



T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HEMEN HEMEN (κ, μ, ν) -KENMOTSU UZAYININ
KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARININ
GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HÜSEYİN YİĞİT

OCAK

HÜSEYİN YİĞİT

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2024

**BİR HEMEN HEMEN (κ, μ, ν) -KENMOTSU UZAYININ
KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARININ
GEOMETRİSİ ÜZERİNE**

Hüseyin Yiğit

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Süleyman DİRİK

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2024

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Hüseyin YİĞİT tarafından hazırlanan “Bir Hemen Hemen (κ, μ, ν) -Kenmitsu Uzayının Kontak Pseudo Slant Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan : Doç.Dr. Ramazan SARI

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye : Doç. Dr. İnan Ünal

Bilgisayar Mühendisliği Anabilim Dalı, Munzur Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 08/01/2024

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Hüseyin YİĞİT

08/01/2024

BİR HEMEN HEMEN (κ, μ, ν) -KENMOTSU UZAYININ KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Hüseyin YİĞİT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2024

ÖZET

Bu çalışmada, bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerek ve yeterli şartlar verilip, bu altmanifoldun tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son olarak, distribüsyonların geodezikliği incelendi ve bazı sonuçlar elde edildi.

Sayfa Adedi : 55
Anahtar Kelimeler : Kontak metrik manifold, Hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu space ,
Slant altmanifold, Kontak pseudo-slant altmanifold.
Danışman : Doç. Dr. Süleyman DİRİK

ON THE GEOMETRY OF CONTACT PSEUDO SLANT
SUBMANIFOLDS OF AN ALMOST (κ, μ, ν) -KENMOTSU SPACE
(M. Sc. Thesis)

Hüseyin YİĞİT

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
JANUARY 2024

ABSTRACT

In this study, the differential geometry of the contact pseudo-slant submanifolds of an almost (κ, μ, ν) -Kenmotsu space was studied. The necessary and sufficient conditions were given for the submanifolds of an almost (κ, μ, ν) -Kenmotsu space to be a contact pseudo-slant submanifold, and the necessary and sufficient conditions for the integrability of distributions arising from the definition such submanifolds. Finally, geodesicness of the distributions were examined and some results were obtained.

Page Number : 55
Keywords : Contact metric manifold, Almost (κ, μ, ν) -Kenmotsu space, Slant submanifold, Contact pseudo-slant submanifold.
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Süleyman DİRİK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamın danışmanlığını kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağını sağlayan, çalışmalarımı yönlendiren, araştırmalarımın her aşamasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen, kıymetli hocam, tez danışmanım Doç. Dr. Süleyman DİRİK'e en derin saygılarımı sunar ve çok teşekkür ederim. Ayrıca Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK, Doç. Dr. Ramazan SARI ve Doç. Dr. İnan ÜNAL hocalarıma katkılarından dolayı teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
1.GİRİŞ VE LİTERATÖR ÖZETİ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Manifoldlar	3
2.2. Altmanifoldlar.....	16
3. KONTAK METRİK MANİFOLDLAR	22
3.1. Bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayı	22
4. KONTAK PSEUDO SLANT ALTMANİFOLDLAR	36
4.1. Bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları.....	36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	50
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ	55

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\tilde{\nabla}$	Levi-Civita konneksiyonu
$\tilde{\nabla}_\rho$	ρ e göre kovaryant türev operatörü
$\chi(\tilde{M})$	Vektör alanlarının cümlesi
$T_{\tilde{M}}(q)$	q noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$T_{\tilde{M}}^*(q)$	q noktasındaki kotanjant vektörlerinin cümlesi
M	Altmanifold
λ	Sabit
$f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$	Her mertebede diferensiyellenebilir fonksiyon
$C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$	$\tilde{M}$ Üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
TM	M altmanifoldunun tanjant demeti
$T^\perp M$	M altmanifoldunun bütün normal vektörlerinin demeti
D	Distribüsyon
D_θ	θ açılı slant distribüsyon
$D^\perp$	Anti-invaryant distribüsyon
(U, φ)	Harita
$\{U_\alpha\}$	$\tilde{M}$ nın açık örtüsü
$\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$	Atlas (Koordinat komşuluğu)
V_q	q noktasındaki tanjant vektör
V	Reel sayılar cisminde tanımlı vektör uzayı

V^*	V nin dual uzayı
$[,]$	Lie operatörü
$\rho(f)$	f fonksiyonunun ρ ya göre türevi
f^*	f fonksiyonunun türev dönüşümü
$\tilde{M}$	Diferensiyellenebilir manifoldlar
T	Torsiyon tensörü
$\tilde{R}$	Riemann eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
S	(2,0) tipinde Ricci tensörü
τ	Skaler eğrilik fonksiyonu
$K(\pi)$	π düzleminin kesit eğriliği
σ	İkinci temel form
$\nabla\sigma$	Üçüncü temel form
H	Ortalama eğrilik vektörü
A	Şekil operatörü
J	Kompleks yapı
φ	Tensör alanı
ξ	Vektör alanı
η	1-form (ξ nin duali)
g	Riemann metriği
(φ, ξ, η)	Hemen hemen kontak yapı
(φ, ξ, η, g)	Hemen hemen kontak metrik yapı
$M(\varphi, \xi, \eta, g)$	$(2n+1)$ -boyutlu, hemen hemen kontak metrik manifold
$\otimes$	Tensör çarpımı

$\oplus$	Direkt toplam
Φ	Temel 2-form
$E\rho_1$	$\rho_1 \in \chi(M)$ için altmanifoldun teğet bileşeni
$F\rho_1$	$\rho_1 \in \chi(M)$ için altmanifoldun normal bileşeni
BV	$V \in \chi^\perp(M)$ için altmanifoldun teğet bileşeni
CV	$V \in \chi^\perp(M)$ için altmanifoldun normal bileşeni
$\tilde{R}$	$\tilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü
R	M nin Riemann eğrilik tensörü
θ_D	D distribüsyonunun slant açısı
ω_1	Anti-invariant distribüsyon üzerindeki projeksiyon
ω_2	Slant distribüsyon üzerindeki projeksiyon
h	Simetrik tensor
κ, μ, ν	$\kappa, \mu, \nu \in C^\infty(M^{2n+1}, \mathbb{R})$ dir.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi

Kısaltmalar

A.Ü.

