

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BİR HALKANIN İDEAL GENİŞLEMESİNİN İDEALLERİ

FATMA CİRİT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI**

**DANIŞMAN
DOÇ. DR. KÜRŞAT HAKAN ORAL**

İSTANBUL, 2015

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HALKANIN İDEAL GENİŞLEMESİNİN İDEALLERİ

Fatma CİRİT tarafından hazırlanan tez çalışması 24.11.2015 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL

Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Murat ALAN

Yıldız Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Ünsal TEKİR

Marmara Üniversitesi

ÖNSÖZ

Tezin hazırlanmasında yardımcı olan başta danışman hocam Doç. Dr. Kürşat Hakan ORAL'a teşekkür ederim. Ayrıca fedakarlığını esirgemeyen aileme, bu yolda beraber yürüdüğümüz Tuğba ARKAN'a ve desteğini eksik etmeyen arkadaşım Gamze POLAT'a teşekkürü bir borç bilirim.

Kasım, 2015

Fatma CİRİT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	1
1.3 Hipotez	1
BÖLÜM 2	
TEMEL KAVRAMLAR	2
BÖLÜM 3	
BİR HALKANIN İDEALLERİ	8
3.1 Asal İdealler	8
3.2 Asalımsı İdealler	14
3.3 Maksimal İdealler	21
3.4 2-Yutan İdealler	26
BÖLÜM 4	
İDEAL (DORROH) GENİŞLEMESİ	35
4.1 Tanım ve Özellikler	35
4.2 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ İdeal Genişlemesinin Özel Elemanları	38

BÖLÜM 5

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ HALKASININ İDEALLERİ.....	41
---	----

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER.....	50
------------------------	----

KAYNAKLAR.....	51
----------------	----

ÖZGEÇMİŞ.....	52
---------------	----

SİMGE LİSTESİ

$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$R \cong S$	R ile S halkası izomorftur
$R \times S$	R ile S halkasının kartezyen çarpımı
$\text{Çek}f$	f nin çekirdeği
$\text{Rad}(I)$	I idealinin Radikali
$U(R)$	R halkasının birimsel elemanlar kümesi
$Z(R)$	R halkasının sıfır bölen elemanlar kümesi
$N(R)$	R halkasının nilpotent elemanlar kümesi
$\text{Id}(R)$	R halkasının idempotent elemanlar kümesi

BİR HALKANIN İDEAL GENİŞLEMESİNİN İDEALLERİ

Fatma Cirit

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Kürşat Hakan Oral

Bu tez çalışmasında İdeal (Dorroh) Genişlemesi incelenmiştir. Ön bilgiler kısmında halkalar hakkında temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Daha sonra değişmeli ve birimli halkalarda bazı ideallerin yapısı ve özellikleri incelenmiştir. Özel olarak $\mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının ideallerine yer verilmiştir. Ayrıca ideal genişlemesiyle ilgili tanım, teorem ve özellikler belirtilmiş ve ideal genişlemesinin ideal yapısından bahsedilmiştir. Son olarak $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ ideal genişlemesinin bazı idealleri karakterize edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Halka, İdeal, İdeal genişlemesi.

THE IDEAL STRUCTURE OF IDEAL EXTENSION

Fatma CİRİT

Department of Mathematics

MSc. Thesis

Adviser: Assoc. Prof. Dr. Kürşat Hakan ORAL

In this thesis, the ring of Ideal(Dorroh) extension is examined. Firstly, basic definitions and theorems are given about rings and ideals. And then, we have investigated some ideals in commutative ring with identity. The ideals of $\mathbb{Z}_n$ and $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ are given. Also, the definitions, theorems and notions are studied about Ideal Extension. And the ideals of Ideal Extension are mentioned. Lastly, some ideals of $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ have been characterized.

Keywords: Rings, Ideal, Ideal Extension.

1.1 Literatür Özeti

Dorroh [1] 1932 yılında yayınladığı makale ile halka genişlemesi fikrinin öncüsü olmuştur. Dorroh genişlemesinde ilk olarak birimsiz bir halkayı birimli bir halka içine gömme fikrinden yola çıkılmıştır. Bu konu hakkında çalışmalar yapılmış olup, De alwis [2] $\mathbb{Z}$ Dorroh genişlemesi olan $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ halka genişlemesiyle ilgilenmiş ve bazı sonuçlara ulaşmıştır. Daha sonra Cannon and Neuerburg [3] birimli bir halkanın Dorroh genişlemesinin bu halkaların kartezyen çarpımına izomorf olduğunu göstermiş ve halkanın yapısını, bazı ideallerini incelemiştir. Mesyan [4] R birimli ve I birime sahip olması gerekmeyen bir halka iken, I yı $R-R$ bimodülken alarak $R * I$ genişlemesinin özelliklerini asal ve maksimal ideallerini karakterize etmiştir.

1.2 Tezin Amacı

Bu çalışmada İdeal Genişlemesi olarak adlandırılan halka genişlemesinin yapısı ve idealleri üzerinde durulmuş, yapılan bazı çalışmalara yer verilmiş ve özel olarak n pozitif tamsayı iken $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ genişlemesinin bazı özel ideallerini karakterize etmek amaçlanmıştır.

1.3 Hipotez

İdeal genişlemesindeki ideal yapısı göz önüne alınmıştır. R birimli bir halka iken $\mathbb{Z} \times R$ ile $\mathbb{Z} * R$ halkaları arasındaki izomorfizmadan yararlanılarak $R = \mathbb{Z}_n$ için, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ genişlemesinin bazı özel idealleri karakterize edilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez çalışması içerisinde kullanılacak olan temel kavramlar verilecektir.

Tanım 2.1 R boştan farklı bir küme ve R üzerinde “+” ve “.” ikili işlemleri tanımlı olsun. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ üçlüsüne halka denir.

(R1) Her $a, b, c \in R$ için $(a + b) + c = a + (b + c)$.

(R2) Her $a, b \in R$ için $(a + b) = (b + a)$.

(R3) Her $a \in R$ için $a + 0_R = 0_R + a = a$ olacak şekilde bir $0_R \in R$ vardır.

(R4) Her $a \in R$ için $a + (-a) = (-a) + a = 0_R$ olacak şekilde bir $-a \in R$ vardır.

(R5) Her $a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

(R6) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

(R7) Her $a, b, c \in R$ için $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ [5].

Örnek 2.1 $(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{R}, +, \cdot), (\mathbb{Q}, +, \cdot), (\mathbb{C}, +, \cdot)$ ve n pozitif tamsayısına göre kalan sınıfı halkası olan $(\mathbb{Z}_n, \oplus, \odot)$ birimli ve değişmeli halkalardır.

Örnek 2.2 $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkaları için $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in R_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ kartezyen çarpım kümesi, $(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n) \in R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ olmak üzere $(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$ $(a_1, a_2, \dots, a_n)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$ işlemleri altında bir halkadır [6].

Tanım 2.2 R bir halka olsun.

i) Eğer her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R ye değişmeli halka denir.

ii) Eğer her $a \in R$ için $ea = a = ae$ oluyorsa $e \in R$ ye birim eleman denir. Eğer R halkası birim elemana sahipse R ye birimli halka denir [5].

Tanım 2.3 R birimli bir halka olsun. Bir $u \in R$ için $uv = vu = 1_R$ olacak şekilde bir $v \in R$ varsa u ya birimsel (terslenebilir) denir. Burada v elemanına da u nun tersi denir ve u^{-1} ile gösterilir. Ayrıca birimsel elemanlar kümesi $U(R)$ ile gösterilir [7].

Örnek 2.3 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ ve $\mathbb{Z}_n$ kalan sınıfı halkası için $U(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{a} \in \mathbb{Z}_n \mid (a, n) = 1\}$ dir. Böylece $U(\mathbb{Z}_{12}) = \{\bar{1}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{11}\}$ olarak elde edilir.

Tanım 2.4 R bir halka olsun. $a \in R$ için eğer $ab = 0_R$ olacak şekilde bir $0 \neq b \in R$ varsa a elemanına sıfır bölen denir. Ayrıca sıfır bölenler kümesi $Z(R)$ ile gösterilir [6].

Örnek 2.4 i) $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası için $Z(\mathbb{Z}) = 0$ dır.

ii) $\mathbb{Z}_n$ halkası için $Z(\mathbb{Z}_n) = \{\bar{a} \mid (a, n) \neq 1\} \cup \{\bar{0}\}$ dır.

Tanım 2.5 Değişmeli, birimli ve sıfır dışında sıfır böleni olmayan bir halkaya tamlik bölgesi denir [6].

Örnek 2.5 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir tamlik bölgesidir.

Tanım 2.6 Birimli bir R halkasında sıfır dışındaki tüm elemanlar birimsel ise R halkasına bölenler halkası denir. Değişmeli bölenler halkasına cisim denir [7].

Teorem 2.1 Her cisim bir tamlik bölgesidir. Ancak bu teoremin tersi genellikle doğru değildir [7].

Teorem 2.2 Her sonlu tamlik bölgesi cisimdir [7].

Örnek 2.6 $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ halkaları birer cisimdir. p asal sayı olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ halkası cisimdir. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkası bir tamlik bölgesidir ancak cisim değildir.

Tanım 2.7 R bir halka olmak üzere bir $a \in R$ için

i) $a^n = 0$ ise a elemanına nilpotent eleman,

ii) $a^2 = a$ ise a elemanına idempotent eleman denir [7].

Örnek 2.7 $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ halkasının tek nilpotent elemanı 0, idempotent elemanları ise 0 ve 1 dir.

Tanım 2.8 R bir halka olmak üzere $0 \neq p \in R$ birimsel olmayan bir eleman olsun.

i) $a, b \in R$ için $p \mid ab$ iken $p \nmid a$ veya $p \nmid b$ oluyorsa p elemanına R halkasının asal elemanı denir.

ii) $a, b \in R$ için $p = ab$ iken $a \in U(R)$ veya $b \in U(R)$ oluyorsa p elemanına R halkasının indirgenemez elemanı denir [6].

Örnek 2.8 Tamlık bölgesinde her asal eleman indirgenemez elemandır. Ancak tersi doğru değildir.

Tanım 2.9 R bir değişmeli halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun.

i) Her $a, b \in R$ için $a - b \in I$

ii) Her $a \in I$ ve $r \in R$ için $ra \in I$ oluyorsa I ya R nin bir ideali denir [6].

Örnek 2.9 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının idealleri $I = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = n\mathbb{Z}$ formundaki kümelerdir [5].

Örnek 2.10 Bir R halkasında $\{0_R\}$ ve R , R nin idealleridir. Eğer R nin bir I ideali için $I \neq R$ ise I öz (esas) ideal adını alır [8].

Tanım 2.10 R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun.

$\sqrt{I} := \{r \in R : r^n \in I \text{ olacak şekilde } n \in \mathbb{N} \text{ vardır}\}$ kümesi R nin I yı kapsayan bir idealidir ve bu kümeye I idealinin radikali denir. $Rad(I)$ şeklinde de gösterilir [8].

Önerme 2.1 I ve J , R halkasının idealleri olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır:

i) $\sqrt{I+J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$

ii) $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$

iii) $\sqrt{I} + \sqrt{J} = R \Leftrightarrow I + J = R$

iv) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$ [6].

Örnek 2.11 R bir halka ve I , R nin bir ideali olsun. Her $r \in R$ için $r + I = \{r + z \mid z \in I\}$ şeklindeki tüm kosetlerin kümesi R/I olarak tanımlansın. O halde $(a + I), (b + I) \in R/I$ için $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$ ve $(a + I)(b + I) = (ab) + I$ olarak tanımlanan toplama ve çarpma işlemleriyle R/I bir halkadır. $(R/I, +, \cdot)$ halkası bölüm halkası adını alır [5].

Örnek 2.12 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Z}\} = \{0 + n\mathbb{Z}, 1 + n\mathbb{Z}, \dots, (n-1) + n\mathbb{Z}\}$.

Önerme 2.2 $R_1, R_2, \dots, R_n$ halkalarının kartezyen çarpımı $R = R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ halkası olsun. $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için I_i , R_i lerin bir ideali ise $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$, R halkasının bir idealidir. Aynı şekilde I , R halkasının bir ideali ise $I = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n$ olacak şekilde, $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ için R_i halkasında bir I_i ideali bulunabilir [6].

Tanım 2.11 $(R, +, \cdot)$ ve $(S, \oplus, \otimes)$ iki halka ve $f: R \rightarrow S$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda f ye bir halka homomorfizması denir:

- i) Her $a, b \in R$ için $f(a + b) = f(a) \oplus f(b)$
- ii) Her $a, b \in R$ için $f(a \cdot b) = f(a) \otimes f(b)$ [5].

Tanım 2.12 $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

- i) f , 1-1 ise f ye monomorfizma,
- ii) f , örten ise f ye epimorfizma,
- iii) f , 1-1 ve örten ise f ye izomorfizma denir [7].

Tanım 2.13 I , R halkasının bir ideali olsun. $\pi: R \rightarrow R/I$, $\pi(r) = r + I$ ile tanımlı fonksiyon bir örten homomorfizmadır. π ye doğal (kanonik) homomorfizma denir [9].

Tanım 2.14 $f: R \rightarrow S$ homomorfizması bir izomorfizma ise R ve S ye izomorf halkalar denir ve $R \cong S$ ile gösterilir [10].

Tanım 2.15 $f: R \rightarrow S$ bir homomorfizma olsun. f nin çekirdeği $\text{Çek}f = \{a \in R \mid f(a) = 0_S\} = f^{-1}(0_S)$ ile tanımlıdır [10].

Teorem 2.3 $f : R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun.

i) Çekf , R nin bir idealidir.

ii) f nin 1-1 olması için gerek ve yeter koşul $\text{Çekf} = \{0_R\}$ olmasıdır.

iii) Eğer f bir izomorfizma ise $f^{-1} : S \rightarrow R$ bir izomorfizmadır.

iv) $R/\text{Çekf} \cong f(R)$ (Homomorfizma Teoremi) [10].

Sonuç 2.1 $f : R \rightarrow S$ örten bir homomorfizma ise $R/\text{Çekf} \cong S$ dir [10].

Örnek 2.13 n pozitif tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasında $\langle n \rangle$ idealini alalım. $\langle n \rangle$ nin $\mathbb{Z}$ kümesindeki kosetleri $a \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $a + \langle n \rangle = \{a + qn \mid q \in \mathbb{Z}\}$ şeklindedir. O halde $f : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}/\langle n \rangle$, $f(\bar{a}) = a + \langle n \rangle$ ile tanımlanan fonksiyon bir halka izomorfizmasıdır [5].

İspat $\bar{a} = \bar{b}$ olsun. O halde $n \mid a - b$ yani $a - b = nq$ olacak şekilde $q \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $a - b \in \langle n \rangle$ dolayısıyla $a + \langle n \rangle = b + \langle n \rangle$ olduğu görülür. f fonksiyonu iyi tanımlıdır ve aynı şekilde $f(\bar{a}) = f(\bar{b})$ iken $\bar{a} = \bar{b}$ olduğundan birebirdir. f nin tanımı gereği her $a + \langle n \rangle \in \mathbb{Z}/\langle n \rangle$ için $\bar{a} \in \mathbb{Z}_n$ ve $f(\bar{a}) = a + \langle n \rangle$ olduğundan f örtendir.

Ayrıca

$$f(\bar{a} + \bar{b}) = f(\overline{a+b}) = (a+b) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle) + (b + \langle n \rangle) = f(\bar{a}) + f(\bar{b})$$

$$f(\bar{ab}) = f(\overline{ab}) = (ab) + \langle n \rangle = (a + \langle n \rangle)(b + \langle n \rangle) = f(\bar{a})f(\bar{b})$$

sağlandığından f bir homomorfizmadır. Böylece f , $\mathbb{Z}_n$ den $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ ye izomorfizma olur [5].

Teorem 2.4 I_1 ve I_2 , $I_1 \subseteq I_2$ olacak şekilde R halkasının iki ideali olsun. O halde

$$\left(\frac{R}{I_1} \right) / \left(\frac{I_2/I_1}{I_1/I_1} \right) = \frac{R}{I_2} \text{ dir [6].}$$

Tanım 2.16 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması altında;

- i) J, S nin bir ideali ise $f^{-1}(J) \subseteq R$ idealine, J nin kısıtlanması denir ve J^c ile gösterilir.
- ii) I, R nin bir ideali ise $f(I)$ nin S de ürettiği ideale I nin genişlemesi denir ve I^e ile gösterilir [6].

Sonuç 2.2 $f : R \rightarrow S$ bir örten homomorfizma ise R nin bir I idealinin genişlemesi $I^e = f(I)S = f(I)$ dır [6].

