K)$

(iii) $\|f\|_1 < \infty$ ise $\int_K (\mu * f) d\omega_K = \mu(K) \int_K f d\omega_K$

(iv) f veya g den birisi σ sonlu ise $\int_K (\mu * f) g d\omega_K = \int_K f(\mu^{-} * g) d\omega_K$

Önerme 2.1.3

(i) $f \in C_b(K)$,$\mu \in M^b(K)$ ise $\mu * f \in C_b(K)$ ve
$\|\mu * f\|_\infty \leq \|\mu\| \|f\|_\infty$

(ii) $f \in C_c(K)$,$\mu \in M(K)$ ise $\mu * f \in C(K)$

(iii) $f \in C_c(K)$,$\mu \in M_c(K)$ ise $\mu * f \in C_c(K)$

(iv) $f \in C_0(K)$,$\mu \in M^b(K)$ ise $\mu * f \in C_0(K)$ olup bu durumda $\tau_\omega - \lim \mu = \mu$ $\|\mu_1 * f - \mu * f\|_\infty \to 0$ [2]

Önerme 2.1.4 $\mu, \nu \in M^b(K)$ ve $f \in B(K)$, $\mu * f \in B(K)$ için

$$\int_K \mu^- * f d\nu = \int_K f d(\mu * \nu) = \int_K (f * \nu^-) d\mu$$

olup ayrıca

(i) $\mu * (\nu * f) = (\mu * \nu) * f$

(ii) $\mu * (f * \nu) = (\nu * f) * \nu$

(iii) $(\mu * f)^- = f^- * \nu^-$

2.1.9. Sınırlı Ölçülerin Ötelenmesi Ve Sıfıra Yakınsaması

Tanım 2.1.2 $\mu \in M(K)$ sınırlı sol ötelenmiş ise (yada sol dönüşüm) μ nün sol dönüşümlerinin kümesi $\{T^x\mu : x \in K\}$ belirsiz sınırlıdır. Sol ötelenmiş belirsiz ölçülerin kümesi $M^\tau(K)$ ile gösterilir. Eğer μ ötelenmiş sınırlı ise μ^- ile gösterilir. $\mu \in M(K)$ nın ötelenmiş sınırlı olması ancak ve ancak $\forall f \in C_c(K)$ için $\mu * f \in C_c(K)$ olmasıdır.

Tanım 2.1.3 $\mu \in M(K)$ zayıf ötelenmiş sınırlı olarak adlandırılırsa(yada zayıf dönüşüm)$\forall f \in C_c(K)$ için $\mu * f * f^\sim$. Zayıf ötelenmiş sınırlı ölçülerin kümesi M_w^τ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 $\mu \in M(K)$ sıfıra yakınsıyorsa $\forall f \in C_c(K)$ için $\mu * f \in C_0(K)$. Sıfıra yakınsayan $\mu \in M(K)$ nın kümesi $M_0(K)$ ile gösterilir.

[2]Berg,C.;Forst,G. *Potantial Theory on locally compact abelian groups*,Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,87.Springer-Verlag,New York-Heidelberg,1975.

2.1.10. Invaryant Ölçüler

Tanım 2.1.5 $\forall x \in K$ ve $f \in C_c(K)$ için

$$\int_K f d(\varepsilon_x * \omega) \leq \int_K f d\omega$$

olup sıfırdan farklı $\omega \in M_+(K)$ ölçüsüne sol alt invaryant adı verilir. Eğer burada eşitlik sağlanırsa ω sol Haar ölçüsü veya sol invaryant olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.6 $\forall x \in K$ ve $f \in C_c(K)$ için

$$\int_K f d(\varepsilon_x * \omega) = k(x) \int_K f d\omega$$

olup sıfırdan farklı $\omega \in M_+(K)$ ölçüsüne kısmi sol invaryant denir.
k çarpanı süreklidir ve

$$k : K \to \mathbb{R}_+^x.$$

Ayrıca $\forall x, y \in K$ için

$$k(x * y) = k(x)(y).$$

2.1.11. Invaryant Ölçülerin Özellikleri

ω K kümesinde sol alt invaryant ölçüsü $f \in B^+(K)$, $x \in K$ ve $\mu, \nu \in M_+^b(K)$ ise

(i) $\int_K T^x f d\omega \leq \int_K f d\omega$

(ii) $1 \leq p < \infty$ için $\|T^x f\| \leq \|f\|_p$, $f \in L^p(K) := L^p(K, \omega)$

(iii) K nın kompakt alt kümesi A ise $\omega(A) \leq \omega(\{x\} * A)$

(iv) $\mu * \omega$ konvolüsyonu mevcuttur ve $\mu * \omega \leq \mu(K)\omega$

(v) $\nu \leq \omega$ ise $\mu * \nu \leq \omega$

(vi) $\mu \in M_c^1(K)$ ve $g \in C_c^+(K)$ ise $\mu * g \in C_c^+(K)$ ve $\int_K \mu * g d\omega \leq \int_K g d\omega$.

2.1.12. Modüler Fonksiyon

K üzerinde ω_K sol invaryant ölçüsü olsun. K üzerinde sağ modüler fonksiyon $\triangle$ olarak tanımlandığında

$$\omega_K * \varepsilon_x = \triangle(x)\omega_K$$

olup $\forall x \in K$ dır. $\triangle = 1$ ise birim modüler olarak adlandırılır.

2.1.13. Lokal Düzgün Süreklilik

Lokal sınırlı ölçülebilir f fonksiyonu $x_0 \in K$ iken x_0 ın U gibi bir komşuluğu vardır öyleki $\forall \varepsilon > 0$ için e biriminin V komşuluğu var olup

$$|f(y * x) - f(x)| < \varepsilon$$

$\forall x \in U, y \in V$ ise f ye sol lokal düzgün süreklidir denir.

2.1.14. Semikarakterler Ve 2.Dereceden Formlar

K üzerinde lokal sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon χ ile gösterilirse
(i) $\chi(e) = 1$
(ii)$\chi(x * y) = \chi(x)\chi(y) \quad \forall\ x, y \in K$
Ek olarak $\forall x \in K$ için $\chi(x^-) = \overline{\chi(x)}$ ise χ ye semikarakter adı verilir.

Tanım 2.1.7 (a) $\forall x, y \in K$ için $q \in L^\infty_{loc}(K)$ quadratik(2.dereceden) form ise

$$q(x * y) + q(x * y^-) = 2q(x) + 2q(y)$$

olması sağlanır.
(b)$\forall x, y \in K$ için $h \in L^\infty_{loc}(K)$ toplamsal ise

$$h(x * y) = h(x) + h(y)$$

ve ek olarak $\forall x \in K$ için $h(x^-) = \overline{h(x)}$ ise bir homeomorfizmdir.

2.1.15. Düzgün Süreklilik

$f \in B(K)$ olmak üzere

(i) $\alpha-$ düzgün sürekli ise $\epsilon > 0$ verildiğinde e nin ω açık komşuluğu varsa $x, y \in K$ ve $(\epsilon_x * \epsilon_{y^-})(W) > 0$ ve $|f(x) - f(y)| < \epsilon$.

(ii) $\beta-$ düzgün sürekli ise $\epsilon > 0$ ve $x_0 \in K$ iken x_0 ın U_{x_0} komşuluğu vardır öyleki $\forall x \in U_{x_0}$ için $\|T^x f - T^{x_0} f\|_\infty < \epsilon$.

(iii) $\gamma-$ düzgün sürekli ise $x, y \in K$ için $(\epsilon_x * \epsilon_{y^-})(W) > 0$ olup $\|T^x f - T^y f\|_\infty < \epsilon$ olur.

Herhangi bir düzgün sürekli fonksiyonun sürekli olduğu açıktır.

Tanım 2.1.8 $\mu \in M(K)$ olsun. $\sigma \in M_+(K^\wedge)$ varsa(tek olması gerekli) öyleki $\forall f \in C_c(K)$ için

$$\int_K |\widehat{f}|^2 d\sigma < \infty$$

ve

$$\int_K f * f^\sim d\mu = \int_{K^\wedge} |\widehat{f}|^2 d\sigma$$

olup $\sigma := F\mu$ ye μ nün Fourier dönüşümü denir.

3. ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLAR

Bu bölümde Zeuner (1992) in yapmış olduğu çalışmalar esas alınarak çok değişkenli polinomsal hipergrupların yapısı incelenmiştir. Ayrıca polinomsalların çeşitli sınıflarından ortaya çıkan yeni hipergruplar Koornwinder tarafından çalışılmıştır.

3.1. ÇOK DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLAR

K, ayrık topoloji ile donatılmış sayılabilir bir küme ve $d \in N$ olsun. $\mathbb{C}^d$ üzerinde polinomsalların bir kümesi

$$\{Q_x : x \in K\}$$

olsun.
$\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$Q \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_d]$$

polinomsallarının bir kümesi $\wp(n)$ olarak gösterilsin. Burada

$$deg(Q) \leq n$$

ve

$$K_n = \{x \in K : Q_x \in \wp(n)\}$$

olsun. $\forall n \in Z_+$ için $\wp(n)$ in bir tabanı

$$\{Q_x : x \in K\}.$$

$\forall x, y \in K$ için $Q_x Q_y$ çarpımı tek olarak gösterildiği kabul edilirse

$$Q_x Q_y = \Sigma_{w \in K} c(x, y, w) Q_w$$

olup $c(x, y, w) \in \mathbb{C}$ katsayılardır.

Tanım 3.1.1 $(K, *)$ hipergrubunun polinomsal hipergrup(d değişkenliler dahil) olarak adlandılırsa $\{Q_x : x \in K\}$ ailesi vardır öyleki $\forall x, y \in K$ ve $w \in K$

için $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ konvolüsyonu

$$\varepsilon_x * \varepsilon_y(\{w\}) := c(x, y, w)$$

ile tanımlanır. Hipergrup $\{Q_x : x \in K\}$ biçiminde veya $(K, *(Q_x))$ biçiminde gösterilir. Bazen K nın x elemanları ile $Q_x \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_d]$ polinomsallarını bir tutacağız. Özellikle $z_j \in K_1$ yazdığımızda $x \in K_1$ için $z_j = Q_x$ ve $z_j^- := Q_{x^-}$ $j \in \{1, 2, ..., d\}$ olarak gösterilir.

Önerme 3.1.1 Her $(K, *)$ polinomsal hipergrubu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(i) K nın semikarakterleri K^*kümesi,

$$\{\chi_z : z \in \mathbb{C}^d\}$$

kümesi ile çakışıktır. Burada χ_z , $\chi_z(x) := Q_x(z)$ $x \in K$ şeklinde tanımlanan ifade evalüasyon dönüşümünü göstermektedir.

(ii) χ_z ve z nin belirtilmesi ile elde edilen K üzerindeki sınırlı çarpımsal fonksiyonların kümesi $\Upsilon_b(K)$ ile

$$\{z \in \mathbb{C}^d : |Q_x(z) \leq 1, \forall x \in K|\}$$

kümesi homeomorfiktir.

(iii) K nın duali olan $K^\wedge$ kümesi

$$\{z \in \mathbb{C}^d : |Q_x(z) \leq 1, Q_{x^-}(z) = Q_x(z), x \in K\}$$

kümesine homeomorfiktir.

İspat. (i) $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ konvolüsyon tanımından $x, y \in K$ olmak üzere

$$Q_x(z)Q_y(z) = \sum_{w \in K} (\varepsilon_x * \varepsilon_y)(\{w\})Q_w(z)$$

lineerizasyonun terimleri içindedir. Ayrıca χ_z evaluasyon dönüşümü her $z \in \mathbb{C}^d$ için bir semikarakterdir. Karşıtını ispatlamak için K nın keyfi χ semikarakterini seçeriz ve bazı $z \in \mathbb{C}^d$ için χ_z formunun χ olduğunu gösteririz. $< K_1 >$, $\wp(n)$ e eşit olduğunda $z \in \mathbb{C}^d$ tek olur öyleki her $x \in K_1$ için $Q_x(z) = \chi(x)$. Tümevarımdan

$n := deg(Q_x)$ olup ispat tamamlanır.

