



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**BİR GENELLEŞTİRİLMİŞ HERON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ
ÜZERİNE**

Esra ÇEBİ

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Özkan DEĞER

Haziran, 2022

İSTANBUL

Bu alışma 17.06.2022 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Dr. Öğr. Üyesi Özkan DEĞER (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Elimhan N. MAHMUDOV
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Gülseren ÇİÇEK
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin aboneliği olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim ve tez çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübesi ile bana yol gösteren, yardımını hiçbir zaman esirgemeyen, desteği ve anlayışıyla her daim yanımda olan kıymetli danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Özkan Değer'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her anında, yaşadığım her zorlukta yanımda olan biricik babam Abdurrahman ÇEBİ'ye, özellikle bu süreçte ihtiyacım olan desteği bir an olsun esirgemeyen biricik annem Bakiye ÇEBİ'ye ve canım kardeşlerime sonsuz teşekkür ederim.

Haziran, 2022

Esra ÇEBİ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	ix
SUMMARY	xi
1 GİRİŞ	1
2 GENEL KISIMLAR	7
2.1 KONVEKS KÜMELER	8
2.2 AFİN KÜMELER	12
2.3 NORMAL KONİ	14
2.4 KONVEKS FONKSİYONLAR	23
2.5 SUBDİFERANSİYEL KAVRAMI	29
3 MALZEME VE YÖNTEM	38
4 BULGULAR	39
4.1 OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ	39
4.2 GENELLEŞTİRİLMİŞ HERON PROBLEMİ	42
5 TARTIŞMA VE SONUÇ	51
KAYNAKLAR	53
ÖZGEÇMİŞ	55

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 1.1: Klasik Heron problemi	3
Şekil 2.1: $y = -x$ doğrusunun normal konisi	17
Şekil 2.2: $\text{epi } x^2$ kümesinin $(0,0)$ noktasındaki normal konisi	18
Şekil 2.3: $\text{epi } x $ kümesinin $(0,0)$ noktasındaki normal konisi	19

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\overline{\mathbb{R}} = (-\infty, \infty]$	: Genelleştirilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu vektör uzayı
$\langle x, y \rangle$	: x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\ x\ $	: x vektörünün Öklidyen normu
$\mathbb{B}$	: Kapalı birim yuvar
$\text{int}(A)$	: A kümesinin iç noktalar kümesi
$\overline{A}$	: A kümesinin kapanış kümesi
$\text{bd } A$	: A kümesinin sınır kümesi
$\text{aff } A$	: A kümesinin afin örtüsü
$\text{co}(A)$	: A kümesinin konveks örtüsü
$L^\perp$	: L kümesinin ortogonal tümleyen kümesi
$\text{dom } f$	: f fonksiyonunun efektif (etkin) tanım kümesi
$\text{epi } f$	: f fonksiyonunun epigraf kümesi
$\Pi(x; A)$	: x noktasından A kümesine Öklidyen izdüşüm fonksiyonu
$N(x; A)$	: A kümesinin x noktasındaki normal konisi
$\delta(x; A)$	: A kümesinin x noktasındaki indikatör fonksiyonu
$\partial f(\bar{x})$	: f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki subdiferansiyel kümesi
$\text{span } A$	: A kümesinin elemanlarının gerdiği uzay
$\cos(u, v)$	: u ve v vektörlerinin arasındaki açının kosinüsü
$\min A$	: A kümesinin minimumu
$\inf A$	: A kümesinin infimumu
$\sup A$	: A kümesinin supremumu
$d(x; A)$	: x noktasının A kümesine uzaklık fonksiyonu
$ AB $	: AB doğru parçasının uzunluğu
$\angle ABC$	: ABC açısının ölçüsü
■	: İspat bitmiştir

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR GENELLEŞTİRİLMİŞ HERON PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Esra ÇEBİ

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Özkan DEĞER

Bu tez çalışmasında Heron probleminin bir genelleştirilmesinin optimal çözümü üzerine konveks analizin araçları kullanılarak bir inceleme yapılmıştır.

Tezin ilk bölümünde genelleştirilmiş Heron probleminin tanımı ve tarihsel gelişimi verilip, diğer problemlerle arasındaki ilişki izah edilmiştir.

İkinci bölümde normal koni, subdiferansiyel kavramlarının da içinde bulunduğu konveks analizin temel kavramlarına değinilmiş, bu kavramlara ilişkin tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin yazımında kullanılan kaynaklara ve yöntemeye değinilmiştir.

Tezin dördüncü bölümünde ise kısıtlı ve kısıtsız optimizasyon problemlerinin tanımları yapılmış ve genelleştirilmiş Heron probleminin optimal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Bununla birlikte problemin optimal çözümünün karakterizasyonuna ilişkin teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde tez boyuca yapılanlar genel hatlarıyla özetlenip, geliştirilmiş problemine ilişkin yapılan çalışmalara değinilmiştir. Son olarak tez konusu ile ilgili olarak yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.

Haziran 2022, 67 sayfa.

Anahtar kelimeler: Geliştirilmiş Heron problemi, konveks optimizasyon



SUMMARY

M.Sc. THESIS ON SOLVING A GENERALIZED HERON PROBLEM

Esra ÇEBİ

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Özkan DEĞER

In this thesis, an investigation is made on the optimal solution of a generalization of the Heron problem using the instruments of convex analysis.

In the first part of the thesis, the definition and historical development of the generalized Heron problem is given and its relationship with other problems is explained.

In the second chapter, the basic concepts of convex analysis, including the concepts of normal cone and subdifferential, are mentioned, and definitions and theorems related to these concepts are given.

In the third chapter, the sources and method used in the writing of the thesis are mentioned.

In the fourth chapter of the thesis, the definitions of constrained and unconstrained optimization problems are given and the existence conditions of the optimal solution of the generalized Heron problem are given. In addition, theorems and results regarding the characterization of the optimal solution of the problem are given.

In the fifth chapter, what has been done throughout the thesis is summarized in general terms and the studies on the generalized problem are mentioned. Finally, the studies that can be done about the thesis subject are mentioned.

June 2022, 67 pages.

Keywords: Generalized Heron problem, convex optimization



1. GİRİŞ

Optimizasyon, mevcut koşullar dahilinde bir sistemden en iyi sonuçları elde etmek üzere yapılan çalışmadır. Optimal kelimesinin kökenine inerse de "en uygun" anlamına geldiğini görürüz. Latin kökenli optimizasyon terimi yerine denk olarak çoğu zaman matematiksel programlama ifadesi de kullanılmaktadır. Mühendislikten günlük yaşantımıza varıncaya kadar her alanda optimizasyon mevcuttur. Örneğin mühendislikte mevcut kaynakların minimum kullanımı ile maksimum verim elde edilmesi amaçlanmaktadır ve burada sistem matematiksel olarak modellenerek en iyi çözüm elde edilmeye çalışılır ya da bir yazılımın en kısa sürede en yüksek verimle çalışması, bir internet sitesinin minimum sürede açılması bu durumun en güzel örneklerindendir. Bununla birlikte herhangi bir iş dalında bir ekip liderinin görevi uygulayacak olduğu yönetim ve iş mantığı ile minimum çalışmayla işleri bitirebilmektir. Zira bir ekip için önemli olan çok çalışmak değil, doğru yöntemi uygulayarak en az uğraş ile sonuca ulaşmaktır. Açıktır ki optimizasyon, günlük yaşantımızdan iş hayatına varıncaya kadar her yerde karşımıza çıkmaktadır, bu da göstermektedir ki esasında optimizasyon hayatımıza çok da uzak bir kavram değildir. Tüm bu örneklerdeki optimali bulma yolculuğumuzu bilimsel ve matematiksel bir temele oturtup gerçekçi sonuçlar elde etmek istediğimizde de karşımıza optimizasyon teoremi çıkar.

Optimizasyon teorisinin kökeni oldukça eskiye dayanmaktadır. İlk optimizasyon problemi Fenikeli Prenses Dido problemidir. Dido'nun kardeşi olan dönemin kralının prensesin kocasını öldürmesi üzerine, prensesin kaçarak sığındığı Afrika'daki diğer bir kral, Dido'ya yalnızca bir sığırın derisinin kaplayabileceği büyüklükte bir toprak parçasına yerleşebileceğini söyler. Dido'nun sığırın derisi ile ulaşabileceği en büyük alanı elde etmeye çalışması ile ilk optimizasyon problemi ortaya çıkmıştır. Matematiksel olarak verilen uzunluktaki kapalı eğriler arasındaki en geniş alanı bulmayı amaçlayan bu problemle birlikte optimizasyon teorisinin temelleri atılmıştır. İlk optimizasyon probleminden 1696 yılında Johann Bernoulli tarafından ortaya konulan ve çözülen, en kısa zaman problemi olarak da anılan verilen bir noktadan yer çekiminin etkisiyle hareket eden bir cismin diğer noktaya minimum zamanda ulaşabilmesi için izlemesi gereken yörüngenin bulunmasını amaçlayan, *brachistochrone problemine* kadar tek değişkenli fonksiyonlar optimize

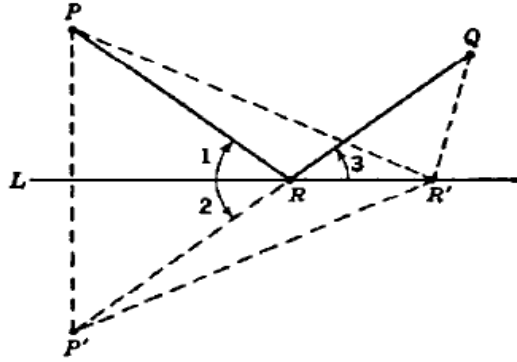
edilmeye çalışılmıştır. En kısa zaman probleminden sonra çok değişkenli fonksiyonlar maksimize ya da minimize edilmeye çalışılmıştır. 18. yüzyıldan itibaren matematiğin bu alandaki problemlerle çalışılan koluna *varyasyonlar analizi* denmektedir. *En basit zamanlı optimal problemi* belirli sınırlar içerisinde değiştirilebilen bir dış güç tarafından kontrol edilen, düz bir yolda sürtünmesiz olarak hareket eden bir arabanın belirli bir yerde en kısa zamanda durdurulmasını amaçlar. 1950 yıllarından sonra en basit zamanlı optimal probleminde olduğu gibi kontrol edilebilir güçleri ihtiva eden ekstremal problemleri çözümünü konu edinen *optimal kontrol teorisi* gelişmeye başlamıştır.

Pek çok optimizasyon problemi mevcut olup bunlardan biri de tesis yeri problemi olarak da bilinen lokasyon problemidir. Bu problem temelde fabrikalar ve depoların konumunu belirlemede kullanılır. Bu tezde incelenecek olan genelleştirilmiş Heron problemi de lokasyon probleminin bir örneği niteliğindedir. Lokasyon probleminin tarihçesine baktığımızda esasında 3 nokta için Fermat teoreminin ilk lokasyon problemi olarak adlandırıldığını görürüz. Dolayısı ile aşağıda verilen genelleştirilmiş Heron problemine ilişkin tarihsel inceleme aynı zamanda lokasyon probleminin de gelişimini göstermektedir.

Farklı lokasyonlarda bulunan iki üniversitede okuyan bir kimsenin her bir üniversiteye olabildiğince yakın bir yerde konaklamak istediğini düşünelim. Peki konaklanacak yer nerede olursa iki üniversiteye de en yakın mesafede olur, yani ikisine de uzaklıkları toplamı en küçük olur? İşte bu soru klasik Heron problemine temel teşkil eder. Üniversiteleri düzlemde birer nokta olarak düşünelim. Bu noktalara uzaklıkları toplamı minimum olan nokta elbette orta noktası olacaktır.

Klasik Heron problemi düzlemde verilen düz bir doğru üzerinde olup yine düzlemde verilen iki noktaya olan uzaklıkları toplamı minimum olan noktayı bulmayı amaçlar. Bu problemi İskenderiye’li Heron (M.S 10-75) ileri sürmüştür. Heron bu probleme *Catoptica* adlı eserinde yer vermiş ve ileri sürdüğü problemi yine kendisi çözmüştür [1,2]. Problem, elbetteki onu ileri süren ve çözümünü bulan Heron’un ismiyle anılmaktadır. Heron’un matematikçi kimliğinin yanında fizikçi ve mühendis kimliği de vardır. Aelolipile olarak adlandırılan ilk buhar tırbününü icat etmiştir. Ayrıca tapınaklar ve tiyatrolarda kullanılmak üzere pek çok mekanizmanın da mucididir. Döneminin önde gelen matematikçilerinden olan Heron çalışmalarıyla günümüze de etki etmiştir.

Tez çalışmasına esas teşkil eden bu problemi yakından inceleyelim.



Şekil 1.1: Klasik Heron problemi

Yukarıda verilen figürde klasik Heron problemi resmedilmiştir. Heron, düzlemde verilen P ve Q noktalarına uzaklıkları toplamı minimum olan noktayı bulabilmek için klasik geometri ve ışığın yansıma kuralını kullanarak L doğrusunu bir ayna gibi kullanmış ve P noktasını bu ayna üzerinden yansıtarak P' noktasını elde etmiştir. R noktası ise P ve Q noktalarına uzaklıkları toplamı minimum olan noktadır. R noktasının neden aradığımız nokta olduğunu inceleyelim. Yukarıda da ifade edildiği gibi L doğrusunu ayna gibi düşünüp P noktasını bu aynadan yansıtıldığında P' noktasını elde edilir. Bu durumda ışığın gelme ve yansıma açısı aynı olacağından 1, 2 ve 3 açıları aynı olur ve L doğrusu $\angle PRP'$ açısı için açıortay görevi görür. R noktasının verilen her iki noktaya uzaklıkları toplamını incelersek $|PR| = |P'R|$ ve $|PR'| = |P'R'|$ olduğundan $|PR| + |RQ| = |P'R| + |RQ| = |P'Q|$ elde edilir ve aynı zamanda $|PR'| + |R'Q| = |P'R'| + |R'Q|$ sağlanır. Ancak bir üçgenin iki kenarının uzunluğunun toplamı diğer kenarın uzunluğundan daha büyük olacağından $|P'R'| + |R'Q|$ uzunluğu $|P'Q|$ uzunluğundan daha büyüktür. Eşitlikleri yerine koyarsak herhangi bir R' noktası için $|PR'| + |R'Q|$, $|PR| + |RQ|$ toplamından daima daha büyük olacağından R noktası P ve Q noktalarına uzaklıkları toplamı minimum olan noktadır. Bu durum esasında ışığın L doğrusundan yansırken en kısa yolu alacağı gerçeğine dayanmaktadır [1].

Heron'un ileri sürmüş olduğu problem üzerinde yalnızca kendisi değil diğer matematikçiler de çalışmalar yapmıştır. Bu matematikçilerden biri de Fermat'tır. Fermat, 1643 yılında klasik Heron probleminin bir özel hali olarak düzlemde verilen 3 noktaya olan uzaklıkları toplamı minimum olan noktayı araştırma fikrini ileri sürmüştür. Torricelli bu problemi şu şekilde çözmüştür: Üçgenin içinde olup bu noktadan köşelere uzanan her bir doğru parçasının arasındaki üçgenin kenarlarını gören her bir açının 120° olduğu nokta aranan çözümdür [1]. Ancak bu durum yalnızca üçgenin iç açılarının her birinin 120° den

küçük olması durumunda geçerlidir. Bu üçgenin iç açılarından birinin ölçüsü 120° den büyük veya eşit dereceye sahip olduğu durum Robbins ve Courant tarafından *What Is Mathematics?* adlı kitapta irdelenmiş olup bu duruma ilişkin doğru ispat Krarup ve Vajda [3] tarafından verilmiş olup üçgenin iç açılarından birinin ölçüsü 120° den büyük veya eşitse bu dereceye sahip olan köşe noktası verilen üç noktaya uzaklıkları toplamı minimum olan noktadır [4]. Bu problem Fermat-Torricelli problemi olarak anılmaktadır. Aynı zamanda söz konusu problem *What Is Mathematics?* kitabında Steiner problemi olarak adlandırılmıştır. Bununla birlikte düzlemde 4 nokta için inceleme Fagnano tarafından yapılmıştır ve düzlemde bulunan bu dört sabit nokta eğer konveks bir dörtgen oluşturuyorsa aranan noktanın dörtgenin köşegenlerinin kesişimi olduğu gösterilmiştir. Konveks olmayan durumun kim tarafından ispatlandığı bilinmemekle birlikte bu durumda konveksliği bozan köşe aranan noktadır. Steiner ise söz konusu problemi düzlemde sonlu sayıda nokta için genelleştirmiştir. Fermat-Torricelli probleminin pek çok versiyonu vardır. Bunlardan biri de ağırlıklı Fermat-Torricelli problemidir. Simpson, *A Doctrine and Application of Fluxions* adlı kitabında Fermat-Torricelli probleminin ağırlıklı versiyonunu incelemiş olup Alman bilim insanı Weber ise bir firmanın konumsal optimizasyonunu incelemek için problemi sonlu sayıda nokta ile ele almıştır [5]. Weber, müşterilere taşınacak olan ağırlıklara göre ağırlıklaştırılmış öklid uzaklıkları toplamı minimum olan noktaya bir depo kurulması fikrini tasarlamıştır ve bu yolla müşterilerin ödemesi gereken nakliye tutarını belirlemeye çalışmıştır. Lokasyon probleminin tarihsel gelişimi hakkında daha detaylı bilgi için [6] makalesi incelenebilir. Weber'in endüstriyel anlamdaki yaklaşımını daha detaylı inceleme için [7] kaynağına bakılabilir.