Önerme 2.3 I_1 ile I_2, R halkasının ve J_1 ile J_2 de S halkasının idealleri olsunlar. $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizmasına göre:

- i) $(I_1 + I_2)^e = I_1^e + I_2^e$
- ii) $(I_1 I_2)^e = I_1^e I_2^e$
- iii) $(J_1 \cap J_2)^c = J_1^c \cap J_2^c$
- iv) $(\sqrt{J_1})^c = \sqrt{J_1^c}$ [6].

Tanım 2.17 $f : R \rightarrow S$ halka homomorfizması altında R nin tüm ideallerinin genişlemelerinden oluşan küme $\mathcal{E}_S = \{I^e : I \in I(R)\}$ ve S nin tüm ideallerinin kısıtlamasından oluşan küme ise $C_R = \{J^c : J \in I(S)\}$ ile gösterilir [6].

Sonuç 2.3 $f : R \rightarrow S$ bir örten halka homomorfizma ise $C_R = \{I \in I(R) : \check{Cek}f \subseteq I\}$ ve $\mathcal{E}_S = I(S)$ dir. O halde örten bir homomorfizma altında R nin $\check{Cek}f$ yi kapsayan idealleri ile S nin tüm idealleri arasında bire bir eşleme vardır [6].

BÖLÜM 3

BİR HALKANIN İDEALLERİ

Bu bölümde R halkası birimli ve değişmeli halka olarak alınacaktır.

3.1 Asal İdealler

Tanım 3.1 $P \subset R$ bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in P$ iken $a \in P$ veya $b \in P$ oluyorsa, P idealeine asal ideal denir [8].

Tanım 3.2 Bir R halkasının tüm asal ideallerinin kümesine halkanın Spektrumu denir ve $Spec(R)$ ile gösterilir [8].

Teorem 3.1 R bir tamlık bölgesi olsun. $(0) \neq (p)$ nin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul p nin asal eleman olmasıdır [10].

İspat (p) asal ideal olsun. $a, b \in R$ için $p \mid ab$ kabul edelim. Buradan $ab = pc$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Böylece $ab \in (p)$ dir. Kabul gereği (p) asal ideal olduğundan $a \in (p)$ veya $b \in (p)$ dir. O halde $a = pt_1$ veya $b = pt_2$ olacak şekilde $\exists t_1, t_2 \in R$ vardır. Böylece $p \mid a$ veya $p \mid b$ olduğundan p asaldır.

Tersine $p \in R$ asal eleman olsun. $a, b \in R$ için $ab \in (p)$ olduğunu kabul edelim. Buradan $ab = pc$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Böylece $p \mid ab$ dir. Kabul gereği p asal olduğundan $p \mid a$ veya $p \mid b$ elde edilir. O halde $a = pt_1$ veya $b = pt_2$ olacak şekilde $\exists t_1, t_2 \in R$ vardır. Böylece $a \in (p)$ veya $b \in (p)$ olduğundan (p) asal idealdir [10].

Not 3.1 R bir halka olsun. R tamlık bölgesi iken sıfır ideali R nin asal idealidir. Çünkü $a, b \in R$ için $ab = 0$ iken R tamlık bölgesi olduğundan $a = 0$ veya $b = 0$ dır [8].

Örnek 3.1 $\mathbb{Z}$ halkasının tüm asal ideallerini belirleyiniz [8].

Teorem 3.1 gereği p asal olacak şekilde (p) asal idealdir. Ayrıca $\mathbb{Z}$ halkası tamlık bölgesi olduğundan $\langle 0 \rangle$ ideali asal idealdir. O halde $\text{Spec}(\mathbb{Z}) = \langle 0 \rangle \cup \{p\mathbb{Z} \mid p \text{ asal}\}$ olur.

Önerme 3.1 I, R halkasının bir ideali olsun. I nin asal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/I nin tamlık bölgesi olmasıdır [8].

İspat I, R halkasının asal ideali olsun. Kabul edelim ki $(a+I) \in R/I$ için $(a+I)(b+I) = 0+I = I$ olacak şekilde $(b+I) \in R/I$ olsun. Buradan $ab+I = 0+I$ dolayısıyla $ab \in I$ olur. I asal ideal olduğundan $a \in I$ veya $b \in I$ dir. O halde $a+I = 0+I$ veya $b+I = 0+I$ olarak bulunur. Böylece R/I , sıfır dışında sıfır böleni olmayan bir halka olur.

Tersine R/I tamlık bölgesi olsun. Kabul edelim ki $ab \in I$ ve $b \notin I$ olsun. O halde $ab+I = 0+I$ ve $b+I \neq 0+I$ dir. Buradan $(a+I)(b+I) = 0+I = I$ ve R/I tamlık bölgesi olduğundan $a+I = 0+I$ olur. Böylece $a \in I$ bulunur, I asal idealdir [8].

Örnek 3.2 Birbirini kapsamayan iki asal idealin kesişimlerinin asal olmayacağını gösteriniz [10].

P_1, P_2 bir R halkasının $P_1 \not\subset P_2$ ve $P_2 \not\subset P_1$ olacak şekilde asal idealleri olsun. Bu durumda $a_1 \in P_1 \setminus P_2$ ve $a_2 \in P_2 \setminus P_1$ vardır. Böylece $a_1 a_2 \in P_1 \cap P_2$ bulunur. Ancak $a_1 \notin P_1 \cap P_2$ ve $a_2 \notin P_1 \cap P_2$ olduğundan $P_1 \cap P_2$ asal ideal değildir.

Teorem 3.2 I, R nin bir ideali ve J de I yı kapsayan R nin bir ideali olsun. J/I nin R/I halkasının asal ideali olması için gerek ve yeter koşul J nin, R halkasının asal ideali olmasıdır [8].

İspat J, R halkasının asal ideali olsun. O halde Önerme 3.1 gereği R/J tamlık bölgesidir. J, I yı kapsayan bir ideal olduğundan Teorem 2.4 gereği $\frac{(R/I)}{(J/I)} \cong R/J$ dir. Böylece R/J tamlık bölgesi olduğundan $J/I, R/I$ halkasının asal ideali olur.

Tersine $J/I, R/I$ halkasının asal ideal ise $\frac{(R/I)}{(J/I)} \cong R/J$ tamlık bölgesidir. R/J tamlık bölgesi olduğundan J, R nin asal idealidir [8].

Örnek 3.3 $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ bölüm halkasının asal ideallerini bulunuz [8].
 $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ halkasının idealleri $n|60$ olacak şekilde $60\mathbb{Z}$ yı kapsayan $J = n\mathbb{Z}$ olmak üzere $J/60\mathbb{Z}$ ideallerinden oluşur. Asal idealleri ise bu n sayıları içinde asal olanlardır. O halde $\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri $2\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ ve $5\mathbb{Z}/60\mathbb{Z}$ olur.

Örnek 3.4 P, R halkasının asal ideali iken $\sqrt{P^n} = P$ ($n \in \mathbb{N}$) dir [8].

İspat Tümevarım uygulanırsa $n=1$ için $P \subseteq \sqrt{P}$ dir. Ters kapsama için $a \in \sqrt{P}$ alınırsa $a^n \in P$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $a^n = aa^{n-1} \in P$ ve P asal ideal olduğundan $a \in P$ dir. Dolayısıyla $\sqrt{P} \subseteq P$ dir. Böylece $P = \sqrt{P}$ olur. $n=k$ için $\sqrt{P^k} = P$ doğru olsun. O halde $n=k+1$ için $\sqrt{P^{k+1}} = \sqrt{P^k \cdot P} = \sqrt{P^k \cap P} = \sqrt{P^k} = P$ olup, istenilen elde edilir.

Tanım 3.3 R halkasının bir S alt kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu kümeye çarpımsal küme denir:

- i) $1 \in S$
- ii) Her $s_1, s_2 \in S$ iken $s_1 s_2 \in S$ dir [8].

Örnek 3.5 P, R nin asal ideali iken $R \setminus P$ bir çarpımsal kümedir [8].

Tanım 3.4 I , R halkasının bir ideali olsun. I idealinin varyetesi $Var(I) = \{P \in Spec(R) : P \supseteq I\}$ kümesi olarak tanımlanır. Ayrıca

$$Rad(I) = \bigcap_{P \in Var(I)} P = \bigcap_{P \in Spec(R)} P \text{ [8].}$$

Teorem 3.3 I , R halkasının bir öz ideali olsun. O halde $Var(I) = \{P \in Spec(R) : P \supseteq I\}$ kümesi en az bir minimal elemana sahiptir. Minimal elemana I nın minimal asal ideali ya da I yı içeren minimal asal denir. Bu küme $Min(I)$ ile gösterilir [8].

Sonuç 3.1 I , R halkasının bir öz ideali olsun. O halde $Rad(I) = \bigcap_{P \in Min(I)} P$ dir [8].

Önerme 3.2 R ve S iki halka olmak üzere $f : R \rightarrow S$ örten bir homomorfizma olsun.

- i) P , S halkasının asal ideali iken P^c , R halkasının asal idealidir.
- ii) P' , R halkasının asal ideali ve $\check{C}ekf \subseteq P'$ iken $(P')^e$, S halkasının asal idealidir [6].

İspat i) Kabul edelim ki P , S halkasının asal ideali olsun. P^c nin R halkasının asal ideali olduğunu göstermek için $a, b \in R$ için $ab \in P^c$ alalım. Buradan $f(ab) \in P$ ve f homomorfizma olduğundan $f(a)f(b) \in P$ olur. Ayrıca P asal ideal olduğundan $f(a) \in P$ veya $f(b) \in P$ olur. Böylece $a \in P^c$ veya $b \in P^c$ bulunur. O halde P^c , R halkasının asal idealidir.

ii) Kabul edelim ki P' , R halkasının asal ideali olsun. $a, b \in S$ için f örten olduğundan $f(r_1) = a$ ve $f(r_2) = b$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. $(P')^e$ nin S halkasının asal ideali olduğunu göstermek için $ab \in (P')^e$ alalım. Buradan $ab = f(r_1)f(r_2) = f(r_1r_2) \in (P')^e$ dir. $f(r_1r_2) \in (P')^e$ ve $\check{C}ekf \subseteq P'$ olduğundan $r_1r_2 \in P'$ olarak bulunur. Kabulden P' , R halkasının asal ideali olduğundan $r_1 \in P'$ veya $r_2 \in P'$ olmalıdır. Böylece $a = f(r_1) \in (P')^e$ veya $b = f(r_2) \in (P')^e$ olur. O halde $(P')^e$, S halkasının asal idealidir.

Teorem 3.4 $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri şu şekildedir:

i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \bar{0} \rangle$ idealidir.

ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ idealileridir.

iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \bar{p} \rangle$ idealidir.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\langle \bar{p}_i \rangle$ idealileridir.

İspat $\mathbb{Z}/\langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ olduğundan $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ ile $\mathbb{Z}_n$ halkasının idealleri arasında bire bir eşleme

vardır. $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle$ ve p' asal olmak üzere $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$

bölüm halkasının asal idealleri $\langle n \rangle \subseteq \langle p' \rangle$ yani $p' | n$ olmak üzere $\langle p' \rangle / \langle n \rangle$ idealileridir.

O halde $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ bölüm halkasında $p' | n$ olmak üzere $\langle p' \rangle / \langle n \rangle$ asal ideallerine $\mathbb{Z}_n$

halkasında $\langle \bar{p}' \rangle$ asal idealleri karşılık gelir.

i) $\langle p' \rangle / \langle n \rangle \mapsto \langle \bar{p}' \rangle$ için $p' | n$ ve $n = p$ olduğundan $p' = p$ dir. O halde $\langle \bar{p}' \rangle = \langle \bar{p} \rangle = \langle \bar{0} \rangle$ dir. Böylece $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \bar{0} \rangle$ idealidir.

ii) $\langle p' \rangle / \langle n \rangle \mapsto \langle \bar{p}' \rangle$ için $p' | n$ ve $n = pq$ olduğundan $p' = p$ veya $p' = q$ olur. O halde $\langle \bar{p}' \rangle = \langle \bar{p} \rangle$ veya $\langle \bar{p}' \rangle = \langle \bar{q} \rangle$ olur. Böylece $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ idealileridir.

iii) $\langle p' \rangle / \langle n \rangle \mapsto \langle \bar{p}' \rangle$ için $p' | n$ ve $n = p^k$ olduğundan $p' = p$ olur. O halde $\langle \bar{p}' \rangle = \langle \bar{p} \rangle$ olur. Böylece $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \bar{p} \rangle$ idealidir.

iv) $\langle p' \rangle / \langle n \rangle \mapsto \langle \overline{p'} \rangle$ için $p' | n$ ve $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ olduğundan $1 \leq i \leq m$ olmak üzere

$p' = p_i$ dir. O halde $\langle \overline{p'} \rangle = \langle \overline{p_i} \rangle$ olur. Böylece $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\langle \overline{p_i} \rangle$ idealleridir.

Teorem 3.5 R_1 ve R_2 değişmeli ve birimli iki halka olsun. $R = R_1 \times R_2$ halkasının tüm asal idealleri;

i) P_1, R_1 halkasının asal ideali olmak üzere $I = P_1 \times R_2$

ii) P_2, R_2 halkasının asal ideali olmak üzere $I = R_1 \times P_2$ formundadır [11].

İspat Kabul edelim ki P_1, R_1 halkasının asal ideali olsun. $I = P_1 \times R_2$ idealinin $R = R_1 \times R_2$ halkasının asal ideali olduğunu gösterelim. $(a, b), (c, d) \in R_1 \times R_2$ için $(a, b)(c, d) = (ac, bd) \in P_1 \times R_2$ olsun. Buradan $ac \in P_1$ ve P_1, R_1 halkasının asal ideali olduğundan $a \in P_1$ veya $c \in P_1$ dir. Böylece $(a, b) \in P_1 \times R_2$ veya $(c, d) \in P_1 \times R_2$ olur. O halde $P_1 \times R_2$ asal idealdir. Kabul edelim ki P_2, R_2 halkasının asal ideali olsun. $I = R_1 \times P_2$ idealinin $R = R_1 \times R_2$ halkasının asal ideali olduğunu göstermek için $(x, y), (z, t) \in R_1 \times R_2$ için $(x, y)(z, t) = (xz, yt) \in R_1 \times P_2$ olsun. Buradan $yt \in P_2$ ve P_2, R_2 halkasının asal ideali olduğundan $y \in P_2$ veya $t \in P_2$ dir. Böylece $(x, y) \in R_1 \times P_2$ veya $(z, t) \in R_1 \times P_2$ olur. O halde $R_1 \times P_2$ asal idealdir.

Şimdi R halkasından alınan herhangi bir asal idealin yalnızca bu iki formda olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki I_1, R_1 halkasının I_2, R_2 halkasının ideali olmak üzere $I = I_1 \times I_2, R$ halkasının asal ideali olsun. $(a, b) \in I_1 \times I_2$ alalım. Buradan $(a, 1_{R_2})(1_{R_1}, b) = (a, b) \in I_1 \times I_2$ yazabiliriz. $I_1 \times I_2, R$ halkasının asal ideali olduğundan $(a, 1_{R_2}) \in I_1 \times I_2$ veya $(1_{R_1}, b) \in I_1 \times I_2$ olarak bulunur. O halde $1_{R_2} \in I_2$ olduğundan $I_2 = R_2$ veya $1_{R_1} \in I_1$ olduğundan $I_1 = R_1$ olmalıdır. Kabul edelim ki $I_2 = R_2$ olsun. Böylece kabulden $I_1 \times R_2, R$ halkasının asal idealidir. Şimdi $a, b \in R_1$ için $ab \in I_1$ olsun. Buradan $(a, 0_{R_2})(b, 0_{R_2}) = (ab, 0) \in I_1 \times R_2$ yazabiliriz. $I_1 \times R_2$ asal ideal olduğundan $(a, 0_{R_2}) \in I_1 \times R_2$ veya $(b, 0_{R_2}) \in I_1 \times R_2$ olur ki böylece $a \in I_1$ veya $b \in I_1$ dir. O halde $I_1,$

R_1 halkasının asal idealidir. Benzer şekilde $I_1 = R_1$ kabul ettiğimizde I_2, R_2 halkasının asal idealidir. Böylece R halkasından alınan I asal ideali P_1, R_1 halkasının asal ideali olmak üzere $P_1 \times R_2$ veya P_2, R_2 halkasının asal ideali olmak üzere $R_1 \times P_2$ formundadır.

Sonuç 3.2 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri şu şekildedir:

i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının tek asal ideali $\langle \bar{0} \rangle$ ve $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ idealleridir.

ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle, p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ idealleridir.

iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \bar{p} \rangle$ ve $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ idealleridir.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle \bar{p}_i \rangle$ ve $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z}$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p}_i \rangle$ idealleridir.

3.2 Asalımsı İdealler

Tanım 3.5 Q, R halkasının bir öz ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in Q$ iken $a \in Q$ veya $b^n \in Q$ ($n \in \mathbb{N}$) oluyorsa Q ideale asalımsı ideal denir. Bu ifade başka bir deyişle $a, b \in R$ için $ab \in Q$ iken $a \in Q$ veya $b \in \sqrt{Q}$ olmasına denktir [8].

Not 3.2 Bir R halkasında her asal ideal asalımsıdır ancak tersi her zaman doğru değildir. $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında $4\mathbb{Z}$ asalımsı idealdir ancak asal ideal değildir. Çünkü $2 \cdot 2 \in 4\mathbb{Z}$ iken $2 \notin 4\mathbb{Z}$ dir [8].

Teorem 3.6 I , R halkasının bir ideali olsun. I idealinin asalımsı olması için gerek ve yeter koşul R/I nın aşıkâr olmaması ve her sıfır bölen elemanın R/I halkasında nilpotent eleman olmasıdır [8].

İspat I asalımsı ideal olsun. O halde R nin öz idealidir yani $I \neq R$ dir. Dolayısıyla R/I aşıkâr halka değildir. Kabul edelim ki $b \in R$ olacak şekilde $b+I$, R/I da sıfır bölen eleman olsun. O halde $(a+I)(b+I)=0+I$ olacak şekilde $a+I \neq 0+I$ vardır. Böylece $ab \in I$ ve $a \notin I$ dir. I asalımsı ideal olduğundan $ab \in I$ ve $a \notin I$ iken $b^n \in I$ ($n \in \mathbb{N}$) olmalıdır. Buradan $b^n + I = 0 + I$ ve dolayısıyla $(b+I)^n = I$ elde edilir. Sonuç olarak $b+I$ nilpotent eleman olarak bulunur.

Tersine, R/I halkasında her sıfır bölen eleman nilpotent olsun. I nin asalımsı ideal olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $ab \in I$ ve $a \notin I$ olsun. Buradan $ab+I = (a+I)(b+I) = I$ ve $(a+I) \neq 0+I \in R/I$ elde edilir. Böylece $b+I$, R/I da sıfır bölen elemandır. Kabulden her sıfır bölen eleman nilpotent olduğundan $b+I$, R/I halkasında nilpotent elemandır. O halde $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(b+I)^n = 0+I$ olur. Buradan $b^n \in I$ bulunur. Böylece I asalımsı idealdir [8].

Teorem 3.7 Q , R halkasının asalımsı ideali olsun. $P = \sqrt{Q}$, R nin bir asal idealidir ve Q ya P -asalımsı denir. P , Q yu içeren asal idealler içinde en küçük olanıdır. P , Q nun tek minimal asal idealidir [8].

İspat $1 \notin Q$ iken $1 \notin \sqrt{Q} = P$ olduğundan P , R nin öz idealidir. Kabul edelim ki $a, b \in R$ için $ab \in \sqrt{Q}$ ve $a \notin \sqrt{Q}$ olsun. O halde $(ab)^n = a^n b^n \in Q$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. Böylece a nın hiçbir pozitif kuvveti Q da olmadığından, a^n nin de hiçbir pozitif kuvveti Q da değildir. O halde Q asalımsı olduğundan $b^n \in Q$ olur. Buradan $b \in \sqrt{Q}$ olup $P = \sqrt{Q}$ asal idealdir. Şimdi de $P = \sqrt{Q}$ idealinin Q yu içeren en küçük asal ideal olduğunu gösterelim. Bunun için P' bir asal ideal olmak üzere $Q \subseteq P' \subseteq \sqrt{Q}$ olduğunu kabul edelim. Eğer $a \in \sqrt{Q}$ ise $a^n \in Q$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$a^n \in Q \subseteq P'$ ve P' asal ideal olduğundan $a \in P'$ bulunur. Böylece $\sqrt{Q} \subseteq P'$ elde edilir. Her iki kapsamadan $P' = \sqrt{Q}$ bulunur. P, Q yu içeren asal idealler içinde en küçük olanıdır [8].

Önerme 3.3 Q, R halkasının bir ideali ve $\sqrt{Q} = M, R$ nin maksimal ideali ise Q, R nin asalımsı idealidir. Ayrıca M nin her pozitif kuvveti olan M^n, M -asalımsı idealdir [8].

İspat $Q \subseteq \sqrt{Q} = M \subset R$ olduğundan Q öz idealdir. Q idealinin R nin asalımsı ideali olduğunu göstermek için kabul edelim ki $a, b \in R$ için $ab \in Q$ ve $b \notin \sqrt{Q}$ olsun. Şimdi $\sqrt{Q} = M$ maksimal ideal ve $b \notin M$ olduğundan $M + (b) = 1_R$ olur.

$$\begin{aligned} \text{Böylece } M + rb = 1_R \ (r \in R) &\Rightarrow \sqrt{M} + \sqrt{rb} = 1_R \Rightarrow \sqrt{\sqrt{Q}} + \sqrt{rb} = 1_R \Rightarrow \sqrt{Q} + \sqrt{rb} = 1_R \\ &\Rightarrow Q + rb = 1_R \Rightarrow d + rb = 1_R \ (d \in Q) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $a = a1_R = a(d + rb) = ad + r(ab) \in Q$ elde edilir. O halde Q, M -asalımsıdır. Her maksimal ideal asal olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{M^n} = M$ olur. Böylece M^n, M -asalımsıdır [8].

Örnek 3.6 R cisim olmayan bir Temel İdeal Bölgesi olsun. R nin tüm asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \cup \{Rp^n : p, R \text{ nin indirgenemez elemanı } (n \in \mathbb{N})\}$ kümesinden oluşur [8].

İspat R tamlık bölgesi olduğundan $\langle 0 \rangle$ ideali asal idealdir. Böylece her asal ideal asalımsı olduğundan $\langle 0 \rangle$ asalımsıdır. $p \in R$ bir indirgenemez eleman olduğundan Rp maksimaldir. Önerme 3.3 gereği maksimal idealin her pozitif kuvveti asalımsı olduğundan Rp^n asalımsı idealdir. Böylece verilen kümenin elemanları asalımsı idealdir.

Diğer yandan R nin asalımsı idealleri $a \neq 0$ olmak üzere R, R Temel İdeal Bölgesi olduğundan Ra şeklindedir. Asalımsı idealler öz ideal olduğundan a birimsel olamaz. Böylece a indirgenemez elemanların çarpımı şeklinde yazılabilir. Eğer a, R nin ilgili olmayan iki indirgenemez elemanı tarafından bölünebilseydi, Rp ve Rq maksimal idealler olur ve ikisi de Ra nin minimal asal ideali olurdu. Bu da minimal asallığın tekliği

ile çelişirdi. O halde Ra , R nin bir indirgenemez elemanının pozitif bir kuvveti tarafından üretilmiştir [8].

Teorem 3.8 P , R nin bir asal ideali ve $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ($n \geq 1$) R nin P -asalımsı idealleri olsun. O halde $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ bir P -asalımsı idealdir [8].

İspat $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ ($n \geq 1$) R nin P -asalımsı idealleri olduğundan $Rad(Q_i) = P$ olur.

Böylece $\bigcap_{i=1}^n Q_i \subseteq Rad(\bigcap_{i=1}^n Q_i) = \bigcap_{i=1}^n Rad(Q_i) = P \subset R$ dir. Buradan $\bigcap_{i=1}^n Q_i$, R nin öz

idealidir. Kabul edelim ki $a, b \in R$ için $ab \in \bigcap_{i=1}^n Q_i$ ve $b \notin \bigcap_{i=1}^n Q_i$ olsun. O halde bir

$j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $b \notin Q_j$ olur. $ab \in Q_j$ ve Q_j , P -asalımsı olduğundan

$a \in P = Rad(\bigcap_{i=1}^n Q_i)$ bulunur. Böylece $\bigcap_{i=1}^n Q_i$ bir P -asalımsı idealdir [8].

Örnek 3.7 R ve S iki halka olmak üzere $f: R \rightarrow S$ örten bir homomorfizma $C_R = \{I \in I_R : Çekf \subseteq I\}$ ve $\varepsilon_S = I_S$ olsun. I idealinin R halkasının asalımsı ideali olması için gerek ve yeter koşul I^e idealinin S halkasının asalımsı ideali olmasıdır [8].

İspat Kabul edelim ki I , R halkasının asalımsı ideali olsun. $a, b \in S$ için f örten olduğundan $f(r_1) = a$ ve $f(r_2) = b$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R$ vardır. $ab \in I^e$ alalım.

Buradan $ab = f(r_1)f(r_2) = f(r_1r_2) \in I^e$ ve $Çekf \subseteq I$ olduğundan $r_1r_2 \in I$ olur. I asalımsı ideal olduğundan $r_1 \in I$ veya $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r_2^n \in I$ olmalıdır. Böylece

$f(r_1) \in I^e$ veya $f(r_2^n) \in I^e$ olur. O halde $a \in I^e$ ve f homomorfizma olduğundan $(f(r_2))^n = b^n \in I^e$ bulunur. Buradan I^e , S halkasının asalımsı idealidir.

Tersine I^e , S halkasının asalımsı ideali olsun. $a, b \in R$ için $ab \in I$ alalım. Böylece $f(ab) = f(a)f(b) \in I^e$ ve I^e asalımsı ideal olduğundan $f(a) \in I^e$ veya $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(f(b))^n = f(b^n) \in I^e$ olmalıdır. Ayrıca $Çekf \subseteq I$ olduğundan $a \in I$ veya $b^n \in I$ olarak bulunur. Böylece I , R halkasının asalımsı idealidir.

Teorem 3.9 $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri şu şekildedir:

i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı ideali $\langle \bar{0} \rangle$ idealidir.

ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ idealidir.

iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\langle \bar{p}^j \rangle$ idealidir.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq a_i \leq k_i$ olmak üzere $\langle \bar{p}_1^{a_1} \rangle, \langle \bar{p}_2^{a_2} \rangle, \dots, \langle \bar{p}_m^{a_m} \rangle$ idealidir.

İspat $\mathbb{Z}/\langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ olduğundan $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ ile $\mathbb{Z}_n$ halkasının idealleri arasında bire bir eşleme vardır. $\mathbb{Z}$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $t \in \mathbb{N}$, p' asal iken $\langle (p')^t \rangle$ şeklindedir. Böylece $\langle (p')^t \rangle \subset \langle n \rangle$ olmak üzere bölüm halkasının $\langle (p')^t \rangle / \langle n \rangle$ asalımsı ideallerine $\mathbb{Z}_n$ halkasında $\langle \bar{(p')^t} \rangle$ asalımsı idealleri karşılık gelir.

i) $\langle (p')^t \rangle / \langle n \rangle \rightarrow \langle \bar{(p')^t} \rangle$ için $(p')^t \mid n$ ve $n = p$ olduğundan $p' = p$ dir. Böylece $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı ideali $\langle \bar{0} \rangle$ idealidir.

ii) $\langle (p')^t \rangle / \langle n \rangle \rightarrow \langle \bar{(p')^t} \rangle$ için $(p')^t \mid n$ ve $n = pq$ olduğundan $p' = p$ veya $p' = q$ olur.

Böylece $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ idealidir.

iii) $\langle (p')^t \rangle / \langle n \rangle \rightarrow \langle \bar{(p')^t} \rangle$ için $(p')^t \mid n$ ve $n = p^k$ olduğundan $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $(p')^t = p^j$ olur. Böylece $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\langle \bar{p}^j \rangle$ idealidir.

iv) $\langle (p')^t \rangle / \langle n \rangle \rightarrow \langle \bar{(p')^t} \rangle$ için $(p')^t \mid n$ ve $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ olduğundan $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq a_i \leq k_i$ olmak üzere $(p')^t = p_i^{a_i}$ dir. Böylece $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının

asalımsı idealleri $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq a_i \leq k_i$ olmak üzere $\langle \overline{(p_1)^{a_1}} \rangle, \langle \overline{(p_2)^{a_2}} \rangle, \dots, \langle \overline{(p_m)^{a_m}} \rangle$ idealleridir.

Teorem 3.10 R_1 ve R_2 değişmeli ve birimli iki halka olsun. $R = R_1 \times R_2$ halkası için:

- i) I_1 , R_1 halkasının ideali olmak üzere $Rad(I_1 \times R_2) = Rad(I_1) \times R_2$
- ii) I_2 , R_2 halkasının ideali olmak üzere $Rad(R_1 \times I_2) = R_1 \times Rad(I_2)$ olur [12].

İspat i) Önerme 3.5 gereği $R = R_1 \times R_2$ halkasının asal idelleri P_1 , R_1 halkasının asal ideali olmak üzere $P_1 \times R_2$ veya P_2 , R_2 halkasının asal ideali olmak üzere $R_1 \times P_2$ dir. Ayrıca P , R nin asal ideali I , R nin bir ideali olmak üzere $Rad(I) = \bigcap_{I \subseteq P} P$ olduğundan

$$Rad(I_1 \times R_2) = \left(\bigcap_{I_1 \times R_2 \subseteq P_1 \times R_2} P_1 \times R_2 \right) = \left(\bigcap_{I_1 \subseteq P_1} P_1 \right) \times R_2 = Rad(I_1) \times R_2 \text{ olarak elde edilir.}$$

ii) Benzer şekilde $Rad(R_1 \times I_2) = \left(\bigcap_{R_1 \times I_2 \subseteq R_1 \times P_2} R_1 \times I_2 \right) = R_1 \times \left(\bigcap_{I_2 \subseteq P_2} P_2 \right) = R_1 \times Rad(I_2)$ olduğu görülür.

Teorem 3.11 R_1 ve R_2 değişmeli ve birimli iki halka olsun. $R = R_1 \times R_2$ halkasının tüm asalımsı idealleri;

- i) Q_1 , R_1 halkasının asalımsı ideali olmak üzere $Q_1 \times R_2$
- ii) Q_2 , R_2 halkasının asalımsı ideali olmak üzere $R_1 \times Q_2$ formundadır [9].

İspat i) Önce bu iki formdaki idealin R halkasının asalımsı ideali olduğunu gösterelim. $(a,b), (c,d) \in R_1 \times R_2$ için $(a,b)(c,d) = (ac, bd) \in Q_1 \times R_2$ olsun. Q_1 , R_1 halkasının asalımsı ideali olduğundan $a \in Q_1$ veya $c \in Rad(Q_1)$ dir. Buradan $(a,b) \in Q_1 \times R_2$ veya $(c,d) \in Rad(Q_1) \times R_2$ bulunur. Teorem 3.10 (i) gereği $Rad(Q_1 \times R_2) = Rad(Q_1) \times R_2$ olduğundan $Q_1 \times R_2$, R nin asalımsı idealidir. Aynı şekilde $R_1 \times Q_2$ idealinin asalımsı olduğunu gösterelim. $(a,b), (c,d) \in R_1 \times R_2$ için $(a,b)(c,d) = (ac, bd) \in R_1 \times Q_2$ olsun. Q_2 , R_2 halkasının asalımsı ideali olduğundan $b \in Q_2$ veya $d \in Rad(Q_2)$ dir. Buradan

$(a, b) \in R_1 \times Q_2$ veya $(b, d) \in R_1 \times \text{Rad}(Q_2)$ bulunur. Teorem 3.10 (ii) gereği $\text{Rad}(R_1 \times Q_2) = R_1 \times \text{Rad}(Q_2)$ olduğundan $R_1 \times Q_2$ asalımsı idealdir.