Farzedelim her $x \in K_n$ için $Q_x(z) = \chi(x)$ olacak biçimde $z \in \mathbb{C}^d$ mevcut olsun.

$$< K_n >= \wp(n)$$

eşitliğinden

$$< K_1 K_n >=< \wp(1)\wp(n) >= \wp(n+1) =< K_{n+1} > .$$

Ve böylece her $x \in K_{n+1}$ için Q_x i $a_j \in \mathbb{C}$, $x_j \in K_1$ ve $y_j \in K_n$ için

$$Q_x = \sum_1^k a_j Q_{x_j} Q_{y_j}$$

biçiminde gösteririz.

$\mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_d]$ olmak üzere $M_c(K)$ uzayı tanımlanabilir. Buradan

$$\varepsilon_x = \sum_{j=1}^k a_j \varepsilon_{x_j} * \varepsilon_{y_j}$$

olduğu görülür ve

$$\begin{aligned}
\chi_x :&= \int_K \chi d\varepsilon_x \\
&= \Sigma_{j=1}^k a_j \int_K \chi d(\varepsilon_{x_j} * \varepsilon_{y_j}) \\
&= \Sigma_{j=1}^k a_j \chi(x_j)\chi(y_j) \\
&= \Sigma_{j=1}^k a_j Q_{x_j}(z) Q(_{y_j}(z) \\
&= Q_x(z)
\end{aligned}$$

hipotez sağlanır.

(ii)Direkt olarak $\Upsilon_b(K)$ nın tanımından sağlandığı görülür.

(iii)

$$\{z \in \mathbb{C} : |Q_x(z)| \leq 1, Q_{x^-}(z) = \overline{Q_x(z)} \quad \forall x \in K_1\}$$

kümesi sınırlıdır ve bu kümenin kapalı alt kümeleri

$$\{z \in \mathbb{C} : |Q_x(z)| \leq 1, Q_{x^-}(z) = \overline{Q_x(z)} \quad \forall x \in K_1\}$$

kompakttır. Dolayısıyla $z \to \chi_z$ dönüşümü bir homeomorfizm belirtir. ■

3.1.1. Polinomsal Hipergrupların Diğer Özellikleri

(i) Her K plinomsal hipergrubu bir normalizasyon kabul edilirse $x \in K$ için $z_0 \in \mathbb{C}^d$ vardır öyleki $Q_x(z_0) = 1$. K nın birim karakteri $1 := 1_x$ olup $\mathbb{C}^d$ nin birkaç elemanı karşılık gelir. Bu durumda polinomsal hipergruplarda z_0 noktası bir normalleştirme noktasıdır.

(ii) K polinomsal hipergrubun herhangi bir modifikasyonuda bir polinomsal hipergruptur. Bu gerçekten hareketle K nın pozitif semikarakteri χ olmak üzere $\forall x \in K$ için $z_0 \in \mathbb{C}^d$ vardır öyleki $\chi_x = Q_x(z_0)$ dır. Ve böylece

$$x \to \chi_z(x)^\wedge := \frac{\chi_z(x)}{\chi_x} = \frac{Q_x(z)}{Q_x(z_0)}$$

olduğu görülmüş olur.

(iii) $K^{(1)} \times K^{(2)}$ polinomsal hipergruplarından $K^{(1)} \times K^{(2)}$ içine bir polinomsal hipergrup aşağıdaki yolla yapılır. $K^{(1)}$ ve $K^{(2)}$ tanımıyla $\mathbb{C}^{d_1}$ ve $\mathbb{C}^{d_2}$ üzerindeki polinomsalların koleksiyonu

$$\{Q^{(1)}_{(x)} : x \in K^{(1)}\}$$

ve

$$\{Q^{(2)}_{(y)} : y \in K^{(2)}\}$$

olarak gösterilsin. Buradan $\mathbb{C}^{d_1+d_2}$ üzerindeki polinomsalların

$$\{Q^{(1)}_{(x)} \otimes Q^{(2)}_{(y)} : x, y \in K^{(1)} \times K^{(2)}\}$$

koleksiyonu $K^{(1)} \times K^{(2)}$ üzerinde bir polinomsal hipergrup yapısıdır. Sırasıyla $\mathbb{C}^{d_1}$ ve $\mathbb{C}^{d_2}$ içindeki z_1 ve z_2 $K^{(1)}$ ve $K^{(2)}$ nin normalleştirme noktası kabul edilirse $K^{(1)} \times K^{(2)}$ nin normalleştirme noktası $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^{d_1+d_2}$.
$\forall x \in K$ için $x^- \in K$ vardır öyleki $\forall z \in supp(\pi)$ için $Q_{x^-}(z) = \overline{Q_x(z)}$ olup $\pi \in M^1(\mathbb{C}^d)$.
$\forall x, y, w \in K$ için

$$\int_{\mathbb{C}^d} Q_x Q_y Q_w d\pi \geq 0.$$

Önerme 3.1.2 $\mathbb{C}^d$ içindeki polinomsalların kümesi $\{Q_x : x \in K\}$ olmak üzere $\pi \in M^1(\mathbb{C}^d)$ ortogonallik ile ilgili bir ölçü olup $\{Q_x : x \in K\}$ kümesi tarafından tanımlı K bir polinomsal hipergrup belirtir.

Tanım 3.1.2 K ayrık topoloji ile donatılmış bir küme olmak üzere $d \in N$ olsun. $\mathbb{C}^d$ üzerindeki polinomsalların bir kümesi

$$\{Q_x : x \in K\}$$

olsun. $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$Q \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_d]$$

polinomsallarının bir kümesi $\wp(n)$ olarak gösterilsin. Burada

$$deg(Q) \leq n$$

ve

$$K_n = \{x \in K : Q_x \in \wp(n)\}$$

olmak üzere $\wp(n)$ in bir tabanı

$$\{Q_x : x \in K\}.$$

$\forall x, y \in K$ için $Q_x Q_y$ çarpımının tek olduğu kabul edilirse

$$Q_x Q_y = \Sigma_{w \in K} c(x, y, w) Q_w$$

olup burada $c(x, y, w) \in \mathbb{C}$. $\forall x, y \in K$ ve $\varepsilon_x * \varepsilon_y$ konvolüsyonu tanımıyla

$$\{Q_x : x \in K\}$$

ailesi vardır öyleki

$$\varepsilon_x * \varepsilon_y(w) := c(x, y, w) \quad\quad w \in K.$$

Buradan

$$Q_x \in \mathbb{C}[z_1, z_2, ..., z_d]$$

ve $z_j = Q_x \quad\quad z_{j^-} = Q_{x^-} \quad\quad j \in \{1, 2, ..., d\}$ olmak üzere $(K, *)$ hipergrubunun polinomsal hipergrup olduğu görülür.

4. BİR DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLAR

4.1. BİR DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLAR

$deg(Q_n) = n$, bazı $x_0 \in R$ ve her $n \in Z_+$ için $Q_n(x_0) = 1$ özelliklerini sahip $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ polinomsallarının dizisi $\{\mathcal{Q}_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ olmak üzere

$$Q_m Q_n = \Sigma_{k\geq 0} c(m,n,k) Q_k \quad \forall m,n,k \in \mathbb{Z}_+ \quad c(m,n,k) \geq 0$$

anlamında negatif olmayan bir lineerizasyona imkan verir.
$\varepsilon_m * \varepsilon_n := \Sigma_{k\geq 0}\ c(m,n,k)\varepsilon_k$ konvolüsyonu dual uzayı

$$z_+^\wedge = \{\chi_x : x \in \mathbb{R}, sup_{n\geq 0}|Q_n(x)| < \infty\}$$

olan $M^b(\mathbb{Z}_+)$ yı polinomsal hipergrup (1- boyutlu)yapan $M^b(\mathbb{Z}_+)$ üzerinde bir konvolüsyona genişletir.
Burada

$$\chi_x(n) := Q(x) \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Önerme 4.1.1 $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\{n+1\} \subset supp(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) \subset \{n-1, n, n+1\}$$

şartını sağlayan $(\mathbb{Z}_+, *)$ hipergrubu bir polinomsal hipergruptur.
İspat. $(\mathbb{Z}_+, *)$ ın birim elemanı e ile gösterilsin.

$$\{e+1\} \subset supp(\varepsilon_1 * \varepsilon_n) = \{1\}$$

den $e = 0$ sonucu çıkar. Ayrıca tümevarım yoluyla $\forall m \leq n$ için

$$supp(\varepsilon_m * \varepsilon_n) \subset \{n-m, n-m+1, ..., n+m\}$$

olduğu görülür. $m = 1$ için önermedeki hipotezin bir kısmı doğrudur. Tümevarım yoluyla m yerine m+1 alındığında $n \geq m$ için

$$supp(\varepsilon_{m+1} * \varepsilon_n) \subset supp(\varepsilon_1 * \varepsilon_m * \varepsilon_n)$$

$$\subset \{1\} * \{n-m, n-m+1, ..., n+m\}$$

$$\subset \{n-m-1, n-m, ..., n+m+1\}.$$

$\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için $n^- = n$. Aksi halde bazı $n \in \mathbb{Z}_+$ için $n^- < n$ alındığında

$$0 \in supp(\varepsilon_{n^-} * \varepsilon_n)$$
$$\subset \{n-n^-, n-n^-+1, ..., n+n^-\}$$

olup yanlış olduğu açıktır. Bundan dolayı$(\mathbb{Z}_+, *)$ hermityen ve değişmelidir.
Sonuç olarak

$$A := \{\chi(1) : \chi \in \mathbb{Z}_+^\wedge\}$$

kümesi $\mathbb{R}$ nin kompakt alt kümesidir.
n. dereceden Q_n polinomlarının bir dizisini $(Q_n)_{n\geq 0}$ ile tanımladığımızda
$Q_0 = 1 \quad Q_1(x) = x$ ve

$$Q_1 Q_n = (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)(\{n+1\})Q_{n+1} + (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)(\{n\})Q_n + (\varepsilon_1 * \varepsilon_n)(\{n-1\})\}Q_{n-1}.$$

$(Q_n)_{n\geq 0}$ dizisinin yapısından

$$\chi(n) = Q_n(\chi(1)) \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Bundan dolayı A $\mathbb{Z}_+^\wedge$ üzerine örten kabul edilir ve sonsuzdur.
$\forall x \in A$ için $\chi_n = Q_n(\chi(1))$ olup buradan

$$Q_m(x)Q_n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} (\varepsilon_m * \varepsilon_n)(\{k\})Q_k(x)$$

$m, n \in \mathbb{Z}_+$. Fakat A sonsuz olduğundan $\forall x \in \mathbb{R}$ ye genişletilebilir. Böylece $(\mathbb{Z}_+, *)$ ın polinomsal hipergrup olduğu görülmüş olur. ■