Uzaklık fonksiyonlarının katsayılarının hepsinin 1 olduğu durum klasik Fermat-Torricelli problemine denk olur. Söz konusu problem de yine ağırlıklaştırılmış Fermat-Torricelli problemi, genelleştirilmiş Fermat problemi, Steiner problemi, Weber problemi gibi adlarla anılmaktadır. Bu problemlere ilişkin daha detaylı bilgi için [4,8] kaynakları incelenebilir. $\mathbb{R}^n$ uzayında bulunan noktalara olan ağırlıklı Öklidyen uzaklıklarının toplamını minimum olan noktayı bulmayı amaçlayan bu problemin çözümüne ilişkin olarak ilk nümerik algoritma 1937 yılında Weiszfeld tarafından verilmiştir. Söz konusu algoritmanın yakınsama koşullarını ise Kuhn [9] elde etmiş olup bununla birlikte Weiszfeld'in algoritmasının her zaman yakınsamadığına ilişkin bir örnek sunmuştur. Ardından Katz [10] söz konusu algoritmanın yakınsama hızının nelere bağlı olduğunu tespit etmiştir.

Söz konusu problem yalnızca geometrik olarak değil analitik olarak da incelenmiştir. 1994 yılında Hajja [11] düzlemde 3 nokta için problemi vektörel olarak ele alarak çözüm üretmiştir. Yakın bir tarihte 2016 yılında Plastria [12] Fermat'ın bu lokasyon problemini dört nokta için yeniden incelemiş ve konveks durum için var olan sonuçların genel metrik uzaylara genellemesini göstermiştir. 2014 yılında Uteshev [13] 3 nokta için ağırlıklaştırılmış Fermat-Torricelli problemine analitik bir yaklaşım sunmuştur. 2016 yılında Chen [14] klasik Fermat-Torricelli problemini analitik ve geometrik yöntemle çözmüş, aynı zamanda problemi küreye genişletmiş ve genel düzgün yüzeyler üzerinde Fermat-Torricelli noktasını karakterize etmiştir.

Genelleştirilmiş Fermat-Torricelli probleminin pek çok özel hali mevcuttur. Bunlardan biri de genelleştirilmiş Heron problemidir. Genelleştirilmiş Heron problemi $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen bir sonlu, kapalı, konveks kümede olup; verilen sonlu sayıda boştan farklı, kapalı ve konveks kümelere olan uzaklıkları toplamı minimum olan noktayı bulma problemidir. Problemi A ve $i = 1, \dots, m$ için A_i kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümeleri olmak üzere

$$\min \sum_{i=1}^m d(x; A_i), \quad x \in A \quad (1.1)$$

olarak ifade edebiliriz.

Genelleştirilmiş Heron problemi bir kısıtlı optimizasyon problemidir. Kısıt kümesi olan A içerisinde $f := \sum_{i=1}^m d(x; A_i)$ fonksiyonunu minimuma ulaştıran x noktası aranır. Genelleştirilmiş Heron probleminin optimal çözümünün hangi koşullar altında var olduğu 2012 yılında Mordukhovich ve diğ. [15] tarafından çalışılmıştır ve söz konusu problemin çözümüne yakınsayan bir algoritma verilmiştir. Ardından yaptıkları bir diğer çalışmada genelleştirilmiş Heron problemini minimal zaman fonksiyonu ile Banach uzaylarında incelemişlerdir [16]. Chi [5] tarafından yakın zamanda yapılan bir çalışmada da yine problemin çözümüne yönelik hızlı bir algoritma verilmiştir.

Bu tez çalışmasında problemin uzaklık fonksiyonu versiyonunu n boyutlu uzayda sonlu sayıda kapalı, konveks küme için konveks analizde kullanılan kavramlar ile ele alınmıştır. Tez boyunca temel olarak [15,17,18] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Konveks analizin temel kavram ve teoremlerine ilişkin daha detaylı bilgi için [19] ve [20]

kaynakları incelenebilir.

Tez çalışmasında ilk olarak genel kısımlar başlığında konveks kümeler, konveks fonksiyonlar, normal koni, subdiferansiyel gibi konveks analizin temel kavramları verilmiştir. Bulgular başlığı altında ise genel hatlarıyla kısıtlı ve kısıtsız optimizasyon problemleri hakkında bilgi verilip ardından genelleştirilmiş Heron probleminin optimal çözümü için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. Son kısımda ise tez konusu ile ilgili olarak ileride yapılabilecek çalışmalardan bahsedilmiştir.



2. GENEL KISIMLAR

Bu kısımda ileride kullanılacak olan temel kavramlar verilmiştir.

Bu tez çalışması boyunca $\mathbb{R}$ ile $(-\infty, \infty]$ genelleştirilmiş reel sayılar kümesi temsil edilecektir. $\mathbb{R}^n$ uzayındaki herhangi iki x, y vektörleri için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

ile x ve y vektörlerinin iç çarpımı, $\|x\|$ ile de $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ olarak tanımlı $\mathbb{R}^n$ uzayının *standart normu* (*Öklidyen norm*) gösterilecektir.

Kapalı birim yuvar $\mathbb{B} = \{x : \|x\| \leq 1\}$ olarak tanımlanacaktır. Sıfırdan farklı $u, v \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin arasındaki açının kosinüsü

$$\cos(u, v) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Her $x, y \in \mathbb{R}^n$ vektörleri için *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* olarak adlandırılan

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (2.2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin lineer kombinasyonu $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n \in \mathbb{R}^n$ olarak tanımlanır. Bununla birlikte L bir vektör uzayı olmak üzere $x_1, \dots, x_n$ vektörlerinin tüm lineer kombinasyonlarından oluşan kümeye $x_1, \dots, x_n$ vektörlerinin *gerdiği uzay* denir ve bu küme

$$L = \text{span} \{x_1, \dots, x_n\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

şeklinde gösterilir. A bir *lineer alt uzay* ise her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $x, y \in A$ için $\alpha x + \beta y \in A$

sağlanır. $\alpha = \beta = 0$ seçilirse $0.x + 0.y = 0 \in A$ olacağından bir lineer alt uzay daima orjini içerir.

$L \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine dik olan vektörlerden oluşan

$$L^\perp = \{v \in \mathbb{R}^n : \text{her } u \in L \text{ için } \langle v, u \rangle = 0\}$$

kümesine L kümesinin *ortogonal tümleyen kümesi* denir.

$f : A \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in A$ ve $f(\bar{x}) < \infty$ olmak üzere her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta) \cap A$ elemanı için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa f fonksiyonu $\bar{x} \in A$ noktasında *yerel minimuma ulaşır* denir. Her $x \in A$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ eşitsizliği sağlandığı takdirde f fonksiyonu $\bar{x} \in A$ noktasında *mutlak (global) minimuma ulaşır* denir.

2.1. KONVEKS KÜMELER

Bölümün bu alt başlığında konveks küme tanımı ve konveks kümelerin özellikleri verilmiştir.

$x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası

$$\{\lambda x - (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$$

şeklinde tanımlanır.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ olsun. A kümesine ait herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine A kümesinin içinde kalıyor ise A kümesine *konveks küme* denir. Yani her $x, y \in A$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ içermesi gerçekleşmelidir.

Boş küme, tek nokta kümesi konveks kümedir. Bunların dışında örneğin $[0, 1]$ aralığı da $\mathbb{R}$ uzayında konveks küme örneklerindendir.

$x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olmak üzere her $m \in \mathbb{N}$ için $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ vektörü $x_1, \dots, x_m$ vektörlerinin *konveks kombinasyonu* olarak adlandırılır [19].

Önerme 2.1.1. [19] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks küme olması için gerek ve yeter koşul elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarının yine A kümesine ait olmasıdır.

İspat: A konveks küme olsun ve $a_1, \dots, a_m \in A$ alalım. A konveks küme olduğundan kümeye ait herhangi iki noktayı birleştiren doğru parçası yine kümenin içindedir, yani $m = 2$ için istenilen tanımdan doğrudan sağlanır. Kabul edelim ki $k = m$ için

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m \in A$$

sağlansın. $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ ve $a = \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_{m+1} a_{m+1}$ olsun. Burada λ_{m+1} için iki durum söz konusu olur; $\lambda_{m+1} = 1$ ise $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ olabilmesi için $i = 1, \dots, m$ için $\lambda_i = 0$ olur. Bu durumda $b = a_{m+1} \in A$ olur. $\lambda_{m+1} < 1$ ise $\sum_{i=1}^{m+1} \lambda_i = 1$ olduğundan burada $\lambda = \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1 - \lambda_{m+1}$ ve $\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} = 1$ şeklinde düzenleme yapabiliriz. Bu durumda kabulden $b = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{\lambda} a_i \in A$ olur. Buradan A kümesinin konveksliğinden $\lambda b + \lambda_{m+1} a_{m+1} \in A$ elde edilir. ■

Önerme 2.1.2. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $B \subseteq \mathbb{R}^p$ boştan farklı konveks kümelerinin kartezyen çarpımı yani $A \times B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ yine bir konveks kümedir.

İspat: $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ olmak üzere $a = (a_1, b_1)$, $b = (a_2, b_2) \in A \times B$ alalım ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Kabulden A ve B kümeleri konveks olduğundan $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$ ve $\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2 \in B$ sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned} \lambda a + (1 - \lambda)b &= \lambda(a_1, b_1) + (1 - \lambda)(a_2, b_2), \\ &= (\lambda a_1, \lambda b_1) + ((1 - \lambda)a_2, (1 - \lambda)b_2), \\ &= (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2, \lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2) \in A \times B \end{aligned}$$

sağlandığından ötürü $A \times B$ konveks kümedir. ■

Önerme 2.1.3. [20] A, B konveks kümelerinin toplam kümesi $A + B$ de konvektir.

İspat: $a, b \in A + B$ alalım ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. O halde öyle $a_1, a_2 \in A$ ve $b_1, b_2 \in B$ vardır ki $a = a_1 + b_1$ ve $b = a_2 + b_2$ sağlanır. $A + B$ kümesinin konveksliğini kontrol edelim. A

ve B kümeleri konveks olduğundan

$$\begin{aligned}\lambda a + (1 - \lambda)b &= \lambda(a_1 + b_1) + (1 - \lambda)(a_2 + b_2), \\ &= \lambda a_1 + \lambda b_1 + (1 - \lambda)a_2 + (1 - \lambda)b_2, \\ &= (\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2) + (\lambda b_1 + (1 - \lambda)b_2) \in A + B\end{aligned}$$

sağlanır. Böylece $A + B$ kümesi konvektir. ■

Önerme 2.1.4. Konveks bir kümenin herhangi bir katı da konvektir.

İspat: $\lambda \in R$ alalım. λA kümesinin konveksliğini göstermek için bir önceki önermeye benzer şekilde hareket edebiliriz. $a, b \in \lambda A$ alalım ve $\alpha \in [0, 1]$ olsun. O halde öyle $a_1, a_2 \in A$ elemanı vardır ki $a = \lambda a_1$ ve $b = \lambda a_2$ sağlanır. A kümesinin konveksliğinden

$$\begin{aligned}\lambda a + (1 - \lambda)b &= \alpha(\lambda a_1) + (1 - \alpha)(\lambda a_2), \\ &= \lambda(\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2) \in \lambda A\end{aligned}$$

sağlanır ve ispat tamamlanır. ■

Konveks kümelerin kullanışlı özelliklerinin bir diğeri de konveks kümelerin kesişiminin yine konveks küme olmasıdır. Konveks kümelerin kesişimi her zaman konveks küme iken birleşim için bu durum her zaman sağlanmaz. Kesişimde konveksliğin korunması uygulamada bizlere büyük kolaylık sağlarken birleşimde bu kolaylıklardan her zaman yararlanamamaktayız. Bu durum aşağıdaki önerme ve bir örnek ile izah edilmiştir.

$[0, 1]$ ve $[3, 5]$ konveks kümelerinin birleşimini düşünelim. $\lambda = \frac{1}{2}$, $x = 1$ ve $y = 3$ için

$$\lambda x + (1 - \lambda)y = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)3 = \frac{4}{2} = 2$$

elde edilir. $2 \notin ([0, 1] \cup [3, 5])$ olduğundan $[0, 1] \cup [3, 5]$ kümesi konveks değildir. Görülmektedir ki kesişimin aksine konveks kümelerin birleşimi konveks olmak zorunda değildir.

Bununla birlikte belirtmek gerekir ki konveks kümelerin içi $\text{int}(A)$ ve kapanışı $\bar{A}$ daima konveks kümedir [19].

Önerme 2.1.5. [20] $\{A_i\}_{i \in I}$ konveks kümelerin bir ailesi ise konveks kümelerin kesişimi $\bigcap_{i \in I} A_i$ de konveks kümedir.

İspat: $a_1, a_2 \in \bigcap_{i \in I} A_i$ alalım ve $\lambda \in (0, 1)$ olsun. Her $i \in I$ için $a_1, a_2 \in A_i$ olur. A_i kümeleri konveks olduğundan her $i \in I$ için

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in A_i$$

sağlanır. Buradan $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bigcap_{i \in I} A_i$ elde edilir ve böylece $\bigcap_{i \in I} A_i$ konveks kümedir. ■

Tanım 2.1.6. [19] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olmak üzere A kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin kesişimine A kümesinin *konveks örtüsü* denir. Konveks örtü kümesi $\text{co } A$ ile temsil edilir ve matematiksel olarak

$$\text{co } A = \bigcap \{X : X \text{ konveks küme ve } A \subseteq X\}$$

şeklinde ifade edilir.

Konveks örtüsü alınan kümenin konveks olması gerekmez ancak konveks örtü kümesi daima konvekstir, zira konveks kümelerin kesişimi her zaman konvekstir. Böylelikle konveks örtü aracılığıyla herhangi bir küme ile bağlantılı olarak bir konveks küme daima elde edilebilir, öyle ki elde edilen küme üzerinde konveks analizin tüm argümanlarını kullanabiliriz. Burada dikkat edilecek olan bir diğer nokta da konveks bir kümenin konveks örtüsünün yine kendisi oluşudur. Zira bir konveks kümeyi içeren en küçük konveks küme yine kendisidir.

Önerme 2.1.7. [20] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks örtüsü $\text{co } A$, A kümesinin elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarından oluşan kümeye denktir. Dolayısı ile konveks örtü kümesi

$$\text{co } A = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, a_i \in A, m \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde karakterize edilebilir.

Konveks örtünün yukarıda verilen karakterizasyonu sayesinde bu kümeden aldığımız herhangi bir elemanı eşitliğin karşısında verilen kümedeki gibi ifade edebilmekteyiz. Dolayısı ile şu ana kadar soyut olan konveks örtü kümesi kavramı somutlaşmaktadır.