Şimdi R halkasından aldığımız herhangi bir asalımsı idealin yalnızca bu iki formda olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki I_1, R_1 halkasının I_2, R_2 halkasının ideali olmak üzere $I = I_1 \times I_2$, R halkasının asalımsı ideali olsun. $(a, b) \in I_1 \times I_2$ alalım. Buradan $(a, 1_{R_2})(1_{R_1}, b) = (a, b) \in I_1 \times I_2$ yazabiliriz. $I_1 \times I_2$, R halkasının asalımsı ideali olduğundan $(a, 1_{R_2}) \in I_1 \times I_2$ veya $(1_{R_1}, b) \in \text{Rad}(I_1 \times I_2) = \text{Rad}(I_1) \times \text{Rad}(I_2)$ olarak bulunur. O halde $1_{R_2} \in I_2$ olduğundan $I_2 = R_2$ veya $1_{R_1} \in \text{Rad}(I_1)$ olduğundan $I_1 = R_1$ olmalıdır. Kabul edelim ki $I_2 = R_2$ olsun. Böylece kabulden $I_1 \times R_2$, R halkasının asalımsı idealidir. $a, b \in R$ için $ab \in I_1$ alalım. Buradan $(a, 0_{R_2})(b, 0_{R_2}) = (ab, 0) \in I_1 \times R_2$ yazabiliriz. $I_1 \times R_2$ asalımsı ideal olduğundan $(a, 0_{R_2}) \in I_1 \times R_2$ veya $(b, 0_{R_2}) \in \text{Rad}(I_1 \times R_2) = \text{Rad}(I_1) \times R_2$ olur. Böylece $a \in I_1$ veya $b \in \text{Rad}(I_1)$ dir. O halde I_1, R_1 halkasının asalımsı idealidir. Benzer şekilde $I_1 = R_1$ kabul ettiğimizde I_2, R_2 halkasının asalımsı idealidir. Böylece R halkasından alınan I asalımsı ideali Q_1, R_1 halkasının asalımsı ideali olmak üzere $Q_1 \times R_2$ veya Q_2, R_2 halkasının asalımsı ideali olmak üzere $R_1 \times Q_2$ formundadır [9].

Sonuç 3.3 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri şu şekildedir:

i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının tek asalımsı ideali $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $p' \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\langle (p')^t \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ olarak elde edilir.

ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle \bar{p} \rangle, \langle \bar{q} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle$ ve $p' \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\langle (p')^t \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n, \mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ olarak elde edilir.

iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\langle \overline{p^j} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının asalımsı idealleri $p' \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\langle 0 \rangle$ ve $\langle (p')^t \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p^j} \rangle$ olarak elde edilir.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq a_i \leq k_i$ olmak üzere $\langle \overline{(p_1)^{a_1}} \rangle, \langle \overline{(p_2)^{a_2}} \rangle, \dots, \langle \overline{(p_m)^{a_m}} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının asalımsı idealleri $p' \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\langle 0 \rangle$ ve $\langle (p')^t \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_1)^{a_1}} \rangle, \mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_2)^{a_2}} \rangle, \dots, \mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_m)^{a_m}} \rangle$ olarak elde edilir.

3.3 Maksimal İdealler

Tanım 3.6 M, R halkasının bir öz ideali olsun. M idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul $M \subset I \subset R$ olacak şekilde R halkasında bir I idealinin bulunmamasıdır [8].

Teorem 3.12 I, R halkasının bir ideali olsun. I nın maksimal ideal olması için gerek ve yeter koşul R/I halkasının cisim olmasıdır [8].

İspat I, R halkasının bir ideali olsun. R birimli ve değişmeli olduğundan R/I halkası da birimli ve değişmelidir. Şimdi R/I halkasından aldığımız her elemanın tersinin mevcut olduğunu gösterelim. $0 \neq r+I \in R/I$ alalım. O halde $r \notin I$, dolayısıyla $I \subset I+(r)$ ve I maksimal ideal olduğundan $I+(r)=R$ olur. Buradan $b+ar=1_R$ olacak şekilde $a \in R$ ve $b \in I$ vardır. $b=1_R-ar \in I$ olduğundan $1_R+I=ar+I=(a+I)(r+I)$ elde edilir. Böylece $r+I$ birimseldir, o halde tersi mevcuttur.

Tersine, $I \subset M \subset R$ olacak şekilde bir M ideali olsun. I idealinin maksimal olduğunu göstereceğiz. $M \neq I$ ise $a \in M \setminus I$ vardır. O halde $a+I \neq I$ olur, yani $a+I, R/I$ halkasında sıfırdan farklı bir elemandır. R/I cisim olduğundan sıfırdan farklı her

elemanın tersi mevcuttur. Buradan $(a+I)(b+I) = ab+I = 1_R + I$ ve böylece $ab - 1_R \in I \subset M$ olur. $ab \in M$ ve $ab - 1_R \in M$ olduğundan $1_R \in M$ dir. O halde M birim elemanı kapsadığından $M = R$ olur. Böylece I ideali maksimal idealdir [8].

Sonuç 3.4 Bir R halkasında her maksimal ideal asal idealdir [8].

Not 3.3 R bir halka ve P bir asal ideal olsun. R/P sonlu ise P asal ideali maksimaldir [6].

P asal ideal olduğundan Teorem 3.1 gereği R/P tamlık bölgesidir ve kabulden R/P sonludur. Her sonlu tamlık bölgesi cisim olduğundan R/P cisimdir. Böylece Teorem 3.1 gereği P maksimal idealdir.

Örnek 3.8 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ halkasının maksimal ideallerini bulunuz.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(\bar{0}, \bar{0})(\bar{0}, \bar{1})(\bar{1}, \bar{0})(\bar{1}, \bar{1})\}$ halkasında $I_1 = \langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_2$ ve $I_2 = \mathbb{Z}_2 \times \langle \bar{0} \rangle$ ideallerine bakarsak $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 / \langle \bar{0} \rangle \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$ cisim olduğundan I_1 ideali maksimaldir. Aynı şekilde $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 / \mathbb{Z}_2 \times \langle \bar{0} \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ cisim olduğundan I_2 ideali maksimaldir.

Teorem 3.13 I , R nin bir ideali ve M , I yı kapsayan R nin bir ideali olsun. M/I nin R/I halkasının maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul M nin, R halkasının maksimal ideali olmasıdır [8].

İspat Teorem 3.12 gereği M nin R halkasının maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul R/M nin cisim olmasıdır. $I \subseteq M$ olduğundan $\frac{(R/I)}{(M/I)} \cong R/M$ olur ve R/M cisim olduğundan M/I , R/I nin maksimal idealidir.

Tersine $M/I, R/I$ nin maksimal ideali olsun. O halde $\frac{(R/I)}{(M/I)} \cong R/M$ olup Teorem

3.12 gereği R/M cisim olur. O halde R/M cisim olduğundan M, R nin maksimal idealidir [8].

Örnek 3.9 $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının maksimal ideallerini bulunuz [8].

$\mathbb{Z}$ nin idealleri $n\mathbb{Z}$ şeklinde olduğundan ve $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ halkasının cisim olması için gerek ve yeter koşul n sayısının asal olmasıdır. O halde $n\mathbb{Z}$ idealinin $\mathbb{Z}$ nin maksimal ideali olması için gerek ve yeter koşul n nin asal olmasıdır. Ayrıca $\langle 0 \rangle \subset 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ olduğundan, $\langle 0 \rangle$ maksimal ideal değildir.

Teorem 3.14 R tamlik bölgesi olsun. $p \in R$ nin indirgenemez olması için gerek ve yeter koşul (p) nin R halkasının bütün öz ideallerinin kümesinde maksimal eleman olmasıdır [7].

İspat R nin bütün öz ideallerinin kümesi S ve $p \in R$ indirgenemez eleman olsun. O halde p birimsel değildir ve böylece (p) bir öz idealdir. Eğer $(p) \subset (a)$ ise $p = ab$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. p indirgenemez olduğundan a veya b birimsel eleman olmak zorundadır. Eğer a birimsel elemansa $(a) = R$ dir. Eğer b birimsel eleman ise $(p) = (a)$ olur. Şu halde (p) , S kümesinin maksimal elemanıdır.

Tersine eğer (p) , S kümesinin bir maksimal elemanı ise p sıfırdan farklı ve birimsel olmayan bir elemandır. $a, b \in R$ için $p = ab$ olsun. O halde $(p) \subset (a)$ dir. Böylece (p) , S kümesinin maksimal elemanı olduğundan $(p) = (a)$ veya $(a) = R$ olur. Eğer $(p) = (a)$ ise $a = pc$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Buradan $p = ab = (pc)b = p(cb)$ olur. R tamlik bölgesi olduğundan $1_R = cb$ elde edilir. Böylece b birimsel elemandır. Eğer $(a) = R$ ise a birimsel elemandır. Şu halde $p \in R$ indirgenemez elemandır [7].

Teorem 3.15 (Zorn Lemma) $(V, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Bu kısmi sıralı kümenin her tam sıralı alt kümesinin bir üst sınırı varsa kısmen sıralı kümenin de en az bir maksimal elemanı vardır [8].

Önerme 3.4 R aşık olmayan bir halka olsun. Bu durumda R nin en az bir maksimal elemanı vardır [8].

İspat R aşık olmasın ve Ω , R nin öz ideallerinden oluşsun. $(0) \in \Omega$ olduğundan $\Omega \neq \emptyset$ dir. Ω kümesi $\subseteq$ (kapsama) bağıntısına göre kısmi sıralıdır. Şimdi Ω kümesinin boştan farklı tam sıralı alt kümesi olarak Δ yı alalım. $(I_1, I_2 \in \Delta$ iken $I_1 \subseteq I_2$ veya $I_2 \subseteq I_1)$. $J = \bigcup_{I \in \Delta} I$ kümesinin R nin bir ideali ve Δ kümesi için bir üst sınır olduğunu gösterelim. $a, b \in J$ alalım. O halde $a \in I_1$ ve $b \in I_2$ olacak şekilde $\exists I_1, I_2 \in \Delta$ vardır. Δ tam sıralı olduğundan $I_1 \subseteq I_2$ olduğunu kabul edelim. O halde $a \in I_2$ ve $b \in I_2$ olur böylece $a - b \in I_2 \subseteq J = \bigcup_{I \in \Delta} I$ bulunur. $a \in J$ ve $r \in R$ alalım. Buradan $a \in I$ olacak şekilde $\exists I \in \Delta$ vardır. I , R nin ideali olduğundan $ar \in I \subseteq J = \bigcup_{I \in \Delta} I$ olur. O halde J , R nin bir idealidir. Ayrıca tanım gereği $I \in \Delta$ için $I \subseteq J$ olduğundan J bir üst sınırdır. Buradan Zorn Lemmaya göre Ω kümesinin bir maksimal elemanı vardır [8].

Sonuç 3.5 I , R halkasının bir öz ideali olsun. O halde I yı kapsayan bir M maksimal ideali vardır [8].

İspat R/I aşık olmayan ve birimli, değişmeli bir halka olduğundan bir maksimal ideale sahiptir. R/I nin idealleri $M \supseteq I$ ve M , R nin bir ideali olacak şekilde M/I şeklindedir. M/I yı R/I nin maksimal ideali olarak alırsak $\frac{(R/I)}{(M/I)} \cong R/M$ cisim olur. Dolayısıyla Teorem 3.12 gereği M , R nin maksimal idealidir [8].

Sonuç 3.6 R bir halka ve $a \in R$ olsun. $a \in U(R)$ olması için gerek ve yeter koşul a nin R halkasının hiçbir maksimal idealinin elemanı olmamasıdır [8].

İspat $a \in U(R)$ ve kabul edelim ki $a \in M$ olacak şekilde M , R nin bir maksimal ideali olsun. $a \in M$ olduğundan $aR \subseteq M \subset R$ olur. Bu durumda a , R nin birimsel elemanı değildir. Çünkü a nin birimsel olması için gerek ve yeter koşul $aR = R$ olmasıdır. Şimdi a nin hiçbir M maksimali tarafından kapsanmadığını kabul edelim ve a , R nin

birimsel elemanı olmasın. O halde aR öz idealdir ve Sonuç 3.5 den aR idealini kapsayan bir M maksimal ideali vardır ($aR \subseteq M$). Bu da kabulümüzle çelişir [8].

Tanım 3.7 Bir R halkasının tek bir maksimal ideali varsa bu halkaya quasi-lokal halka denir [8].

Örnek 3.10 F bir cisim iken tek maksimali 0 olduğundan, bir quasi lokal halkadır [6].

Örnek 3.11 Quasi lokal olmayan halka olarak $\mathbb{Z}_6$ halkasını alabiliriz. Çünkü $\mathbb{Z}_6$ nin $\langle \bar{2} \rangle, \langle \bar{3} \rangle$ olmak üzere iki maksimal ideali vardır.

Teorem 3.16 Bir R halkasının quasi-lokal halka olması için gerek ve yeter koşul R nin birimsel olmayan elemanlar kümesinin bir ideal olmasıdır [8].

İspat R quasi-lokal halka olsun. Yani R nin tek maksimal ideali M olsun. Sonuç 3.6 dan M maksimal olduğundan, M birimsel olmayan elemanlardan oluşur. Tersine I , R nin birimsel olmayan elemanlarından oluşan bir ideali olsun. $0 \in I$ ve $0 \neq 1_R$, R nin birimseli olmadığından $0 \neq 1_R$ dir. Dolayısıyla R aşık halka değildir. Böylece Önerme 3.4 gereği R nin en az bir M maksimal ideali vardır. M maksimal olduğundan birimsel eleman içermez. O halde $M \subseteq I \subset R$ dir. Buradan $M = I$ veya $I = R$ dir. ($1_R \notin I$ çünkü 1_R , R nin birimseli) Böylece $M = I$ elde edilir [8].

Örnek 3.12 R ve S iki halka olmak üzere $f: R \rightarrow S$ bir halka homomorfizması olsun. I , S halkasının maksimal ideali iken I^c , R halkasının maksimal ideal olmak zorunda değildir [8].

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $f(k) = k$ içerme homomorfizması için $\langle 0 \rangle$ ideali $\mathbb{Q}$ halkasının maksimal idealidir. Ancak $I^c = f^{-1}(\langle 0 \rangle) = \langle 0 \rangle$ olduğundan $\langle 0 \rangle$, $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal ideali değildir [8].

Not 3.4 $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri ile maksimal idealleri aynıdır. P , $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali olsun. $\mathbb{Z}_n / P$ halkası sonlu bir halka olduğundan Not 3.3 gereği P asalı maksimal idealdir. Ayrıca her maksimal ideal asal ideal olduğundan, $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri ile maksimal idealleri aynıdır.

Not 3.5 R_1 ve R_2 değişmeli ve birimli iki halka iken $R = R_1 \times R_2$ halkasının asal idellerinin P_1 , R_1 halkasının asal ideali olmak üzere $P_1 \times R_2$ ve P_2 , R_2 halkasının asal ideali olmak üzere $R_1 \times P_2$ formunda olduğu Teorem 3.4 de gösterilmişti. $R_1 \times R_2$ halkasında asal ideallerin kümesini alalım. Bu kümede oluşturulan her zincirin bir maksimal elemanı vardır ve her maksimal asal olduğundan bu maksimal elemanlar maksimal ideallerdir.

Sonuç 3.7 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri řu şekildedir:

- i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının tek maksimal ideali $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal ideali $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ olarak elde edilir.
- ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$, $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal ideali $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ olarak elde edilir.
- iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal ideali $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının maksimal ideali $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ olarak elde edilir.
- iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle \bar{p}_i \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ halkasının asal ideali $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\langle p' \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p}_i \rangle$ olarak elde edilir.

3.4 2-Yutan İdealler

Tanım 3.8 I , R nin sıfırdan farklı bir öz ideali olsun. $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ iken $ab \in I$ veya $bc \in I$ veya $ac \in I$ oluyorsa, I ideale 2-yutan ideal denir [13].

Teorem 3.17 R bir temel ideal bölgesi ve I , R nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. I idealinin 2-yutan ideal olması için gerek ve yeter koşul I nin asal ideal olması veya

$I = \langle p^2 \rangle$ olacak şekilde p asal elemanı bulunması veya $I = \langle p_1 p_2 \rangle$ olacak şekilde birbirinden farklı $p_1, p_2 \in R$ asal elemanlarının bulunmasıdır [13].

İspat I , 2-yutan ideal olsun. I asal ideal ve $I = p^2 R$ olmasın. R bir temel ideal bölgesi olduğundan $I = (x)$ olacak şekilde bir $x \in R$ vardır. Kabul edelim ki x elemanının 2 den fazla asal böleni olsun. O halde en az ihtimalle $x = p_1 p_2 p_3$ olacak şekilde birbirinden farklı p_1, p_2, p_3 asal elemanları bulunsun. Buradan $p_1 p_2 p_3 \in I = (x)$ olur ki $p_1 p_2 \notin I$, $p_1 p_3 \notin I$ ve $p_2 p_3 \notin I$ elde edilir. Bu da I idealinin 2-yutan ideal olmasıyla çelişir. O halde x in 2 asal böleni vardır. Böylece $I = (x) = (p_1 p_2)$ elde edilir.