Teorem 4.1.1 n. dereceden $Q_n \in \mathbb{R}[x]$ polinomsallarının $(Q_n)_{n\geq 0}$ dizisinin $\pi \in M_+^b(\mathbb{R})$ ortogonallik ölçüsüne göre sonsuz supportlu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartlardan herhangi birini sağlaması yeterlidir.
a) $\forall n \geq 1$ için $a_{n-1}c_n > 0$ ı sağlayan $(a_n)_{n\geq 0}$ $(b_n)_{n\geq 0}$ $(c_n)_{n\geq 1}$ reel dizileri vardır öyleki $(Q_n)_{n\geq 0}$ dizisi için

$$Q_0 = 1 \quad Q_1 = a_0 Id + b_0$$

$$Q_1 Q_n = a_n Q_{n+1} + b_n Q_n + c_n Q_{n-1}$$

b) $\forall n \geq 0$ ve$c_n^{'} > 0$ için $(b_n^{'})_{n\geq 0}$ ve $(c_n^{'})_{n\geq 0}$ reel dizileri vardır öyleki
$Q_0 \equiv 1 \quad Q_1 = Id - b_0^{'}$

$$Q_{n+1} = (Id - b_n^{'})Q_n - c_n^{'}Q_{n-1} \quad (n \geq 1)$$

c) $\forall n \geq 0$ ve $a_n^{''} > 0$ için $(a_n^{''})_n \geq 0$ ve $(b_n^{''})_n \geq 0$ reel dizileri vardır öyleki

$$Q_0 \equiv 1 \quad x = a_0^{''}Q_1(x) + b_0^{''}$$
$$xQ_n(x) = a_n^{''} - Q_{n+1}(x) + b_n^{''}Q_n(x) + a_{n-1}^{''}Q_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1 \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorem 4.1.2 $\mathbb{R}[x]$ içindeki polinomsalların $(Q_n)_{n\geq 0}$ dizisi bazı $\pi \in M_+^b(\mathbb{R})$ ye göre ortogonal ve her n için $Q_0 \equiv 1$ ve $deg(Q_n) = n$ iken sonsuz destekli olsun. $(Q_n)_{n\geq 0}$ negatif olmayan lineerizasyon kabul edilirse
$\forall m, n \in \mathbb{Z}_+$,$c(m,n,k) \geq 0$,$k \in \{0, 1, ..., m+n\}$ için

$$Q_mQ_n = \sum_{k=0}^{m+n} c(m,n,k)Q_k$$

ve

$$\sum_{k=0}^{m+n} c(m,n,k) = 1$$

olup $M^b(\mathbb{Z}_+)$ kümesindeki $*$ konvolüsyonu

$$\varepsilon_m * \varepsilon_n := \sum_{k=0}^{m+n} c(m,n,k)\varepsilon_k$$

tanımıyla $\mathbb{Z}_+$ içine etkisiz elemanı 0 ve birim involüsyonlu bir polinomsal hipergrup elde edilmiş olur.

İspat. $\forall k < |m-n|$ için c(m,n,k)=0 olması zorunludur. Çünkü
$k > m+n$ için

$$\int_{\mathbb{R}} (Q_mQ_n)Q_k d\pi = \sum_{l=0}^{m+n} c(m,n,l) \int_{\mathbb{R}} Q_lQ_k d\pi = 0$$

olurki bu eşitlik $m > n+k$ ve $n > m+k$ içinde sağlanır. Böylece $k < |m-n|$ iken

$$c(m,n,k) \int_R Q_k^2 d\pi = 0$$

ise c(m,n,k)=0 olduğu görülmüş olur. Diğer taraftan

$$\sum_{k=0}^{m+n} c(m,n,k) = 1$$

den $\varepsilon_m * \varepsilon_n$ ölçülerinin $M_c^1(\mathbb{Z}_+)$ ya ait olduğu sonucunu çıkarırız.

Hipergrup aksiyomlarının kalıcı doğruluğunu kanıtlamak için $0 \in \mathbb{Z}_+$ nın etkisiz eleman olduğunu ve $\mathbb{Z}_+$ içinde $n \to n$ involüsyonu sağladığını not edelim.

Böylece $m, n \in \mathbb{Z}_+$ için $0 \in supp(\varepsilon_m * \varepsilon_n)$ olmasının ancak ve ancak $m = n$ olduğunu göstermek kalır. Fakat $m \neq n$ için $c(m,n,0) = 0$ olup $0 \notin supp(\varepsilon_m * \varepsilon_n)$ olduğu görülür.

Ayrıca aşağıdaki eşitlikte $m = n$ ve $k = 0$ iken

$$c(m,n,0)\pi(\mathbb{R}) = c(n,n,0)\int_R Q_0^2 d\pi = \int_R Q_n^2 Q_0 d\pi = \int_R Q_n^2 d\pi > 0$$

olur ki bu durumda $c(n,n,0) > 0$ olduğunu ve böylece $0 \in supp(\varepsilon_m * \varepsilon_n)$ olduğunu gösterir.

$$\sum_{k=0}^{m+n} c(m,n,k) = 1$$

eşitliğinden x_0 noktasının $(Q_n)_{n\geq 0}$ için bir normalleştirme noktası olduğu açıktır.

Her bir $n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$a_n = c(1,n,n+1)$$

$$b_n = c(1,n,n)$$

$$c_n = c(1,n,n-1)$$

yazılır. Buradan $\forall n$ için $a_n, c_n > 0$ ve $b_n \geq 0$ olduğu kolayca görülür. Ve böylece

$$c(m,n,m+n) = \frac{c(m-1,n,m+n-1)c(1,m+n-1,m+n)}{c(1,m-1,m)}$$

$$c(m,n,n-m) = \frac{c(m-1,n,n-m+1)c(1,n-m+1,n-m)}{c(1,m-1,m)}$$

■

Teorem 4.1.3 Bir önceki teoremdeki gibi tanımlı bir polinomsal hipergrup $(\mathbb{Z}_+, *)$ olsun. $m \geq n$ için

$$c(m-n,n,m) = \frac{a_{m-1}a_{m-2}...a_n}{a_{m-n-1}a_{m-n-2}...a_1}$$

ve

$$c(m-n,m,n)=\frac{c_{n+1}c_{n+2}...c_m}{a_{m-n-1}a_{m-n-2}...a_1}.$$

İspat.

$$c(m,n,m+n)=\frac{c(m-1,n,m+n-1)c(1,m+n-1,m+n)}{c(1,m-1,m)}$$

özdeşliği yardımıyla

$$\begin{aligned}c(m-n,n,m)&=\frac{c(m-n-1,n,m-1)c(1,m-1,m)}{c(1,m-n-1,m-n)}\\&=c(m-n-1,n,m-1)\frac{a_{m-1}}{a_{m-n-1}}\\&=\frac{a_{m-1}a_{m-2}...a_{n+1}a_n}{a_{m-n-1}a_{m-n-2}...a_1}\end{aligned}$$

olduğu gösterilirmiş olur. Benzer şekilde

$$c(m,n,n-m)=\frac{c(m-1,n,n-m+1)c(1,n-m+1,n-m)}{c(1,m-1,m)}$$

özdeşliği yardımıyla

$$c(m-n,m,n)=\frac{c_{n+1}c_{n+2}...c_m}{a_{m-n-1}a_{m-n-2}...a_1}$$

olduğu gösterilir.

$n\geq 1$ iken $\mathbb{R}_+$ içinde $a_n>0$,$c_n>0$ ve $a_n+b_n+c_n=1$ koşullarını sağlayan $(a_n)_{n\geq1}$,$(b_n)_{n\geq1}$ ve $(c_n)_{n\geq1}$ dizilerinden meydana gelen iki önemli polinomsal dizi tipi vardır. ■

4.1.1. Polinomsal Dizinin [L] Tipi

$a_0>0$,$b_0\in\mathbb{R}$ ve $a_0+b_0=1$ olsun. L tipi $(Q_n)_{n\geq0}$ polinomsal dizisi

$$Q_0:=1$$

$$Q_1:=\frac{1}{a_0}(Id-b_0)$$

$$Q_1Q_n=a_nQ_{n+1}+b_nQ_n+c_nQ_{n-1}\qquad(n\geq1)$$

biçiminde gösterilir.

4.1.2. Polinomsal Dizinin [V] Tipi

$\alpha, \gamma > 0$ iken $\alpha := \lim a_n$, $\beta := \lim b_n$, $\gamma := \lim c_n$ nin mevcut olduğu farzedilsin.
V tipi $(Q_n)_{n\geq 0}$ polinomsal dizisi

$$Q_0 := 1$$

$$Q_1 := 2\sqrt{\alpha\gamma} Id + \beta$$

$$Q_1 Q_n = a_n Q_{n+1} + b_n Q_n + c_n Q_{n-1} \qquad n \geq 1$$

biçiminde gösterilir. [L] tipi veya [V] tipi dizilerinin normalleştirme noktaları sırasıyla

$$x_0 := 1$$

yada

$$x_0 := \frac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

Teorem 4.1.4 $\forall n \geq 1$ için $a_{n-1}c_n > 0$ ı sağlayan $(a_n)_{n\geq 0}$ $(b_n)_{n\geq 0}$ $(c_n)_{n\geq 1}$ reel dizilerin ortogonal polinomsal bir dizisi $(Q_n)_{n\geq 0}$ olsun. Öyleki $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ ve $(c_n)_{n\geq 0}$ reel dizileri aşağıdaki şartları sağlar.
a)$\forall n \geq 0$ için $a_n \geq c_n \geq 0$.
b)$(b_n)_{n\geq 0}, (c_n)_{n\geq 0}$ ve $(a_n + c_n)_{n\geq 0}$ artandır.
$\forall m, n, k \in \mathbb{Z}_+$ için $c(m,n,k) \geq 0$ iken $(Q_n)_{n\geq 0}$

$$Q_m Q_n = \sum_{k=|m-n|}^{m+n} c(m,n,k) Q_k$$

formunun negatif olmayan lineerizasyonu kabul edilir ve bundan dolayı $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ bir polinomsal hipergrup olarak tanımlanır. $(Q_n)_{n\geq 0}$ negatif olmayan lineerizasyon olması şartıyla
c)$c_n \geq 0$
d)$(a_n)_{n\geq 0}$ ve $(c_n)_{n\geq 0}$ artandır.

Teorem 4.1.5 $\mathbb{R}_+$ içindeki $(a_n)_{n\geq 1}$,$(b_n)_{n\geq 1}$ ve $(c_n)_{n\geq 1}$ diziler olmak üzere $\forall n \geq 1$ için $a_n, c_n \geq 0$ ve $a_n + b_n + c_n = 1$. Bu dizilerin Askey koşullarını sağladığını varsayalım.

(a)$a_1c_2 \geq c_1$

(b)$a_nc_{n+1} \geq a_{n-1}c_n$

(c)$\forall n \geq 2$ için $b_n \geq b_{n-1}$

(i)$\alpha, \gamma > 0$ iken $\alpha := \lim a_n$, $\beta := \lim b_n$,$\gamma := \lim c_n$ limitleri vardır.

(ii)$a_n \geq c_n \quad \forall n \geq 1$

(iii)[V] tipinin $(Q_n)_{n\geq 0}$ polinomsal dizisi $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ polinomsal hipergrubunu oluşturur.

İspat. $\forall n \geq 1$ için

$$c_{n+1} = \frac{c_{n+1}a_n}{1 - b_n - c_n}.$$

(a), (c) de uygulandığında

$$c_1 \leq c_2 \leq ... \leq \lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$$

elde edilir. Bundan dolayı $\forall n \geq 1$ için $a_n = 1 - b_n - c_n$ eşitliği geçerli olmakla birlikte (c) de (a) anlamına gelir ve

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$$

$(a_n + c_n)_{n\geq 1}$ azalan ve $(a_{n-1}c_n)_{n\geq 1}$ artan olmasından dolayı $\alpha \geq \gamma > 0$ elde ederiz ve bundan dolayı $n \geq 1$ iken $a_n \geq c_n$. Böylece bu durum (i) ve (ii) ye karşılık gelir. $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ dizilerinden meydana gelen $(Q_n)_{n\geq 0}$ dizisi $[V]$ tipinin $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ polinomsal hipergrubudur. ■

4.1.3. Levitan-Plancherel Teoremi

$K^\wedge$ üzerinde negatif olmayan bir π_k ölçüsü vardır öyleki
$\forall f \in L^1(K) \cap L^2(K) \;\; ve \;\; supp(\pi_k) = S$ için

$$\int_K |f|^2 d\omega_k = \int_{K^\wedge} |\widehat{f}|^2 d\pi_k.$$

4.1.4. Favard Teoremi

Başlangıç şartları $q_0(t) = C \neq 0$, $q_{-1}(t) \equiv 0$ biçiminde olan polinomsalların bir kümesi $(q_n)_n$ olsun. Ve terimlerinde sıfır olmayan reel bir dizi $(a_n)_n$ ve reel bir dizi $(b_n)_n$ olmak üzere üç terimli bağıntı

$$tq_n = a_{n+1}q_{n+1} + b_n q_n + a_n q_{n-1}.$$

Buradan ayrık olmayan pozitif bir μ ölçüsü vardır öyleki $(q_n)_n$ kümesi μ tarafından tanımlanan iç çarpım ile ilgili ortonormaldir.