Tanım 2.1.8. $A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümeler olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\|a\| < \varepsilon$ ve $(A_1 - a) \cap A_2 = \emptyset$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{R}^n$ sayısı bulunabiliyorsa $\{A_1, A_2\}$ küme sistemine *ekstremal* denir.

İki ayrık kümenin oluşturduğu sistem, ekstremal sistemin en açık örneklerinden biridir. Aşağıdaki önerme ekstremal sistemlerin bir örneğini daha verir.

Önerme 2.1.9. [17] $A \in \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme ve $\bar{x} \in A$ elemanı A kümesinin bir sınır noktası ise A ve $\{\bar{x}\}$ ikilisi bir ekstremal sistem oluşturur.

2.2. AFİN KÜMELER

$x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin *afin kombinasyonu* $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ve $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ olmak üzere her $m \in \mathbb{N}$ için $x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m$ vektörüdür.

$\mathbb{R}^n$ uzayında herhangi x_1, x_2 noktalarının afin kombinasyonu bu iki noktadan geçen doğrudur.

Bir A kümesi, herhangi iki elemanından geçen doğruyu içeriyorsa yani

$$\forall x, y \in A \text{ ve } \lambda \in \mathbb{R} \text{ için } \lambda x + (1 - \lambda)y \in A$$

sağlanıyorsa A kümesine *afin küme* denir [20].

Tek nokta kümesi daima bir afin kümedir ve sınırlı olan tek afin kümedir. Bunun yanında herhangi bir uzayda iki noktadan oluşan bir küme afin küme değildir. Çünkü bu iki noktayı birleştiren doğru, noktaların afin kombinasyonudur. Ancak söz konusu iki noktalı küme elemanlarının afin kombinasyonu olan sonsuz elemanlı kümeyi kapsamaz.

$\mathbb{R}$ 'de boş küme ve tek nokta kümesi afin küme iken $\mathbb{R}^2$ 'de bunlara doğrular da eklenir. Konveks kümelerde olduğu gibi afin kümelerin toplamı da bir afin kümedir.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin *afin örtüsü*

$$\text{aff } A = \bigcap \{X : X \text{ afin küme ve } A \subseteq X\}$$

olarak ifade edilir. Görüldüğü üzere afin örtü, bir kümeyi içeren tüm afin kümelerin kesişim

kümesidir.

Afin örtü kümesi

$$\text{aff } A = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i : \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, a_i \in A, m \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Aşağıda, genelleştirilmiş Heron problemini ele alırken kullanacak olduğumuz, afin kümelerin önemli bir karakterizasyonunu sağlayan, afin küme ile lineer alt uzay arasındaki ilişiyi açıklayan lemmalar verilmiştir.

Lemma 2.2.1. [17] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin bir lineer alt uzay olması için gerek ve yeter koşul A kümesinin orjini içeren afin küme olmasıdır.

İspat: A bir lineer alt uzay ise orjini daima içerir. Lineer alt uzay tanımı gereği $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $a_1, a_2 \in A$ için $\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 \in A$ sağlanacağından A bir afin kümedir.

Tersine A orjini içeren bir afin küme olsun. Lineer alt uzay olduğunu göstermek için ilk olarak skalerle çarpma işlemine göre kapalı olduğunu gösterelim. $0 \in A$ olduğundan herhangi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda a_1 + (1 - \lambda)0 = \lambda a_1 \in A$ elde edilir. Dolayısı ile A kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalıdır ve lineer alt uzay olması için gerekli olan ilk koşul sağlanır. Afin küme tanımı gereği $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$\lambda a_1 + (1 - \lambda)a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 \in A$$

sağlanır. Yukarıda gösterdiğimiz gibi A kümesi skalerle çarpma işlemine göre kapalı olduğundan $\lambda = 2$ seçersek $2\left(\frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2\right) \in A$ sağlanır ve $a_1 + a_2 \in A$ içermesi elde edilir. Toplama işlemine göre kapalılık özelliği de sağlandığından A kümesi bir lineer alt uzaydır. ■

Her lineer alt uzay daima bir afin küme iken, afin kümeler orjini içermek koşulu ile lineer alt uzaydır. Örneğin $\mathbb{R}$ 'de $\{0\}$ tek nokta kümesi lineer alt uzay ve orjini içeren afin bir kümedir. $\{1\}$ tek nokta kümesi ise afin küme olmasına rağmen orjini içermediği için bir lineer alt uzay değildir.

Aşağıda afin bir kümeden bir lineer alt uzayın nasıl elde edilebileceğine ilişkin lemma

verilmiştir. Bir afin kümeden herhangi bir elemanını çıkartarak, esasında öteleyerek, orjinden geçen bir afin küme dolayısı ile bir lineer alt uzay elde ederiz.

Lemma 2.2.2. [17] A kümesinin afin olması için gerek ve yeter koşul her $a \in A$ için $A - a$ kümesinin bir lineer alt uzay olmasıdır.

Eğer bir $a \in A$ elemanı için A afin kümesi L alt uzayının bir a ötelemesi ise yani $A = a + L$ sağlanıyorsa A afin kümesi L alt uzayına *paraleldir* denir.

Önerme 2.2.3. [20] Boştan farklı A afin kümesi tek türlü belirli $L = A - A$ alt uzayına paraleldir.

2.3. NORMAL KONİ

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere her $x \in A$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in A$ sağlanıyor ise A kümesine *koni* denir.

Tanım 2.3.1. [20] A konisi aynı zamanda konveks bir küme ise *konveks koni* olarak adlandırılır.

Konveks koninin tanımına denk olan ve uygulamada sıklıkla kullanılan bir diğer tanım aşağıda verilmiştir.

Önerme 2.3.2. [17] Bir A kümesinin konveks koni olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in A$ ve her $\lambda \geq 0$ için $x + y \in A$ ve $\lambda x \in A$ koşulunun sağlanmasıdır.

İspat: A bir konveks koni olsun. Bu durumda koni tanımından her $x \in A$ ve $\lambda \geq 0$ için $\lambda x \in A$ doğrudan sağlanır. Konveks küme tanımından $x, y \in A$ ve $\lambda = \frac{1}{2}$ için

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \in A$$

olacak şekilde bir z elemanı vardır. Yine A kümesinin bir koni olmasından ötürü

$$2z = 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) = x + y \in A$$

elde edilir ve böylece istenilen sağlanır.

Tersine her $x, y \in A$ ve $\lambda \geq 0$ için $x + y \in A$ ve $\lambda x \in A$ sağlansın. Kabulden $\beta \in [0, 1]$ için $\beta x \in A$ ve $(1 - \beta)y \in A$ sağlanır. Her her $x, y \in A$ için $x + y \in A$ sağlandığı kabulünden ötürü de $\beta x + (1 - \beta)y \in A$ sağlanır ve böylece A kümesinin konveksliği gösterilmiş olur. ■

Örneğin $\{0\}$ kümesi konveks bir kümedir ve aynı zamanda bir konveks konidir.

Lemma 2.3.3. [19] A bir konveks koni olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, m$ için $x_1, \dots, x_m \in A$ ve $\lambda_i > 0$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m \in A$ sağlanır. Yani bir konveks koni elemanlarının pozitif katlı lineer kombinasyonlarını da içerir.

İspat: $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$ olarak tanımlayalım. A bir konveks küme olduğundan elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarını içerir, yani $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_m x_m = \lambda \left(\frac{\lambda_1}{\lambda} x_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} x_m \right) \in A$ olur ve istenilen sağlanır. ■

Tanım 2.3.4. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme, $\bar{x} \in A$ olsun. A kümesinin $\bar{x}$ noktasındaki normal konisi

$$N(\bar{x}; A) = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall x \in A, \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0\} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır.

Tanımdan anlaşılacağı üzere bir konveks kümenin, bu kümeye ait bir $\bar{x}$ noktasındaki normal konisi, $\bar{x}$ vektöründen kümenin her elemanına yönlendirilmiş olan vektörler ile arasında geniş açı bulunan vektörlerden oluşur.

Belirtmek gerekir ki kümeye ait olmayan bir noktadaki normal koni boş küme olarak tanımlanır, yani eğer $\bar{x} \notin A$ ise $N(\bar{x}; A) = \emptyset$ dir.

$\{\bar{x}\}$ tek nokta kümesinin ise normal konisi tüm uzaydır. Zira

$$\langle v, \bar{x} - \bar{x} \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 \leq 0$$

eşitsizliği her $v \in \mathbb{R}^n$ için sağlanır. Dolayısı ile $N(\bar{x}; A) = \mathbb{R}^n$ olur.

Örnek 2.3.5. $A = [0, 1] \in \mathbb{R}$ kümesinin normal konisini inceleyelim.

$\bar{x} = 0$ olsun. Her $x \in A$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0,$$

$$\langle v, x - 0 \rangle \leq 0,$$

$$\langle v, x \rangle = vx \leq 0$$

eşitsizliği $v \leq 0$ vektörleri için sağlanır.

$\bar{x} = 1$ olsun. Her $x \in A$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0,$$

$$\langle v, x - 1 \rangle \leq 0$$

eşitsizliği $(x - 1) \in [-1, 0]$ olacağından $v \geq 0$ vektörleri için sağlanır. Böylece

$$N(\bar{x}; A) = \begin{cases} (-\infty, 0] & , x = 0 \\ [0, \infty) & , x = 1 \\ \{0\} & , x \in (0, 1) \end{cases} \quad (2.4)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.6. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 0\}$ kümesinin normal konisini inceleyelim.

Herhangi bir $b \in (\bar{x}, \bar{y}) \in A$ alalım. $x = -y$ ve $\bar{x} = -\bar{y}$ olduğundan her $a = (x, y) \in A$ için

$$\langle v, a - b \rangle = \langle (v_1, v_2), (x, y) - (\bar{x}, \bar{y}) \rangle \leq 0,$$

$$\langle v_1, x - \bar{x} \rangle + \langle v_2, y - \bar{y} \rangle \leq 0,$$

$$v_1(x - \bar{x}) + v_2(y - \bar{y}) \leq 0,$$

$$v_1(\bar{y} - y) + v_2(y - \bar{y}) \leq 0,$$

$$(y - \bar{y})(v_2 - v_1) \leq 0 \quad (2.5)$$

eşitsizliğini sağlayan (v_1, v_2) vektörlerini bulmalıyız.

$0 \leq \bar{y} \leq y$ için $(y - \bar{y}) \geq 0$ olacağından (2.5) eşitsizliği $(v_2 - v_1) \leq 0$ olması durumunda sağlanır. Buradan $v_2 \leq v_1$ bulunur.

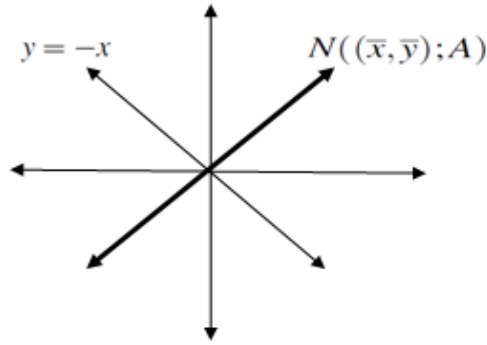
$0 \leq y \leq \bar{y}$ için $(y - \bar{y}) \leq 0$ olacağından (2.5) eşitsizliği $(v_2 - v_1) \geq 0$ olması durumunda sağlanır. Buradan $v_2 \geq v_1$ bulunur.

$y \leq \bar{y} \leq 0$ için $(y - \bar{y}) \leq 0$ olacağından (2.5) eşitsizliği $(v_2 - v_1) \geq 0$ olması durumunda sağlanır. Buradan $v_2 \geq v_1$ bulunur.

$\bar{y} \leq y \leq 0$ için $(y - \bar{y}) \geq 0$ olacağından (2.5) eşitsizliği $(v_2 - v_1) \leq 0$ olması durumunda sağlanır. Buradan $v_2 \leq v_1$ bulunur.

Tüm bu durumlar birlikte değerlendirildiğinde $v_1 = v_2$ olur ve böylece herhangi bir $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ için $N((\bar{x}, \bar{y}); A) = \{(v_1, v_2) : v_1 = v_2\}$ bulunur.

A kümesinin normal konisi düzlemde aşağıdaki gibidir:



Şekil 2.1: $y = -x$ doğrusunun normal konisi

Örnek 2.3.7. $f(x) = x^2$ fonksiyonu için $A = \text{epi } f = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 \leq t\}$ kümesinin $(\bar{x}, \bar{t}) = (0, 0)$ noktasındaki normal konisini inceleyelim.

Her $a = (x, t) \in A$ için

$$\langle v, a - b \rangle = \langle (v_1, v_2), (x, t) - (\bar{x}, \bar{t}) \rangle \leq 0,$$

$$\langle v, a - b \rangle = \langle (v_1, v_2), (x, t) - (0, 0) \rangle \leq 0,$$

$$\langle (v_1, v_2), (x, t) \rangle \leq 0,$$

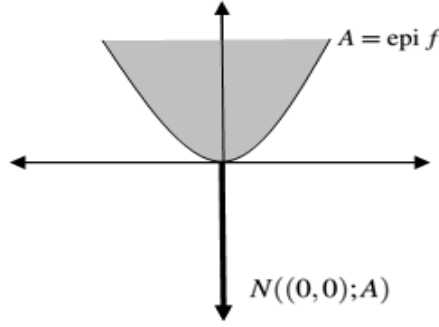
$$v_1 x + v_2 t \leq 0 \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlayan (v_1, v_2) vektörlerini bulmalıyız. $x^2 \leq t$ olduğundan $t \geq 0$ sağlanır.

$x \geq 0$ olması durumunda t sonsuz büyüyebileceği için (2.6) eşitsizliğinin sağlanması için $v_1 \leq 0$ ve $v_2 \leq 0$ olmalıdır.

$x < 0$ olması durumunda t sonsuz büyüyebileceği için (2.6) eşitsizliğinin sağlanması için $v_1 \geq 0$ ve $v_2 \leq 0$ olmalıdır.

Tüm bu durumlar birlikte değerlendirildiğinde $v_1 = 0$ ve $v_2 \leq 0$ olur ve normal koni kümesi $N((0,0);A) = \{(v_1, v_2) : v_1 = 0, v_2 \leq 0\}$ şeklinde bulunur.



Şekil 2.2: $\text{epi } x^2$ kümesinin $(0,0)$ noktasındaki normal konisi

Örnek 2.3.8. $f(x) = |x|$ fonksiyonu için $A = \text{epi } f = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x| \leq t\}$ kümesinin $(\bar{x}, \bar{t}) = (0, 0)$ noktasındaki normal konisini inceleyelim.

Her $a = (x, t) \in A$ için

$$\begin{aligned} \langle v, a - b \rangle &= \langle (v_1, v_2), (x, t) - (\bar{x}, \bar{t}) \rangle \leq 0, \\ \langle (v_1, v_2), (x, t) - (0, 0) \rangle &\leq 0, \\ \langle (v_1, v_2), (x, t) \rangle &\leq 0, \\ v_1 x + v_2 t &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

eşitsizliğini sağlayan (v_1, v_2) vektörlerini bulmalıyız.

$x \geq 0$ durumunda $|x| \leq t$ olduğundan $x \leq t$ sağlandığından

$$v_1 x + v_2 x \leq v_1 x + v_2 t$$

sağlanır ve (2.7) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} v_1 x + v_2 x &\leq v_1 x + v_2 t \leq x(v_1 + v_2) \leq 0, \\ (v_1 + v_2)x &\leq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

olarak düzenlenebilir. Burada (2.8) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $(v_1 + v_2) \leq 0$ olmalıdır. Dolayısı ile $v_1 \leq -v_2$ elde edilir.