Kabul edelim ki I , R nin asal ideal olsun. I idealinin 2-yutan ideal olduğunu göstermek için $a, b, c \in R$ için $abc \in I$ alalım. R temel ideal bölgesi olduğundan her ideal tek bir eleman tarafından üretilir. O halde $abc \in I = (x)$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. R temel ideal bölgesi ve $I = (x)$ asal ideal olduğundan Teorem 3.1 den x elemanı asal elemandır. O halde $x | abc$ olduğundan $x | a$ veya $x | b$ veya $x | c$ dir. Buradan $x | ab$ veya $x | bc$ veya $x | ac$ olup, $ab \in (x)$ veya $bc \in (x)$ veya $ac \in (x)$ elde edilir. O halde I ideali 2-yutan idealdir.

Kabul edelim ki p asal eleman olacak şekilde $I = \langle p^2 \rangle$ olsun. I idealinin 2-yutan ideal olduğunu göstermek için $a, b, c \in R$ için $abc \in I = \langle p^2 \rangle$ alalım. Böylece $p^2 | abc$ dir ve p asal olduğundan $p^2 | ab$ veya $p^2 | bc$ veya $p^2 | ac$ olur. Buradan $ab \in \langle p^2 \rangle$ veya $bc \in \langle p^2 \rangle$ veya $ac \in \langle p^2 \rangle$ olarak bulunur. Böylece tüm durumlar için I ideali 2-yutan idealdir.

Kabul edelim ki $p_1, p_2 \in R$ asal eleman olacak şekilde $I = \langle p_1 p_2 \rangle$ olsun. I idealinin 2-yutan ideal olduğunu göstermek için $a, b, c \in R$ için $abc \in I = \langle p_1 p_2 \rangle$ alalım. Böylece $p_1 p_2 | abc$ ve p_1, p_2 asal olduğundan $p_1 | abc$ ve $p_2 | abc$ dir. Buradan p_1 asal olduğundan $p_1 | a$ veya $p_1 | b$ veya $p_1 | c$ dir. Aynı şekilde p_2 asal olduğundan $p_2 | a$ veya $p_2 | b$ veya $p_2 | c$ dir. Şimdi p_1 ve p_2 nin aynı elemanı böldüğü duruma bakalım. $p_1 | a$ ve $p_2 | a$ olsun. Bu durumda $p_1 p_2 | ab$ olup $ab \in \langle p^2 \rangle$ olduğundan istenilen elde

edilir. Şimdi de p_1 ve p_2 nin farklı elemanı böldüğü duruma bakalım. $p_1 | a$ ve $p_2 | c$ olsun. Bu durumda $p_1 p_2 | ac$ olup $ac \in \langle p^2 \rangle$ elde edilir. Benzer şekilde diğer durumlar içinde işlemler yapıldığında I ideali 2-yutan ideal olarak bulunur.

Örnek 3.13 $\mathbb{Z}$ halkasında (6) ideali 2-yutan idealdir.

Önerme 3.5 P, R nin asal ideali ve $I \subseteq P, R$ nin bir ideali olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) P, I nin minimal asal idealidir.
- ii) $R \setminus P$ kümesi I ile kesişimi boş olan en büyük çarpımsal kapalı kümedir.
- iii) Her $x \in P$ için $yx^n \in I$ ($n \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir $y \in R \setminus P$ vardır [14].

İspat i) $\Rightarrow$ ii) S kümesi, $R \setminus P$ kümesini kapsayan I ile kesişimi boş olan en büyük çarpımsal küme olsun. S nin $R \setminus P$ ye eşit olduğunu gösterelim. O halde I idealini kapsayan ve S ile ayrık idealler kümesinin bir Q maksimali vardır ve bu maksimal ideal R nin asal idealidir. Böylece $S \cap Q = \emptyset$ ve $R \setminus P \subseteq S$ olduğundan $R \setminus P \cap Q = \emptyset$ olur.

Buradan $Q \subseteq P$ ve kabulden P, I nin minimal asalı olduğundan $P = Q$ bulunur. O halde $s \in S$ için $S \cap Q = \emptyset$ olduğundan $s \notin Q = P$, böylece $s \in R \setminus P$ olur.

ii) $\Rightarrow$ iii) $x \in P$ alalım ve $S = \{yx^i \mid y \in R \setminus P, i = 0, 1, 2, \dots\}$ çarpımsal kümesi tanımlansın.

$y \in R \setminus P$ için $y = yx^0$ olarak düşünülürse $y \in S$ bulunur. Böylece $R \setminus P \subseteq S$ dir.

Kabul gereği $R \setminus P$ kümesi I ile kesişimi boş olan en büyük çarpımsal kapalı küme ve $S, R \setminus P$ yi kapsayan çarpımsal küme olduğundan $S \cap I \neq \emptyset$ dir. Buradan $x \in P$ için $yx^n \in I$ ($n \in \mathbb{N}$) olacak şekilde bir $y \in R \setminus P$ olduğu görülür.

iii) $\Rightarrow$ i) Kabul edelim ki $I \subset Q \subseteq P$ olacak şekilde Q, R nin asal ideali olsun. $x \in P \setminus Q$ alalım. O halde kabul gereği $yx^i \in I \subset Q$ ($n \in \mathbb{N}$) olacak şekilde $y \in R \setminus P$ vardır. Bu bize çelişki verir. Çünkü $x \notin Q$ iken Q asal ideal olduğundan $x^i \notin Q$ olur ve $y \notin Q$ olduğundan $yx^i \notin Q$ olmalıydı. Böylece $P = Q$ elde edilir. O halde P, I nin minimal asal idealidir [14].

Teorem 3.18 I, R nin 2-yutan ideali olsun. O halde $Rad(I)$, 2-yutan idealdir ve $x \in Rad(I)$ için $x^2 \in I$ olur [13].

İspat $x \in \text{Rad}(I)$ alalım. O halde $x^n \in I$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. $n=3$ ise $x^3 \in I$ iken I, R nin 2-yutan ideali olduğundan $x^2 \in I$ olur. n den küçük değerler için $x^2 \in I$ ifadesi doğru olsun. Şimdi n için ifadenin doğruluğunu gösterelim. $x^n \in I$ iken $x^n = x \cdot x \cdot x^{n-2} \in I$ ve I ideali 2-yutan ideal olduğundan $x^2 \in I$ veya $x^{n-1} \in I$ olur. Kabulden, $x^{n-1} \in I$ iken $x^2 \in I$ olduğundan her $x \in \text{Rad}(I)$ için $x^2 \in I$ elde edilir. Şimdi $\text{Rad}(I)$ nin 2-yutan ideal olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $x, y, z \in R$ için $xyz \in \text{Rad}(I)$ olsun. O halde $(xyz)^2 = x^2 y^2 z^2 \in I$ olup I, R nin 2-yutan ideali olduğundan $x^2 y^2 \in I$ alabiliriz. $(xy)^2 = x^2 y^2 \in I$ olduğundan $xy \in \text{Rad}(I)$ bulunur. Böylece $\text{Rad}(I)$, 2-yutan idealdir [13].

Teorem 3.19 I, R nin 2-yutan ideali olsun. O halde R nin I üzerinde minimal olan en fazla 2 asal ideali vardır [13].

İspat Kabul edelim ki $J = \{P_i \mid P_i, R \text{ nin } I \text{ üzerindeki minimal asal ideali}\}$ ve J en az üç elemana sahip, $P_1, P_2 \in J$ iki ayrı asal ideal olsun. P_1, P_2 iki ayrı asal olduğundan $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ ve $x_2 \in P_2 \setminus P_1$ vardır. $x_1, x_2 \in R$ için $x_1 x_2 \in I$ olduğunu gösterelim. Önerme 3.5 den $c_2 x_1^n \in I$ ve $c_1 x_2^m \in I$ ($n, m \geq 1$) olacak şekilde $c_2 \notin P_1$ ve $c_1 \notin P_2$ vardır. I, R nin 2-yutan ideali olduğundan $c_2 x_1 \in I$ veya $c_2 x_1^{n-1} \in I$ veya $x_1^n \in I$ olur. $I \subseteq P_1 \cap P_2$ ve $x_1, x_2 \notin P_1 \cap P_2$ olduğundan tüm durumlar incelendiğinde $c_2 x_1 \in I$ olduğu sonucuna varılır. Aynı şekilde I, R nin 2-yutan ideali olduğundan $c_1 x_2 \in I$ veya $c_1 x_2^{m-1} \in I$ veya $x_2^m \in I$ olur. $I \subseteq P_1 \cap P_2$ ve $x_1, x_2 \notin P_1 \cap P_2$ olduğundan tüm durumlar incelendiğinde $c_1 x_2 \in I$ olduğu sonucuna varılır. $c_2 x_1 \in I \subseteq P_2$ iken $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ ve P_2 asal olduğundan $c_2 \in P_2$ olur. Aynı şekilde $c_1 x_2 \in I \subseteq P_1$ iken $x_2 \in P_2 \setminus P_1$ ve P_1 asal olduğundan $c_1 \in P_1$ olur. Dolayısıyla $c_1 \in P_1 \setminus P_2$ ve $c_2 \in P_2 \setminus P_1$ bulunur. $c_2 x_1, c_1 x_2 \in I$ olduğundan $(c_1 + c_2) x_1 x_2 \in I$ elde edilir. P_1, P_2 asal idealler ve $(c_1 + c_2) \notin P_1$ ve $(c_1 + c_2) \notin P_2$ olduğu için $(c_1 + c_2) x_1 \notin P_2$ ve $(c_1 + c_2) x_2 \notin P_1$ olur. O halde bu iki eleman I idealinin de elemanı olamaz. Böylece I , 2-yutan ideal olduğundan $x_1 x_2 \in I$ olur. Şimdi kabul edelim ki P_1 ve P_2 den farklı bir $P_3 \in J$ minimal asalı olsun. O halde $y_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$, $y_2 \in P_2 \setminus (P_1 \cup P_3)$ ve $y_3 \in P_3 \setminus (P_1 \cup P_2)$ olacak şekilde elemanlar alınabilir. Buradan

$y_1y_2 \in I$ ve P_3 I nin minimal asal olduğundan $y_1y_2 \in I \subseteq P_3$ olur. Ayrıca P_3 asal ideal olduğundan $y_1 \in P_3$ veya $y_2 \in P_3$ olarak bulunur. Bu durum P_3 idealinin seçimiyle çelişir. Böylece J kümesi en fazla iki elemana sahiptir [13].

Teorem 3.20 I , R nin 2-yutan ideali olsun. O halde aşağıdakilerden biri sağlanır:

- i) $Rad(I) = P$, $P^2 \subseteq I$ olacak şekilde R nin bir asal idealidir.
- ii) $Rad(I) = P_1 \cap P_2$, $P_1P_2 \subseteq I$ ve $Rad(I^2) \subseteq I$ olacak şekilde P_1 ve P_2 , I nin farklı minimal asal idealleridir [13].

İspat I , R nin 2-yutan ideali olduğundan Teorem 3.19 gereği I nin en fazla iki tane minimal asalı vardır. O halde $Rad(I)$, I nin minimal asallarının kesişimi olduğundan $Rad(I) = P$ veya $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ dir. Kabul edelim ki $Rad(I) = P$ olsun. $x, y \in P$ alalım. Böylece Teorem 3.18 den $x^2, y^2 \in I$ olup $x(x+y)y \in I$ dir. I , R nin 2-yutan ideali olduğundan $x(x+y) \in I$ veya $(x+y)y \in I$ veya $xy \in I$ olur. Her üç durumda $xy \in I$ elde edilir. Böylece $P^2 \subseteq I$ dir.

Kabul edelim ki $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ olsun. $x, y \in Rad(I)$ alalım. Benzer şekilde Teorem 3.18 den $x^2, y^2 \in I$ olup $x(x+y)y \in I$ dir. I , R nin 2-yutan ideali olduğundan $x(x+y) \in I$ veya $(x+y)y \in I$ veya $xy \in I$ olur. Her üç durumda $xy \in I$ elde edilir. Böylece $Rad(I)^2 \subseteq I$ dir. Şimdi $P_1P_2 \subseteq I$ olduğunu gösterelim. $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ ve $x_2 \in P_2 \setminus P_1$ olsun. Teorem 3.19 dan $x_1x_2 \in I$ olur. $z_1 \in Rad(I)$ ve $z_2 \in P_2 \setminus P_1$, $y_1 \in P_1 \setminus P_2$ alalım. O halde $y_1z_2 \in I$ ve $z_1 + y_1 \in P_1 \setminus P_2$ olur ki böylece $z_1z_2 + y_1z_2 = (z_1 + y_1)z_2 \in I$ elde edilir. Buradan $z_1z_2 \in I$ olur. Aynı şekilde $z_1 \in Rad(I)$ ve $z_2 \in P_1 \setminus P_2$ alınırsa $z_1z_2 \in I$ olur, böylece $P_1P_2 \subseteq I$ bulunur [13].

Teorem 3.21 I , R nin P asalımsı ideali olsun. I idealinin R nin 2-yutan ideali olması için gerek ve yeter koşul $P^2 \subseteq I$ olmasıdır. Ayrıca R nin her M maksimal ideali için M^2 , 2-yutan idealdir [13].

İspat Kabul edelim ki I , R nin 2-yutan ideali olsun. Teorem 3.18 den $P^2 \subseteq I$ olur. Tersine $P^2 \subseteq I$ ve $x, y, z \in R$ için $xyz \in I$ olsun. Eğer $x \in I$ veya $yz \in I$ ise I , R nin 2-yutan ideali olur. Kabul edelim ki $x \notin I$ ve $yz \notin I$ olsun. I , R nin P asalımsı ideali

olduğu için $yz \in P$ ve $x \in P$ dir. P asal ideal olduğundan $y \in P$ veya $z \in P$ olur. Böylece $xy \in P^2$ veya $xz \in P^2$ dir. Kabulden $P^2 \subseteq I$ olduğundan $xy \in I$ veya $xz \in I$ bulunur. O halde I , R nin 2-yutan idealidir. Ayrıca her M maksimal ideali için Önerme 3.3 den M^2 , M -asalımsı idealdir ve $M^2 \subseteq M^2$ olduğundan Teorem gereği M^2 , 2-yutan idealdir [13].

Teorem 3.22 $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri şu şekildedir:

- i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan ideali $\langle \bar{0} \rangle$ idealidir.
- ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $\langle \bar{0} \rangle$, $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ idealleridir.
- iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{p}^2 \rangle$ idealleridir.
- iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $1 \leq i, j \leq m$ olmak üzere $\langle \bar{p}_i \rangle$, $\langle \overline{(p_i)^2} \rangle$ ve $i \neq j$ iken $\langle \overline{p_i p_j} \rangle$ idealleridir.

İspat $\mathbb{Z}/\langle n \rangle \cong \mathbb{Z}_n$ izomorfizmasından yararlanarak $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ ile $\mathbb{Z}_n$ halkasının idealleri arasındaki bire bir eşlemeyi kullanalım. $\mathbb{Z}$ halkasının 2-yutan idealleri $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri ve $s, t \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\langle st \rangle$ idealleridir. O halde $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ bölüm halkasının 2-yutan idealleri $\mathbb{Z}/\langle n \rangle$ halkasının asal ideallerinden ve $\langle n \rangle \subseteq \langle st \rangle$ yani $st | n$ olmak üzere $\langle st \rangle / \langle n \rangle$ ideallerinden oluşur.

- i) $\langle st \rangle / \langle n \rangle \mapsto \langle \bar{st} \rangle$ için $st | n$ ve $n = p$ dir. Bu koşulu sağlayan $s, t \in \mathbb{Z}$ asalı yoktur. O halde $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan ideali asal ideal olan $\langle \bar{0} \rangle$ idealidir.

ii) $\frac{\langle st \rangle}{\langle n \rangle} \mapsto \langle \overline{st} \rangle$ için $st \mid n$ ve $n = pq$ olduğundan $st = pq$ olur. O halde

$\langle \overline{st} \rangle = \langle \overline{pq} \rangle = \langle \overline{0} \rangle$ dir. Böylece $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $\langle \overline{0} \rangle$ ve asal idealler de 2-yutan olduğundan $\langle \overline{p} \rangle$ ve $\langle \overline{q} \rangle$ idealleridir.

iii) $\frac{\langle st \rangle}{\langle n \rangle} \mapsto \langle \overline{st} \rangle$ için $st \mid n$ ve $n = p^k$ dir. $s, t \in \mathbb{Z}$ asal eleman olduğundan bu koşulu

$s = t = p$ sağlar. O halde $\langle \overline{st} \rangle = \langle \overline{p^2} \rangle$ dir. Böylece $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $\langle \overline{p^2} \rangle$ ve asal ideal olan $\langle \overline{p} \rangle$ idealidir.

iv) $\frac{\langle st \rangle}{\langle n \rangle} \mapsto \langle \overline{st} \rangle$ için $st \mid n$ ve $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ dir. $s, t \in \mathbb{Z}$ asal eleman olduğundan

$1 \leq i, j \leq m$ olmak üzere $s = t = p_i$ veya $i \neq j$ iken $s = p_i$ ve $t = p_j$ dir. O halde

$\langle \overline{st} \rangle = \langle \overline{(p_i)^2} \rangle$ veya $\langle \overline{st} \rangle = \langle \overline{p_i p_j} \rangle$ olur. Böylece $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-

yutan idealleri $1 \leq i, j \leq m$ olmak üzere $\langle \overline{(p_i)^2} \rangle$, $i \neq j$ iken $\langle \overline{p_i p_j} \rangle$ ve asal ideal olan

$\langle \overline{p_i} \rangle$ idealleridir.