Teorem 4.1.6 (i)
$[L]$ tipinin bir $(Q_n)_n \geq 0$ polinomsal dizisi ile tanımlı bir polinomsal hipergrup $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n)$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_+$ nın Haar ölçüsü $\omega_{\mathbb{Z}_+}$ ile gösterilmek üzere

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) := \begin{cases} 1 & \text{n=0} \\ \frac{1}{c_1} & \text{n=1} \\ \frac{\prod_{k=1}^{n-1}}{\prod_{k=1}^{c_2}} & n \geq 2 \end{cases}$$

(ii)
Değişmeli Banach cebri

$$L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+}) := \{f : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{C} : \Sigma_{n\geq 0} \mid f(n) \mid \omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) < \infty\}$$

ile involüsyonu $n \to f^{\sim}(n) = \overline{f(n)}$ ve birim elemanı $1_{\mathbb{Z}_+}$ olan $f \to f\omega_{\mathbb{Z}_+}$ dönüşümü altında $M^b(\mathbb{Z}_+)$ Banach cebri ile tanımlanabilir.
(iii)
Gelfand topolojisi altında $\chi \to h_\chi$

$$h_\chi(f) := \sum_{n\geq 0} \chi(n) f(n) \omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\})$$

dönüşümüyle donatılmış

$$\Delta_{s^{\sim}}(L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})) = \{h \in L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})' : h \neq 0, h(f * g^{\sim}) = h(f)\overline{h(g)} \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})\}$$

uzay yapısı ile $\mathbb{Z}_+$ nın $\mathbb{Z}_+^\wedge$ duali tanımlanabilir. $\mathbb{Z}_+^\wedge$ kompakt açık topoloji ile birlikte kompakttır.

(iv)

Kompakt açık topoloji ile donatılmış $n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$\chi \rightarrow \chi_x$$

$$\chi_x(n) := Q_n(x)$$

dönüşümü ile verilen $\mathbb{R}$ den $\mathbb{Z}_+$ nın semikarakterlerinin $\mathbb{Z}_+^*$ uzayı üzerine bir homeomorfizm vardır.

$$D_s := \{x \in \mathbb{R} : |Q_n(x)| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$

kompakt uzayı için $\mathbb{Z}_+^\wedge$ homeomorfiktir.

(v)

$D_{_s} \subset [1 - 2a_0, 1]$.

(vi)

$\mathbb{Z}_+$ nın Plancherel ölçüsü ile ortogonolizasyon ölçüsü olan π çakışıktır.

İspat. (i)

$\omega_K(\{x\}) = ((\varepsilon_{x^-} * \varepsilon_x)(\{e\}))^{-1}$ eşitliğinden her $n \in \mathbb{Z}_+$ için $\mathbb{Z}_+$ nın $\omega_{\mathbb{Z}_+}$ Haar ölçüsü tanımını ve $Q_m Q_n = \sum_{k=0}^{m+n} c(m,n,k) Q_k$ negatif olmayan lineerizasyon özelliğini kullandığımızda

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) := \frac{1}{(\varepsilon_n * \varepsilon_n)(\{0\})} = \frac{1}{c(n,n,0)}$$

elde edilir. $\omega_{\mathbb{Z}_+}$ nın tek olduğunu bir kez daha tespit ettiğimize göre buradan

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{0\}) = 1$$

kümesini elde ederiz.

$$c(m,n,n-m) = \frac{c(m-1,n,n-m+1)c(1,n-m+1,n-m)}{c(1,m-1,m)}$$

eşitliğinde $m \in \mathbb{Z}_+$ üzerine tümevarım uygulandığında $m \geq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq m$ için geçerli

$$c(m,n,n-m) = \frac{\prod_{k=1}^{m} c(1,n-k+1,n-k)}{\prod_{k=2}^{m} c(1,k-1,k)}$$

formülünü oluşturabiliriz.

(ii)

$\|f\|_1 < \infty$ ve $\|g\|_p < \infty$ iken $\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ özelliğini kullanarak

$$f \to f^{\sim}(n) := \overline{f(n)}$$

involüsyonu ile $L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$ değişmeli Banach cebri olup, birim eleman $1_{\mathbb{Z}_+}$. Buradan $f \to f\mu$ dönüşümü altında

$$L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$$

ve

$$M^b(\mathbb{Z}_+)$$

uzayları tespit edilebilir.

(iii)

$\chi \to F_x$ dönüşümü $\Upsilon_b(K)$ ve $\Delta(L^1(K))$ arasında ve $K^\wedge$ ve $\Delta^{\sim}(L^1(K))$ arasında örten bir dönüşümdür. Bundan dolayı $f \in L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$ iken

$$\chi \to h_\chi$$

$$h_\chi(f) = \sum_{n \geq 0} \chi(n) f(n) \omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\})$$

dönüşümüyle $L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$ hipergrubunun $\Delta_{\tilde{s}}(L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$ uzay yapısı ile $\mathbb{Z}_+$ nın $\mathbb{Z}_+^\wedge$ dualinin tanımını elde ederiz. $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ içindeki çarpım topolojisi ile $\mathbb{Z}_+^\wedge$ üzerine indirgenmiş topolojiye karşılık gelen $\mathbb{Z}_+^\wedge$ üzerindeki ayrık kompakt açık topoloji $\mathbb{Z}_+$ olup $\mathbb{Z}_+^\wedge$ kompakttır.

(iv)

(iii) deki gibi $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ den indirgenmiş çarpım topolojisi ile donatılmış $\mathbb{Z}_+^\wedge$ yı hesaba katalım. Bu durumda $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$Q_1(x) = \frac{1}{a_0}(x - b_0).$$

$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 \neq x_2$ iken

$$\chi_{x_1}(1) = Q_1(x_1) \neq Q_1(x_2) = \chi_{x_1}(1)$$

olur ki bundan dolayı $\chi_{x_1} \neq \chi_{x_2}$.

Tersine $\chi \in \mathbb{Z}_+^*$ ve $x = x(\chi) := a_0\chi(1) + b_0$ olsun. Buradan $\chi(0) = 1 = \chi_x(0)$ ve

$\chi(1) = \chi_x(1)$. Şimdide $\phi := \chi$ ve $\phi = \chi_x$ için

$$c(n,1,0)\phi(n+1) + \sum_{k=1}^{m+n} c(n,1,k)\phi(n+1-k) = \phi(n*1) = \phi(n)\phi(1)$$

denklemini göz önünde bulunduralım. Buradan $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için $\chi(n) = \chi_x(n)$ sonucu sağlanır. Böylece

$$x \to \chi_x$$

dönüşümünün $\mathbb{R}$ den $\mathbb{Z}_+^*$ üzerine örten olduğunu elde etmiş oluruz.

$$x \to (Q_n(x))_{n\geq 0}$$

dönüşümleri $\mathbb{R}$ den $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}_+}$ içine ve

$$x \to \chi_x$$

dönüşümüde $\mathbb{Z}_+^*$ dan $\mathbb{R}$ içine süreklidir. Bundan dolayı $\mathbb{Z}_+^*$ $\mathbb{R}$ ye homeomorfiktir ve

$$\mathbb{Z}_+^\wedge = \{\chi \in \mathbb{Z}_+^* : |\chi(n)| \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

D_s e homeomorfiktir. (iii) den D_s in kompakt olduğu görülmüş olur.

(v)

K üzerinde lokal sınırlı ölçülebilir bir fonksiyon χ ile gösterilirse

(i) $\chi(e) = 1$

(ii) $\chi(x*y) = \chi(x)\chi(y) \quad \forall\, x, y \in K$

Ek olarak $\forall x \in K$ için $\chi(x^-) = \overline{\chi(x)}$ ise χ ye semikarakter adı verilir. Semikarakter tanımından $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$sup_{n\in\mathbb{N}}|Q_n(x)| = \|\chi_x\|_\infty = \chi_x(1) = 1$$

elde ederiz. Böylece Q_1 in tanımıyla birlikte $a_0 + b_0 = 1$ elde edilir ve

$$D_s \subset [1 - 2a_0, 1]$$

olduğu görülür.

(vi)

Bu Levitan-Plancherel teoreminin sonucudur. ■

Teorem 4.1.7 Normalleştirme noktası

$$x_0 := \frac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}} \geq 1$$

olan [V] tipinin normlanmış polinomsal dizisi $(Q_n)_{n\geq 0}$ ile tanımlı bir polinomsal hipergrup $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ olsun.
Bu durumda aşağıdaki iddialar sağlanır.
(i) $\alpha \geq \gamma$.
(ii) $L \subset [-1-\frac{\beta}{\alpha\gamma}, -1[$ iken

$$supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) = [-1,1] \cup L, \qquad \mathbb{Z}_+^{\wedge} = [-x_0, x_0] \cup L$$

sayılabilir kümedir öyleki L nin limit noktası sadece -1 dir. Ayrıca sırasıyla $supp(\pi_{\mathbb{Z}_+})$ nın pozitif karakteri 1 ve birim karakteri x_0 reel sayılarıdır.
(iii) $\beta = 0$ olduğunda

$$supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) = [-1,1] \;\; ve \;\; \mathbb{Z}_+^{\wedge} = [-x_0, x_0].$$

(iv) $\alpha = \gamma$ sadece ve sadece $1 \in supp(\pi_{\mathbb{Z}_+})$ iken $supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) = \mathbb{Z}_+$.
(v) $\mathbb{Z}_+$ üzerindeki bütün pozitif karakterlerinin kümesi ile $[1, x_0]$ aralığı çakışıktır ve $[1, x_0[$ içindeki karakterler sıfıra yakınsar.

İspat. (i)
$\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(n) = \frac{1}{c(n,n,0)} \geq 1$$

ifadesi $\mathbb{Z}_+$ üzerindeki $\omega_{\mathbb{Z}_+}$ Haar ölçüsünün açık bir biçimidir. Normlanmış polinomsalların dizisi $(\tilde{Q}_n)_{n\geq 0}$ olmak üzere

$$\tilde{Q}_n := (\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}))^{\frac{1}{2}} Q_n$$

$\pi_{\mathbb{Z}_+}$ Plancherel ölçüsüne göre ortogonaldir. $\tilde{Q}_n$ polinomsalları $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$x\tilde{Q}_n(x) = \frac{\sqrt{a_n c_{n+1}}}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\tilde{Q}_{n+1}(x) + \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}(b_n\beta)\tilde{Q}_n(x) + \frac{\sqrt{a_{n-1}c_n}}{2\sqrt{\alpha\gamma}}\tilde{Q}_{n-1}(x)$$

eşitliğini sağlar. Böylece $(\tilde{Q}_n)_{n\geq 0}$ dizisi M(0,1) sınıfına aittir. [Nevai 1979]

$$D_s = [-x_0, x_0] \cup L \;\; ile \;\; x_0 = \frac{1-\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

eşitliğini göstermek için $[-1,1] \cup L \subset supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) \subset D_s$ olduğunu dikkate alalım. Ve $\mathbb{Z}_+^{\wedge} \backslash supp(\pi_{\mathbb{Z}_+})$ nın sabit bir elemanı x olsun.