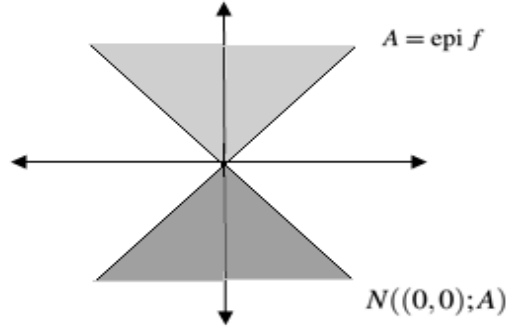
$x < 0$ durumunda $|x| \leq t$ olduğundan $x \geq -t$ sağlanır. Bu durumda (2.7) eşitsizliği

$$\begin{aligned} v_1(-t) + v_2 t &\leq v_1 x + v_2 t \leq 0, \\ v_1(-t) + v_2 t &\leq 0, \\ t(v_2 - v_1) &\leq 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

olarak düzenlenebilir. $t \geq 0$ olduğundan (2.9) eşitsizliğinin sağlanabilmesi için $(v_2 - v_1) \leq 0$ olmalıdır. Dolayısı ile $v_2 \leq v_1$ elde edilir.

Tüm bu durumlar birlikte değerlendirildiğinde $N((0,0);A) = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -|v| \geq t\}$ şeklinde bulunur.

A kümesinin $(0,0)$ noktasındaki normal konisi kümenin y eksenine göre simetriği olarak elde edilir.



Şekil 2.3: $\text{epi } |x|$ kümesinin $(0,0)$ noktasındaki normal konisi

Şimdi ileride kullanılacak olan, normal koninin temel bazı özellikleri verilecektir.

Konveks bir kümenin herhangi bir noktasındaki normal konisi daima sıfır vektörünü içerir, dolayısı ile boştan farklıdır. Matematiksel olarak ifade etmek gerekir ise A konveks küme ve $\bar{x} \in A$ için $0 \in N(\bar{x};A)$ daima sağlanır. Bu durum normal koni tanımının doğal bir sonucudur. Kısaca izah etmek gerekirse bir v vektörünün normal koniye ait olabilmesi için A kümesindeki her x elemanı için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ eşitsizliğini sağlaması gerekir. $v = 0$ vektörü için $\langle 0, x - \bar{x} \rangle = 0 \leq 0$ sağlandığından $v = 0$ vektörü normal koninin elemanıdır.

Önerme 2.3.9. [17] Normal koni kapalı bir kümedir.

İspat: Bir $\{v_k\} \subset N(\bar{x}; A)$ dizisi alalım öyle ki $\{v_k\}$ dizisi $v \in \mathbb{R}^n$ elemanına yakınsasın. $\{v_k\} \subset N(\bar{x}; A)$ ise normal koni tanımından her $k \in \mathbb{N}$ ve $x \in A$ için $\langle v_k, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ sağlanır. Burada limit alırsak, $\{v_k\}$ dizisi v elemanına yakınsadığından ötürü $k \rightarrow \infty$ iken her $x \in A$ için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ sağlanır. Böylece $v \in N(\bar{x}; A)$ elde edilir. A kümesinin $\bar{x}$ noktasındaki normal konisinden aldığımız bir dizinin yakınsadığı vektörün yine bu koninin elemanı olmasından ötürü $N(\bar{x}; A)$ kapalıdır. ■

Önerme 2.3.10. [17] Normal koni bir konveks konidir.

İspat: Kabul edelim ki A bir konveks küme ve $\bar{x} \in A$ olsun. İspat için Önerme 2.3.2'den yararlanalım. $i = 1, 2$ için $v_i \in N(\bar{x}; A)$ alalım. $v_1, v_2 \in N(\bar{x}; A)$ olduğundan (2.3) normal koni tanımından her $x \in A$ için

$$\langle v_1, x - \bar{x} \rangle \leq 0,$$

$$\langle v_2, x - \bar{x} \rangle \leq 0$$

sağlanır. Taraf tarafa topladığımızda her $x \in A$ için $\langle v_1 + v_2, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ elde edilir. Buradan $v_1 + v_2 \in N(\bar{x}; A)$ sağlanır. Yukarıda verilen ilk eşitsizliğin $\lambda \geq 0$ katını alırsak her $x \in A$ için

$$\langle \lambda v_1, x - \bar{x} \rangle \leq 0$$

elde edilir ve normal koninin tanımından $\lambda v_1 \in N(\bar{x}; A)$ sağlanır. Böylece Önerme 2.3.2'den dolayı $N(\bar{x}; A)$ bir konveks konidir. ■

Önerme 2.3.11. [17] Konveks kümenin bir iç noktasındaki normal konisi sıfır tek nokta kümesinden oluşur, yani A konveks kümesi için $\bar{x} \in \text{int}(A)$ ise $N(\bar{x}; A) = \{0\}$ olur.

İspat: $v \in N(\bar{x}; A)$ alalım ve $\bar{x} \in \text{int}(A)$ olsun. Bu durumda öyle bir $\delta > 0$ vardır ki $\bar{x} + \delta \mathbb{B} = \mathbb{B}(\bar{x}, \delta) \subseteq A$ sağlanır. $v \in N(\bar{x}; A)$ olduğundan normal koni tanımından her $e \in \mathbb{B}$ için

$$\langle v, \bar{x} + \delta e - \bar{x} \rangle \leq 0,$$

$$\langle v, \delta e \rangle \leq 0$$

sağlanır. $\delta > 0$ olduğundan $\langle v, e \rangle \leq 0$ olur. $tv \in \mathbb{B}$ sağlanacak şekilde yeterince küçük bir $t > 0$ seçelim. Buradan $\bar{x} + \delta(tv) \in A$ elde edilir. Normal koni tanımından

$$\begin{aligned}\langle v, \bar{x} + \delta(tv) - \bar{x} \rangle &= \langle v, \delta(tv) \rangle = \delta \langle v, tv \rangle \leq 0, \\ \langle v, tv \rangle &\leq 0\end{aligned}$$

elde edilir. $t > 0$ olduğundan $\langle v, v \rangle \leq 0$ ve $\|v\|^2 = 0$ elde edilir. Böylece $v = 0$ bulunur. ■

Konveks bir kümenin iç noktasındaki normal koni daima sıfır tek nokta konisi iken sınır noktasındaki normal koni için bu durum geçerli değildir, bu durumda normal koni trivial değildir. Aşağıdaki önerme bu durumu açıklar.

Önerme 2.3.12. [17] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme ise $\bar{x} \in \text{bd } A$ olması için gerek ve yeter şart $N(\bar{x}; A) \neq \{0\}$ olmasıdır.

Aşağıda konveks kümelerin toplam ve kartezyen çarpım kümelerinin normal konilerine ilişkin bilgiler verilmiştir.

Önerme 2.3.13. [17] $A_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^p$ boştan farklı konveks kümeler ve $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ için

$$i) N((\bar{x}_1, \bar{x}_2); A_1 \times A_2) = N(\bar{x}_1; A_1) \times N(\bar{x}_2; A_2)$$

$$ii) N(\bar{x}_1 + \bar{x}_2; A_1 + A_2) = N(\bar{x}_1; A_1) \cap N(\bar{x}_2; A_2) \text{ eşitlikleri sağlanır.}$$

İspat: *i)* Şimdi $(v_1, v_2) \in N((\bar{x}_1, \bar{x}_2); A_1 \times A_2)$ alalım. Açıktır ki normal koni tanımı gereği her $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ için

$$\langle (v_1, v_2), (x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \rangle = \langle v_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle + \langle v_2, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \leq 0$$

sağlanır. $x_2, \bar{x}_2 \in A_2$ olduğundan $x_2 := \bar{x}_2$ olarak alabiliriz. Bu durumda her $x_1 \in A_1$ için $\langle v_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \leq 0$ sağlanır ve böylece $v_1 \in N(\bar{x}_1; A_1)$ elde edilir. Benzer şekilde hareket edilirse $v_2 \in N(\bar{x}_2; A_2)$ elde edilir ve böylece $N((\bar{x}_1, \bar{x}_2); A_1 \times A_2) \subseteq N(\bar{x}_1; A_1) \times N(\bar{x}_2; A_2)$ gerçekleşir.

Tersine $(v_1, v_2) \in N(\bar{x}_1; A_1) \times N(\bar{x}_2; A_2)$ alalım. Normal koni tanımından her $x_1 \in A_1$ için $\langle v_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \leq 0$ ve her $x_2 \in A_2$ için $\langle v_2, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \leq 0$ sağlanır. Devam ettiğimizde her

$(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$ için

$$\langle (v_1, v_2), (x_1, x_2) - (\bar{x}_1, \bar{x}_2) \rangle = \langle v_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle + \langle v_2, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \leq 0$$

elde edilir ve $(v_1, v_2) \in N((\bar{x}_1, \bar{x}_2); A_1 \times A_2)$ olur. Buradan da iddianın ispatı için gerekli olan $N(\bar{x}_1; A_1) \times N(\bar{x}_2; A_2) \subseteq N((\bar{x}_1, \bar{x}_2); A_1 \times A_2)$ sonucuna ulaşılır.

ii) İkinci eşitliği ispatlamak için $v \in N(\bar{x}_1 + \bar{x}_2; A_1 + A_2)$ alalım. Normal koni tanımından her $x_1 \in A_1$ ve her $x_2 \in A_2$ için $\langle v, x_1 + x_2 - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \rangle \leq 0$ elde edilir. Eşitsizlik her $x_1 \in A_1$ için sağlandığından $x_1 := \bar{x}_1$ alırsak $v \in N(\bar{x}_1; A_1)$ elde edilir. Benzer şekilde hareket edersek $v \in N(\bar{x}_2; A_2)$ elde edilir ve $v \in N(\bar{x}_1; A_1) \cap N(\bar{x}_2; A_2)$ sağlanır.

Tersine $v \in N(\bar{x}_1; A_1) \cap N(\bar{x}_2; A_2)$ olsun. $v \in N(\bar{x}_1; A_1)$ ve $v \in N(\bar{x}_2; A_2)$ olduğundan her $x_1 \in A_1$ ve her $x_2 \in A_2$ için

$$\langle v, x_1 - \bar{x}_1 \rangle \leq 0,$$

$$\langle v, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \leq 0$$

elde edilir. Buradan

$$\langle v, (x_1 + x_2) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \rangle = \langle v, x_1 - \bar{x}_1 \rangle + \langle v, x_2 - \bar{x}_2 \rangle \leq 0$$

elde edilir. Böylece $v \in N(\bar{x}_1 + \bar{x}_2; A_1 + A_2)$ bulunur ve (ii) iddiası ispatlanmış olur. ■

Tanım 2.3.14. [17] $N(\bar{x}; A) = L^\perp$ eşitliği sağlanacak şekilde $L = L(\bar{x}) \neq \{0\}$ alt uzayı varsa A kümesi $\bar{x}$ noktasında bir *teğet uzaya* sahiptir denir.

Tanım 2.3.15. [17] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ konveks bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \text{dom } f$ olsun. f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki *tekil subdiferansiyeli*

$$\partial^\infty f(\bar{x}) := \{(v, 0) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\} \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır.

Sıradaki önerme tekil subdiferansiyel ile normal koni arasında var olan bir diğer ilişkiyi ortaya koyar, öyle ki bu ilişki hesaplama yaparken işimizi oldukça kolaylaştırır.

Önerme 2.3.16. [17] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks bir fonksiyon ve $\bar{x} \in \text{dom } f$ ise

$$\partial^\infty f(\bar{x}) = N(\bar{x}; \text{dom } f)$$

sağlanır.

2.4. KONVEKS FONKSİYONLAR

Konveks fonksiyonlar, tıpkı konveks kümeler gibi konveks analizin temelini teşkil eden konulardan biridir. Bu kısımda konveks fonksiyonların özelliklerinden bahsedilecek olup konveks kümeler ile ilişkisine de değinilecektir.

Tanım 2.4.1. [20] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun *etkin tanım kümesi*

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \infty\},$$

epigraf kümesi ise

$$\text{epi } f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(x) \leq t, x \in \text{dom } f\}$$

şeklinde tanımlanır. Epigraf kümesi fonksiyonun grafik ve grafik üstü kümesinden oluşur.

Tanım 2.4.2. [20] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ genişletilmiş reel değerli fonksiyon olmak üzere her $x, y \in A \subset \mathbb{R}^n$ ve $\lambda \in (0, 1)$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir.

Belirtmek gerekir ki yukarıda verilen koşullar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği gerçekleşiyorsa bu durumda f fonksiyonu *kesin konveks fonksiyon* olarak adlandırılır.

Bir fonksiyonun konveskliğini belirlemenin pek çok yolu vardır. Konveks fonksiyonların karakterizasyonlarından biri aşağıdaki lemmada verilmiştir. Diğer karakterizasyonlarına da ilerleyen bölümlerde değinilecektir.

Önerme 2.4.3. [17] $i = 1, \dots, m$ için f_i ve $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonları konveks olsun. Bu durumda $i = 1, \dots, m$ için

- i) $\sum_{i=1}^m f_i$ toplam fonksiyonu
- ii) $\lambda > 0$ için λf

fonksiyonları konvektir.

Lemma 2.4.4. (Jensen Eşitsizliği) [17,19] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir konveks fonksiyon olmak üzere $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ için

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x_i)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

Konveks fonksiyonun bir $\bar{x}$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\bar{x}$ noktasının etkin tanım kümesinin bir iç noktası yani $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } f)$ olmasıdır [17].

Aşağıdaki lemma konveks fonksiyonların oldukça önemli ve kullanışlı olan bir geometrik karakterizasyonunu verir.

Lemma 2.4.5. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $\text{epi } f$ kümesinin konveks olmasıdır.

İspat: f konveks fonksiyon olsun. $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \text{epi } f$ alalım ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. Epigraf kümesinin tanımından $f(x_1) \leq t_1$ ve $f(x_2) \leq t_2$ gelir. Tüm argümanları birlikte kullanırsak

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2$$

eşitsizliği sağlanır ve $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \in \text{epi } f$ elde edilir. Böylece $\text{epi } f$ kümesi konvektir.

Tersine $\text{epi } f$ konveks küme olsun ve $x_1, x_2 \in \text{dom } f$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olsun. $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)) \in \text{epi } f$ olur. $\text{epi } f$ kümesinin konveksliğinden

$$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1 - \lambda)(x_2, f(x_2)) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)) \in \text{epi } f$$

gelir ve $f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$ elde edilir. Böylece f fonksiyonu konvektir. ■

Lemma 2.4.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu konveks ise $\text{dom } f$ konveks kümedir.

İspat: $x_1, x_2 \in \text{dom } f$ alalım. f fonksiyonu konveks olduğundan bir önceki lemmada açıklandığı üzere $\text{epi } f$ konveks kümedir. $(x_1, t_1), (x_2, t_2) \in \text{epi } f$ alalım. Epigraf kümesinin tanımından $f(x_1) \leq t_1$ ve $f(x_2) \leq t_2$ sağlanır. $\text{epi } f$ kümesinin konveksliğinden

$$\lambda(x_1, t_1) + (1 - \lambda)(x_2, t_2) = (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \in \text{epi } f$$

gelir. $\text{epi } f$ kümesinin tanımından $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{dom } f$ elde edildiğinden ötürü $\text{dom } f$ konveks bir kümedir. ■

Lemma 2.4.7. [19] I indeks kümesi olsun. $i \in I$ için f_i konveks fonksiyonlarının supremumu olan $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$ fonksiyonu da konvektir.