Teorem 3.23 R_1 ve R_2 değişmeli ve birimli iki halka olsun. I_1, R_1 halkasının ve I_2, R_2 halkasının öz idealleri olmak üzere $R = R_1 \times R_2$ halkası için aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i) I_1, R_1 halkasının 2-yutan ideali olmak üzere $I_1 \times R_2$, 2-yutan idealdir.

ii) I_2, R_2 halkasının 2-yutan ideali olmak üzere $R_1 \times I_2$, 2-yutan idealdir.

iii) I_1, R_1 halkasının asal ideali I_2, R_2 halkasının asal ideali olmak üzere $I_1 \times I_2$, 2-yutan idealdir [15].

İspat i) Kabul edelim ki I_1, R_1 halkasının 2-yutan ideali ve

$(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in R_1 \times R_2$ için $(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) \in I_1 \times R_2$ olsun. O halde

$(a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3) \in I_1 \times R_2$ dir. I_1, R_1 halkasının 2-yutan ideali olduğundan $a_1 a_2 a_3 \in I_1$

iken $a_1 a_2 \in I_1$ veya $a_1 a_3 \in I_1$ veya $a_2 a_3 \in I_1$ olmalıdır. $a_1 a_2 \in I_1$ olduğunu kabul edelim.

Buradan $(a_1, b_1)(a_2, b_2) \in I_1 \times R_2$ bulunur. Böylece $I_1 \times R_2$, 2-yutan idealdir.

ii) Kabul edelim ki I_2, R_2 halkasının 2-yutan ideali ve $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in R_1 \times R_2$ için $(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) \in R_1 \times I_2$ olsun. O halde $(a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3) \in R_1 \times I_2$ dir. I_2, R_2 halkasının 2-yutan ideali olduğundan $b_1 b_2 b_3 \in I_2$ iken $b_1 b_2 \in I_2$ veya $b_1 b_3 \in I_2$ veya $b_2 b_3 \in I_2$ olmalıdır. $b_1 b_2 \in I_2$ olduğunu kabul edelim. Buradan $(a_1, b_1)(a_2, b_2) \in R_1 \times I_2$ bulunur. Böylece $R_1 \times I_2, 2$ -yutan idealdir.

iii) Kabul edelim ki I_1, R_1 halkasının asal ideali I_2, R_2 halkasının asal ideali ve $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3) \in R_1 \times R_2$ için $(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3) \in I_1 \times I_2$ olsun. O halde $(a_1 a_2 a_3, b_1 b_2 b_3) \in I_1 \times I_2$ dir. I_1, R_1 halkasının asal ideali olduğundan en az bir tane $i \in \{1, 2, 3\}$ için $a_i \in I_1$ olur, kabul edelim ki $a_1 \in I_1$ olsun. Aynı şekilde I_2, R_2 halkasının asal ideali olduğundan en az bir tane $j \in \{1, 2, 3\}$ için $b_j \in I_2$ olur, kabul edelim ki $b_2 \in I_2$ olsun. Buradan $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \in I_1 \times I_2$ olarak bulunur. Böylece $I_1 \times I_2, 2$ -yutan idealdir [15].

Sonuç 3.8 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının bazı 2-yutan idealleri şunlardır:

$\mathbb{Z}$ nin 2-yutan idealleri $\langle 0 \rangle, \langle p' \rangle, \langle (p')^2 \rangle$ ve $s, t \in \mathbb{Z}$ birbirinden farklı asal elemanlar olmak üzere $\langle st \rangle$ idealleri olduğundan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n, \langle (p')^2 \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\langle st \rangle \times \mathbb{Z}_n$ idealleri 2-yutandır.

i) $n = p$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \bar{0} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\langle 0 \rangle \times \langle \bar{0} \rangle, \langle p' \rangle \times \langle \bar{0} \rangle$ idealleri 2-yutandır. Ayrıca $\mathbb{Z}_n$ nin 2-yutan ideali $\langle \bar{0} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ 2-yutan idealdir.

ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\langle 0 \rangle \times \langle \bar{p} \rangle, \langle 0 \rangle \times \langle \bar{q} \rangle, \langle p' \rangle \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle p' \rangle \times \langle \bar{q} \rangle$ idealleri 2-yutandır. Ayrıca $\mathbb{Z}_n$ nin 2-yutan ideali $\langle \bar{0} \rangle, \langle \bar{p} \rangle$ ve $\langle \bar{q} \rangle$ olduğundan $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle, \mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ 2-yutandır.

iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal ideali $\langle \overline{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\langle 0 \rangle \times \langle \overline{p} \rangle$, $\langle p' \rangle \times \langle \overline{p} \rangle$ idealleri 2-yutandır. Ayrıca $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $\langle \overline{p} \rangle$ ve $\langle \overline{p^2} \rangle$ idealleri olduğundan $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p^2} \rangle$ 2-yutandır.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\langle \overline{p_i} \rangle$ ve $\mathbb{Z}$ nin asal idealleri $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $\langle 0 \rangle$ ve $\langle p' \rangle$ olduğundan $\langle 0 \rangle \times \langle \overline{p_i} \rangle$ ve $\langle p' \rangle \times \langle \overline{p_i} \rangle$ idealleri 2-yutan idealdir. Ayrıca $\mathbb{Z}_n$ halkasının 2-yutan idealleri $1 \leq i, j \leq m$ olmak üzere $\langle \overline{p_i} \rangle$, $\langle \overline{(p_i)^2} \rangle$ ve $i \neq j$ iken $\langle \overline{p_i p_j} \rangle$ idealleri olduğundan $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p_i} \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_i)^2} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p_i p_j} \rangle$ 2-yutandır.

İDEAL GENİŞLEMESİ

4.1 Tanım ve Özellikler

Bu bölümde birimsiz bir halkayı birimli bir halka içine gömme fikrinden yola çıkılarak ortaya konulan Dorroh Genişlemesi ya da İdeal Genişlemesi olarak adlandırılan halka genişlemesi ele alınacaktır.

Tanım 4.1 R bir halka ve $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi olsun. $\mathbb{Z} * R = \{(z, r) : z \in \mathbb{Z}, r \in R\}$ kümesini ele alalım. $(z_1, r_1), (z_2, r_2) \in \mathbb{Z} * R$ olmak üzere

$$(z_1, r_1) + (z_2, r_2) = (z_1 + z_2, r_1 + r_2)$$

$$(z_1, r_1) \cdot (z_2, r_2) = (z_1 z_2, z_1 r_2 + z_2 r_1 + r_1 r_2)$$

ikili işlemleriyle $\mathbb{Z} * R$ birimi $(1, 0)$ olan birimli bir halkadır. Ayrıca $f : R \rightarrow \mathbb{Z} * R$, $f(r) = (0, r)$ ile tanımlı fonksiyon bir halka homomorfizmasıdır. Böylece R halkası $\mathbb{Z} * R$ içine gömülür. Burada $\mathbb{Z} * R$ ye R nin İdeal (Dorroh) Genişlemesi denir [2].

R ve S halka iken $R \times S$ halkasının tüm ideallerinin I , R nin J de S nin bir ideali olmak üzere $I \times J$ formunda olduğunu biliyoruz. Ancak ideal genişlemesinde bu doğru olmayabilir[2].

Önerme 4.1 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ halkasında $\langle (1, 1) \rangle$ ile üretilen ideal I ve J , $\mathbb{Z}$ nin idealleri olmak üzere $I * J$ formunda yazılamaz [2].

İspat $\langle (1, 1) \rangle$ ile üretilen ideal $\langle (1, 1) \rangle = \{(1, 1) \cdot (u, v) \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$ ile gösterilir. Buradan

$\langle (1,1) \rangle = \{(u, v+u+v) = (u, u+2v) \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$ olarak elde edilir. Eğer u tek tamsayı ise 2.bileşen tek tamsayı, eğer u çift tamsayı ise 2.bileşen çift tamsayıdır. O halde tek tamsayıların kümesi T ve çift tamsayıların kümesi $\mathcal{C}$ olmak üzere $\langle (1,1) \rangle = (T \times T) \cup (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ olduğu görülür. Ancak $\mathbb{Z}$ halkasında bu durumu sağlayan bir ideal yoktur. Böylece $\langle (1,1) \rangle$ ile üretilen ideal I ve J , $\mathbb{Z}$ nin idealleri olmak üzere $I * J$ formunda yazılamaz [2].

Ayrıca I , R nin J de S nin ideali iken $I * J$, $R * S$ nin ideali olmayabilir.

Örnek 4.1 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_6$ halkasını ele alalım. $\langle 3 \rangle$, $\mathbb{Z}$ nin ve $\langle \bar{2} \rangle$, $\mathbb{Z}_6$ nin bir idealidir. Ancak $\langle 3 \rangle * \langle \bar{2} \rangle$, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_6$ halkasının ideali değildir. Çünkü $(5, \bar{1}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_6$ ve $(3, \bar{2}) \in \langle 3 \rangle * \langle \bar{2} \rangle$ iken $(5, \bar{1})(3, \bar{2}) = (15, \bar{3}) \notin \langle 3 \rangle * \langle \bar{2} \rangle$ olur.

Teorem 4.1 R bir halka I , $\mathbb{Z}$ nin J , R nin ideali olsun. $I * J$ nin $\mathbb{Z} * R$ nin ideali olması için gerek ve yeter koşul her $i \in I$ ve $r \in R$ için $ir \in J$ olmasıdır [3].

İspat Kabul edelim ki $I * J$, $\mathbb{Z} * R$ nin bir ideali olsun. $(i, j) \in I * J$ ve $(z, r) \in \mathbb{Z} * R$ alalım. $I * J$ ideal olduğundan $(i, j)(z, r) = (iz, ir + zj + jr) \in I * J$ elde edilir. Buradan $ir + zj + jr \in J$ olduğu görülür. Ayrıca J , R nin ideali olduğundan $zj \in J$ ve $jr \in J$ dir. Böylece $ir \in J$ olmalıdır.

Tersine her $i \in I$ ve $r \in R$ için $ir \in J$ olduğunu kabul edelim. $I * J$ nin $\mathbb{Z} * R$ halkasının ideali olduğunu gösterelim. I , $\mathbb{Z}$ nin J de R nin bir ideali olduğundan $(0, 0_R) \in I * J$ olarak bulunur. O halde $I * J \neq \emptyset$ dir. Şimdi de $(i, j) \in I * J$ ve $(z, r) \in \mathbb{Z} * R$ alalım. $(i, j)(z, r) = (iz, ir + zj + jr)$ ve I , $\mathbb{Z}$ nin ideali olduğundan $iz \in I$ ve J , R nin ideali olduğundan $zj + jr \in J$ olur. Kabulden her $i \in I$ ve $r \in R$ için $ir \in J$ olduğundan $ir + zj + jr \in J$ bulunur. Böylece $(i, j)(z, r) = (iz, ir + zj + jr) \in I * J$ olup, $I * J$, $\mathbb{Z} * R$ nin idealidir [3].

Örnek 4.2 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_8$ halkasında $\langle 4 \rangle * 2\mathbb{Z}_8$ idealdir. Çünkü her $i \in \langle 4 \rangle$ ve her $r \in \mathbb{Z}_8$ için $ir \in 2\mathbb{Z}_8$ olur.

Teorem 4.2 R birimli bir halka I, R nin bir ideali ve $J, \mathbb{Z}$ nin bir ideali olsun. Eğer

$I * J, \mathbb{Z} * R$ nin bir ideali ise $(\mathbb{Z} * R) / (I * J) \cong \mathbb{Z} / I \times R / J$ dir [3].

İspat $\varphi: \mathbb{Z} * R \rightarrow \mathbb{Z} / I \times R / J$ fonksiyonu $\varphi(z, r) = (z + I, (z \cdot 1_R + r) + J)$ olarak tanımlansın. İlk önce φ nin iyi tanımlı olduğu gösterilir. Kabul edelim ki $(z_1, r_1), (z_2, r_2) \in \mathbb{Z} * R$ için $(z_1, r_1) = (z_2, r_2)$ olsun. Buradan $z_1 \cdot 1_R = z_2 \cdot 1_R$ ve $r_1 = r_2$ olduğundan $z_1 \cdot 1_R + r_1 = z_2 \cdot 1_R + r_2$ olur. O halde $(z_1 \cdot 1_R + r_1) - (z_2 \cdot 1_R + r_2) = 0 \in J$ olur aynı şekilde $z_1 - z_2 = 0 \in I$ bulunur. Böylece $z_1 + I = z_2 + I$ ve $(z_1 \cdot 1_R + r_1) + J = (z_2 \cdot 1_R + r_2) + J$ elde edilir. Bu iki eşitlikten $(z_1 + I, (z_1 \cdot 1_R + r_1) + J) = (z_2 + I, (z_2 \cdot 1_R + r_2) + J)$ olur. Bu durum $\varphi(z_1, r_1) = \varphi(z_2, r_2)$ olduğunu gösterir. O halde φ iyi tanımlıdır. Şimdi φ nin homomorfizma olduğunu gösterelim. $(z_1, r_1), (z_2, r_2) \in \mathbb{Z} * R$ için

$$\begin{aligned} \varphi((z_1, r_1) + (z_2, r_2)) &= \varphi(z_1 + z_2, r_1 + r_2) \\ &= ((z_1 + z_2) + I, (z_1 + z_2) \cdot 1_R + (r_1 + r_2) + J) \\ &= (z_1 + I, (z_1 \cdot 1_R + r_1) + J) + (z_2 + I, (z_2 \cdot 1_R + r_2) + J) \\ &= \varphi(z_1, r_1) + \varphi(z_2, r_2) \text{ olduğundan } \varphi \text{ grup homomorfizmasıdır. Ayrıca} \\ \varphi((z_1, r_1) * (z_2, r_2)) &= \varphi(z_1 z_2, z_1 r_2 + z_2 r_1 + r_1 r_2) \\ &= (z_1 z_2 + I, (z_1 z_2) \cdot 1_R + z_1 r_2 + z_2 r_1 + r_1 r_2 + J) \\ &= (z_1 + I, (z_1 \cdot 1_R + r_1) + J)(z_2 + I, (z_2 \cdot 1_R + r_2) + J) \\ &= \varphi(z_1, r_1) \varphi(z_2, r_2) \text{ olduğundan } \varphi \text{ bir halka homomorfizması olur.} \end{aligned}$$

$(z + I, r + J) \in \mathbb{Z} / I \times R / J$ alalım. $\varphi(z, -z \cdot 1_R + r) = (z + I, z \cdot 1_R - z \cdot 1_R + r + J) = (z + I, r + J)$ ve $(z, -z \cdot 1_R + r) \in \mathbb{Z} * R$ olduğundan φ örtendir. Birebirliği göstermek için $(z, r) \in \text{Çek}\varphi$ alalım. O halde $\varphi(z, r) = (z + I, z \cdot 1_R + r + J) = (I, J)$ dir. Buradan $z + I = I$ dolayısıyla $z \in I$ bulunur. $I * J, \mathbb{Z} * R$ nin bir ideali olduğundan Teorem 4.1 gereğince $z \cdot 1_R \in J$ olmalıdır. Ayrıca $(z \cdot 1_R + r + J) = J$ sağlandığından $r \in J$ olur. Buradan $(z, r) \in I * J$ olur. Böylece $\text{Çek}\varphi \subseteq I * J$ dir. Tersine $(i, j) \in I * J$ alırsak

$\varphi(i, j) = (i + I, (i.1 + j) + J) = (I, J)$ bulunur. Buradan $(i, j) \in \text{Çek}\varphi$ olup, $I * J \subseteq \text{Çek}\varphi$ dir. Her iki kapsamadan $\text{Çek}\varphi = I * J$ olur. φ , örten bir homomorfizma ve çekirdeği $I * J$ olduğundan izomorfizma teoreminden $(\mathbb{Z} * R) / (I * J) \cong \mathbb{Z} / I \times R / J$ olduğu görülür [3].