Buradan

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{Q_{n+1}(x)}{Q_n(x)}| = (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2}\lim_{n\to\infty}|\frac{\tilde{Q}_{n+1}(x)}{\tilde{Q}_n(x)}|$$
$$= (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2}(|x| + (x^2-1)^{1/2})$$
$$\begin{cases} > 1 & |x| > x_0 \\ < 1 & |x| < x_0 \end{cases}$$

olur ve bundan dolayı $D_s \subset [-1,1] \cup L$. [Nevai 1979]

$\chi \in K^\wedge$ ve $\Psi \in supp(\pi_K)$ olsun. $\forall x \in K$ için $|\Psi(x)| \leq \chi(x)$. $supp(\pi_K)$ nın bir tane pozitif karakteri var olup kompakt hipergrup için tek pozitif karakter 1 dir. Böylece

$$L \subset supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) \subset \{x \in \mathbb{R} : |Q_1(x)| \leq Q_1(1)\} = [-1 - \frac{\beta}{\sqrt{\alpha\gamma}}, 1]$$

olur ve (ii) nin bütün durumlarının ispatı tamamlanmış olur.

(iii) ve (iv), (ii) nin doğrudan sonuçlarıdır.

(v)

Bunu göstermek için öncelikle yukardaki kümelerin eşitliğinde $x_0 > 1$ iken $[1, x_0[$ içindeki karakterlerin sonsuza yakınsadığını belirtmekte fayda vardır. Diğer taraftan $\forall n \in \mathbb{Z}_+$ için $Q_n(x) > 0$ ve $x \geq 1$ için $supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) \subset]-\infty, 1]$ olduğunu biliyoruz. Böylece geriye $x \geq 1$ iken $Q_n(x) > 0$ ve olduğunu göstermek kalır. Her değişmeli K hipergrubunda Plancherel ölçüsü π_K nın desteği içinde kesin olarak χ_0 pozitif karakteri mevcuttur. Ve χ_0 noktasının $supp(\pi_K)$ içinde izole nokta olması için sadece ve sadece K nın kompakt olması ile mümkündür. (ii) de bu karaktere karşılık 1 olduğunu varsaydığımızda $x \notin supp(\pi_{\mathbb{Z}_+})$ olduğu görülür. Ayrıca $x < -1$ alındığında

$$\lim_{n\to\infty}\frac{Q_{n+1}(x)}{Q_n(x)} = (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2}\lim_{n\to\infty}|\frac{\tilde{Q}_{n+1}(x)}{\tilde{Q}_n(x)}|$$
$$= (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2}(-x - (x^2-1)^{1/2}) < 0$$

olup varsayım ile çelişmektedir. [Nevai 1979] ■

Sonuç 4.1.1 $\forall x \in supp(\pi_{\mathbb{Z}_+})\backslash[-1,1]$ için aşağıdaki durumlar denktir.

(i) $x < -x_0$

(ii) $D_s \cong \mathbb{Z}_+^\wedge$ içinde x izoledir.

(iii) $\chi_x \in L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$

İspat. Teorem 4.1.7 (ii) maddesinden $(i) \Leftrightarrow (ii)$ olduğu açıktır. Şimdi

$$x \in supp(\pi_{\mathbb{Z}_+})\backslash[-1,1]$$

iken

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{\omega_{\mathbb{Z}_+}\{(n+1)\}}{\omega_{\mathbb{Z}_+}\{(n)\}} \left|\frac{Q_{n+1}(x)}{Q_n(x)}\right| &= (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\tilde{Q}_{n+1}(x)}{\tilde{Q}_n(x)}\right| \\ &= (\frac{\gamma}{\alpha})^{1/2} (|x| + (x^2-1)^{1/2})^{-1}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} > 1 & x \in]-x_0, -1[\\ < 1 & x < -x_0 \end{cases}$$

elde edilir. [Nevai 1979]

Buradan $x \neq x_0$ için $(i) \Leftrightarrow (iii)$ denk olduğu görülür. Eğer $-x_0$, D_s içinde izole değilse $\chi_{-x_0} \notin L^1(\mathbb{Z}_+, \omega_{\mathbb{Z}_+})$ olduğunu elde ederiz. ■

Tanım 4.1.1 $(\mathbb{Z}_+, *)$ polinomsal hipergrubu bir Laplace gösterimi ise herhangi $n \in \mathbb{Z}_+$ için katsayılar $h(n,k)(k \in \mathbb{Z}_+, k \leq n)$ olmak üzere

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} h(n,k) T_k$$

biçimiminde $[-1,1]$ üzerinde T_k 1. çeşit Chebychev polinomsallarının negatif olmayan tek gösterimidir. [1]

Teorem 4.1.8 [V] tipinin her polinomsal hipergrubu bir Laplace gösterimi belirtir.

İspat. $\mathbb{R}$ içindeki diziler $(A_n)_{n\geq 0}$, $(B_n)_{n\geq 0}$ ve $(C_n)_{n\geq 0}$ olmak üzere

$$Q_{-1} := 0 \quad , \quad Q_0 := 1$$

[1] Lasser,R.;Rosler,M. *A note on property T of orthogonal polynomials.* Archiv für.Math.**1993**,459-463.

ve

$$xQ_n(x) = A_n Q_{n+1}(x) + B_n Q_n(x) + C_n Q_{n-1}(x) \quad (n \geq 0)$$

ile tanımlanmış $\mathbb{R}[x]$ içindeki n.dereceden polinomsalların bir dizisi $(Q_n)_{n\geq 0}$ olsun.Favard teoreminden Q_n polinomsallarının $\pi \in M_+^b(\mathbb{R})$ ortogonolizasyon ölçüsüne göre ortogonal olması için (sonsuz desteğe sahip) sadece ve sadece $\forall n \geq 1$ için $A_{n-1}C_n > 0$ olmasıdır. π ye göre ortonormalizasyon belirten ve $(Q_n)_{n\geq 0}$ polinomsal dizisinden oluşan polinomsal dizi $(R_n)_{n\geq 0}$ olsun. Genellemeyi bozmadan $\pi \in M^1(\mathbb{R})$ seçebiliriz. $n \geq 0$ için

$$\mathcal{K}(n) := (\int_{\mathbb{R}} Q_n^2 d\pi)^{-1}$$

iken $R_n = \mathcal{K}(n)Q_n$ elde ederiz ve tekrardan $(R_n)_{n\geq 0}$ dizisi $x \in \mathbb{R}$ iken

$$R_0(x) = 1 \quad , xR_n(x) = \lambda_n R_{n+1}(x) + \beta_n R_n(x) + \lambda_{n-1} R_{n-1}(x)$$

olur.

Burada $\forall n \geq 0$ için

$$\lambda_n := (A_n C_{n+1})^{1/2} \quad ve \quad \beta_n := B_n.$$

$a, b \in \mathbb{R}$ için ortogonolizasyon ölçüsü π, M(a,b) sınıfına ait olup $2 \lim \lambda_n = b$ ve $\lim \beta_n = a$. $\pi \in M(a,b)$ ve $b > 0$ iken

$$\lim_{n\to\infty} c(m+n, m, k) \frac{\mathcal{K}(m)\mathcal{K}(m+n)}{\mathcal{K}(k)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{a-b}^{a+b} Q_k(x) T_n(\frac{x-a}{b})[b^2 - (x-a)^2]^{-1/2} \lambda(dx)$$

vasıtasıyla birbiriyle ilişkili

$$Q_m Q_n = \sum_{k=|m-n|}^{m+n} c(m, n, k) Q_k$$

gösterimindeki lineerizasyon katsayılarını ve Q_n polinomsallarının

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} h(n, k) T_k$$

gösterimindeki bağlantı katsayılarını elde ederiz.

Bu limit ilişkisinden şunları elde ederiz.

$\forall m,n,k \in \mathbb{Z}_+$ için $c(m,n,k) \geq 0$ ve $\pi \in M(0,1)$ ise $\forall n,k \in \mathbb{Z}_+$ ve $k \leq n$ için $h(n,k) \geq 0$.

$a \leq 0$ ve $0 < b \leq 1$ için $\pi \in M(a,b)$ ve $\forall m,n,k \in \mathbb{Z}_+$ için $c(m,n,k) \geq 0$ ise $\forall n,k \in \mathbb{Z}_+$ ve $k \leq n$ için $h(n,k) \geq 0$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$Q_0(x) := 1$$

$$Q_1(x) := 2\sqrt{\alpha\gamma x} + \beta$$

$$Q_1(x)Q_n(x) = a_n Q_{n+1}(x) + b_n Q_n(x) + c_n Q_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

ile verilen $(Q_n)_n \geq 0$ polinomsal dizisi ile [V] tipinin bir polinomsal hipergrubu $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n)$ olduğunu farzedelim. $n \geq 1$ için

$$A_0 := \frac{1}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

$$B_0 := -\frac{\beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

$$A_n := \frac{a_n}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

$$B_n := \frac{b_n - \beta}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

$$C_n := \frac{c_n}{2\sqrt{\alpha\gamma}}$$

yazıldığında π ortogonolizasyon ölçüsünün M(0,1) e ait olduğu görülür. $n \geq 0$ iken $Q_n(1) > 0$ olacak biçimde $(Q_n)_{n\geq 0}$ dizisini varsayalım.

$S_n := \frac{Q_n}{Q_n(1)}$ polinomsallarının $(S_n)_{n\geq 0}$ dizisi renormalizasyonu sağlar ve

$$S_m S_n = \sum_{k=|m-n|}^{m+n} d(m,n,k) S_k$$

bir lineerizasyon kabul edilir.

■

Teorem 4.1.9 [L] tipinin polinomsal bir hipergrubu $(\mathbb{Z}_+, *(S_n))$ ve $a := \lim \beta_n \geq 0$ ve $b := 2lim\lambda_n \in]0,1]$ için $\pi \in M(a,b)$ olsun. Bu durumda $(\mathbb{Z}_+, *(S_n))$ bir Laplace gösterimidir.

Teorem 4.1.10 4.1.8 teoreminin ispatında gösterilen ortogonal polinomsal bir dizi $(R_n)_{n\geq 0}$ olmak üzere

(a) $(\lambda_n)_{n\geq 0}$ ve $(\beta_n)_{n\geq 0}$ dizileri azalandır.

(b) $Q_n = \sum_{k=0}^{n} h(n,k)T_k$ gösterimi $n, k \in \mathbb{Z}_+$ ve $k \leq n$ için bağlantı katsayıları $h(n,k) \geq 0$. Diğer taraftan

$$Q_m Q_n = \sum_{k=|m-n|}^{m+n} c(m,n,k) Q_k$$

içindeki c(m,n,k) lineerizasyon katsayıları negatif değildir.