Açıklama

Amasya Üniversitesi

1. GİRİŞ VE LİTERATÜR ÖZETİ

Son yıllarda, matematik ve fizik alanında kontak geometri geniş uygulama alanı nedeniyle geometricilerin zengin bir araştırma konusu olmuştur. Altmanifoldların geometrisi kavramı yüzeyin dışsal geometrisi fikri ile başlamış olup zamanla ortam uzayı için geliştirilmiştir. Günümüzde bu teori, bilgisayar tasarımında, görüntü işlemede, ekonomik modellemede olduğu kadar matematiksel fizik ve mekanikte de önemli rol oynar.

Bir manifoldu formal olarak şu şekilde tanımlayabiliriz. $\tilde{M}$ bir topolojik uzay olsun. $\tilde{M}$ deki her noktanın bir komşuluğu n –boyutlu Öklid uzayındaki bir açık komşuluğa homeomorf oluyorsa $\tilde{M}$, n –boyutlu manifold olarak adlandırılır. Bir $\tilde{M}$ manifoldunun her bir q noktasının komşuluğunda manifoldda teğet olan vektör uzayı manifoldun tanjant uzayı olarak adlandırılır ve $T_{\tilde{M}}(q)$ ile gösterilir. $\tilde{M}$ üzerinde bir metrik tanımlı olması durumunda $\tilde{M}$ ’ye bir Riemann manifoldu denir. Bazı şartlar altında bir Riemann manifoldu Öklid uzayının bir alt kümesi olarak düşünülebilir, bu durum Riemann manifoldunun Öklid uzayına gömülmesi olarak adlandırılır. Öklid uzayının yapısal durumları Riemann metriği yardımı ile manifold yapısı üzerine indirgenebilir.

Bu tezimizde kontak pseudo slant problem çalışılacağından problemin tarihçesine bakacak olursak, Slant altmanifoldlar, invariant ve anti-invariant altmanifoldların bir genellemesi olarak 1990 yılında B.Y. Chen tarafından tanıtıldı. İlerleyen zamanlarda konu birçok geometrici tarafından geniş çapta incelendi. Diferansiyellenebilir manifoldların farklı türlerinde slant altmanifoldlar, semi-slant, pseudo slant, bi-slant altmanifoldlar başlığı altında genelleştirildi.

Hemen hemen bir Hermityen manifoldunun slant altmanifoldları konusunu B. Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır (Chen 1990). $\mathbb{C}^2$ ile $\mathbb{C}^4$ kompleks manifoldların slant altmanifold örnekleri B. Y. Chen ile Y. Tazawa vermiştir (Chen ve Tazawa 1990). İlk olarak A. Lotta hemen hemen kontak metrik manifoldunun slant altmanifoldunu tanımlamış ve incelemiştir (Lotta, 1996). Lotta aynı zamanda bir K kontak manifoldun anti-invariant olmayan 3 boyutlu slant altmanifoldlarının geometrisinde çalışmıştır (Lotta, 1998). L. Cabrerizo ve arkadaşları da bir Sasakian manifoldun slant altmanifoldunu incelemiş ve önemli sonuçlar elde etmiştir (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez 2000; Cabrerizo, Carriazo,

Fernandez ve Fernandez, 2000). M. Atçeken de Riemanniann product, paracontact metrik manifold ile Kenmotsu manifoldlarında Semi - slant altmanifoldlarının geometrisi üzerinde çalışmalar yürütmüştür (Atçeken, 2010). 2007 ile 2011 yılında M. Khan ile arkadaşları, çalışmalarını proper slant ve pseudo slant altmanifoldları üzerinde yürütmüşlerdir. (Khan ve Arkadaşları 2011; Khan ve Khan 2007). 2013 yılında da M. Atçeken bir $(LCS)_n$ -manifoldun kontak pseudo slant altmanifoldu üzerinde çalışmıştır (Atçeken ve Hui. 2012; Atçeken, Dirik ve Yıldırım, 2015). S. Dirik kontak pseudo-slant altmanifoldlar üzerinde bir çok çalışma yapmıştır (Dirik, 2019; Dirik ve Atçeken 2014; Dirik ve Atçeken 2016).

Bu tez çalışmasında, bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerekli ve yeterli şartlar verilip, bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldunun tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son olarak, distribüsyonların geodeziklik kavramları tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde kullanılan temel kavramlara yer verilmiştir.

2.1. Manifoldlar

Bu alt bölümde manifoldlara ait temel kavramlar verildi.

2.1.1. Tanım Bir Hausdorff uzayı X olmak üzere $U \subset X$ açık cümlesi üzerinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

Homeomorfizmine X üzerinde harita ya da n -boyutlu koordinat sistemi denir. U açık cümlesine de, koordinat bölgesi ya da ϕ haritasının koordinat komşuluğu adı verilir. Bu harita (U, ϕ) ile gösterilir. Eğer, $q \in U$ ise