İspat: $(x, t) \in \text{epi } f$ alalım. Epigraf kümesinin tanımından $\sup_{i \in I} f_i(x) = f(x) \leq t$ sağlanır. Supremum fonksiyonunun tanım gereği her $i \in I$ için $f_i(x) \leq t$ elde edilir. Böylece her $i \in I$ için $(x, t) \in \text{epi } f_i$ sağlanır. Bunun doğal bir sonucu olarak $(x, t) \in \bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i$, dolayısı ile de $\text{epi } f \subseteq \bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i$ elde edilir. Benzer şekilde ilerlendiğinde $\bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i \subseteq \text{epi } f$ sağlandığından ötürü $\text{epi } f = \bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i$ sağlanır. Her $i \in I$ için $f_i(x)$ fonksiyonları konveks olduğundan Lemma (2.4.5) gereği $\text{epi } f_i$ kümeleri de konvektir. Önerme 2.1.5'te gösterildiği üzere konveks kümelerin kesişimi yine konveks olduğundan $\bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i$ kümesi de konvektir. İspatın ilk kısmında elde ettiğimiz $\text{epi } f = \bigcap_{i \in I} \text{epi } f_i$ eşitliği gösterir ki f konveks fonksiyondur. ■

Bir A kümesinin $x \in A$ noktasındaki *indikatör fonksiyonu* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\delta(x; A) = \begin{cases} 0 & , x \in A \\ \infty & , x \notin A \end{cases}$$

Önerme 2.4.8. Bir A kümesinin koveks olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\cdot; A)$ indikatör fonksiyonunun konveks olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki A kümesi konveks olsun. Kolaylık olması için $f(x) = \delta(x; A)$ ile temsil edelim. A kümesinin konveksliğinden her $x, y \in A$ elemanı ve $\lambda \in [0, 1]$ için $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ sağlanır. Buradan her $x, y \in A$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 0 = \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y)$$

elde edilir. Dolayısı ile her $x, y \in A$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) - (1 - \lambda)f(y)$$

elde edilir ve böylece f fonksiyonu konvektir.

Tersine f konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\text{epi } f$ kümesi de konvektir. İndikatör fonksiyonun tanımından $\text{dom } f = A$ sağlanır. $\text{epi } f$ kümesinin konveksliğinden her $(x, t_1), (y, t_2) \in \text{epi } f$ için

$$\lambda(x, t_1) + (1 - \lambda)(y, t_2) = (\lambda x + (1 - \lambda)y, \lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2) \in \text{epi } f$$

sağlanır. Epigraf kümesinin tanımından $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \text{dom } f = A$ sağlanır. Böylece A kümesinin konveksliği gösterilmiş olur. ■

İleride kullanılacak olan ve genelleştirilmiş Heron problemine temel teşkil eden uzaklık fonksiyonunun tanımı ve özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.4.9. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı herhangi bir küme ve $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ için

$$d(\bar{x}; A) = \inf \{ \|\bar{x} - a\| : a \in A \}$$

fonksiyonu $\bar{x}$ vektörünün A kümesine uzaklık fonksiyonu olarak adlandırılır.

Uzaklık foksiyonu, uzaydaki herhangi bir noktanın herhangi bir kümeye olan uzaklığını verir. Norm fonksiyonlarının infimumu söz konusu olduğu için uzaklık fonksiyonu negatif değildir. Örneğin $\bar{x} = 2$ noktasının $A = (0, 1)$ kümsine uzaklığı 1 dir.

Uzaklık fonksiyonu $l = 1$ sabiti için Lipschitz süreklidir.

Önerme 2.4.10. [17] A boştan farklı bir küme ve olmak üzere bir $\bar{x}$ noktasının A kümesine olan uzaklığının 0 olması için gerek ve yeter koşul $\bar{x}$ elemanının A kümesinin kapanışına ait olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $d(\bar{x}; A) = 0$ eşitliği sağlansın. Bu durumda infimum yaklaşım özelliğinden her $k \in \mathbb{N}$ için

$$d(\bar{x}; A) = \inf\{\|\bar{x} - a_k\| : a_k \in A\} \leq \|\bar{x} - a_k\| < d(\bar{x}; A) + \frac{1}{k}$$

olacak şekilde $a_k \in A$ vardır. $d(\bar{x}; A) = 0$ eşitliğini yerine koyarsak

$$0 \leq \|\bar{x} - a_k\| < 0 + \frac{1}{k}$$

elde edilir. Limit aldığımız taktirde $\{a_k\} \subset A$ dizisi $\bar{x}$ noktasına yakınsar. Dolayısı ile $\bar{x} \in \bar{A}$ sağlanır.

Tersine $\bar{x} \in \bar{A}$ sağlansın. Kapanış kümesinin tanımından $\bar{x}$ noktasına yakınsayan bir $a_k \in A$ dizisi vardır. Bu durumda infimum ve uzaklık fonksiyonunun tanımından her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq d(\bar{x}; A) &= \inf\{\|\bar{x} - a_k\| : a_k \in A\} \leq \|\bar{x} - a_k\|, \\ 0 \leq d(\bar{x}; A) &\leq \|\bar{x} - a_k\| \end{aligned}$$

sağlanır. Burada limit aldığımızda $\{a_k\}$ dizisi $\bar{x}$ noktasına yakınsadığından eşitsizliğin sağ tarafı sifira yakınsar ve sıkıştırma teoreminden $d(\bar{x}; A) = 0$ elde edilir. ■

Tanım 2.4.11. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ noktasının A kümesine *Öklidyen izdüşümü*

$$\Pi(\bar{x}; A) = \{a \in A : \|\bar{x} - a\| = d(\bar{x}; A)\} \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır.

Öklidyen izdüşüm kümesi uzayda seçilen bir kümeye ait olup yine uzayda seçilen sabit bir noktaya olan uzaklıkları, noktanın kümeye olan uzaklığına eşit olan elemanlardan oluşur.

Öklidyen izdüşüm kümesinin durumu izdüşümünü aldığımız kümenin özelliklerine göre şekillenmektedir. Bu durumlar aşağıda açıklanmıştır.

Önerme 2.4.12. [17] Boştan farklı A kümesi kapalı ise her $x \in \mathbb{R}^n$ için Öklidyen izdüşüm kümesi daima boştan farklıdır.

İspat: Öklidyen izdüşümün tanımından her $k \in \mathbb{N}$ için öyle bir $a_k \in A$ vardır ki

$$d(\bar{x}; A) \leq \|\bar{x} - a_k\| < d(\bar{x}; A) + \frac{1}{k} \quad (2.12)$$

sağlanır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|a_k\| = \|a_k + \bar{x} - \bar{x}\| \leq \|a_k - \bar{x}\| + \|\bar{x}\|$$

olduğundan ötürü $\{a_k\}$ dizisi sınırlıdır. Dolayısı ile yakınsak bir $\{a_{k_m}\}$ alt dizisi vardır. $\{a_{k_m}\}$ alt dizisi bir a noktasına yakınsasın. A kümesi kapalı olduğu için $a \in A$ olur. (2.12) eşitsizliği her $a_k \in A$ için sağlandığından $\{a_{k_m}\}$ için de sağlanır, yani

$$d(\bar{x}; A) \leq \|\bar{x} - a_{k_m}\| < d(\bar{x}; A) + \frac{1}{k_m}$$

sağlanır. Burada düzenleme yaparsak

$$0 \leq \|\bar{x} - a_{k_m}\| - d(\bar{x}; A) < d(\bar{x}; A) - d(\bar{x}; A) + \frac{1}{k_m},$$

$$0 \leq \|\bar{x} - a_{k_m}\| - d(\bar{x}; A) < \frac{1}{k_m}$$

elde edilir. $m \rightarrow \infty$ iken limit alırsak $\frac{1}{k_m} \rightarrow 0$ ve $a_{k_m} \rightarrow a$ olacağından sıkıştırma teoreminden $\|\bar{x} - a\| - d(\bar{x}; A) = 0$ elde edilir. Buradan da $d(\bar{x}; A) = \|\bar{x} - a\|$ sağlanır. Öklidyen izdüşüm tanımından $a \in \Pi(\bar{x}; A)$ sonucuna varılır. ■

Önerme 2.4.13. [17] Boştan farklı A kümesi kapalı ve konveks ise her $x \in \mathbb{R}^n$ için Öklidyen izdüşüm kümesi tek elemanlıdır.

Önerme 2.4.14. [17] A boştan farklı, kapalı küme olmak üzere A kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul $d(\cdot; A)$ uzaklık fonksiyonunun konveks olmasıdır.

Önerme 2.4.15. [17] A boştan farklı, konveks küme ve $\bar{w} \in A$ olsun. $\bar{w} \in \Pi(\bar{x}; A)$ olması için gerek ve yeter koşul her $w \in A$ için $\langle \bar{x} - \bar{w}, w - \bar{w} \rangle \leq 0$ eşitsizliğinin sağlanamamasıdır.

2.5. SUBDİFERANSİYEL KAVRAMI

Konveks fonksiyonlar diferansiyellenebilir olmak zorunda değildir. Ancak diferansiyellenemeyen konveks fonksiyonlar için diferansiyel kavramına benzer subdiferansiyel kavramı geliştirilmiştir.

Tanım 2.5.1. [19] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyon ve $x \in \text{dom } f$ olsun. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$$

sağlanıyorsa v vektörüne f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki *subgradienti* denir.

Tanım 2.5.2. [19] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyonunun bir $x \in \text{dom } f$ noktasındaki subgradientlerinin kümesine f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki *subdiferansiyeli* denir ve

$$\partial f(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n : \langle v, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x}), \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

şeklinde gösterilir.

Örneğin $f(x) = |x|$ fonksiyonu $\bar{x} = 0$ noktasında diferansiyellenemezken, aynı noktada subdiferansiyellenebilir.

Subdiferansiyelin bir karakterizasyonu normal koni ile ilişkili olarak aşağıdaki gibi verilir. Böylece normal koni ile subdiferansiyel arasındaki ilişki de ortaya konulmuş olur.

Önerme 2.5.3. [17] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyon ve $\bar{x} \in \text{dom } f$ olmak üzere

$$\partial f(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n : (v, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\} \quad (2.13)$$

geçerlidir.

Önerme 2.5.4. [17] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyon olmak üzere her $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } f)$ için f fonksiyonunun subdiferansiyel kümesi daima boştan farklı ve kompaktır.

Önerme 2.5.5. [17] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyonu $\bar{x} \in \text{dom } f$ noktasında yerel minimuma ulaşırsa bu noktada aynı zamanda mutlak minimuma ulaşır.

İspat: $\bar{x}$, f fonksiyonunun yerel minimizeri olsun. Bu durumda tanımdan öyle bir $\delta > 0$ vardır ki her $b \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta)$ için $f(\bar{x}) \leq f(b)$ sağlanır. Bir $x \in \mathbb{R}^n$ sabitleyip $k \in \mathbb{N}$ için $x_k := (1 - k^{-1})\bar{x} + k^{-1}x$ dizisini tanımlarsak $k \rightarrow \infty$ iken x_k dizisi $\bar{x}$ noktasına yakınsar, yani yeterince büyük k değerleri için $x_k \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta)$ elde edilir. $\bar{x}$ yerel minimizer ve $x_k \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta)$ olduğundan $f(\bar{x}) \leq f(x_k)$ sağlanır. f konveks fonksiyon olduğundan

$$f(x_k) = f((1 - k^{-1})\bar{x} + k^{-1}x) \leq (1 - k^{-1})f(\bar{x}) + k^{-1}f(x)$$

elde edilir. Son iki eşitsizliği birlikte düşünersek her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &\leq (1 - k^{-1})f(\bar{x}) + k^{-1}f(x), \\ f(\bar{x}) &\leq f(\bar{x}) - k^{-1}f(\bar{x}) + k^{-1}f(x), \\ k^{-1}f(\bar{x}) &\leq k^{-1}f(x), \\ f(\bar{x}) &\leq f(x) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\bar{x}$, f fonksiyonunun bir mutlak minimum noktasıdır. ■

Önermenin özü şudur ki; konveks bir fonksiyon yerel minimuma ulaştığı bir noktada aynı zamanda mutlak (global) minimuma da ulaşır, tersi zaten mutlak ve yerel minimum kavramlarının tanımından sağlanır. Bunun bir sonucu olarak esasında şunu elde ederiz ki konveks bir fonksiyonun yerel ve mutlak minimizeri aynıdır. Dolayısı ile konveks bir fonksiyon için yerel veya denk olarak mutlak minimizer yerine sadece minimizer ifadesi kullanılabilir.

Önerme 2.5.6. [17] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyon ve $\bar{x} \in \text{dom } f$ olmak üzere f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasında minimuma ulaşabilmesi için gerek ve yeter koşul 0 vektörünün f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki bir gradyant vektörü olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki f fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında minimuma ulaşsın, yani her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ sağlansın. Bu ifade düzenlenirse her $x \in \mathbb{R}^n$ için $0 \leq f(x) - f(\bar{x})$ elde edilir. Bu da $0 = \langle 0, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$ şeklinde düzenlenebilir. Böylece her $x \in \mathbb{R}^n$

için $\langle 0, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$ eşitsizliği sağlanır, öyle ki $v = 0$ vektörü için subdiferansiyel tanımı sağlandığından $0 \in \partial f(\bar{x})$ elde edilir.

Tersine $v = 0 \in \partial f(\bar{x})$ olsun. Subdiferansiyel tanımından her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$0 = \langle 0, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$$

sağlanır. Bu ifadeyi düzenlersek her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ elde edilir. Böylece f fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında minimuma ulaşır. ■

Sıradaki önerme diferansiyellenebilir konveks fonksiyonlar için subdiferansiyel ile diferansiyel kavramları arasındaki ilişkiyi ifade eder.

Önerme 2.5.7. [19] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ konveks fonksiyon ve $\bar{x} \in \text{int}(\text{dom } f)$ noktasında diferansiyellenebilir ise $\partial f(\bar{x})$ kümesi tek elemanlıdır ve bu eleman f fonksiyonunun $\bar{x}$ noktasındaki diferansiyelidir, yani $\partial f(\bar{x}) = \{\nabla f(\bar{x})\}$ sağlanır.

Önemli ve ileride kullanılacak olan bazı konveks fonksiyonların subdiferansiyelleri aşağıda verilmiştir.

Örnek 2.5.8. [17] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olmak üzere

$$\partial \delta(\bar{x}; A) = \partial^\infty \delta(\bar{x}; A) = N(\bar{x}; A)$$

sağlanır.

Önerme 2.5.3 'te verilen

$$\partial f(\bar{x}) = \{v \in \mathbb{R}^n : (v, -1) \in N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f)\} \quad (2.14)$$

eşitliğini kullanarak ilerleyelim. Kolaylık olması için $\delta(\bar{x}; A)$ fonksiyonunu $f(\bar{x})$ ile gösterelim.

İndikatör fonksiyonun ve epigraf kümesinin tanımından $\text{epi } f = A \times [0, \infty)$ elde edilir. Önerme 2.3.13 (ii)'den bilindiği üzere kartezyen çarpım kümesinin bir noktadaki normal konisi kümelerin ayrı ayrı bileşenlerdeki normal konilerinin kartezyen çarpımına eşit

olduğundan

$$N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f) = N(\bar{x}; A) \times N(f(\bar{x}); [0, \infty)) = N(\bar{x}; A) \times (-\infty, 0] \quad (2.15)$$

sağlanır. $\text{dom } f = A$ olduğundan $N(\bar{x}; A) = N(\bar{x}; \text{dom } f)$ sağlanır. Önerme 2.3.16'den ötürü $N(\bar{x}; A) = \partial^\infty \delta(\bar{x}; A)$ sağlanır. Dolayısı ile (2.15) eşitliğini

$$N((\bar{x}, f(\bar{x})); \text{epi } f) = \partial^\infty \delta(\bar{x}; A) \times (-\infty, 0] \quad (2.16)$$

olarak düzenleyebiliriz. (2.14) ve (2.16) eşitlikleri birlikte düşünüldüğünde

$$\partial \delta(\bar{x}; A) = \partial^\infty \delta(\bar{x}; A)$$

elde edilir. Bunu $\partial^\infty \delta(\bar{x}; A) = N(\bar{x}; A)$ eşitliği ile birlikte düşünersek

$$\partial \delta(\bar{x}; A) = \partial^\infty \delta(\bar{x}; A) = N(\bar{x}; A)$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.5.9. [17] $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = |x|$ mutlak değer fonksiyonu için

$$\partial f(\bar{x}) = \begin{cases} [-1, 1] & , \bar{x} = 0 \\ 1 & , \bar{x} > 0 \\ -1 & , \bar{x} < 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

sağlanır.