4.1.5. Ortagonal Polinomsallar

$\{P_n(x)\}$ polinomsallarının ortogonal polinomlar sınıfı [a,b] değer kümesinde tanımlıdır.

$$\int_a^b \omega(x) P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{mn} c_n$$

olup burada $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu ve δ_{mn} kronecker deltasıdır.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & \text{m=n} \end{cases}$$

Ağırlık fonksiyonu $\omega(x)$ ile gösterilip (a,b) aralığında negatif olmayan, integrallenebilen ve integrali pozitif olan fonksiyondur.

$$< f, g >_\omega = \int_a^b f(x) g(x) \omega(x) dx.$$

$$c_n = \int_a^b \omega(x) [P_n(x)]^2 dx$$

olmak üzere

Polinomsal	Aralık	w(x)	c_n
Chebsyhev 1.Tür $T_n(x)$	[-1,1]	$(1-x^2)^{-1/2}$	$\begin{cases} \pi & \text{n=0} \\ \frac{\pi}{2} & \text{diğer durumlar} \end{cases}$
Chebyshev 2.Tür $U_n(x)$	[-1,1]	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{\pi}{2}$
Gegenbauer $C_n^{(\lambda)}(x)$	[-1,1]	$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$	$\begin{cases} \frac{2^{1-2\alpha}\pi\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2} & \alpha \neq 0 \\ \frac{2\pi}{n^2} & \alpha = 0 \end{cases}$
Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	(-1,1)	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$	h_n

Burada

$$h_n = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \qquad \Gamma(n) = (n-1)!$$

5. BİR DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLARIN BAZI ÖRNEKLERİ

5.1. BİR DEĞİŞKENLİ POLİNOMSAL HİPERGRUPLARIN BAZI ÖRNEKLERİ

Bu bölümde bir değişkenli polinomsal hipergrupların bazı sınıfları sistematik bir biçimde ele alınacaktır. Dual uzayları tanımlayıp, Haar ve Plancherel ölçüleri hesaplanacaktır. [Voit(1990),Soardi(1989) ve Dunkl(1979)]

5.1.1. Jacobi Polinomsalları

Jacobi diferensiyel denklemi

$$(1-x^2)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)x)y' + n(n+\alpha+\beta+1)y = 0$$

denkleminin çözülmesiyle Jacobi polinomsalları elde edilir.
Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\omega^n = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-\omega+R)^{-\alpha}(1+\omega+R)^{-\beta}$$

olup burada $R = R(x,\omega) = (1 - 2x\omega + \omega^2)^{1/2}$.

$$P_n^{\alpha,\beta}(z) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1(-n, 1+\alpha+\beta+n; \alpha+1; \frac{1-z}{2})$$

biçiminde gösterilir ve

$$(\alpha+1)_n$$

Pochhammer sembolü olarak adlandırılır. Pochhammer sembolü

$$(x)_n = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

ve

$$(x)^n = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

biçiminde ifade edilir. Ayrıca ${}_2F_1$ hipergeometrik fonksiyon olarak adlandırılır ve ${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$
Ortogonalliği $\alpha > -1, \beta > -1$ ve ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ olmak üzere [-1,1] aralığındaki ortogonalliği

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\delta_{mn}$$

5.1.2. Jacobi Polinomsal Hipergrupları

$(\alpha,\beta) \in V := \{(\alpha',\beta') \in \mathbb{R}^2 : \alpha' \geq \beta' > -1 \;\; ve \;\; (\alpha'+\beta'+4)^2(\alpha'+\beta'+6) \geq (\alpha'-\beta')^2[(\alpha'+\beta'+1)^2 - 7(\alpha'+\beta'+1) - 24]\}$
olmak üzere $n \geq 1$ iken

$$a_n := \frac{2(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+1)(\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+1)2(\alpha+1)}$$

$$b_n := \frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+1)}(1 - \frac{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}$$

$$c_n := \frac{2n(n+\beta)(\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)2(\alpha+1)}$$

olacak biçimde tanımlansın.

Bu dizilerin oluşturduğu polinomsal hipergrup $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ olmak üzere α ve β parametreleri ile $Q_n(1) = 1$ şartını sağlayan n. Jacobi polinomsalları $Q_n = Q_n^{\alpha,\beta}$ biçiminde gösterilir. $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ parametreleri ile tanımlı $Q_n^{\alpha,\beta}$ Jacobi polinomsallarının dizisi $(Q_n^{\alpha,\beta})_{n\geq 0}$ olmak üzere $\alpha, \beta \in V$ iken $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n^{\alpha,\beta}))$ bir polinomsal hipergruptur. [Gasper (1975)]

Ve

$$Q_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\frac{-1}{2})^n}{(\alpha+1)_n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\alpha + \beta + 1 \geq 0$ ve

$$a_0 := \frac{2(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}$$

$$b_0 := \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$$

olmak üzere

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)_n(\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+1)_n(\beta+1)_n} & n \geq 1 \end{cases}$$

Haar ölçüsüdür ve buna karşılık gelen Plancherel ölçüsü

$$\pi_{\mathbb{Z}_+}(dx) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\lambda_{[-1,1]}(dx)$$

biçiminde hesaplanır.

Dolayısıyla

$$\mathbb{Z}_+^{\wedge} \cong D_s = [-1, 1]$$

eşitliğini elde ederiz. Ve buradan

$$[-1, 1] = supp(\pi_{\mathbb{Z}_+}) \subset D_s \subset [1 - 2a_0, 1]$$

olduğu görülür.

$\alpha = \beta$ için iddia açıkça doğrudur.$\alpha > \beta$ olduğunda n nin bağımsız bir c sabiti vardır öyleki $x < -1$ iken

$$\lim_{n\to\infty} Q_n^{\alpha,\beta}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(\alpha+1)_n\sqrt{2\pi n}}|x-(x^2-1)^{1/2}|^{(n+\frac{1}{2})^c} = \infty \qquad Szeg(1975)$$

Fakat bu $D_s = [-1,1]$ olduğunu gösterir. Ayrıca Gasper(1972) $\varepsilon_x \widehat{*} \varepsilon_y \in M^1([-1,1])$ in varlığını

$$(\alpha, \beta) \in \widehat{V} := \{(\alpha^{'}, \beta^{'}) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^{'} \geq \beta^{'} > -1 \quad \beta \geq \frac{-1}{2} \ \ veya \ \ \alpha^{'} + \beta^{'} \geq 0\}$$

tamamı için göstermiştir. Öyleki $x, y \in [-1,1]$ için

$$Q_n^{\alpha,\beta}(x) Q_n^{\alpha,\beta}(y) = \int_{[-1,1]} Q_n^{\alpha,\beta} d(\varepsilon_x \widehat{*} \varepsilon_y).$$

Bu konvolüsyon altında $(\mathbb{Z}_+^{\wedge}, \widehat{*}(Q_n))$ bir boyutlu kompakt hipergrup olur. $(\mathbb{Z}_+^{\wedge}, \widehat{*}(Q_n))$ in hipergrup aksiyomlarını sağladığını Lasser 1983[1], Bölüm 4 te göstermiştir. $(\mathbb{Z}_+^{\wedge}, \widehat{*}(Q_n))$ hipergrubuna bir değişkenli dual Jacobi polinomsal hipergrubu adı verilir. (Tip F)

Özetlemek gerekirse $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ ve duali olan $(\mathbb{Z}_+^{\wedge}, \widehat{*}(Q_n))$ hipergrubu tam destek ile daha güçlü hipergruplardır.

Örnek 5.1.1 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ öyleki $\alpha \geq \beta > -1$ ve $\alpha + \beta + 1 \geq 0$ olsun. Ve (a_n), (b_n), (c_n) dizileri aşağıdaki gibi seçilsin.

$$a_n := \frac{2(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+1)(\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta+1)2(\alpha+1)}$$

$$b_n := \frac{\alpha-\beta}{2(\alpha+1)}[1 - \frac{(\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta)}{(2n+\alpha+\beta+2)(2n+\alpha+\beta)}]$$

$$c_n := \frac{2n(n+\beta)(\alpha+\beta+2)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta)(\alpha+1)}$$

$n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0, c_n > 0, b_n \geq 0$ ve $a_n + b_n + c_n = 1$
n=0 alındığında;

$$a_0 := \frac{2(\alpha+1)}{\alpha+\beta+2}$$

$$b_0 := \frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+2}$$

Reel polinomlar (Q_n) ile tanımlandığında $Q_{-1} \equiv 0, Q_0 \equiv 1 \quad n \in \mathbb{N}$

$$(Q_{n+1}) = (Id - (b_n a_0 + b_0))Q_n - c_n a_0^2 a_{n-1} Q_{n-1}$$

Buradan $Q_n(z) = Q_n^{\alpha,\beta}(z)$ ye Jacobi polinomsalları $\alpha = \beta$ ise Q_n e ultraspherical polinomsalları $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ ise Chebychev polinomsallarının 1. çeşidi $\alpha = \beta = 0$ ise Legendre polinomsalları ve $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ise Chebychev polinomsallarının 2. çeşidi elde edilmiş olur.
Herbir $m, n \in \{Z_+\}$ için

$$Q_m Q_n = \sum_{k=0}^{\infty} c(m,n,k) Q_k$$

yazılır.
$\forall m, n, k \in \mathbb{Z}_+$ için $c(m,n,k) \geq 0 . \alpha = \beta$ ise $m \leq n$ iken $k \in \{1, 3, ..., 2m-1\}$

olmak üzere

$$c(m,n,n+m-k)=0$$

ve $k\in\{0,1,...,m\}$ için $c(m,n,n+m-2k)=$

$$\frac{n!m!(\alpha+1/2)_k(\alpha+1/2)_{m-k}(\alpha+1/2)_{n-k}(2\alpha+1)_{m+n-k}(m+n+\alpha+1/2-2k)}{k!(m-k)!(n-k)!(\alpha+1/2)_{m+n-k}(2\alpha+1)_n(2\alpha+1)_m(m+n+\alpha+1/2-k)}.$$

$\forall n\in N$ için $\mathbb{Z}_+$ üzerinde

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{0\})=1$$

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\})=\frac{(2n+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)_n(\alpha+1)_n}{(\alpha+\beta+1)n!(\beta+1)_n}$$

ile verilenin Haar ölçüsü olduğu kolayca görülür.

5.1.3. q-Jacobi Polinomsal Hipergrupları

$\alpha,\beta,q\in\mathbb{R}$ sabitleri olmak üzere $\alpha\geq\beta>-1,\quad \alpha+\beta+1\geq 0\ \ ve\ \ q\in]0,1[$ olmak üzere $n\in\mathbb{N}$ için

$$A_n:=\frac{(1-q^{\alpha+n+1})(1+q^{\beta+n+1})(1+q^{n+1})(1-q^{\alpha+\beta+n+1})}{\sqrt{q}(1+q^{\alpha+\beta+2n+1})(1-q^{\alpha+\beta+2n+2})}$$

ve

$$C_n:=\frac{\sqrt{q}(1-q^n)(1+q^{\alpha+\beta+n})(1+q^{\alpha+n})(1-q^{\beta+n})}{(1-q^{\alpha+\beta+2n})(1-q^{\alpha+\beta+2n+1})}$$

biçiminde tanımlanır. $x\in\mathbb{R}$ iken $\tilde{Q}_n:=\tilde{Q}_n^{\alpha,\beta}(.;q)$ polinomsallarının $(\tilde{Q}_n)_{n\geq-1}$ dizisi için

$$\tilde{Q}_{-1}:=0\quad \tilde{Q}_0:=Id\quad n\geq 1$$

ve

$$2x\tilde{Q}_n(x)=A_nQ_{n+1}(x)-(A_n+C_n-\sqrt{q}-\frac{1}{\sqrt{q}})Q_n(x)+C_nQ_{n-1}(x).$$

$\tilde{Q}_n$ n-inci q-jacobi polinomsallarının bir normalizasyonudur. Bu polinomsalları Gasper(1983), Rahman(1981) ve Askey ve Ismail(1983) çalışmışlardır. $n\geq 0$ için $\gamma_n:=Q_n(1)>0$ olduğunu Gasper(1983) göstermiştir. Ayrıca

$$a_0:=\frac{(1-q^{\alpha+1})(1+q^{\beta+1})}{(1-q^{\alpha+\beta+2})}\quad ,\quad b_0:=\frac{(q^{\alpha+1})-(q^{\beta+1})}{(1-q^{\alpha+\beta+2})}$$

ve $n \geq 1$ için

$$a_n := \frac{A_n \gamma_{n+1}}{2a_0 \gamma_n} \quad , \quad b_n := \frac{\sqrt{q} + \frac{1}{\sqrt{q}} - A_n - C_n}{2a_0} \quad , \quad c_n := \frac{C_n \gamma_{n-1}}{2a_0 \gamma_n}.$$

$Q_n := Q_n^{\alpha,\beta}(.;q)$ π ortogonolizasyon ölçüsüne göre bir polinomsal hipergrup olup

$$supp(\pi) = [-1,1] \subset D_s \subset [1-2a_0, 1]$$

ifadesi sağlanır.