$$\phi(q) = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$$

şeklindedir. Buradaki $q_1, q_2, \dots, q_n$ reel sayılarına ise ϕ haritası üzerinde q noktasının koordinatları adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.1.2. Tanım $\tilde{M}$ boş olmayan bir cümle olsun. $\tilde{M}$ nın herbir noktasının $\mathbb{R}^n$ e ya da $\mathbb{R}^n$ nin bir U açık alt cümlesine homeomorf olacak şekilde bir koordinat komşuluğu varsa, $\tilde{M}$ manifolduna n -boyutlu topolojik manifold adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.3. Tanım $\mathbb{R}^n$ uzayına ait bir U açık cümlesi üzerinde tanımlanan reel değere sahip bir fonksiyon f olsun. Eğer f fonksiyonunun k . mertebeden kısmi türevi var ve $k \leq r$ olmak koşulu ile sürekli ise f fonksiyonuna r . mertebeden diferansiyellenebilirdir adı verilir. $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Eğer $\forall r \in \mathbb{Z}^+$ için $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ oluyorsa f fonksiyonu diferansiyellenebilir denir. Bu fonksiyon $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.4. Tanım $\tilde{M}$ bir topolojik manifold olmak üzere $\tilde{M}$ nın açık bir örtüsü $\{U_\alpha\}$ ile tanımlansın. U_α açık cümlesinin α indisinin cümlesi A olmak koşuluyla $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü

için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılabilir. Eğer $\mathbb{R}^n$ içindeki her U_α , bir homeomorfizm ϕ_α ile homeomorf ise, o zaman (ϕ_α, U_α) haritalarının $\{(\phi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonu bir koordinat komşuluğu sistemi (atlas) olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.5. Tanım n -boyutlu bir topolojik manifold $\tilde{M}$ olmak üzere, $S = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_\alpha$ de $\tilde{M}$ manifoldunun bir atlası olsun. $r \geq 1$ koşulu için, eğer S atlası $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olması durumunda $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

özelliğine sahipse S ye C^r -sınıfındadır denir. Bu durumda, her biri ikişer ikişer bir homeomorfizmanın bileşkesi olan fonksiyonlar olan $\phi_{\beta\alpha}$ ve $\phi_{\alpha\beta}$ de birer homeomorfizmadır. Söz konusu $\phi_{\alpha\beta}$ ile $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^r -sınıfından diferansiyellenebilirlerse S atlasına C^r -sınıfından diferansiyellenebilirdir denir. Eğer $\tilde{M}$ üzerindeki S atlası C^r -sınıfından ise o zaman S 'ye bir C^r -sınıfından diferansiyellenebilir yapı denir. $\tilde{M}$ bir manifold olsun ve bu manifoldda r . mertebeden diferansiyellenebilir bir atlas var ise, $\tilde{M}$ 'ya r . mertebeden diferansiyellenebilir manifold adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.6. Tanım $\tilde{M}$ ile $\tilde{N}$ iki manifold ve $\phi: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$, diferansiyellenebilir dönüşümünün tersi mevcut ve bu dönüşümün tersi de diferansiyellenebilirse, ϕ dönüşümüne diffeomorfizma denir. Eğer $\tilde{M}$ dan $\tilde{N}$ ya bir diffeomorfizma mevcutsa, $\tilde{M}$ ile $\tilde{N}$ manifoldları diffeomorftir olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1980).

Manifoldlar üzerinde önemli bir kavram da tanjant vektörleridir. Manifold, temel olarak bir topolojik uzaydır ve bu uzay üzerinde diferansiyel yapı tanımlayarak diferansiyel teknikler kullanmak mümkündür.

2.1.7. Tanım $\tilde{M}$ topolojik manifold ve $q \in \tilde{M}$ olsun. $\tilde{M}$ manifoldunun q noktasının bir komşuluğu U olmak üzere

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \xrightarrow{\text{dif-bilir}} \mathbb{R}\}$$

cümlesi verilsin. Her f ve $g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve k ve $t \in \mathbb{R}$ için

i. Lineerlik

$$V_q(kf + tg) = kV_q(f) + tV_q(g)$$

ii. Leibnitz kuralı

$$V_q(f \cdot g) = V_q(f)g(q) + f(q)V_q(g)$$

özellikleri sağlanıyorsa V_q fonksiyonuna $\tilde{M}$ 'nin q noktasındaki tanjant vektörü adı verilir.

$T_{\tilde{M}}(q)$, $\tilde{M}$ manifoldunun q noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi

$$T_{\tilde{M}}(q) = \{V_q \mid V_q : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lineer, Leibnitz}} \mathbb{R}\}$$

biçimindedir. Bu cümlede iç işlem

$$\oplus : T_{\tilde{M}}(q) \times T_{\tilde{M}}(q) \rightarrow T_{\tilde{M}}(q)$$

$$(V_q, W_q) \rightarrow V_q \oplus W_q : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ve $f \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$(V_q + W_q)[f] = V_q[f] + W_q[f]$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde $(T_{\tilde{M}}(q), \oplus)$ ikilisi Abel grup olur. Bu cümledeki dış işlem ise

$$\odot : \mathbb{R} \times T_{\tilde{M}}(q) \rightarrow T_{\tilde{M}}(q)$$

$$(\lambda, V_q) \rightarrow \lambda \odot V_q : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ve $f \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$(\lambda \odot V_q)[f] = \lambda V_q[f]$$

olarak tanımlanır. $T_{\tilde{M}}(q)$ reel sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzaydır ve bu uzay $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı olarak adlandırılır (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.8. Tanım $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $\vec{V}_q \in T_{\mathbb{R}^n}(q)$ olsun. Buna göre $\vec{V}_q = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{V}_q[f] = \frac{d}{dt} (f(P_1 + t(Q_1 - P_1)), \dots, f(P_n + t(Q_n - P_n)))_{t=0}$$

ifadesine f fonksiyonunun $\vec{V}_q$ vektörü yönündeki türevi adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.9. Tanım Reel sayılar cismi üzerindeki r adet vektör uzayı $V_1, V_2, V_3, \dots, V_r$ şeklinde verilsin.

$$f: V_1 \times V_2 \times V_3, \dots, V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ ve $u_i, v_i \in V_i$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \\ = af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_r) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, \dots, v_r) \end{aligned}$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna r -lineer fonksiyon adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.1.10. Tanım $\tilde{M}$, n -boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $q \in \tilde{M}$ noktasında bulunan tanjant uzayı $T_{\tilde{M}}(q)$ olsun. $T_{\tilde{M}}(q)$ 'nin dual uzayı, $\tilde{M}$ manifoldunun q noktasındaki kotanjant uzayı olarak adlandırılır. $\tilde{M}$ manifoldunun q noktasında bulunan kotanjant uzayı ise $T_{\tilde{M}}^*(q)$ ile ifade edilir. Bu durumda

$$T_{\tilde{M}}^*(q) = \{\omega \mid \omega : T_{\tilde{M}}(q) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

olur. $\tilde{M}$ manifoldunun q noktasındaki kotanjant vektörlerinin oluşturduğu uzay $T_{\tilde{M}}^*(q)$ olarak adlandırılır ve bu uzayın elemanlarına ise $\tilde{M}$ 'nin q noktası üzerindeki kotanjant vektörleri adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1983).