$\bar{x} = 0$ noktasındaki subdiferansiyelini inceleyelim. Her $x \in \mathbb{R}$ için $\langle v, x - 0 \rangle \leq f(x) - f(0)$ eşitsizliğini gerçekleyen v vektörlerini bulmalıyız. Eşitsizliği düzenlersek her $x \in \mathbb{R}$ için $\langle v, x \rangle = vx \leq |x|$ elde edilir. Burada $x > 0$ ise $v \leq 1$, $x < 0$ ise $v \geq -1$, $x = 0$ ise $v \in \mathbb{R}$ elde edilir. Böylece $\partial f(0) = [-1, 1]$ olarak bulunur. Görüldüğü gibi her ne kadar mutlak değer fonksiyonu 0 noktasında diferansiyellenebilir olmasa da bu noktada subgradiene sahiptir. Dolayısı ile 0 noktasında subdiferansiyellenebilirdir.

$\bar{x} > 0$ ve $\bar{x} < 0$ durumlarında f fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğundan Önerme 2.5.7'den ötürü bu noktalarda $\partial f(x)$ fonksiyonun diferansiyeline eşittir. Dolayısı ile $\bar{x} > 0$

ise $\partial f(x) = 1$, $\bar{x} < 0$ ise $\partial f(x) = -1$ olur.

$\mathbb{R}$ uzayında $|x|$ fonksiyonunun subdiferansiyeli yukarıdaki gibidir. Aşağıda daha genel olarak $\mathbb{R}^n$ uzayında Öklidyen normun subdiferansiyeli verilmiştir.

Örnek 2.5.10. [17] $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) = \|x\|$ Öklidyen normunun subdiferansiyeli

$$\partial f(x) = \begin{cases} \mathbb{B} & , x = 0 \\ \left\{ \frac{x}{\|x\|} \right\} & , x \neq 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

olarak hesaplanır.

Çözüm: Bilindiği üzere norm fonksiyonu her $x \neq 0$ için diferansiyellenebilirdir. Dolayısıyla Önerme 2.5.7'ten ötürü norm fonksiyonunun $x \neq 0$ için subdiferansiyeli, bu noktalardaki diferansiyeline eşittir, yani $x \neq 0$ için $\partial f(x) = \nabla f(x) = \frac{x}{\|x\|}$ elde edilir.

Fonksiyonun $x = 0$ noktasındaki subdiferansiyelini belirlemek için $v \in \partial f(0)$ alalım. Subdiferansiyel tanımından her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle v, x - 0 \rangle \leq \|x\| - \|0\|$ yani $\langle v, x \rangle \leq \|x\|$ eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlanıyorsa $x = v$ için de sağlanır. Bunu eşitsizlikte yerine koyduğumuzda $\langle v, v \rangle \leq \|v\|$ elde edilir. $\|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ eşitliğinden dolayı $\|v\|^2 \leq \|v\|$ elde edilir ve buradan da $\|v\| \leq 1$ sonucuna varılır. Bu da bize açık bir şekilde gösterir ki $v \in \mathbb{B}$ dolayısı ile de $\partial f(0) \subseteq \mathbb{B}$ sağlanır.

Tersine $v \in \mathbb{B}$ alalım. Birim yuvarın tanımından $\|v\| \leq 1$ sağlanır. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden her $x \in \mathbb{B}$ için $\langle v, x - 0 \rangle = \langle v, x \rangle \leq \|v\| \cdot \|x\| \leq \|x\| = \|x\| - \|0\|$ sağlanır. Böylece $v \in \partial f(0)$, yani $\mathbb{B} \subseteq \partial f(0)$ elde edilir.

Örnek 2.5.11. [17] $A \in \mathbb{R}^n$ boştan farklı, kapalı, konveks bir küme ise

$$\partial d(\bar{x}; A) = \begin{cases} N(\bar{x}; A) \cap \mathbb{B} & , \bar{x} \in A \\ \left\{ \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A)}{d(\bar{x}; A)} \right\} & , \bar{x} \notin A \end{cases} \quad (2.19)$$

eşitliği sağlanır.

Çözüm: $\bar{x} \in A$ olsun ve $v \in \partial d(\bar{x}; A)$ alalım. Subdiferansiyel tanımından her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq d(x; A) - d(\bar{x}; A)$ sağlanır. $\bar{x} \in A$ olduğundan $d(\bar{x}; A) = 0$ sağlanır. Dolayısı ile

her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq d(x; A) \quad (2.20)$$

elde edilir. Uzaklık fonksiyonunun $l = 1$ sabiti için Lipschitz sürekli olduğundan her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$|d(x; A) - d(\bar{x}; A)| = |d(x; A)| = d(x; A) \leq \|x - \bar{x}\|$$

sağlanır. Bu ilişkiyi yukarıdaki eşitsizlik ile birlikte düşündüğümüz taktirde her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq d(x; A) \leq \|x - \bar{x}\|$$

sağlanır. $x = v + \bar{x}$ alırsak $\langle v, v \rangle \leq \|v\|$ elde edilir ve böylece $\|v\| \leq 1$ elde edilir, $v \in \mathbb{B}$ olur.

(2.20) eşitsizliği her $x \in \mathbb{R}^n$ için sağlandığından $x \in A$ için de sağlanır. O halde (2.20) eşitsizliğinden her $x \in A$ için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq d(x; A) = 0$ elde edilir. Normal koninin tanımından $v \in N(\bar{x}; A)$ sağlanır. Böylece $\partial d(\bar{x}; A) \in N(\bar{x}; A) \cap \mathbb{B}$ içermesi doğrulanır.

Ters içermeyi doğrulamak için $v \in N(\bar{x}; A) \cap \mathbb{B}$ alalım. Bu durumda $\|v\| \leq 1$ ve her $a \in A$ için $\langle v, a - \bar{x} \rangle \leq 0$ sağlanır. Her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $a \in A$ için

$$\begin{aligned} \langle v, x - \bar{x} \rangle &= \langle v, x - a + a - \bar{x} \rangle = \langle v, x - a \rangle + \langle v, a - \bar{x} \rangle, \\ &\leq \langle v, x - a \rangle \leq \|v\| \cdot \|x - a\| \leq \|x - a\| \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece her $x \in \mathbb{R}^n$ ve her $a \in A$ için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq \|x - a\|$ elde edilir. Eşitsizlik her $a \in A$ için sağlandığından sol taraf sağ taraf için bir alt sınırdır ve eşitsizlik infimum için de sağlanır, yani

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq \inf_{a \in A} \|x - a\| = d(x; A)$$

olur. Buradan her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq d(x; A) - d(\bar{x}; A)$$

elde edilir. Böylece $N(\bar{x}; A) \cap \mathbb{B} \subseteq \partial d(\bar{x}; A)$ sonucuna ulaşılır ve ilk ilişki doğrulanır.

$\bar{x} \notin A$ durumunda A kümesi kapalı ve konveks olduğundan $\Pi(\bar{x}, A)$ tek elemanlıdır. O halde $\bar{h} := \Pi(\bar{x}, A)$ ve $v \in \partial d(\bar{x}; A)$ alalım. Öklidyen izdüşüm kümesinin tanımı gereği $\bar{h} \in A$ olur. $v \in \partial d(\bar{x}; A)$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq d(x; A) - d(\bar{x}; A) = d(x; A) - \|\bar{x} - \bar{h}\| \leq \|x - \bar{h}\| - \|\bar{x} - \bar{h}\|$$

elde edilir. Bu durumda $g(x) := \|x - \bar{h}\|$ olarak tanımladığımız takdirde yukarıdaki ifadeyi her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq g(x) - g(\bar{x})$$

olarak düzenleyebiliriz ve Örnek 2.5.10'da elde ettiğimiz sonuçları kullanırsak $\bar{x} - \bar{h} \neq 0$ olduğundan $v \in \partial g(\bar{x}) = \left\{ \frac{\bar{x} - \bar{h}}{\|\bar{x} - \bar{h}\|} \right\}$ olur. Bu durumda $v = \frac{\bar{x} - \bar{h}}{\|\bar{x} - \bar{h}\|}$ eşitliği sağlanır ve $\bar{h} = \Pi(\bar{x}; A)$ olduğundan ötürü tanım gereğince $\|\bar{x} - \bar{h}\| = d(\bar{x}; A)$ eşitliği elde edilir. Dolayısı ile tüm verileri yerine koyduğumuzda ise

$$\partial d(\bar{x}; A) \subseteq \left\{ \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A)}{d(\bar{x}; A)} \right\}$$

sağlanır.

Tersine, $v = \frac{\bar{x} - \bar{h}}{\|\bar{x} - \bar{h}\|} \in \partial d(\bar{x}; A)$ olduğunu göstermek için her $x \in \mathbb{R}^n$ için $g_x := \Pi(x; A)$ tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned} \langle v, x - \bar{x} \rangle &= \langle v, x - \bar{h} \rangle + \langle v, \bar{h} - \bar{x} \rangle = \langle v, x - \bar{h} \rangle - \|\bar{x} - \bar{h}\|, \\ &= \langle v, x - g_x \rangle + \langle v, g_x - \bar{h} \rangle - \|\bar{x} - \bar{h}\| \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $\bar{h} = \Pi(\bar{x}, A)$ olduğundan Önerme 2.4.15'den $\langle \bar{x} - \bar{h}, g_x - \bar{h} \rangle \leq 0$ olur ve böylece $\langle v, g_x - \bar{h} \rangle \leq 0$ sağlanır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden ve $\|v\| = 1$ olmasından

ötürü

$$\begin{aligned}\langle v, x - \bar{x} \rangle &= \langle v, x - g_x \rangle + \langle v, g_x - \bar{h} \rangle - \|\bar{x} - \bar{h}\|, \\ &\leq \|v\| \cdot \|x - g_x\| - \|\bar{x} - \bar{h}\| = \|x - g_x\| - \|\bar{x} - \bar{h}\|, \\ &= d(x; A) - d(\bar{x}; A)\end{aligned}$$

olur. Böylece $v \in \partial d(\bar{x}; A)$ elde edilir. ■

Aşağıda hesaplama yaparken bizlere kolaylık sağlayan subdiferansiyel hesap kuralları verilmiştir.

Önerme 2.5.12. [19] $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ bir konveks fonksiyon, $\bar{x} \in \text{dom } f$ ve $\lambda > 0$ olmak üzere $\partial(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda \partial f(\bar{x})$ sağlanır.

İspat: Önermenin ispatı için $v \in \partial(\lambda f)(\bar{x})$ alalım. Subdiferansiyel tanımından ötürü her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq (\lambda f)(x) - (\lambda f)(\bar{x})$$

sağlanır. $\lambda > 0$ olduğundan eşitsizliğin λ^{-1} katını alırsak

$$\langle \lambda^{-1}v, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$$

olur ve buradan $\lambda^{-1}v \in \partial f(\bar{x})$ elde edilir. Böylece $\partial(\lambda f)(\bar{x}) \subseteq \lambda \partial f(\bar{x})$ sağlanır.

Tersine $x^* \in \lambda \partial f(\bar{x})$ alalım. O halde $\lambda > 0$ ve bir $v \in \partial f(\bar{x})$ için $x^* = \lambda v$ şeklinde ifade edilebilir. Subdiferansiyel tanımından her $x \in \mathbb{R}^n$ ve için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq f(x) - f(\bar{x})$ olur ve $\lambda > 0$ olduğundan

$$\langle \lambda v, x - \bar{x} \rangle \leq (\lambda f)(x) - (\lambda f)(\bar{x})$$

elde edilir. Böylece $x^* \in \partial(\lambda f)(\bar{x})$ olur ve $\lambda \partial f(\bar{x}) \subseteq \partial(\lambda f)(\bar{x})$ sağlanır. Elde edilen iki içermeye birlikte değerlendirildiğinde $\partial(\lambda f)(\bar{x}) = \lambda \partial f(\bar{x})$ eşitliği sağlanır. ■

Aşağıda Moreau-Rockafellar teoremi olarak bilinen konveks fonksiyonlar için subdiferansiyel toplam kuralı verilmiştir.

Teorem 2.5.13. [17] (Moreau-Rockafellar) $i : 1, \dots, n$ için $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, konveks fonksiyonlar olsun. Varsayalım ki öyle bir $x \in \bigcap_{i=1}^n \text{dom } f_i$ noktası var olsun ki tüm f_i fonksiyonları (muhtemelen biri hariç) bu x noktasında sürekli olsun. Bu durumda her $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^n \text{dom } f_i$ için

$$\partial \left(\sum_{i=1}^n f_i \right) (\bar{x}) = \sum_{i=1}^n \partial f_i (\bar{x}) \quad (2.21)$$

sağlanır.



3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, bir genelleştirilmiş Heron probleminin optimal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşullar incelenmiştir. Bu sırada konveks analizdeki temel kavram ve yöntemler kullanılmıştır. Bir konveks kümenin normal konisi ve bir konveks fonksiyonun subdiferansiyeli kavramları, genelleştirilmiş Heron probleminin çözümünde kullanılan temel unsurlardır. Optimal çözüme bu kavramlar, konveks analizin diğer argümanları ve bunlar arasındaki ilişkiler kullanılarak ulaşılmaktadır.

Tezin yazımında geniş ve detaylı bir literatür incelemesi yapılmış olup, kaynaklar kısmında belirtilen yayınlardan yararlanılmıştır. [15,17,18] kaynakları bu tez çalışmasının omurgasını oluşturmaktadır. Tezin yazımında LaTeX yazılım sistemi kullanılmıştır.

4. BULGULAR

Tezin bu kısmında optimizasyon problemleri hakkında temel bilgiler, genelleştirilmiş Heron probleminin hangi koşullar altında optimal çözümünün var olduğuna ilişkin teorem ve sonuçlar konuya ilişkin örnekler ile birlikte verilmiştir. İspatlarda konveks analizin araçları kullanılmıştır.

4.1. OPTİMİZASYON PROBLEMLERİ

Bu alt başlıkta kısıtlı ve kısıtsız optimizasyon problemlerinin tanımlarına yer verilerek söz konusu problemler arasındaki ilişki ve konveks optimizasyon problemlerinin optimal çözümlerinin özellikleri verilecektir.

$A \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı küme ve $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyon olmak üzere bir *küme kısıtlı optimizasyon problemi* aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\min f(\bar{x}), \quad \bar{x} \in A \quad (4.1)$$

Bu probleme kısıtlı optimizasyon problemi denmesinin sebebi f fonksiyonunu minimum yapan elemanı tüm uzayda değil özel olarak belirli bir kümede aramamızdır. Problemin çözümünü aradığımız kümeye *kısıt kümesi* denmektedir. Problemin amacı kısıt kümesi A 'da olup *amaç fonksiyonu* olan f fonksiyonunu minimum yapan elemanı bulmaktır. Kısıt kümesi $A = \mathbb{R}^n$ ise esasında problemi bir küme üzerinde kısıtlamadığımız ve f fonksiyonunun tüm uzaydaki görüntüsünü baz alarak optimal çözümü tüm uzayda aradığımız için problem *kısıtsız optimizasyon problemi* olarak adlandırılır.

Kısıtlı konveks optimizasyon probleminde ise (4.1) problemindeki amaç fonksiyonu ve kısıt kümesi kovekstir. Bu tez çalışmasında bir kısıtlı konveks optimizasyon problemi ele alınacaktır.

Bir optimizasyon probleminin optimal çözümünü tüm uzayda inceleyebileceğimiz gibi yukarıda baksedildiği üzere bir kısıt kümesinde ya da daha da özelleştirerek bir

nokta civarında da inceleyebiliriz. Bir optimizasyon probleminin çözümleri için şunlar söylenilebilir:

$f(\bar{x}) < \infty$ olmak üzere her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta) \cap A$ elemanı için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ varsa $\bar{x} \in A$ elemanı (4.1) küme kısıtlı probleminin bir *yerel (lokal) optimal çözümüdür*.

Eğer her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ eşitsizliği gerçekleşiyor ise $\bar{x} \in A$ (4.1) probleminin *mutlak (global) optimal çözümüdür*.

Bir kısıtlı optimizasyon problemi kısıt kümesinin indikatör fonksiyonu aracılığıyla kısıtsız optimizasyon problemine dönüştürülebilir ve

$$\min f(x) + \delta(x; A), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Bu durum optimizasyon teorisi bakımından önemli bir sonuçtur. Konveks optimizasyon probleminde (4.1) ve (4.2) problemlerinin yerel ve mutlak optimal çözümleri aynıdır. Bu durum aşağıda bir önerme ile ifade edilmiştir. Tezin devamında (4.1) ve (4.2) problemleri konveks optimizasyon problemi olarak kabul edilecektir.