5.1.4. Ultraküresel Veya Gegenbauer Polinomsalları

$$(1-x^2)y'' - (2\alpha+1)xy' + n(n+2\alpha)y = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümüyle Geganbauer polinomsalları elde edilir.

$$C_0^{\alpha}(x) = 1$$

$$C_1^{\alpha}(x) = 2\alpha x$$

$$C_n^{\alpha}(x) = \frac{1}{n}[2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^{\alpha}(x) - (n+2\alpha-2)C_{n-2}^{\alpha}(x)].$$

Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)t^n = \frac{1}{(1-2tx+t^2)^{\alpha}}.$$

Ortogonalliği

α bir sabit olmak üzere [-1,1] aralığında ağırlık fonksiyonu $w(x) = (1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}$ olmak üzere $n \neq m$ için

$$\int_{-1}^{1} C_n^{(\alpha)}(x)C_m^{(\alpha)}(x)w(x)dx = \int_{-1}^{1} C_n^{(\alpha)}(x)C_m^{(\alpha)}(x)(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx = 0.$$

Normalizasyonu

$$\int_{-1}^{1} [C_n^{(\alpha)}(x)]^2(1-x^2)^{\alpha-\frac{1}{2}}dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha}\Gamma(n+2\alpha)}{n!(n+\alpha)[\Gamma(\alpha)]^2}.$$

5.1.5. Ultraküresel Veya Gegenbauer Hipergrupları

$\alpha = \beta$, $\alpha \geq -\frac{1}{2}$ olsun. $\alpha > -\frac{1}{2}$ için ilgili dual konvolüsyon

$$(\varepsilon_x \widehat{*} \varepsilon_y)(dz) = K_{x,y}(z)(1-z^2)^{\alpha}\lambda_{[-1,1]}(dz)$$

olup $x, y \in]-1,1[$ iken

$$K_{x,y}(z) := \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+1)(1-x^2-y^2-z^2+2xyz)^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})[(1-x^2)(1-y^2)(1-z^2)]^{\alpha}} & z \in supp(\varepsilon_x \widehat{*} \varepsilon_y) \\ 0 & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

5.1.6. Küresel Hipergruplar

$\alpha = \beta = \frac{d-3}{2}, d \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$\mathbb{Z}_+ \cong (SO(d) \parallel SO(d-1))^{\wedge}$$

ve

$$\mathbb{Z}_+^{\wedge} \cong (SO(d) \parallel SO(d-1))$$

elde ederiz. Burada SO(d) d boyutlu özel ortogonal gruptur.

5.1.7. q-Ultraküresel Hipergrupları

$\beta \in]-1,1[\quad q \in]0,1[$ sabit olmak üzere

$$\tilde{A}_n := \frac{1-q^{n+1}}{2(1-\beta q^n} \qquad n \in \mathbb{Z}_+$$

ve

$$\tilde{C}_n := \frac{1-\beta^2 q^{n-1}}{2(1-\beta q^n} \qquad n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlansın. Buradan $C_{-1}(x;\beta|q) := 0 \quad , \quad C_0(x;\beta|q) := 1$ ve $xC_n(x;\beta|q) = \tilde{A}_n C_{n+1}(x;\beta|q) + \tilde{C}_n C_{n-1}(x;\beta|q)$ ile verilen q-ultraspherical polinomsallar $C_n(x;\beta|q)$ biçiminde gösterilir. [Bressoud 1981]

$\alpha, \beta, q \in]0,1[$ için sırasıyla $(\tilde{A}_n)_{n\geq 0}$ $(\tilde{C}_n)_{n\geq 1}$ dizileri aşağıdaki biçimde tanımlansın.

$$\tilde{A}_n := \frac{1-\alpha q^{n+1}}{2(1-\alpha\beta q^n} \quad n \in \mathbb{Z}_+$$

$$\tilde{C}_n := \frac{1-\alpha\beta^2 q^{n-1}}{2(1-\alpha\beta q^n)} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Associated q-Ultraspherical polinomsallarının dizisi $C_n^{\alpha}(.;\beta|q)_{n\geq 0}$ biçiminde gösterilir. [Bustoz ve Ismail(1982)]

5.1.8. 1.Ve 2.Tür Chebyshev Polinomsalları

Sırasıyla

$$(1-x^2)y'' - xy' + ny^2 = 0$$

ve

$$(1-x^2)y'' - 3xy' + n(n+2)y = 0$$

diferensiyel denklemlerinin çözülmesiyle 1. ve 2. tür Chebyshev polinomsalları elde edilir.

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

biçimindeki polinomsallara 1. tür Chebyshev polinomsalları denir. Ve T_n için üreteç fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n = \frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

Ortogonalliği

Ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ olmak üzere (-1,1) aralığında ortogonalliği

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & \text{n=m=0} \\ \frac{\pi}{2} & n = m \neq 0 \end{cases}$$

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

biçimindeki polinomsallara 2. tür Chebyshev polinomsalları denir. Ve U_n için üreteç fonksiyon

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n = \frac{1}{1-2tx+t^2}.$$

Ortogonalliği

Ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = \sqrt{1-x^2}$ olmak üzere [-1,1] aralığında ortogonalliği

$$\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\omega(x)dx = \int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \frac{\pi}{2} & \text{n=m} \end{cases}$$

5.1.9. 1.Tür Chebyshev Hipergrupları

$\alpha = \beta = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow d = 2$ olması halinde 1. tür Chebyshev hipergrupları elde edilir.

5.1.10. 2.Tür Chebyshev Hipergrupları

$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow d = 4$

$m, n \in \mathbb{Z}_+$ iken $*$ konvolüsyonu

$$\varepsilon_m * \varepsilon_n = \sum_{k=0}^{m \wedge n} \frac{|m-n| + 2k + 1}{(m+1)(n+1)} \varepsilon_{|m-n|+2k}$$

biçiminde verilsin.

Buradan $G := SU(2)$ ile belirtilen hipergrup

$$\mathbb{Z}_+ \cong (SO(4)//SO(3))^\wedge = ((G \times G)//\delta(G))^\wedge$$

olup $\delta(G)$ G nin diagonalidir. $\delta(G) = \{(x,x) : x \in G\}$ ve SU(d) d boyutlu özel üniter gruptur.

5.1.11. Genelleştirilmiş Chebychev Hipergrupları

$\beta > -1 \ , \alpha \geq \beta + 1$ için $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun.

$$a_n := \begin{cases} \frac{\ell+\alpha+1}{2\ell+\alpha+\beta+1} & n = 2\ell, \quad \ell \in \mathbb{N} \\ \frac{\ell+\alpha+1}{2\ell+\alpha+\beta+2} & n = 2\ell+1, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

$$b_n := 0 \ \ ve \ \ c_n := 1 - a_n \quad n \in \mathbb{N}$$

ℓ. Jacobi polinomsalı α ve β parametresi ile $Q_\ell^{\alpha,\beta}$ ile gösterilip genelleştirilmiş Chebychev polinomsalları

$$T_n^{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} Q_\ell^{\alpha,\beta}(2x^2-1) & n = 2\ell, \quad \ell \in \mathbb{N} \\ xQ_\ell^{\alpha,\beta+1}(2x^2-1) & n = 2\ell+1, \quad \ell \in \mathbb{Z}_+ \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır.

Haar ölçüsü

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) := \begin{cases} 1 & \text{n=0} \\ \frac{(2\ell+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)_\ell(\alpha+1)_\ell}{(\alpha+\beta+1)\ell!(\beta+1)_\ell} & n = 2\ell, \quad \ell \in \mathbb{N} \\ \frac{(2\ell+\alpha+\beta+2)(\alpha+\beta+2)_\ell(\alpha+1)_\ell}{\ell!(\beta+1)_{\ell+1}} & n = 2\ell+1, \quad \ell \in \mathbb{N}_+ \end{cases}$$

Ve Plancherel ölçüsü

$$\pi_{Z_+}(dx) = (1-x^2)^\alpha |x|^{2\beta+1} \lambda_{[-1,1]}(dx)$$

ile

$$supp(\pi_{Z_+}) = [-1,1] = D_s \cong \mathbb{Z}_+^\wedge.$$

5.1.12. Legendre Hipergrupları

$\alpha = \beta = 0 \Leftrightarrow d = 3$ olması halinde Legendre hipergrupları elde edilir. Legendre polinomsalları

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + (\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}) = 0$$

diferensiyel denkleminin çözümüyle elde edilir.
$v \geq 0$ bir sabit olmak üzere

$$\gamma_0 := 1 \qquad \gamma_n := \frac{(v+1)_n}{2^n(v+\frac{1}{2})_n}(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{v}{k+v} \qquad (n \geq 1)$$

olsun. Sırasıyla $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ dizileri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$a_n := \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \;,\; b_n := 0 \;,\; c_n := 1 - a_n \qquad (n \geq 1).$$

Bu durumda [V] tipinin $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ polinomsal hipergrubundan meydana gelen v parametresi ile n. Legendre polinomsalı $Q_n = Q_n^v$ biçiminde gösterilir. [Lasser 1983]
Haar ölçüsü

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) := \begin{cases} 1 & \text{n=0} \\ \gamma_n^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{4(k+v)^2-1}{(k+v)^2} = \frac{2v+2n+1}{2v+1}(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{v}{(k+v)^2})^2 & n \geq 1 \end{cases}$$

Ve ayrıca

$$supp(\pi_{Z_+}) = [-1,1] = D_s \cong \mathbb{Z}_+^{\wedge}.$$

5.1.13. Grinspun Hipergrupları

$\alpha \in \mathbb{R}$ sabiti için $\alpha \geq 2$ alındığında
$a_1 := \frac{1}{a}(a-1)$, $c_1 := \frac{1}{a}$, $a_n := c_n := \frac{1}{2}$ ve $b_n := 0$ $(n \geq 1)$
$(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, $(c_n)_{n\geq 1}$ dizileri $(Q_n)_{n\geq 1}$ Grinspun polinomsal dizisi $(a_0 = 1)$ ve bundan dolayı $\omega_{\mathbb{Z}_+}$

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a & n = 1 \\ 2(a-1) & n \geq 2 \end{cases}$$

$\mathbb{Z}_+ \cong D_s = [-1,1]$ dual uzay üzerindeki Plancherel ölçüsü

$\pi_{\mathbb{Z}_+}(dx) := [(1-v^2)(1-x^2)]^{-1}\lambda_{[-1,1]}(dx)$ olup $v := 2a - a^2$ tam desteğe sahiptir. [1]

5.1.14. Sawyer-Voit Hipergrupları

$s_1 = s_2 = ... = s_d = t_1 = t_2 ... = t_d = \frac{1}{2d}$ olmak üzere

$$\Gamma := \Gamma_{s_1, s_2, ..., s_d, t_1, t_2, ..., t_d}$$

[2] ile K tipinin $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ polinomsal hipergrupları serbest grup olur.

5.1.15. Pollaczek Polinomsalları

$a > |b|$ olmak üzere Pollaczek polinomsalları $P_n(x; a, b)$ ile gösterilir ve

$$P_n(x; a, b) = \frac{[(2n-1+2a)x + 2b]P_{n-1}(x; a, b) - (n-1)P_{n-2}(x; a, b)}{n}$$

Ve n=2,3,... için $P_0 = 1$ ve $P_1 = (2a+1)x + 2b$

Ortogonalliği

$$\int_{-1}^{1} P_n(x; a, b)P_m(x; a, b)\omega(x; a, b)dx = [n + \frac{1}{2}(a+1)]^{-1}\delta_{mn}.$$

Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x; a, b)\omega^n = (1 - \omega e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}+ih(\theta)}(1 - \omega e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}-ih(\theta)}$$

[1] Lasser,R. *Orthogonal polynomials and hypergroups*,Rend.Mat.7,**1983**,no.2,185-209.