2.1.11. Tanım Reel sayıların cismi üzerindeki bir vektör uzayı V olsun. V^* ise V vektör uzayının dual uzayı olarak tanımlansın

$$L(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f | f : V^r \times V^{*s} \xrightarrow{r+s\text{-linear}} \mathbb{R}\}$$

vektör uzayındaki iç ve dış işlemler sırası ile

$$(f \oplus g)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) + g(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = \lambda f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

olarak tanımlanırlar. Bu uzay, s . mertebeden kontravaryant ve r . mertebeden kovaryant tensör uzay olarak adlandırılır. Bu uzayın öğelerine de (r, s) -tipinde bir tensör adı verilir (Boothby, 1986).

Manifoldlar üzerinde tanjant vektörleri kullanarak vektör alanları tanımlanabilir. $\tilde{M}$ bir manifold olsun ve $T_{\tilde{M}}(q)$ bu manifoldun q noktasına karşılık gelen tanjant uzayı olsun. Her $q \in \tilde{M}$ noktasına karşılık gelen χ diferansiyellenebilir dönüşümü, $T_{\tilde{M}}(q)$ uzayında bir tanjant vektörü üretir ve bu dönüşüme vektör alanı adını veririz. Bu şekilde vektör alanları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

2.1.12. Tanım $\tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold ve $\tilde{M}$ üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ olsun. Her $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ ve $k, t \in \mathbb{R}$ için $\chi : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ dönüşümü

$$i. \quad \chi(kf + tg) = k\chi(f) + t\chi(g)$$

$$ii. \quad \chi(fg) = \chi(f)g + f\chi(g)$$

şartlarını sağlıyorsa χ 'e $\tilde{M}$ manifold üzerinde vektör alanı adı verilir. $\tilde{M}$ manifolduna ait tüm vektör alanlarının kümesi $\chi(\tilde{M})$ şeklinde gösterilir (Boothby, 1986).

Böylece manifold üzerindeki bir vektör alanı, her noktaya bir tanjant vektörü atar.

2.1.13. Tanım Diferensiyellenebilir bir manifold olan $\tilde{M}$ 'daki vektör alanları $\chi(\tilde{M})$ ile ifade edilsin. $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) &\rightarrow \chi(\tilde{M}) \\ (\rho_1, \rho_2) &\rightarrow [\rho_1, \rho_2] \end{aligned}$$

dönüşümü

i. 2-lineer, yani $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[a\rho_1 + b\rho_2, \rho_3] = a[\rho_1, \rho_3] + b[\rho_2, \rho_3]$$

ii. Anti-simetrik yani her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[\rho_1, \rho_2] = -[\rho_2, \rho_1]$$

iii. Her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[[\rho_1, \rho_2], \rho_3] + [[\rho_3, \rho_1], \rho_2] + [[\rho_2, \rho_3], \rho_1] = 0 \text{ (I. Bianchi eşitliği)}$$

koşullarını sağlayan bir $[\cdot, \cdot]$ operatörü $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde Lie operatörü olarak adlandırılır (Boothby, 1986).

2.1.14. Tanım $\tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold olsun. $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) &\rightarrow \chi(\tilde{M}) \\ (\rho_1, \rho_2) &\rightarrow [\rho_1, \rho_2] \end{aligned}$$

dönüşümü her $f \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[\rho_1, \rho_2]f = \rho_1(\rho_2(f)) - \rho_2(\rho_1(f)) \quad (2.1.1)$$

olarak tanımlanır. Burada $[\cdot, \cdot]$ operatörü, $\chi(\tilde{M})$ üzerindeki bir Lie operatörüdür. Eşitlikteki $\rho_1(f)$ ye f 'nin ρ_1 vektör alanına göre yöne göre türevi olarak ifade edilir.

$\tilde{M}$ diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ fonksiyonları ile birlikte $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie operatörü

- i. $[\rho_1, \rho_2](f + g) = [\rho_1, \rho_2](f) + [\rho_1, \rho_2](g)$
- ii. $[\rho_1, \rho_2](\lambda f) = \lambda[\rho_1, \rho_2]f$
- iii. $[\rho_1, \rho_2](fg) = g[\rho_1, \rho_2](f) + f[\rho_1, \rho_2](g)$

özelliklerini sağlar (Lotta, 1998).

2.1.1. Teorem: $\tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ ile $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$[f\rho_1, g\rho_2] = (fg)[\rho_1, \rho_2] + f\rho_1(g)\rho_2 - g\rho_2(f)\rho_1 \quad (2.1.2)$$

dir (Yano ve Kon 1984).

2.1.15. Tanım $\tilde{M}$ ile $\tilde{N}$ manifoldları sırası ile m ile n boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olsun. $f: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ olarak tanımlanan fonksiyon q noktası üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olmak koşuluyla

$$f_*: T_{\tilde{M}}(q) \rightarrow T_{\tilde{N}}(f(q))$$

$$V_q \rightarrow f_*|_q(V_q) = (\vec{V}_q[f_1]|_{f(q)}, \dots, \vec{V}_q[f_n]|_{f(q)})$$

ile tanımlanan f_* dönüşümü f fonksiyonunun türev dönüşümü olarak adlandırılır. Eğer $g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$, $f(q)$ nin komşuluğu altında diferansiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(V_q))g = V_q(g \circ f)$$

şeklinde verilir (Lotta, 1998).