Önerme 4.1.1. [17] Aşağıdakiler birbirine denktir:

- i) $\bar{x}$ noktası (4.1) kısıtlı optimizasyon probleminin yerel optimal çözümüdür.
- ii) $\bar{x}$ noktası (4.2) probleminin yerel optimal çözümüdür.
- iii) $\bar{x}$ noktası (4.2) probleminin mutlak optimal çözümüdür.
- iv) $\bar{x}$ noktası (4.1) kısıtlı optimizasyon probleminin mutlak optimal çözümüdür.

İspat: ($i \rightarrow ii$) $\bar{x}$ noktası (4.1) probleminin bir yerel optimal çözümü olsun. Bu durumda tanımdan her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta) \cap A$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $h(x) := f(x) + \delta(x; A)$ olmak üzere amacımız her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta)$ için $h(\bar{x}) \leq h(x)$ olduğunu göstermektir.

$x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta) \cap A$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ seçelim. $x \in \mathbb{B}(\bar{x}, \delta) \cap A$

olduğundan ötürü $\delta(x; A) = 0$ sağlanır ve dolayısı ile

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + \delta(x; A) = f(x) + 0, \\ h(x) &= f(x) \end{aligned} \tag{4.3}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\bar{x} \in A$ olduğundan $\delta(\bar{x}; A) = 0$ sağlanır. Dolayısı ile

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \delta(\bar{x}; A) = f(\bar{x}), \\ h(\bar{x}) &= f(\bar{x}) \end{aligned} \tag{4.4}$$

elde edilir. Kabul gereği her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \cap A$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ sağlandığından burada (4.3) ve (4.4) eşitliklerini kullanırsak her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \cap A$ için $h(\bar{x}) \leq h(x)$ elde edilir.

$x \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta)$ ve $x \notin A$ ise indikatör fonksiyonun tanımından

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) + \delta(x; A) = f(x) + \infty, \\ h(x) &= \infty \end{aligned} \tag{4.5}$$

olur ve her $x \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta)$ için $h(\bar{x}) \leq h(x)$ sağlanır.

(ii $\rightarrow$ iii) Daha önce Önerme 2.5.5'te ifade edildiği gibi bir konveks fonksiyon yerel minimuma ulaştığı noktada aynı zamanda mutlak minimuma da ulaşır. Dolayısı ile (4.2) kısıtsız konveks optimizasyon probleminin mutlak optimal çözümüdür.

(iii $\rightarrow$ iv) Varsayalım ki $\bar{x}$, (4.2) probleminin mutlak optimal çözümü olsun. Bu durumda tanım gereği her $x \in \mathbb{R}^n$ için $h(\bar{x}) \leq h(x)$ sağlanır. h fonksiyonunu açık bir şekilde yazarsak

$$\begin{aligned} h(\bar{x}) &= f(\bar{x}) + \delta(\bar{x}; A) \leq h(x) = f(x) + \delta(x; A) \\ f(\bar{x}) + \delta(\bar{x}; A) &\leq f(x) + \delta(x; A) \end{aligned}$$

elde edilir. $x, \bar{x} \in A$ için indikatör fonksiyonun tanımı gereği $\delta(\bar{x}; A) = \delta(x; A) = 0$ sağlanır. Bunları yukarıdaki eşitsizlikte yerine koyarsak her $x \in A$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ elde edilir. Dolayısı ile $\bar{x}$ (4.1) kısıtlı optimizasyon probleminin mutlak optimal çözümüdür.

(iv $\rightarrow$ i) $\bar{x}$, (4.1) kısıtlı optimizasyon probleminin mutlak optimal çözümü olsun. Bu durumda $f(\bar{x}) < \infty$ ve her $x \in A$ için $f(\bar{x}) \leq f(x)$ olur. Buradan herhangi bir $\delta > 0$ ve

$x \in \mathbb{B}(\bar{x}; \delta) \cap A$ için de $f(\bar{x}) \leq f(x)$ sağlanır. Dolayısı ile $\bar{x}$, (4.1) optimizasyon probleminin bir yerel optimal çözümüdür. ■

Görüldüğü üzere kısıtlı ya da kısıtsız konveks optimizasyon probleminin yerel ve optimal çözümleri birbirine denktir. Dolayısı ile bir konveks optimizasyon probleminin çözümleri için yerel veya mutlak optimal çözüm ifadeleri yerine doğrudan optimal çözüm ifadesini kullanabiliriz. Çünkü söz konusu ifadeler birbirine denktir. Bunun da ötesinde bir kısıtlı konveks optimizasyon probleminin optimal çözümü ile kısıtsız halinin optimal çözümü de aynıdır.

4.2. GENELLEŞTİRİLMİŞ HERON PROBLEMİ

Bu alt bölümde (1.1) probleminin optimal çözümlerinin hangi koşullar altında var olduğu verilmiştir. Optimal çözümün karakterizasyonuna ilişkin teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Önerme 4.2.1. [15] $i = 1, \dots, m$ için A_i ve A kümelerinden biri sınırlı ise (1.1)

$$\min \sum_{i=1}^m d(x; A_i), \quad x \in A$$

genelleştirilmiş Heron problemi bir optimal çözüme sahiptir.

İspat: Öncelikle belirtelim ki problemin tanımında ifade edildiği gibi A ve A_i kümeleri kapalı ve konvekstir. $f(x) := \sum_{i=1}^m d(x; A_i)$ fonksiyonu alttan 0 ile sınırlıdır. Dolayısı ile bir infimum değeri vardır ve bu değeri $\beta = \inf_{x \in A} f(x)$ ile gösterelim. Bu durumda infimuma yakınsayan, yani $k \rightarrow \infty$ iken $f(x_k) \rightarrow \beta$ olacak şekilde bir $\{x_k\} \subset A$ dizisi vardır.

A kısıt kümesinin sınırlı olması durumunda klasik Bolzano-Weierstrass teoreminden $\{x_k\}$ dizisinin bir $\bar{x}$ noktasına yakınsayan bir alt dizisi vardır. Genelliği bozmamak adına yakınsak alt diziyi $\{x_k\}$ ile gösterelim. A kümesinin kapalılığından ötürü $\bar{x} \in A$ sağlanır. Uzaklık fonksiyonunun sürekli olduğunu daha önce göstermiştik. Sürekli fonksiyonların toplamının sürekliliğinden ötürü f fonksiyonu da sürekli olduğundan $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\bar{x})$ eşitliği elde edilir. Aynı zamanda $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = \beta$ olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(\bar{x}) = \beta$$

sağlanır. f fonksiyonu infimum değerine $\bar{x} \in A$ elemanında ulaştığından $f(\bar{x}) = \min_{x \in A} f(x)$ olur. Görüldüğü gibi f fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında minimal değere ulaşır. Bu sebeple $\bar{x}$ noktası (1.1) probleminin bir optimal çözümüdür.

A_i kümelerinden birinin sınırlı olması durumunda ise kümelerin herhangi birini seçip o küme için ispatı yapalım. A_1 kümesinin sınırlı olduğunu varsayalım. Yukarıda belirttiğimiz gibi $\beta := \inf_{x \in A} f(x)$ için infimuma yakınsayan, yani $k \rightarrow \infty$ iken $f(x_k) \rightarrow \beta$ olacak şekilde bir $\{x_k\} \subset A$ dizisi vardır. f fonksiyonunun tanımından

$$d(x_k; A_1) \leq f(x_k)$$

elde edilir. $k \rightarrow \infty$ iken $f(x_k) \rightarrow \beta$ olduğundan ötürü yeterince büyük k değerleri için

$$f(x_k) < \beta + 1$$

sağlanır. İki eşitsizliği birlikte düşündüğümüzde yeterince büyük k değerleri için

$$d(x_k; A_1) \leq f(x_k) < \beta + 1,$$

$$d(x_k; A_1) < \beta + 1$$

sağlanır. A_1 kümesi kapalı ve konveks olduğundan $d(x_k; A_1) = \|x_k - a_k\|$ olacak şekilde $a_k \in A_1$ elemanları vardır. Bu durumda yeterince büyük k değerleri için

$$d(x_k; A_1) = \|x_k - a_k\| < \beta + 1$$

olacak şekilde bir $\{a_k\} \subset A_1$ dizisi vardır. Üçgen eşitsizliğini uygularsak

$$\|x_k\| < \|a_k\| + \beta + 1$$

elde edilir ve a_k dizisinin de sınırlılığı göz önüne alınırsa yeterince büyük k değerleri için $\{x_k\}$ dizisi üstten $\|a_k\| + \beta + 1$ ile sınırlıdır. Dizinin kalan sonlu tane terimi de en büyük elemandan küçük olacağından $\{x_k\}$ dizisi sınırlıdır. İspatın devamı ilk durumdakiyle benzerdir. x_k dizisi sınırlı olduğundan yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu diziyi $\{x_k\}$ ile gösterelim ve $\bar{x}$ noktasına yakınsasın. A kümesinin kapallılığından ötürü $\bar{x} \in A$ sağlanır. f fonksiyonunun sürekliliği ve infimum özelliğinden f fonksiyonu $\bar{x}$ noktasında minimum

değerine ulaşır. Dolayısı ile bu nokta genelleştirilmiş Heron problemi için bir optimal çözümdür. ■

Artık genelleştirilmiş Heron probleminin optimal çözümünün karakterizasyonlarını verebiliriz.

Teorem 4.2.2. [18] (1.1) genelleştirilmiş Heron probleminde $i = 1, \dots, m$ için $A \cap A_i = \emptyset$ sağlansın. $\bar{x} \in A$ ve $i = 1, \dots, m$ için

$$a_i(\bar{x}) := \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A_i)}{d(\bar{x}; A_i)} \neq 0 \quad (4.6)$$

tanımlansın. Bu durumda $\bar{x} \in A$ elemanının (1.1) probleminin bir optimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul

$$-\sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}) \in N(\bar{x}; A) \quad (4.7)$$

içermesinin sağlanmasıdır. Ek olarak kısıt kümesi A , $\bar{x}$ noktasında L teğet uzayına sahip olsun. Bu durumda (4.7) içermesi her $u \in L \setminus \{0\}$ için

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0 \quad (4.8)$$

eşitliğine denk olur.

İspat: İlk iddiayı doğrulamak için varsayalım ki (1.1) problemi bir optimal çözüme sahip olsun ve bu optimal çözümü $\bar{x}$ ile gösterelim. Önerme 4.1.1'ten ötürü $\bar{x}$ aynı zamanda

$$\min f(x) + \delta(x; A), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (4.9)$$

kısıtsız optimizasyon probleminin de bir optimal çözümüdür. $\bar{x}$ optimal çözüm olduğundan önerme 2.5.6'dan ötürü

$$0 \in \partial \left(\sum_{i=1}^m d(\cdot; A_i) + \delta(\cdot; A) \right) (\bar{x}) \quad (4.10)$$

içermesini sağlanır. Uzaklık fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 2.5.13'te verilen subdiferansiyel toplam kuralını (Moreau-Rockafellar Teoremi) kullanabiliriz. İlgili kuralı

uyguladığımız taktirde

$$\begin{aligned} 0 \in \partial \left(\sum_{i=1}^m d(\cdot; A_i) + \delta(\cdot; A) \right) (\bar{x}) &= \sum_{i=1}^m \partial d(\bar{x}; A_i) + \partial \delta(\bar{x}; A), \\ &= \sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}) + N(\bar{x}; A) \end{aligned} \quad (4.11)$$

elde edilir ve böylece

$$-\sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}) \in N(\bar{x}; A) \quad (4.12)$$

sonucuna ulaşılarak (4.7) içermesi doğrulanır. Ters içerme ispatta sondan başa doğru gidildiğinde açık bir şekilde sağlanır.

Son iddiayı ispatlamak için A kümesinin $\bar{x}$ noktasında bir L teğet uzayına sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda teğet uzay tanımından $N(\bar{x}; A) = L^\perp$ eşitliği gelir. (4.7) içermesi doğrudan

$$-\sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}) \in L^\perp$$

ifadesine eşit olur. Bu ifadeyi düzenlersek ortogonal tümleyen kümesinin tanımından her $u \in L$ için

$$\left\langle \sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}), u \right\rangle = 0$$

sağlanır.

$i = 1, \dots, m$ için $A \cap A_i = \emptyset$ kabulü ve $a_i(\bar{x})$ vektörlerinin tanımından $\|a_i(\bar{x})\| = 1$ olduğu açıktır. $\|a_i(\bar{x})\| = 1$ ve $\|u\| \neq 0$ olduğundan her $u \in L \setminus \{0\}$ için

$$\sum_{i=1}^m \frac{\langle a_i(\bar{x}), u \rangle}{\|a_i(\bar{x})\| \cdot \|u\|} = 0$$

sağlanır. Bu da (2.2) uzayda iki vektör arasındaki açının kosinüsünün tanımından ötürü her

$u \in L \setminus \{0\}$ için

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0$$

eşitliğini verir.

Tersine, her $u \in L \setminus \{0\}$ için $\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0$ sağlansın. $i = 1, \dots, m$ için $\|a_i\| = 1$ ve $\|u\| \neq 0$ olduğundan her $u \in L \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) &= \sum_{i=1}^m \frac{\langle a_i(\bar{x}), u \rangle}{\|a_i(\bar{x})\| \cdot \|u\|} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\langle a_i(\bar{x}), u \rangle}{\|u\|} \\ &= \sum_{i=1}^m \langle a_i(\bar{x}), u \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$-\sum_{i=1}^m \langle a_i(\bar{x}), u \rangle = \left\langle -\sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}), u \right\rangle = 0$$

elde edilir ve böylece $-\sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}) \in L^\perp = N(\bar{x}; A)$ sağlanır. ■

Örnek 4.2.3. Kısıt kümesi $A = \{(x, 0) : |x| \leq 2\}$ ve $A_1 = \{(-2, 2)\}$, $A_2 = \{(2, 2)\}$ kümeleri için genelleştirilmiş Heron problemini düşünelim. $\bar{x} = (0, 0)$ noktasının optimal çözüm olduğunu Teorem 4.2.2'yi kullanarak gösterelim.

$$\begin{aligned} a_1(\bar{x}) &= \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A_1)}{d(\bar{x}; A_1)} = \frac{(0, 0) - (-2, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ a_2(\bar{x}) &= \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A_2)}{d(\bar{x}; A_2)} = \frac{(0, 0) - (2, 2)}{2\sqrt{2}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

ve $N((0, 0); A) = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ olduğundan $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ lineer alt uzayı için $N((0, 0); A) = L^\perp$ sağlanır. Dolayısı ile A kısıt kümesi $\bar{x} = (0, 0)$ noktasında teğet uzaya sahiptir.

$i = 1, 2$ için $\|a_i\| = 1$ olduğundan her $u = (x, 0) \in L \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \cos(a_i(\bar{x}), u) &= \sum_{i=1}^2 \frac{\langle a_i(\bar{x}), u \rangle}{\|a_i(\bar{x})\| \cdot \|u\|} = \sum_{i=1}^2 \left\langle a_i(\bar{x}), \frac{u}{\|u\|} \right\rangle, \\ &= \left\langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}, 0 \right) \right\rangle + \left\langle \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(\frac{x}{\sqrt{x^2}}, 0 \right) \right\rangle, \\ &= \frac{x}{\sqrt{2x^2}} - 0 - \frac{x}{\sqrt{2x^2}} + 0 = 0 \end{aligned}$$

sağlanır. (4.8) eşitliği sağlandığından Teorem 4.2.2'den $(0, 0)$ noktası optimal çözümdür.