Sonuç 4.1 R birimli bir halka olsun. O halde $\mathbb{Z} * R \cong \mathbb{Z} \times R$ dir [3].

İspat $I = \langle 0 \rangle$, $\mathbb{Z}$ nin bir ideali ve $J = \langle 0 \rangle$, R nin bir idealidir. Buradan her $i \in I$ ve $r \in R$ için $ir \in J$ olduğundan $I * J$ nin $\mathbb{Z} * R$ nin bir idealidir. Teorem 4.2 den $\mathbb{Z} * R \cong (\mathbb{Z} * R) / (I * J) \cong \mathbb{Z} / I \times R / J = \mathbb{Z} \times R$ bulunur [3].

4.2 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ Halkasının Özel Elemanları

Bu bölümde $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasının bazı özel elemanları olan birimsel, nilpotent, idempotent ve sıfır bölen elemanları karakterize edilecektir.

Önerme 4.2 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasını ele alalım. O halde aşağıdakiler sağlanır:

i) Birimsel elemanları kümesi $U(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(1, \bar{k}) \mid k \in \mathbb{Z}, (1+k, n) = 1\} \cup \{(-1, \bar{k}) \mid k \in \mathbb{Z}, (-1+k, n) = 1\}$ dir.

ii) Nilpotent elemanları kümesi $N(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(0, \bar{k}) \mid \bar{k} \in N(\mathbb{Z}_n)\}$ dir.

iii) İdempotent elemanları $Id(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(0, \bar{k}) \mid \bar{k} \in Id(\mathbb{Z}_n)\} \cup \{(0, \overline{k+1}) \mid \overline{k+1} \in Id(\mathbb{Z}_n)\}$ dir.

iv) Sıfır bölen elemanları kümesi $Z(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(0, \bar{k}_1) \mid \bar{k}_1 \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{(a_1, \bar{k}_1) \mid (a_1 + k_1, n) \neq 1\} \cup \{(a_1, \overline{z - a_1}) \mid a_1 \in \mathbb{Z} \text{ ve } z \in Z(\mathbb{Z}_n)\}$ dir.

İspat i) Kabul edelim ki $(a_1, \bar{k}_1) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ birimsel eleman olsun. O halde $(a_1, \bar{k}_1) \cdot (a_2, \bar{k}_2) = (a_1 a_2, \overline{a_1 k_2 + a_2 k_1 + k_1 k_2}) = (1, \bar{0})$ olacak şekilde bir $(a_2, \bar{k}_2) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ vardır. Buradan $a_1 a_2 = 1$ ve $\overline{a_1 k_2 + a_2 k_1 + k_1 k_2} = \bar{0}$ elde edilir. Düzenleme yapılırsa

$\overline{a_1 a_2} + \overline{a_1 k_2} + \overline{a_2 k_1} + \overline{k_1 k_2} = (\overline{a_1} + \overline{k_1})(\overline{a_2} + \overline{k_2}) = \overline{1}$ bulunur. $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\}$ olduğundan $a_1 = a_2 = 1$ veya $a_1 = a_2 = -1$ dir. Aynı şekilde $U(\mathbb{Z}_n) = \{\overline{k} \mid (k, n) = 1\}$ olduğundan $(1+k, n) = 1$ veya $(-1+k, n) = 1$ olarak bulunur. Böylece birimsel elemanlar kümesi $U(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(1, \overline{k}) \mid k \in \mathbb{Z}, (1+k, n) = 1\} \cup \{(-1, \overline{k}) \mid k \in \mathbb{Z}, (-1+k, n) = 1\}$.

ii) Kabul edelim ki $(a, \overline{k}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ nilpotent eleman olsun. O halde $(a, \overline{k})^n = (0, \overline{0})$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan $(a, \overline{k})^n = \underbrace{(a, \overline{k}) \cdot (a, \overline{k}) \cdots (a, \overline{k})}_{n \text{ tane}} = (0, \overline{0})$ yani $(a^n, n\overline{k} + \overline{k}^n) = (0, \overline{0})$ elde edilir. $\mathbb{Z}$ halkasının tek nilpotenti 0 olduğundan $a = 0$ ve dolayısıyla $(\overline{k})^n = \overline{0}$ bulunur. Böylece nilpotent elemanlar kümesi $N(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(0, \overline{k}) \mid \overline{k} \in N(\mathbb{Z}_n)\}$.

iii) Kabul edelim ki $(a, \overline{k}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ idempotent eleman olsun. O halde $(a, \overline{k})^2 = (a, \overline{k})$ sağlanır. Buradan $(a^2, 2a\overline{k} + \overline{k}^2) = (a, \overline{k})$ olup $\mathbb{Z}$ halkasının idempotent elemanları 1 ve 0 olduğundan $a = 0$ veya $a = 1$ dir. Eğer $a = 0$ ise $\overline{k}^2 = \overline{k}$, yani $\overline{k} \in \mathbb{Z}_n$ idempotent elemandır. Eğer $a = 1$ ise $\overline{k} + \overline{k}^2 = 0$ bulunur. Buradan her iki tarafa $\overline{k} + \overline{1}$ eklenirse $\overline{k}^2 + 2\overline{k} + \overline{1} = (\overline{k} + \overline{1})^2 = (\overline{k} + \overline{1})$ elde edilir, $\overline{k} + \overline{1} \in \mathbb{Z}_n$ idempotent elemandır. İdempotent elemanlar kümesi $Id(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(0, \overline{k}) \mid \overline{k} \in Id(\mathbb{Z}_n)\} \cup \{(0, \overline{k} + \overline{1}) \mid \overline{k} + \overline{1} \in Id(\mathbb{Z}_n)\}$ dir.

iv) Kabul edelim ki $(a_1, \overline{k_1}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ sıfır bölen eleman olsun. O halde $(a_1, \overline{k_1}) \cdot (a_2, \overline{k_2}) = (a_1 a_2, a_1 \overline{k_2} + a_2 \overline{k_1} + \overline{k_1 k_2}) = (0, \overline{0})$ olacak şekilde $(0, \overline{0}) \neq (a_2, \overline{k_2}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ vardır. $\mathbb{Z}$ nin tek sıfır böleni 0 olduğundan $a_1 = 0$ veya $a_2 = 0$ olur.

Eğer $a_1 = 0$ ise $(a_2 \overline{k_1} + \overline{k_1 k_2}) = (\overline{a_2} + \overline{k_2}) \overline{k_1} = \overline{0}$ bulunur. Böylece $(k_1, n) = 1$ ve $(k_1, n) \neq 1$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

$(k_1, n) = 1$ olma durumunda:

$(\overline{a_2} + \overline{k_2}) \overline{k_1} = \overline{0}$ ve $(k_1, n) = 1$ olduğundan $(a_2 + k_2, n) \neq 1$ bulunur.

$(k_1, n) \neq 1$ olma durumunda:

$(k_1, n) = d$ olacak şekilde $d \in \mathbb{Z}$ vardır. $(\overline{a_2 + k_2})\overline{k_1} = \overline{0}$ ve $(k_1, n) = d$ olduğundan $(\overline{a_2 + k_2}) \in Z(\mathbb{Z}_n)$ bulunur. O halde $(\overline{a_2 + k_2}) = \overline{z}$ olacak şekilde bir $\overline{z} \in Z(\mathbb{Z}_n)$ vardır. Buradan $\overline{k_2} = \overline{z - a_2}$ olur.

Eğer $a_2 = 0$ ise $(\overline{a_1 k_2} + \overline{k_1 k_2}) = (\overline{a_1 + k_1})\overline{k_2} = \overline{0}$ olur. O halde $n \mid (a_1 + k_1)k_2$ dir. Ayrıca $(0, \overline{0}) \neq (a_2, \overline{k_2})$ olduğundan $(a_1 + k_1, n) \neq 1$ bulunur. Böylece sıfır bölen elemanlar kümesi

$$Z(\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n) = \{(0, \overline{k_1}) \mid \overline{k_1} \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{(a_1, \overline{k_1}) \mid (a_1 + k_1, n) \neq 1\} \cup \{(a_1, \overline{z - a_1}) \mid a_1 \in \mathbb{Z} \text{ ve } z \in Z(\mathbb{Z}_n)\}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ HALKASININ İDEALLERİ

R birimli bir halka iken $\mathbb{Z} * R \cong \mathbb{Z} \times R$ olduğu gösterilmişti. $\mathbb{Z}_n$ halkası birimi $\bar{1}$ olan birimli bir halka olduğundan $R = \mathbb{Z}_n$ alınırsa Teorem 4.2 den $\phi(a, \bar{k}) = (a, \overline{a+k})$ olarak tanımlı $\phi: \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ tasviri bir izomorfizmadır. O halde $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ dir. Bu tasvirin tersinin de izomorfizma olduğunu gösterilecektir.

Teorem 5.1 $\phi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ tasviri $(a, \bar{k}) \mapsto (a, \overline{-a+k})$ olarak tanımlansın. O halde $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ dir.

İspat ϕ nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(a_1, \bar{k}_1), (a_2, \bar{k}_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ için $(a_1, \bar{k}_1) = (a_2, \bar{k}_2)$ olsun. Buradan $a_1 = a_2$ ve $\bar{k}_1 = \bar{k}_2$ olup, 2. Eşitlikte her iki tarafa $\overline{-a_1}$ eklersek $\overline{-a_1 + k_1} = \overline{-a_1 + k_2}$ bulunur. $a_1 = a_2$ olduğundan $\overline{-a_1 + k_1} = \overline{-a_2 + k_2}$, böylece $(a_1, \overline{-a_1 + k_1}) = (a_2, \overline{-a_2 + k_2})$ olur. O halde $\phi(a_1, \bar{k}_1) = \phi(a_2, \bar{k}_2)$ dir. Şimdi homomorfizma olduğunu gösterelim. $(a_1, \bar{k}_1), (a_2, \bar{k}_2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ için

$$\begin{aligned} \phi((a_1, \bar{k}_1) + (a_2, \bar{k}_2)) &= \phi(a_1 + a_2, \overline{k_1 + k_2}) \\ &= (a_1 + a_2, \overline{-(a_1 + a_2) + k_1 + k_2}) \\ &= (a_1, \overline{-a_1 + k_1}) + (a_2, \overline{-a_2 + k_2}) \\ &= \phi(a_1, \bar{k}_1) + \phi(a_2, \bar{k}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1, \overline{k_1}) \cdot (a_2, \overline{k_2}) &= (-a_1, \overline{a_1 + k_1}) \cdot (-a_2, \overline{a_2 + k_2}) \\
&= (a_1 a_2, -\overline{a_1 a_2} + \overline{k_1 a_2} + \overline{a_1 a_2} - \overline{a_1 k_2} - \overline{k_1 a_2} - \overline{k_1 k_2} - \overline{a_1 a_2} + \overline{a_1 k_2}) \\
&= (a_1 a_2, -\overline{a_1 a_2} + \overline{k_1 k_2}) \\
&= \varphi(a_1 a_2, \overline{k_1 k_2}) \\
&= \varphi((a_1, \overline{k_1}) \cdot (a_2, \overline{k_2})) \text{ olduğundan } \varphi \text{ halka homomorfizmasıdır. } \varphi
\end{aligned}$$

nin birebirliğini göstermek için çekirdeğine bakılır.

$$\begin{aligned}
\text{Çek}\varphi &= \{(a, \overline{k}) \mid \varphi(a, \overline{k}) = (0, \overline{0})\} = \{(a, \overline{k}) \mid (a, \overline{-a + k}) = (0, \overline{0})\} \\
&= \{(a, \overline{k}) \mid a = 0, \overline{-a + k} = \overline{0}\} = \{0, \overline{0}\} \text{ olduğundan } \varphi \text{ birebirdir. } (a, \overline{k}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n \\
&\text{alalım. } \varphi(a, \overline{a + k}) = (a, \overline{k}) \text{ ve } (a, \overline{a + k}) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \text{ olduğundan } \varphi \text{ örtendir. Böylece } \varphi \\
&\text{izomorfizmadır.}
\end{aligned}$$

Şimdi bu izomorfizma kullanılarak $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasının bazı idealleri karakterize edilecektir.

Teorem 5.2 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri aşağıda belirtildiği gibidir:

- i) $n = p$ iken asal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $P_1 = \langle (0, \overline{1}) \rangle$, $P_2 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $P_3 = \langle (1, \overline{-1}) \rangle$ idealleridir.
- ii) $n = pq$ iken asal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $P_1 = \langle (0, \overline{1}) \rangle$, $P_2 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$, $P_3 = \langle (1, \overline{1 - p}) \rangle$ ve $P_4 = \langle (1, \overline{1 - q}) \rangle$ idealleridir.
- iii) $n = p^k$ iken asal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $P_1 = \langle (0, \overline{1}) \rangle$, $P_2 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $P_3 = \langle (1, \overline{1 - p}) \rangle$ idealleridir.
- iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken asal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $P_1 = \langle (0, \overline{1}) \rangle$, $P_2 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $P_3 = \langle (1, \overline{1 - p_i}) \rangle$ idealleridir.

İspat i) $n = p$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (1, \bar{0}) \rangle$ elde edilir. $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$, $\varphi(a, \bar{k}) = (a, \overline{-a + k})$ ile tanımlanan izomorfizma kullanılarak $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasındaki asal idealler bire bir olarak $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasındaki asal ideallere eşlenir. Böylece asal idealler $P_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $P_2 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $P_3 = \varphi \langle (1, \bar{0}) \rangle = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$ olarak bulunur.

ii) $n = pq$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (1, \bar{p}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle = \langle (1, \bar{q}) \rangle$ elde edilir. $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ izomorfizmasını kullanırsak asal idealler $P_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $P_2 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$, $P_3 = \varphi \langle (1, \bar{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p - 1}) \rangle$ ve $P_4 = \varphi \langle (1, \bar{q}) \rangle = \langle (1, \overline{q - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

iii) $n = p^k$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (1, \bar{p}) \rangle$ elde edilir. Böylece asal idealler $P_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $P_2 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $P_3 = \varphi \langle (1, \bar{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asal idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p}_i \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p}_i \rangle = \langle (1, \bar{p}_i) \rangle$ elde edilir. Böylece asal idealler $P_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $P_2 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $P_3 = \varphi \langle (1, \bar{p}_i) \rangle = \langle (1, \overline{p_i - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

Teorem 5.3 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri aşağıda belirtildiği gibidir:

i) $n = p$ iken asalımsı idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Q_1 = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$ ve $Q_3 = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$ idealleridir.

ii) $n = pq$ iken asalımsı idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $Q_1 = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$, $Q_3 = \langle (1, \overline{p-1}) \rangle$ ve $Q_4 = \langle (1, \overline{q-1}) \rangle$ idealleridir.

iii) $n = p^k$ iken asalımsı idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman, $t \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $Q_1 = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$ ve $Q_3 = \langle (1, \overline{p^j - 1}) \rangle$ idealleridir.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken asalımsı idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman, $1 \leq a_i \leq k_i$ ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $Q_1 = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$, $Q_3 = \langle (1, \overline{p_1^{a_1} - 1}) \rangle$, $Q_4 = \langle (1, \overline{p_2^{a_2} - 1}) \rangle$, ..., $Q_{m+2} = \langle (1, \overline{p_m^{a_m} - 1}) \rangle$ idealleridir.