2.1.2. Teorem $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ manifoldları diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $f: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu koşulda f_* türev dönüşümü lineer ve $\tilde{M}$ üzerinde seçilen eğriden bağımsız olur (Lotta, 1998).

2.1.16. Tanım $\tilde{M}$, diferansiyellenebilir bir manifold olarak tanımlansın. $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ ve $\tilde{M}$ manifoldundan $\mathbb{R}$ ye olan C^∞ fonksiyonlarının cümlesi ise $C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ olarak ifade edilsin. Her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$g: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$$

dönüşümü

i. Simetrik, yani

$$g(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_2, \rho_1),$$

ii. Pozitif tanımlı

$$\rho_1 \neq 0 \text{ için } g(\rho_1, \rho_1) > 0 \text{ ve } g(\rho_1, \rho_1) = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = 0,$$

iii. Bilineer;

$$g(a\rho_1 + b\rho_2, \rho_3) = ag(\rho_1, \rho_3) + bg(\rho_2, \rho_3),$$

şartlarını sağlıyor ise g ye $\tilde{M}$ üzerinde $(2, 0)$ -mertebeli metrik tensör ya da Riemann metriği denir. $(\tilde{M}, g)$ çifti ise Riemann manifoldu olarak adlandırılır (O'Neill 1983).

2.1.16. Tanım $\tilde{M}$, bir diferensiyellenebilir manifold olsun ve $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bulunan C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ olarak adlandırılınsın

$$\tilde{\nabla}: \chi(\tilde{M}) \times \Gamma(T\tilde{M}) \xrightarrow{2\text{-lineer}} \chi(\tilde{M})$$

$$(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \tilde{\nabla}(\rho_1, \rho_2) = \tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2$$

dönüşümü $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ ve $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$i. \quad \tilde{\nabla}_{\rho_1}(\rho_2 + \rho_3) = \tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2 + \tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_3$$

$$ii. \quad \tilde{\nabla}_{f\rho_1 + g\rho_2}\rho_3 = f\tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_3 + g\tilde{\nabla}_{\rho_2}\rho_3$$

$$\text{iii. } \tilde{\nabla}_{\rho_1}(f\rho_2) = f\tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2 + \rho_1(f)\rho_2$$

belirtilen şartları taşıyorsa $\tilde{\nabla}$ ya $\tilde{M}$ üzerindeki bir afin konneksiyon denir. $\tilde{\nabla}_{\rho_1}$ ise ρ_1 'e göre kovaryant türev operatörü olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1979).

2.1.17.Tanım $\tilde{M}$ manifoldu n -boyutlu ve $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki konneksiyon $\tilde{\nabla}$ olmak üzere

$$T: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$

$$(\rho_1, \rho_2) \rightarrow T(\rho_1, \rho_2) = \tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2 - \tilde{\nabla}_{\rho_2}\rho_1 - [\rho_1, \rho_2]$$

olarak tanımlanmış vektör değerli tensöre $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı olan $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyon tensörü adı verilir. Basitçe görülebilir ki torsiyon tensörü anti simetriktr.

2.1.18.Tanım $(\tilde{M}, g)$ Riemann manifoldu olsun. $\tilde{\nabla}$ ise $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ için $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu

- i. $\tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2 - \tilde{\nabla}_{\rho_2}\rho_1 = [\rho_1, \rho_2]$ (Konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği)
- ii. $\rho_1 g(\rho_2, \rho_3) = g(\tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2, \rho_3) + g(\rho_2, \tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_3)$ (Konneksiyonun metrik ile bağdaşma özelliği)

koşullarını sağlanıyor ise, $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki sıfır torsiyonlu konneksiyon (Riemann konneksiyonu) ya da Levi-Civita konneksiyonu adı verilir (Yano ve Kon, 1979).

$(\tilde{M}, g)$ n -boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonu olsun. Her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} 2g(\tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2, \rho_3) &= \rho_1 g(\rho_2, \rho_3) + \rho_2 g(\rho_3, \rho_1) - \rho_3 g(\rho_1, \rho_2) \\ &\quad - g(\rho_1, [\rho_2, \rho_3]) - g(\rho_2, [\rho_1, \rho_3]) + g(\rho_3, [\rho_1, \rho_2]) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ile ifade edilen eşitliğe Kozsul formülü denir.

2.1.19. Tanım $(\tilde{M}, g)$ Riemann manifoldu olmak üzere $\rho_1 \in \chi(\tilde{M})$ için L_{ρ_1} , keyfi (r, s) -tipindeki bir tensör alanını yine (r, s) -tipindeki bir tensör alanına götürür ise L_{ρ_1} operatörü ρ_1 vektör alanına göre Lie türev operatörü olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} (L_{\rho_1} \phi)(\rho_1, \dots, \rho_r, q_1, \dots, q_s) &= \rho_1 \phi(\rho_1, \dots, \rho_r, q_1, \dots, q_s) \\ &- \phi(L_{\rho_1} \rho_1, \dots, \rho_r, q_1, \dots, q_s) - \phi(\rho_1, \dots, \rho_r, q_1, \dots, L_{\rho_1} q_s) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak $q_1 \in \chi(\tilde{M})$ olmak üzere,

$$L_{\rho_1} q_1 = [\rho_1, q_1]$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $f \in C(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için $L_{\rho_1} f = \rho_1(f)$ dir. Her $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ olmak üzere g -Riemann metrik tensörünün ρ_1 vektör alanına göre Lie- türevi ise

$$\begin{aligned} (L_{\rho_1} g)(\rho_2, \rho_3) &= L_{\rho_1} g(\rho_2, \rho_3) - g(L_{\rho_1} \rho_2, \rho_3) - g(\rho_2, L_{\rho_1} \rho_3) \\ &= \rho_1(g(\rho_2, \rho_3)) - g([\rho_1, \rho_2], \rho_3) - g(\rho_2, [\rho_1, \rho_3]) \\ &= g(\nabla_{\rho_1} \rho_2, \rho_3) + g(\rho_2, \nabla_{\rho_1} \rho_3) - g(\nabla_{\rho_1} \rho_2, \rho_3) \\ &\quad + g(\nabla_{\rho_2} \rho_1, \rho_3) - g(\rho_2, \nabla_{\rho_1} \rho_3) + g(\rho_2, \nabla_{\rho_3} \rho_1) \\ &= g(\nabla_{\rho_2} \rho_1, \rho_3) + g(\rho_2, \nabla_{\rho_3} \rho_1) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $L_{\rho_1} g = 0$ olması durumunda ρ_1 vektör alanı Killing vektör alanı olarak adlandırılır (Chen, 1973).