[2] $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \tilde{t}^{-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

olup burada
$h(\theta) = \frac{a\cos\theta + b}{2\sin\theta}$

5.1.16. Pollaczek Hipergrupları

a, c, α sabit reel sayıları $a \geq 0, c \geq 0, \alpha \geq -\frac{1}{2}, 2\alpha + 1 + c \geq 0$ ve $1 \leq 4\alpha a + 4\alpha^2 + 4ac + 6a$ şartlarını sağlasın. $(C_n)_{n\geq 1}$ dizisinin gösterimi;

$$C_n := \frac{(n+c)(n+2\alpha+c)}{(2n+2\alpha+2a+2c+1)(2n+2\alpha+2a+2c-1)}$$

ve sırasıyla $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ dizileri

$$c_1 := C_1, a_1 := 1 - c_1, c_n = \frac{C_n}{a_n - 1}, a_n = 1 - c_n$$

$(n \geq 2), b_n = 0, (n \geq 1)$.

5.1.17. V Tipinin Geronimus Hipergrupları

$a, b \in \mathbb{R}$ için $a + b \leq 0$ ve $ab + 1 \geq 0$ olsun. $n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$U_n(\cos(\theta)) := \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

ile verilen 2. tür Chebychev polinomsallarının bir dizisi $(U_n)_{n\geq 0}$ ile gösterilsin. Bu durumda $\tilde{Q}_0 := 1 \quad \tilde{Q}_1 := U_1 - (a+b)U_0$ ve $\tilde{Q}_n = U_n - (a+b)U_{n-1} + abU_{n-2} \quad n \geq 2$ olacak biçimde $(\tilde{Q}_n)_{n\geq 0}$ polinomsal dizisini tanımlayabiliriz. Buradan

$$Q_n := \frac{\tilde{Q}_n}{\tilde{Q}_n(1)}$$

ortogonal polinomsallarının dizisi $(Q_n)_{n\geq 0}$ olmak üzere

$$a_n := \frac{n(a-1)(b-1) + 2 - a - b}{(2-a-b)[n(a-1)(b-1) + 1 - ab]} > 0$$

$$b_n := -\frac{a+b}{2-a-b} \geq 0 \qquad c_n := 1 - a_n - b_n > 0$$

iken $Q_0 = 1 \qquad Q_1 = \frac{2Id - a - b}{2 - a - b}$ ve $Q_1 Q_n = a_n Q_{n+1} + b_n Q_n + c_n Q_{n-1}$. Buradan $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ dizilerinden oluşan $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ (V tipi) polinomsal hipergrup olması ancak ve ancak $a+b \leq 0$ ve $ab+1 \geq 0$ olması ile mümkündür.[Voit 1990]

5.1.18. L Tipinin Geronimus Hipergrupları

$a \in \mathbb{R}$, $a \geq 2$ olmak üzere

$$a_n := \frac{a(n+1)-2n}{2a_n-4(n-1)} \qquad b_n := 0$$

ve

$$c_n := 1 - a_n = \frac{a(n-1)-2(n-2)}{2a_n-4(n-1)} \quad n \geq 1$$

biçiminde tanımlansın. Buradan $(a_n)_{n\geq 1}, (b_n)_{n\geq 1}, (c_n)_{n\geq 1}$ dizilerinden oluşan [L] tipinin $(Q_n)_{n\geq 0}$ polinomsal dizisi $a_0 := 1 \quad b_0 := 0$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ bir polinomsal hipergrup olup burada Q_n L tipinin n. Geronimus polinomsalıdır. $(Q_n)_{n\geq 0}$ ın negatif olmayan lineerizasyon olduğunu Lasser$(1983^1), 3g(i)$ göstermiştir. Ayrıca

$$\pi(dx) := \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1-\mu x^2}\lambda_{[-1,1]}(dx) \quad , \quad \mu := a - (\frac{a}{2})^2$$

ortogonolizasyon ölçüsü tam desteğe sahiptir. Böylece

$$supp(\pi) = [-1,1] = D_s \cong \mathbb{Z}_+^{\wedge}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan $n \geq 1$ iken

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\} = \frac{1}{a}[n(a-2)+2]^2$$

ile tanımlı Haar ölçüsüne karşılık gelen π nin $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ in Plancherel ölçüsü olduğu açıktır.

5.1.19. Genelleştirilmiş Soardi Hipergrupları

$k \in \mathbb{Z}_+ \quad n \geq 1$ için

$$a_n := \frac{k+2+(k+1)n}{(k+2)[(k+1)n+1]} \qquad b_n := \frac{k}{k+2}$$

$$c_n := \frac{(k+1)n-k}{(k+2)[(k+1)n+1]}$$

olmak üzere $Q_0 = 1 \quad Q_1 = \frac{1}{k+2}(2Id + k)$ ve $\quad Q_1 Q_n = a_n Q_{n+1} + b_n Q_n + c_n Q_{n-1}$ ile verilen Q_n polinomsallarının $(\mathbb{Z}_+, *(Q_n))$ formu bir polinomsal hipergruptur. Buradan $\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n = \gamma = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{k+2}$ ve $\quad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{k}{k+2}$ olduğu açıktır. Diğer taraftan ağırlık fonksiyonu

$$\omega(x) := \frac{2(1-x^2)^{1/2}}{\pi(1+k^2+2kx)}$$

olmak üzere ortogonallği

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x) Q_n(x) \omega(x) \lambda_{[-1,1]}(dx) = 0 \quad m, n\mathbb{Z}_+ \;\; m \neq n$$

Haar ölçüsü $n \in \mathbb{Z}_+$ için

$$\omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) = [(k+1)n+1]^2$$

ve $\mathbb{Z}_+^\wedge = [-1, 1]$ duali üzerindeki Plancherel ölçüsü $\pi_{\mathbb{Z}_+} := \omega\lambda_{-1,1}$.

5.1.20. Küçük q-Legendre Hipergrupları

$q \in]0, 1[$ bir sabit ve her $z \in \mathbb{C}$ için

$$Q_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-q^{-n})(1-q^{-n+1})...(1-q^{-n+k-1})}{(1-q)^2(1-q^2)^2...(1-q^k)^2}(1-q^{n+1})...(1-q^{n+k})q^k z^k$$

biçiminde verilen Q_n polinomsallarının bir dizisi $(Q_n)_{n\geq 0}$ olsun. $n \geq 1$ iken

$$a_n := q^n \frac{(1+q)(1+q^{n+1})}{(1-q^{2n+1})(1+q^{n+1})}$$

$$c_n := q^n \frac{(1+q)(1-q^n)}{(1-q^{2n+1})(1+q^n)}$$

$$b_n := 1 - a_n - c_n$$

olmak üzere $Q_0 = 0 \quad Q_1 = 1 - (q+1)d$ ve $Q_1 Q_n = a_n Q_{n+1} + b_n Q_n + c_n Q_{n-1}$.

5.1.21. Cartier Hipergrupları

$a, b \geq 2$ $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. $\forall n \geq 1$ için $a_n := \frac{a-1}{a}$ $b_n := \frac{b-2}{a(b-1)}$ ve $c_n := \frac{1}{a(b-1)}$ olmak üzere Cartier hipergrupları $(Q_n^{(a,b)})_{n\geq 0}$ ile gösterilip

$$Q_0^{(a,b)} = 1$$

$$Q_1^{(a,b)}(x) = c_1 x + c_2 \qquad c_1 := \frac{2}{a}\sqrt{\frac{a-1}{b-1}}\ ,\ c_2 := \frac{b-2}{a(b-1)}$$

$$Q_1 Q_n = c_n Q_{n-1} + b_n Q_n + a_n Q_{n-1}$$

biçiminde tanımlanır. Cartier hipergrubunun Haar ölçüsü her $n \geq 1$ için

$$\begin{cases} \omega_{\mathbb{Z}_+}(\{0\}) = 1 \\ \omega_{\mathbb{Z}_+}(\{n\}) = a(a-1)^{n-1}(b-1) \end{cases}$$

Ayrıca $a \geq b \geq 2$ için $\mathbb{Z}_+^\wedge \cong D_s = [-x_0, x_0] \cup L$ dual uzayı üzerindeki $\pi_{\mathbb{Z}_+}$ Plancherel ölçüsü

$$\pi_{\mathbb{Z}_+}(dx) = \omega(x)\lambda_{[-1,1]}(dx).$$

Ortogonalliğini göstermek için

$$x_0 := \frac{ab - a - b + 2}{2((a-1)(b-1))^{1/2}}$$

ve

$$x_1 := \frac{2 - a - b}{2((a-1)(b-1))^{1/2}}$$

olmak üzere ağırlık fonksiyonu

$$\omega(x) := \frac{1}{2\pi}\frac{(1-x^2)^{1/2}}{(x_1 - x)(x_0 - x)}$$

biçiminde olup ortogonalliği

$$\int_{-1}^{1} Q_m(x)Q_n(x)\omega(x)\lambda_{[-1,1]}(dx) = 0 \qquad m, n\mathbb{Z}_+ \ \ m \neq n$$

(Askey ve Wilson(1985),(4.28)-(4.30))

KAYNAKLAR

[1] Askey, R. *Orthogonal polynomials and positivity*, Studies in Applied Mathematics 6, Wave Propagation and Special Functions, 64-85. SIAM, Philadelphia, 1970.

[2] Berg, C.; Forst, G. *Potential Theory on locally compact abelian groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 87. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1975.

[3] Bloom, W. R.; Heyer, H. *Convergence of convolution products of probablity measures on hypergroups*, Rend. Mat., no. 3, **1982**, 547-563.

[4] Chihara, T. S. *An introduction to orthogonal polynomials*, Mathematics and its Applications, 13. Gordon and Breach Science Publishers, New York-London-Paris, 1978.

[5] Dunkl, C. F. *Structure hypergroups for measure algebras*, Pacific J. Math., 47 **1973**, 413-425.

[6] Erdelyi, A.; Magnus, W.; Oberhettinger, F.; Tricomi, F. G. *Higher transcendental functions*, Vols. I, II, Based in part on notes left by Harry Bateman, McGraw-Hill, New York-Toronto-London, 1953.

[7] Gasper, G. *Positivity and the convolution structure for Jacobi series*, Ann. of Math., 93 **1971**, 112-118.

[8] Gasper, G. *Positivity Special Functions*, Theory and applications of special functions, 375-434. Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Publ. no. 35, Academic Press, New York, 1975.

[9] Hewitt, E.; Ross, K. A. *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I: Structure of topological groups, Integration theory, group representations*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 155. Academic Press, New York; Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1963.

[10] Jewett, R. I. *Spaces with an abstract convolution of measures*, Adv. in Math., no. 1, 18 **1975**, 1-101.

[11] Lasser, R. *Orthogonal polynomials and hypergroups*, Rend. Mat. 7, no. 2, **1983**, 185-209.

[12] Lasser, R. *Fourier summation with kernels defined by Jacobi polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc., no. 3, **1992**, 677-682.

[13] Lasser, R.; Rosler, M. *A note on property (T) of orthogonal polynomials*, Archiv für Math., 60 **1993**, 459-463.

[14] Ross, K. A. *Hypergroups and centers of measure algebras*, Symposia Math., Vol. XXII, Academic Press, London, **1977**, 189-203.

[15] Sawyer, S. *Isotropic random walks in a tree*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und verw., Gebiete, 42, no. 4, **1978**, 279-292.

[16] Spector, R. *Measures invariantes sur les hypergroupes*, (English summary), Trans. Amer., Math. Soc., 239 **1978**, 147-165.

[17] Voit, M. *Central limit theorems for random walks on N_0 that are associated with orthogonal polynomials*, J. Multivariate Anal., no. 2, 34 **1990**, 290-322.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Aksaray ili Ortaköy ilçesine bağlı bir köyde doğdu. İlk ve orta öğrenimini bu köyde tamamladı. Lise öğrenimini 1993-1997 yılları arasında Kırşehir Anadolu Öğretmen Lisesinde tamamladı. Üniversite öğrenimini 1997-2001 yılları arasında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünde tamamladı. 2001 yılından itibaren Milli Eğitim Bakanlığına bağlı olarak öğretmenlik yapmaktadır. 2009 yılından itibaren Ahi Evran Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans yapmaktadır. Evli ve 1 çocuk babasıdır. Yabancı dili ingilizcedir.