İspat i) $n = p$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (1, \bar{0}) \rangle$ elde edilir. $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$, izomorfizması kullanılarak $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasındaki asalımsı idealler birebir olarak $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasındaki asalımsı ideallere eşlenir. Böylece asalımsı idealler $Q_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \varphi \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$, $Q_3 = \varphi \langle (1, \bar{0}) \rangle = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$ olarak bulunur.

ii) $n = pq$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (1, \bar{p}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle = \langle (1, \bar{q}) \rangle$ elde edilir. Böylece asalımsılar $Q_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \varphi \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$, $Q_3 = \varphi \langle (1, \bar{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p-1}) \rangle$, $Q_4 = \varphi \langle (1, \bar{q}) \rangle = \langle (1, \overline{q-1}) \rangle$ olarak bulunur.

iii) $n = p^k$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal, $t \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq j \leq k-1$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p^j} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p^j} \rangle = \langle (1, p^j) \rangle$ elde edilir. Böylece asalımsı idealler $Q_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \varphi \langle (p')^t, \bar{1} \rangle = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$ ve $Q_3 = \varphi \langle (1, p^j) \rangle = \langle (1, \overline{p^j - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $p' \in \mathbb{Z}$ asal, $t \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq a_i \leq k_i$, $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının asalımsı idealleri $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_1)^{a_1}} \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_2)^{a_2}} \rangle$, ..., $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_m)^{a_m}} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $\langle (p')^t \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_1)^{a_1}} \rangle = \langle (1, \overline{(p_1)^{a_1}}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_2)^{a_2}} \rangle = \langle (1, \overline{(p_2)^{a_2}}) \rangle$, ..., $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_m)^{a_m}} \rangle = \langle (1, \overline{(p_m)^{a_m}}) \rangle$ elde edilir. Asalımsı idealler $Q_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $Q_2 = \varphi \langle ((p')^t, \bar{1}) \rangle = \langle ((p')^t, \overline{1 - (p')^t}) \rangle$, $Q_3 = \varphi \langle (1, \overline{(p_1)^{a_1}}) \rangle = \langle (1, \overline{(p_1)^{a_1} - 1}) \rangle$, $Q_4 = \varphi \langle (1, \overline{(p_2)^{a_2}}) \rangle = \langle (1, \overline{(p_2)^{a_2} - 1}) \rangle$, ..., $Q_{m+2} = \varphi \langle (1, \overline{(p_m)^{a_m}}) \rangle = \langle (1, \overline{(p_m)^{a_m} - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

Teorem 5.4 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri aşağıda belirtildiği gibidir:

i) $n = p$ iken maksimal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $M_1 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $M_2 = \langle (1, \overline{-1}) \rangle$ idealleridir.

ii) $n = pq$ iken maksimal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $M_1 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$, $M_2 = \langle (1, \overline{1 - p}) \rangle$ ve $M_3 = \langle (1, \overline{1 - q}) \rangle$ idealleridir.

iii) $n = p^k$ iken maksimal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman olmak üzere $M_1 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $M_2 = \langle (1, \overline{1 - p}) \rangle$ idealleridir.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken maksimal idealler $p' \in \mathbb{Z}$ asal eleman ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $M_1 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $M_2 = \langle (1, \overline{1 - p_i}) \rangle$ idealleridir.

İspat i) $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $n = p$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle$ bulunmuştur. Buradan $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (1, \bar{0}) \rangle$ elde edilir. $\varphi: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$, $\varphi(a, \bar{k}) = (a, \overline{-a + k})$ ile tanımlanan izomorfizma kullanılarak $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasındaki maksimal idealler bire bir olarak $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasındaki maksimal ideallere eşlenir. Böylece maksimal idealler $M_1 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $M_2 = \varphi \langle (1, \bar{0}) \rangle = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$ olarak bulunur.

ii) $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $n = pq$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (1, \bar{p}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle = \langle (1, \bar{q}) \rangle$ elde edilir. Böylece maksimaller $M_1 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$, $M_2 = \varphi \langle (1, \bar{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p - 1}) \rangle$ ve $M_3 = \varphi \langle (1, \bar{q}) \rangle = \langle (1, \overline{q - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

iii) $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $n = p^k$ olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (1, \bar{p}) \rangle$ elde edilir. Böylece maksimaller $M_1 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $M_2 = \varphi \langle (1, \bar{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

iv) $p' \in \mathbb{Z}$ asal, $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere olmak üzere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasının maksimal idealleri $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p}_i \rangle$ olarak bulunmuştur. Buradan $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p}_i \rangle = \langle (1, \bar{p}_i) \rangle$ elde edilir. Böylece maksimal idealler $M_1 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$ ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere $M_2 = \varphi \langle (1, \bar{p}_i) \rangle = \langle (1, \overline{p_i - 1}) \rangle$ olarak bulunur.

Teorem 5.5 Aşağıdaki idealler $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında 2-yutandır:

$p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $s, t \in \mathbb{Z}$ birbirinden farklı asal elemanlar olmak üzere $I_1 = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $I_2 = \langle (p', \overline{1 - p'}) \rangle$, $I_3 = \langle ((p')^2, \overline{1 - (p')^2}) \rangle$ ve $I_4 = \langle (st, \overline{1 - st}) \rangle$ 2-yutandır.

i) $n = p$ iken $K_1 = \langle (0, \bar{0}) \rangle$, $K_2 = \langle (p', \overline{-p'}) \rangle$ ve $K_3 = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$ idealleri 2-yutandır.

ii) $n = pq$ iken $K_1 = \langle (0, \bar{p}) \rangle$, $K_2 = \langle (0, \bar{q}) \rangle$, $K_3 = \langle (p', \overline{p-p'}) \rangle$, $K_4 = \langle (p', \overline{q-p'}) \rangle$, $K_5 = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$, $K_6 = \langle (1, \overline{p-1}) \rangle$, $K_7 = \langle (1, \overline{q-1}) \rangle$ idealleri 2-yutandır.

iii) $n = p^k$ iken $K_1 = \langle (0, \bar{p}) \rangle$, $K_2 = \langle (p', \overline{p-p'}) \rangle$, $K_3 = \langle (1, \overline{p-1}) \rangle$, $K_4 = \langle (1, \overline{p^2-1}) \rangle$ idealleri 2-yutandır.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $1 \leq i, j \leq m$ ve $i \neq j$ olmak üzere $K_1 = \langle (0, \bar{p}_i) \rangle$, $K_2 = \langle (p', \overline{p_i - p'}) \rangle$, $K_3 = \langle (1, \overline{p_i - 1}) \rangle$, $K_4 = \langle (1, \overline{(p_i)^2 - 1}) \rangle$ ve $K_5 = \langle (1, \overline{p_i p_j - 1}) \rangle$ idealleri 2-yutandır.

İspat $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasında $p' \in \mathbb{Z}$ asal ve $s, t \in \mathbb{Z}$ birbirinden farklı asal elemanlar olmak üzere $\langle 0 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle 0, \bar{1} \rangle$, $\langle p' \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (p', \bar{1}) \rangle$, $\langle (p')^2 \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle ((p')^2, \bar{1}) \rangle$ ve $\langle st \rangle \times \mathbb{Z}_n = \langle (st, \bar{1}) \rangle$ idealleri 2-yutan ideal olarak bulunmuştu. Böylece $I_1 = \varphi \langle (0, \bar{1}) \rangle = \langle (0, \bar{1}) \rangle$, $I_2 = \varphi \langle (p', \bar{1}) \rangle = \langle (p', \overline{1-p'}) \rangle$, $I_3 = \varphi \langle ((p')^2, \bar{1}) \rangle = \langle ((p')^2, \overline{1-(p')^2}) \rangle$ ve $I_4 = \varphi \langle (st, \bar{1}) \rangle = \langle (st, \overline{1-st}) \rangle$ idealleri $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında 2-yutandır.

i) $n = p$ iken $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasında $p' \in \mathbb{Z}$ asal olmak üzere $\langle 0 \rangle \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (0, \bar{0}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (p', \bar{0}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (1, \bar{0}) \rangle$ idealleri 2-yutan olduğundan $K_1 = \varphi \langle (0, \bar{0}) \rangle = \langle (0, \bar{0}) \rangle$, $K_2 = \varphi \langle (p', \bar{0}) \rangle = \langle (p', \overline{-p'}) \rangle$ ve $K_3 = \varphi \langle (1, \bar{0}) \rangle = \langle (1, \bar{-1}) \rangle$ $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında 2-yutandır.

ii) $n = pq$ iken $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasında $\langle 0 \rangle \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (0, \bar{p}) \rangle$, $\langle 0 \rangle \times \langle \bar{q} \rangle = \langle (0, \bar{q}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (p', \bar{p}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \langle \bar{q} \rangle = \langle (p', \bar{q}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{0} \rangle = \langle (1, \bar{0}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{p} \rangle = \langle (1, \bar{p}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \bar{q} \rangle = \langle (1, \bar{q}) \rangle$ idealleri 2-yutan olduğundan $K_1 = \varphi \langle (0, \bar{p}) \rangle = \langle (0, \bar{p}) \rangle$, $K_2 = \varphi \langle (0, \bar{q}) \rangle = \langle (0, \bar{q}) \rangle$, $K_3 = \varphi \langle (p', \bar{p}) \rangle = \langle (p', \overline{p-p'}) \rangle$, $K_4 = \varphi \langle (p', \bar{q}) \rangle =$

$\langle (p', \overline{q-p'}) \rangle$, $K_5 = \varphi \langle (1, \overline{0}) \rangle = \langle (1, \overline{-1}) \rangle$, $K_6 = \varphi \langle (1, \overline{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p-1}) \rangle$ ve $K_7 = \varphi \langle (1, \overline{q}) \rangle = \langle (1, \overline{q-1}) \rangle$ idealleri $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında 2-yutandır.

iii) $n = p^k$ iken $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasında $\langle 0 \rangle \times \langle \overline{p} \rangle = \langle (0, \overline{p}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \langle \overline{p} \rangle = \langle (p', \overline{p}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p} \rangle = \langle (1, \overline{p}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p^2} \rangle = \langle (1, \overline{p^2}) \rangle$ idealleri 2-yutan olduğundan φ izomorfizmasıyla $K_1 = \varphi \langle (0, \overline{p}) \rangle = \langle (0, \overline{p}) \rangle$, $K_2 = \varphi \langle (p', \overline{p}) \rangle = \langle (p', \overline{p-p'}) \rangle$, $K_3 = \varphi \langle (1, \overline{p}) \rangle = \langle (1, \overline{p-1}) \rangle$ ve $K_4 = \varphi \langle (1, \overline{p^2}) \rangle = \langle (1, \overline{p^2-1}) \rangle$ idealleri $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında 2-yutandır.

iv) $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$ iken $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n$ halkasında $1 \leq i, j \leq m$ ve $i \neq j$ olmak üzere $\langle 0 \rangle \times \langle \overline{p_i} \rangle = \langle (0, \overline{p_i}) \rangle$, $\langle p' \rangle \times \langle \overline{p_i} \rangle = \langle (p', \overline{p_i}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p_i} \rangle = \langle (1, \overline{p_i}) \rangle$, $\mathbb{Z} \times \langle \overline{(p_i)^2} \rangle = \langle (1, \overline{(p_i)^2}) \rangle$ ve $\mathbb{Z} \times \langle \overline{p_i p_j} \rangle = \langle (1, \overline{p_i p_j}) \rangle$ 2-yutandır. Böylece $K_1 = \varphi \langle (0, \overline{p_i}) \rangle = \langle (0, \overline{p_i}) \rangle$, $K_2 = \varphi \langle (p', \overline{p_i}) \rangle = \langle (p', \overline{p_i - p'}) \rangle$, $K_3 = \varphi \langle (1, \overline{p_i}) \rangle = \langle (1, \overline{p_i - 1}) \rangle$, $K_4 = \varphi \langle (1, \overline{(p_i)^2}) \rangle = \langle (1, \overline{(p_i)^2 - 1}) \rangle$ ve $K_5 = \varphi \langle (1, \overline{p_i p_j}) \rangle = \langle (1, \overline{p_i p_j - 1}) \rangle$ idealleri $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında 2-yutandır.

Teorem 5.6 $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ halkasında $p \mid n$ olmak üzere $I = \langle p \rangle * \langle \overline{p} \rangle$ 2-yutan idealdir.

İspat $(a_1, \overline{b_1}), (a_2, \overline{b_2}), (a_3, \overline{b_3}) \in \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$ iken $(a_1, \overline{b_1}) \cdot (a_2, \overline{b_2}) \cdot (a_3, \overline{b_3}) \in I$ olsun. Buradan $(a_1 a_2 a_3, \overline{a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + b_2 b_3) + b_1(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)}) \in I$ elde edilir ve $I = \langle p \rangle * \langle \overline{p} \rangle$ olduğundan $p \mid a_1 a_2 a_3$ ve $n \mid a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + b_2 b_3) + b_1(a_2 + b_2)(a_3 + b_3) - pk$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Buradan $p \mid n$ olduğundan $p \mid a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + b_2 b_3) + b_1(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ dir. Ayrıca p asal sayı olduğundan en az bir $j \in \{1, 2, 3\}$ için $p \mid a_j$ olur. Kabul edelim ki $p \mid a_1$ olsun. O halde $p \mid a_1(a_2 b_3 + b_2 a_3 + b_2 b_3)$ ve böylece $p \mid b_1(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$ elde edilir. p asal sayı olduğundan $p \mid b_1$ veya $p \mid (a_2 + b_2)$ veya $p \mid (a_3 + b_3)$ olur. Bütün durumları inceleyelim. Eğer $p \mid b_1$ ise $(a_1, \overline{b_1}) \cdot (a_2, \overline{b_2}) = (a_1 a_2, \overline{b_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 b_2}) \in I$ olur. Eğer $p \mid (a_2 + b_2)$ ise $(a_1, \overline{b_1}) \cdot (a_2, \overline{b_2}) = (a_1 a_2, \overline{b_1 a_2 + b_1 b_2 + a_1 b_2}) \in I$ ve eğer $p \mid (a_3 + b_3)$ ise

$(a_1, \overline{b_1}) \cdot (a_3, \overline{b_3}) = (a_1 a_3, \overline{b_1 a_3 + b_1 b_3 + a_1 b_3}) \in I$ elde edilir. Böylece $I = \langle p \rangle * \langle \overline{p} \rangle$, $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}_n$

halkasının 2-yutan idealidir.

BÖLÜM 6

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde ilk olarak birimli ve değişmeli halkalarda ideallerle ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Daha sonra İdeal Genişleme yapısı incelenmiş ve idealleri hakkında bilgiler edinilmiştir. Özel olarak $\mathbb{Z}_d * \mathbb{Z}_n$ İdeal Genişlemesinin Asal, Asalımsı, Maksimal, 2-yutan idealleri incelenmiştir.

KAYNAKLAR

-
- [1] Dorroh J.L., (1932). "Concerning Adjustions to Algebras", Bull. Amer. Math. Soc., 38: 85-88.
 - [2] Alwis T., (1994). "The ideal structure of $\mathbb{Z}*\mathbb{Z}$ ", Missouri J. Math. Sci, 6: 116-123.
 - [3] Cannon G.A., Neuerburg K.M., (2008) "Ideals in Dorroh Extensions of Rings", Missouri J. Math. Sci., 20: 165-168.
 - [4] Mesyan Z., (2010). "The Ideal of Ideal Extension", Journal of Algebra and Its Applications, 9: 407-431.
 - [5] Malik, D.S., Mordeson, J.M. ve Sen, M.K., (1997). Fundamentals of Abstract Algebra, The McGraw-Hill Companies, Singapore.
 - [6] Çallıalp, F., Tekir, Ü., (2009). Değişmeli Halkalar ve Modüller, Birsen Yayınevi, İstanbul.
 - [7] Ağargün, G., Aygör, N.K., Ersoy, B.A., Alan M., (2002). Soyut Cebir, İstanbul.
 - [8] Sharp R.Y., (2000). Steps in Commutative Algebra, London Mathematical Society Student Texts.
 - [9] Darani A.Y., (2012). "Generalizations of Primary Ideals in Commutative Rings", Novi Sad J. Math., 42: 27-35.
 - [10] Çallıalp, F., (2011). Örneklerle Soyut Cebir, Birsen Yayınevi, İstanbul.
 - [11] Anderson, D.D., Bataineh, M., (2008). "Generalizations of Prime Ideals", Communications in Algebra, 36: 686-696.
 - [12] Atani S.E., Farzalipour, F., (2005). "On Weakly Primary Ideals", Georgian Mathematical Journal, 12: 423-429.
 - [13] Badawi A., (2007). "On 2-Absorbing Ideals of Commutative Rings", Bulletin of Australian Math. Soc., 75: 417-429.
 - [14] Huckaba J.A., (1988). Commutative Rings with Zero Divisors, Marcel Dekker.
 - [15] Badawi A., Darani A., Y., (2013). "On Weakly 2-Absorbing Ideals of Commutative Rings", Houston Journal of Mathematics, 39: 441-452.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı	Fatma CİRİT
Doğum Tarihi ve Yeri	04.03.1991 – Fatih/İstanbul
Yabancı Dili	İngilizce
E-posta	fatmacirit2@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y. Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2015
Lisans	Matematik	Yıldız Teknik Üniversitesi	2014
Lise	Fen-Matematik	Eminönü Cibali Lisesi	2009

YAYINLARI

Bildiri

1. Cirit, F., Oral, K.H., Arkan, T., (2015). “ Bir Halkanın İdeal Genişlemesinin İdealleri”, Niğde Üniversitesi 14. Matematik Sempozyumu, 14-16 Mayıs 2015, Niğde.
2. Arkan, T., Oral, K.H., Cirit, F., (2015). “ Modüllerin İdealleştirilmesi”, Niğde Üniversitesi 14. Matematik Sempozyumu, 14-16 Mayıs 2015, Niğde.