2.1.20. Tanım $(\tilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olmak üzere, $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde verilmiş olan her bir r -forma karşılık gelen bir $(r+1)$ -formu karşılık getiren ve d ile gösterilen bir diferansiyel operatöre "dış türev operatörü" adı verilir.

Eğer ω bir r -form ise, $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_r \in \chi(\tilde{M})$ için

$$d\omega(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_r) = \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{i=1}^r (-1)^i \rho_i(\omega(\rho_0, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_r)) \right.$$

$$+ \frac{1}{r+1} \sum_{i,j=0}^r (-1)^{i+j} \omega([\rho_i, \rho_j], \rho_0, \dots, \rho_{i-1}, \rho_i, \dots, \rho_r)\},$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak 1-form ile 2-form için d operatörü $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$2d\omega(\rho_1) = \rho_1(\omega(\rho_2)) - \rho_2(\omega(\rho_1)) - \omega([\rho_1, \rho_2]) \quad (2.1.4)$$

ve

$$\begin{aligned} 3d\phi(\rho_1, \rho_2, \rho_3) &= \rho_1(\phi(\rho_2, \rho_3)) + \rho_2(\phi(\rho_1, \rho_3)) + \rho_3(\phi(\rho_1, \rho_2)) \\ &\quad - \phi([\rho_1, \rho_2], \rho_3) - \phi([\rho_2, \rho_3], \rho_1) - \phi([\rho_1, \rho_3], \rho_2) \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon 1984).

2.1.21. Tanım $(\tilde{M}, g)$ Riemann manifold olmak üzere $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu ve $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} \tilde{R}: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) &\rightarrow \chi(\tilde{M}) \\ (\rho_1, \rho_2, \rho_3) &\rightarrow \tilde{R}(\rho_1, \rho_2), \rho_3 \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\tilde{R}(\rho_1, \rho_2), \rho_3 = \tilde{\nabla}_{\rho_1} \tilde{\nabla}_{\rho_2} \rho_3 - \tilde{\nabla}_{\rho_2} \tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_3 - \tilde{\nabla}_{[\rho_1, \rho_2]} \rho_3 \quad (2.1.6)$$

olarak ifade edilen $\tilde{R}$ tensörü $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde (3,1)-tipindeki tensör alanı olarak tanımlanır. Bu tensör $\tilde{M}$ manifoldunun Riemann eğrilik tensörü diye ifade edilir. Ayrıca $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \chi(\tilde{M})$ için $\tilde{K}(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = g(\tilde{R}(\rho_1, \rho_2, \rho_3), \rho_4)$ biçiminde tanımlı olan $\tilde{K}$ tensörüne ise Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir. Manifold'un Riemann eğrilik tensörü sıfır ise, flat manifold olarak adlandırılır. Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ üzerindeki konneksiyon $\tilde{\nabla}$ için $\tilde{\nabla} \tilde{R} = 0$ eşitliği sağlanıyorsa, $\tilde{M}$ 'ya lokal simetrik manifold adı verilir. $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \chi(\tilde{M})$ için, Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$

- i. $\tilde{R}(\rho_1, \rho_2) \rho_3 = -\tilde{R}(\rho_2, \rho_1) \rho_3$
- ii. $g(\tilde{R}(\rho_1, \rho_2) \rho_3, \rho_4) = -g(\tilde{R}(\rho_1, \rho_2) \rho_4, \rho_3)$

- iii. $\tilde{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_3 + \tilde{R}(\rho_2, \rho_3)\rho_1 + \tilde{R}(\rho_1, \rho_3)\rho_2 = 0$ (II. Bihanchi özdeşliği)
- iv. $g(\tilde{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_4) = g(\tilde{R}(\rho_3, \rho_4)\rho_1, \rho_2)$

özelliklerine sahiptir (O'Neill 1983).

2.1.22. Tanım n -boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\chi(\tilde{M})$ üzerindeki lokal ortonormal $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ vektör alanları baz kabul edilsin.

$$Q: \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$

$$\rho_1 \rightarrow Q(\rho_1) = Q\rho_1 = \sum_{i=1}^n \tilde{R}(\rho_1, e_i)e_i \quad (2.1.7)$$

ile tanımlı Q operatörü $\tilde{M}$ manifoldunun Ricci operatörü olarak adlandırılır (Khan ve Arkadaşları 2011).

n -boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\tilde{R}$ $\tilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olmak üzere, $\chi(\tilde{M})$ ortonormal vektör alanlarının cümlesi $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olması durumunda $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$S: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$$

$$(\rho_1, \rho_2) \rightarrow S(\rho_1, \rho_2) = \sum_{i=1}^n g(\tilde{R}(\rho_2, e_i)e_i, \rho_1) \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanan $(2, 0)$ - tipinde tensöre $\tilde{M}$ nin Ricci tensörü denir. Ricci tensörünün simetrik olduğu kolayca görülebilir. $\tilde{M}$ nin Ricci operatörü Q ile ifade edilir. Bu operatör,

$$S(\rho_1, \rho_2) = g(Q\rho_1, \rho_2) \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanabilir (Yano ve Kon 1984).

n -boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve lokal ortonormal vektör alanı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olmak üzere

$$\tau = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.1.10)$$

değeri, $\tilde{M}$ manifoldunun skaler eğrilik fonksiyonu olarak adlandırılır (Yano ve Kon 1984).