Sonuç 4.2.4. [15] A , L alt uzayına paralel bir afin alt uzay olsun ve genelleştirilmiş Heron probleminde $i = 1, \dots, m$ için $A \cap A_i = \emptyset$ varsayımı sağlansın. Bu durumda $\bar{x} \in A$ elemanının (1.1) genelleştirilmiş Heron probleminin bir optimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul (4.8) koşulunun yani L alt uzayının sıfırdan farklı her u vektörü için

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: A , L alt uzayına paralel bir afin alt uzay olduğundan A kümesi $A = \bar{x} + L$ olarak ifade edilebilir. $v \in N(\bar{x}; A)$ alalım. Normal koni tanımından her $x \in A$ için $\langle v, x - \bar{x} \rangle \leq 0$ sağlanır. Yukarıdaki eşitlikten ötürü $u \in L$ için $x = \bar{x} + u \in A$ olarak yazılabilir. Bu eşitliği yerine koyarsak her $u \in L$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle = \langle v, \bar{x} + u - \bar{x} \rangle = \langle v, u \rangle \leq 0$$

elde edilir. L alt uzay olduğundan her $u \in L$ için $-u \in L$ sağlanır ve buradan her $u \in L$ için $\langle v, u \rangle = 0$ elde edilir. Böylece $N(\bar{x}; A) \subseteq L^\perp$ elde edilir.

Tersine $v \in L^\perp$ alalım. Ortogonal tümleyeninin tanımından her $u \in L$ için $\langle v, u \rangle = 0$ sağlanır. $L = A - \bar{x}$ olduğundan $x \in A$ için her $u \in L$ elemanını $u = x - \bar{x}$ olarak ifade edebiliriz. Bu durumda her $x \in A$ için

$$\langle v, x - \bar{x} \rangle = \langle v, u \rangle = 0$$

sağlanır ve $L^\perp \subseteq N(\bar{x}; A)$ elde edilir. Böylece A kümesi $\bar{x}$ noktasında teğet uzaya sahip

olduğundan Teorem 4.2.2'den $\bar{x}$ noktasının optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul her $u \in L \setminus \{0\}$ için

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. ■

Kısıt kümesinin $\bar{x}$ noktasında bir teğet uzaya sahip olması durumu Teorem 4.2.2'de verilmiştir. Aşağıda özel olarak teğet uzayın sonlu sayıda vektörün gerdiği uzak olması durumu verilmiştir. Bu durumda teğet uzaydaki sıfırdan farklı vektörler ile (4.8) eşitliğini sağlatmaya gerek yoktur. Bunun yerine yalnızca teğet uzayı geren sonlu sayıdaki eleman için ilgili eşitliğin sağlanması yeterlidir.

Sonuç 4.2.5. [15] Teorem 4.2.2'deki L alt uzayı sıfırdan farklı $u_1, \dots, u_n$ vektörlerinin gerdiği uzay olsun. Bu durumda $\bar{x}$ noktasının (1.1) genelleştirilmiş Heron probleminin bir optimal çözümü olması için gerek ve yeter koşul her $j = 1, \dots, n$ için

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u_j) = 0 \tag{4.13}$$

sağlanmasıdır.

İspat: Teorem 4.2.2'de A kümesinin $\bar{x}$ noktasında teğet uzaya sahip olduğu takdirde bu noktanın optimal çözüm olabilmesi için gerek ve yeter koşulun (4.8) eşitliğinin sağlanması olduğu verilmişti. Burada da L alt uzayı özel olarak belirli bir küme olarak tanımlandığından yalnızca (4.13) ve (4.8) eşitliklerinin birbirine denk olduğunu göstermek yeterlidir.

(4.8) eşitliği sağlansın. Yani her $u \in L \setminus \{0\}$ için $\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0$ gerçeklensin. Kabul gereği $u_i \in L$ vektörleri sıfırdan farklı olduğundan (4.13) eşitliği doğrudan sağlanır.

Tersine (4.13) sağlansın ve $a := \sum_{i=1}^m a_i(\bar{x})$ olarak tanımlayalım. Bu durumda $j = 1, \dots, n$ için

$u_j \neq 0$ ve $i = 1, \dots, m$ için $\|a_i\| = 1$ olduğundan her $j = 1, \dots, n$ için (4.13)'ten

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u_j) = \sum_{i=1}^m \frac{\langle a_i(\bar{x}), u_j \rangle}{\|a_i(\bar{x})\| \cdot \|u_j\|}, \\ 0 &= \sum_{i=1}^m \langle a_i(\bar{x}), u_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}), u_j \right\rangle = \langle a, u_j \rangle \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısı ile her $j = 1, \dots, n$ için $\langle a, u_j \rangle = 0$ elde edilir. Herhangi bir $u \in L \setminus \{0\}$ elemanını alalım. L , sonlu sayıda elemanın gerdiği uzay olduğundan elemanlarını

$$u = \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradan

$$\langle a, u \rangle = \langle a, \sum_{j=1}^n \lambda_j u_j \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle a, u_j \rangle = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Tüm eşitlikleri birlikte düşündüğümüzde her $u \in L \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) &= \sum_{i=1}^m \frac{\langle a_i(\bar{x}), u \rangle}{\|a_i(\bar{x})\| \cdot \|u\|} = \sum_{i=1}^m \frac{\langle a_i(\bar{x}), u \rangle}{\|u\|} \\ &= \frac{\left\langle \sum_{i=1}^m a_i(\bar{x}), u \right\rangle}{\|u\|} = \frac{\langle a, u \rangle}{\|u\|} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Örnek 4.2.6. (1.1) genelleştirilmiş Heron probleminde kısıt kümesi A , $\bar{x}$ noktasında $A = L$ olacak şekilde L teğet uzaya olan bir afin küme olsun ve $A \cap A_i = \emptyset$ koşulu sağlansın.

(1.1) genelleştirilmiş Heron problemini söz konusu kümeler için düşünelim. Teorem 4.2.2'den $\bar{x}$ elemanının (1.1) probleminin çözümü olabilmesi için gerek ve yeter koşul her $u \in L \setminus \{0\}$ için (4.8) ile belirtilen

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), u) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. $i = 1, \dots, n$ için $a_i = a_i(\bar{x})$ ile gösterelim.

Her $i = 1, \dots, n$ için $\|a_i\| = 1$ olduğundan her $a \in L \setminus \{0\} = A \setminus \{0\}$ için (4.8) eşitliğini

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), a) &= \frac{\langle a_1, a \rangle}{\|a_1\| \cdot \|a\|} + \dots + \frac{\langle a_m, a \rangle}{\|a_m\| \cdot \|a\|} \\ &= \frac{\langle a_1, a \rangle}{\|a\|} + \dots + \frac{\langle a_m, a \rangle}{\|a\|} \\ &= \langle a_1, a \rangle + \dots + \langle a_m, a \rangle = 0 \end{aligned}$$

şeklinde düzenleyebiliriz. Bu durumda (4.8) eşitliği her $a \in A \setminus \{0\}$ için

$$\sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), a) = 0 \quad (4.16)$$

eşitliğine denk olur. Bu durumda $\bar{x}$ noktasının optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul (4.16) eşitliğinin sağlanmasıdır.

Örneğin kısıt kümesi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ ve $A_1 = \left\{\left(0, \frac{7}{3}\right)\right\}$, $A_2 = \{(4, -3)\}$ kümeleri için genelleştirilmiş Heron problemini düşünelim.

$N((\bar{x}, \bar{y}); A) = L^\perp = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x\}$ olacak şekilde $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x\}$ lineer alt uzayı vardır. L teğet uzayı A kümesinin kendisine eşittir. $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ için

$$\begin{aligned} a_1(\bar{x}) &= \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A_1)}{d(\bar{x}; A_1)} = \frac{(1, 1) - \left(0, \frac{7}{3}\right)}{\frac{5}{3}} = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right) \\ a_2(\bar{x}) &= \frac{\bar{x} - \Pi(\bar{x}; A_2)}{d(\bar{x}; A_2)} = \frac{(1, 1) - (4, -3)}{5} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan her $a = (x, x) \in A \setminus \{0\}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \cos(a_i(\bar{x}), a) &= \sum_{i=1}^2 \left\langle a_i(\bar{x}), \frac{a}{\|a\|} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2}}, \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\right) \right\rangle + \left\langle \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{2x^2}}, \frac{x}{\sqrt{2x^2}}\right) \right\rangle, \\ &= \frac{3x}{5\sqrt{2x^2}} - \frac{4x}{5\sqrt{2x^2}} - \frac{3x}{5\sqrt{2x^2}} + \frac{4x}{5\sqrt{2x^2}} = 0 \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece $(1, 1)$ noktası optimal çözümdür.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında bir genelleştirilmiş Heron probleminin optimal çözümü üzerine bir inceleme yapılmıştır. Söz konusu problem esasında bir lokasyon problemi örneğidir. Problemin optimal çözümünün varlığına ilişkin koşullar konveks analiz çerçevesinde verilmiştir. Genelleştirilmiş Heron probleminin kökeni klasik Heron problemine dayanmaktadır. Heron belirli bir doğru üzerinde olup, verilen iki noktaya uzaklığı toplamı minimum olan noktayı bulmayı amaçlayan problemi ileri sürmüştür. Söz konusu problem ışığın en kısa yoldan yansıması kuralını ve düzlem geometrisini kullanarak çözmüştür [1]. Problemi düzlemde 3 nokta için uyarlayan kişi ise Fermat'tır. Düzlemde verilen 3 noktaya uzaklıkları minimum olan noktayı bulma fikrini Fermat ileri sürse de problem Torricelli, Krarup ve Vajda tarafından çözülmüştür [1,3]. Bu problem ilk lokasyon problemi olarak anılmaktadır.

Simpson ise sözü geçen problemi ağırlıklı uzaklıklar cinsinden düşünmüştür. Weber [7] ise problemi daha geniş perspektifte ele alarak sonlu sayıda nokta için inceleme yapmıştır. Weber, söz konusu lokasyon problemini endüstriyel anlamda inceleyen ilk kişidir. Problem üzerine pek çok bilim insanının çalışmaları mevcuttur. Dolayısı ile problem Fermat-Weber problemi, Steiner problemi vb. isimlerle de anılmaktadır.

Genelleştirilmiş Heron probleminde $\mathbb{R}^n$ uzayında verilen kapalı, konveks kümenin içerisinde olup yine verilen sonlu sayıda kapalı, konveks kümeye olan uzaklıkları toplamı minimum olan nokta araştırılmaktadır.

A ve $i = 1, \dots, m$ için A_i kümeleri $\mathbb{R}^n$ uzayının boştan farklı, kapalı ve konveks alt kümeleri olmak üzere (1.1) genelleştirilmiş Heron problemi

$$\min \sum_{i=1}^m d(x; A_i), \quad x \in A$$

olarak ifade edilir.

(1.1) probleminde kısıt kümesi ya da $i = 1, \dots, n$ için A_i kümelerinden herhangi biri kısıtlı ise bu durumda problem bir optimal çözüme sahiptir. Optimal çözümün bulunmasında

normal koni ve subdiferansiyel kavramları önemli rol oynar. Problemin çözümüne ilişkin karakterizasyonlar Bulgular başlığında detaylıca verilmiştir.

(1.1) problemin çözümüne yönelik Mordukhovich ve diğ. [15] tarafından yapılan çalışmada optimal çözümünün varlığı için gerek ve yeter koşullar ile optimal çözüme yakınsayan bir algoritma verilmiştir. Yine aynı bilim insanları tarafından yapılan bir diğer çalışmada problem Banach uzaylarında incelenmiştir [16]. Bu kez poroblemde uzaklık fonksiyonu yerine daha genel olarak minimal zaman fonksiyonu kullanılmıştır. F kapalı, sınırlı, konveks ve A kapalı küme olmak üzere minimal zaman fonksiyonunun tanımı

$$T_A^F(\bar{x}) = \inf\{t \geq 0 \mid A \cap (\bar{x} + tF) \neq \emptyset\} \quad (5.1)$$

şeklindeir. Burada A amaç kümesi, F ise sabit dinamikler kümesidir.

Söz konusu problem F boştan farklı, kapalı, sınırlı, konveks, $0 \in \text{int}A$ ve $i = 1, \dots, m$ için A_i boştan farklı ve kapalı kümeleri için

$$\min T_A^F(x) = \sum_{i=1}^m T_{A_i}^F(x), \quad x \in A \quad (5.2)$$

olarak formülize edilebilir.

Ardından Chi [5] yapmış olduğu çalışmasında genelleştirilmiş Heron problemi için hızlı bir algoritma geliştirmiştir.

Bu alanda çalışma yapmak isteyen araştırmacılar [16] makalesinde Banach uzaylarında genelleştirilmiş Heron problemi için elde edilen sonuçları (5.2) probleminin ağırlıklaştırılmış hali için inceleyebilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Courant, R. ve Robbins, H., 1996, *What Is Mathematics?*, Oxford University Press, New York Oxford, ISBN: 0-19-510519-2.
- [2]. Heath, T.L., 1921, *A History of Greek Mathematics*, Volume I, University Press, Oxford University Press.
- [3]. Krarup, J. and Vajda, S., 1997, On Torricelli's Geometrical Solution to a Problem of Fermat, *IMA Journal of Management Mathematics*, 8 (3), 215-224.
- [4]. Bhattacharya, B.B., 2011, On the Fermat-Weber Point of a Polygonal Chain and Its Generalizations, *Fundamenta Informaticae*, 107 (4), 331-343.
- [5]. Chi, E.C. and Lange, K., 2014, A Look at The Generalized Heron Problem Through The Lens of Majorization-Minimization, *The American Mathematical Monthly*, 121 (2), 95-108.
- [6]. Bruno, G., Genovese, A. and Improta, G., 2014, A Historical Perspective on Location Problems, *BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, 29 (2), 83-97.
- [7]. Weber, A., 1922 , *Über Den Standort Der Industrien*, Verlag Von J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), Tübingen. (English Translation by Friedrich, C.J., 1929, *Alfred Weber's Theory of Location of Industries*, Chicago University Press, Chicago- Illinois.)
- [8]. Martini, H., Swanepoel, K.J. and Weiss, G., 2002, The Fermat-Torricelli Problem in Normed Planes and Spaces, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 115 (2), 283-314.
- [9]. Kuhn, H.W., 1973, A note on Fermat's problem, *Math. Program.*, 4, 98-107.
- [10]. Katz, I.N., 1974, Local Convergence in Fermat's Problem, *Math. Program.*, 6, 89-104.
- [11]. Hajja, M., 1994, An Advanced Calculus Approach to finding The Fermat Point, *Maht. Mag.*, 67(1), 29-34.
- [12]. Plastria, F., 2006, Four-Point Fermat Location Problems Revisited. New Proofs and Extensions of Old Results, *IMA Journal of Management Mathematics*, 17 (4), 387-396.
- [13]. Uteshev, A.Y., 2014, Analytical Solution for The Generalized Fermat-Torricelli Problem, *The American Mathematical Monthly*, 121(4), 318-331.
- [14]. Chen, Zg., 2016, The Fermat-Torricelli Problem on Surfaces, *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, 31 (3), 362-366.

- [15]. Mordukhovich, B.S., Nam, N.M. and Salinas, J.J., 2012, Solving a Generalized Heron Problem by Means of Convex Analysis, *Amer. Math. Monthly*, 119 (2), 87-99.
- [16]. Mordukhovich, B.S., Nam, N.M., Salinas, J., 2012, Applications of Variational Analysis to a Generalized Heron Problem, *Applicable Analysis*, 91 (10), 1915-1942.
- [17]. Mordukhovich, B.S. and Nam, N.M., 2014, *An Easy Path to Convex Analysis and Applications*, Morgan & Claypool Publishers, Williston, 978-1-62705-237-5.
- [18]. Salinas, J. 2011, Sundifferentials of Distance Functions and Applications to Facility Location Problems, Thesis (MSc), *Submitted to the Graduate School of the University of Texas Pan American*.
- [19]. Mahmudov, E.N., 2011, *Approximation and Optimization of Discrete and Differential Inclusions*, Elsevier, USA, 978-0-12-388428-2.
- [20]. Rockafellar, R.T., 1972, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, 0-691-08069-0.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Esra ÇEBİ
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
Telefon	
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Kültür Üniversitesi
Fakülte	Fen-Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik-Bilgisayar
Mezuniyet Yılı	2018

Lisans	
Üniversite	İstanbul Kültür Üniversitesi
Fakülte	Hukuk Fakültesi
Bölümü	Hukuk
Mezuniyet Yılı	2019

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2022