Diğer yandan bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ nin ρ_1 doğrultusunda Ricci eğriliği

$$k(\rho_1) = \frac{S(\rho_1, \rho_1)}{g(\rho_1, \rho_1)} \quad (2.1.11)$$

ile tanımlanır.

n -boyutlu Riemann manifold $(\tilde{M}, g)$ olmak koşuluyla, $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$S(\rho_1, \rho_2) = \lambda g(\rho_1, \rho_2) \quad (2.1.12)$$

olacak şekilde $\tilde{M}$ üzerindeki bir λ fonksiyonu var ise, $\tilde{M}$ ya Einstein manifoldu denir. (2.2.12) eşitliğinde $\rho_1 = \rho_2 = e_i$ ve $1 \leq i \leq n$ ortonormal bazı seçilmesi halinde $\lambda = \frac{\tau}{n}$ olduğu görülür.

n - boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$, ve Ricci tensörü S olmak üzere $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$S(\rho_1, \rho_2) = a g(\rho_1, \rho_2) + b \eta(\rho_1) \eta(\rho_2) \quad (2.1.13)$$

eşitliği sağlanıyor ise $\tilde{M}$ manifolduna η -Einstein manifoldu denir. Eşitlikte ki a ile b , $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki fonksiyonlar ve η 'da 1-form dur (Yano ve Kon, 1979).

2.1.23. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $T_{\tilde{M}}(q)$ tanjant uzayına ait iki boyutlu alt uzay Π olsun. Tanjant vektörleri olan $\rho_1, \rho_2 \in \Pi$ için

$$g(\rho_1, \rho_1)g(\rho_2, \rho_2) - g(\rho_1, \rho_2)^2 \neq 0$$

olmak üzere

$$K(\rho_1 \wedge \rho_2) = \frac{g(R(\rho_1, \rho_2)\rho_2, \rho_1)}{g(\rho_1, \rho_1)g(\rho_2, \rho_2) - g(\rho_1, \rho_2)^2} \quad (2.1.14)$$

ile tanımlanan $K(\rho_1 \wedge \rho_2)$ 'ye Π düzleminin kesit eğriliği adı verilir. $K(\Pi)$ ile sembolize edilir. Eşitlikten görüldüğü gibi kesit eğriliği olan $T_{\tilde{M}}(q)$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı Π 'den seçilmiş olan bazlardan bağımsız olur (Yano ve Kon, 1979).

$\forall q \in \tilde{M}$ olmak üzere $\rho_{1q}, \rho_{2q} \in T_{\tilde{M}}(q)$ için $K(\rho_{1q}, \rho_{2q})$ sabitse $\tilde{M}$ manifolduna reel uzay form ya da c-sabit kesit eğrilikli uzay adı verilir. $\tilde{M}$ uzay formu n -boyutlu olmak üzere $\tilde{M}^n(c)$ ile gösterilir. $\tilde{M}$ manifoldunun $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü c-sabit kesit eğrilikli olmak koşuluyla $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$g(\tilde{R}(\rho_1, \rho_2)\rho_3, \rho_4) = c\{g(\rho_2, \rho_3)g(\rho_1, \rho_4) - g(\rho_1, \rho_3)g(\rho_2, \rho_4)\} \quad (2.1.15)$$

şeklindedir. Eğer;

- i. $c = 0$ ise $\tilde{M}(c) \cong E^n$ Öklid uzay
- ii. $c = \frac{1}{r^2}$ ise $\tilde{M}(c) \cong S^n(r)$ Eliptik uzay
- iii. $c = -\frac{1}{r^2}$ ise $\tilde{M}(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay olur.

Bu durumda, sabit eğriliğe sahip bir Riemann manifoldunun eğriliği pozitifse eliptik olarak adlandırılır, negatifse hiperbolik olarak adlandırılır ve sıfırsa düzlemsel (flat) veya lokal öklidyen manifold olarak adlandırılır.

2.2. Altmanifoldlar

Bu bölümde, yüzeyler teorisinin daha genel bir hali olan Riemann manifoldunun alt manifoldları ele alınmaktadır.

2.2.1. Tanım M ve $\tilde{M}$ Riemann manifoldları sırası ile m ve n boyutlu olsun($m < n$).

$$f: M \rightarrow \tilde{M}$$

diferensiyellenebilir dönüşümü için, $boy(f_*(T_M(q))) = p$ olmak üzere f 'nin $q \in M$ noktasında rankı p olur ve $rank_q(f) = p$ ile ifade edilir.

Eğer $\text{boy}(M) = \text{rank}(f)$ olursa f ye daldırma (immersiyon) adı verilir. $f(M)$ ise $\tilde{M}$ manifoldunun gömülmüş (immersed) altmanifoldu olarak adlandırılır.

Eğer f bire-bir bir immersiyonsa, f 'ye gömme (imbedding) denir. $f(M)$ 'ye ise $\tilde{M}$ nın altmanifoldu veya farklı bir ifade ile gömülen altmanifoldu adı verilir (Chen, 1973).

2.2.2. Tanım: (M, g) ile $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldları sırasıyla m ve n boyutlu olsun. $f: M \rightarrow \tilde{M}$ immersiyon olmak koşuluyla $\forall \rho_1, \rho_2 \in T_M(q)$ için

$$\tilde{g}(f_{*q}\rho_1, f_{*q}\rho_2) = g(\rho_1, \rho_2)$$

ise f ye metrik koruyan immersiyon (izometrik immersiyon) denir (Chen, 1973).

2.2.3. Tanım $\tilde{M}$, m -boyutlu bir manifold olsun ve $\tilde{M}$ 'nin q noktasındaki tanjant uzayı $T_{\tilde{M}}(q)$ olsun. $\tilde{M}$ üzerindeki bir r -boyutlu D distribüsyonu, $\tilde{M}$ manifoldunun her q noktasını r -boyutlu bir altuzayına götüren bir dönüşümdür. Yani

$$D: \tilde{M} \rightarrow T_{\tilde{M}}(q)$$

$$q \rightarrow D_q \subset T_{\tilde{M}}(q)$$

ile tanımlanan D dönüşümüne distribüsyon adı verilmektedir. $\forall \rho_1 \in \chi(\tilde{M})$ ve $q \in \tilde{M}$ olmak üzere $\rho_1 \in D_q$ olduğunda ρ_1 vektör alanına D distribüsyonuna ait denir. $\forall q$ noktası için D 'de r adet diferansiyellenebilir, lineer bağımsız vektör bulunuyorsa D distribüsyonuna diferensiyellenebilir bir distribüsyon adı verilir (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.4. Tanım Bir $\tilde{M}$, C^∞ manifoldunun alt manifoldu M olmak üzere, D distribüsyonu M manifoldu üzerinde q –boyutlu bir C^∞ distribüsyon olsun. Eğer M manifoldunun her q noktasındaki tanjant uzayıyla D_q aynı oluyorsa M manifolduna D 'nin integral manifoldu denir. Bu halde,

$$f: M \rightarrow \tilde{M}$$

bir gömme (imbedding) olacak şekilde her $q \in M$ için,

$$f_*(T_M(q)) = D_q$$

dir. Eğer M manifoldundan başka D distribüsyonunu kapsayan bir integral manifoldu yoksa M manifoldu D distribüsyonunun bir maksimal integral manifoldu olarak adlandırılır.

$\tilde{M}$ diferansiyellenebilir manifoldunun bir alt manifoldu M olmak üzere her $q \in M$ için D nin q noktasını içeren bir maksimal integral manifoldu mevcutsa D integrallenebilirdir denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki lineer konneksiyon olmak üzere. Eğer $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D)$ için $\tilde{\nabla}_{\rho_1}\rho_2 \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonu paraleldir denir.

n -boyutlu bir Riemann manifoldu olan $\tilde{M}$ üzerindeki D distribüsyonunu verilsin. $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D)$ için $[\rho_1, \rho_2] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonu involutive olarak adlandırılır. Ayrıca, M altmanifoldu üzerindeki bir distribüsyonun integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul, D distribüsyonun involutive olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.5. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ve $M, \tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere $\forall q \in M$ için

$$T^\perp M = \{V_q \in T_{\tilde{M}}(q) : \tilde{g}(\rho_{1q}, V_q) = 0, \forall \rho_{1q} \in T_M(q)\}$$

olarak tanımlı altuzaya $\tilde{M}$ nin normal uzayı adı verilir. M nin normal vektörü V_q olmak üzere V_q nin birim vektör olarak tanımlanması durumunda, V_q vektörüne M altmanifoldunun birim normal vektörü adı verilir. M altmanifoldunun bütün normal olan vektörlerini içermekte olan $T^\perp M$ uzayına ise M altmanifoldunun normal demeti denir.

$M, \tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M nin tanjant demeti $\chi(M)$ ve $\chi(M)^\perp$ ise M nin tüm normal vektörlerinin vektör demetini temsil etsin. O halde, $\tilde{M}$ nin tanjant demeti

$$\chi(\tilde{M}) = \chi(M) \oplus \chi(M)^\perp$$

şeklinde yazılır.

2.2.6. Tanım Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ olmak üzere $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu M olarak tanımlansın. $\tilde{\nabla}$ ile ∇ konneksiyonları sırasıyla $\tilde{M}$ ile M manifoldları üzerinde Riemann konneksiyonları olsun. $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\sigma: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^\perp$$

$$(\rho_1, \rho_2) \rightarrow \sigma(\rho_1, \rho_2) = \tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2 - \nabla_{\rho_1} \rho_2$$

olarak tanımlanan σ simetrik bilineer form M altmanifoldunun ikinci temel formu olarak adlandırılır. $\sigma = 0$ olması durumunda M altmanifolduna total geodezik altmanifold denir.

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2 = \nabla_{\rho_1} \rho_2 + \sigma(\rho_1, \rho_2) \quad (2.2.1)$$

ile tanımlı eşitlik Gauss formülü olarak adlandırılır. Eşitlikteki $\sigma(\rho_1, \rho_2)$ ve $\nabla_{\rho_1} \rho_2$, $\tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2$ nin sırası ile normal ve teğet bileşenleri olarak adlandırılır. M nin ikinci temel formu olan σ ın kovaryant türevi olarak ifade edilen $\nabla \sigma$ ise $\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_{\rho_1} \sigma)(\rho_2, \rho_3) = \nabla_{\rho_1}^\perp \sigma(\rho_2, \rho_3) - \sigma(\nabla_{\rho_1} \rho_2, \rho_3) - \sigma(\rho_2, \nabla_{\rho_1} \rho_3) \quad (2.2.2)$$

olarak ifade edilir. σ ikinci temel formunun kovaryant türevi olan $\nabla \sigma$ 'a ise M altmanifoldunun üçüncü temel formu denir (Chen, 1973).

n -boyutlu bir altmanifold olan $M, (\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M altmanifoldu üzerinde bulunan $q \in M$ için $T_M(q)$ 'nin lokal ortonormal bazı ise $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olma şartıyla M altmanifoldunun ikinci temel formu olan σ ın normu ise

$$||\sigma||^2 = \sum_{i,j=1}^n g(\sigma(e_i, e_j), \sigma(e_i, e_j)) \quad (2.2.3)$$

olarak ifade edilir.

2.2.7. Tanım $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu σ , $q \in M$ olmak üzere $T_M(q)$ 'nin lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma(e_i, e_i) \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanan vektöre M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü adı verilir. Eğer $H = 0$ ise M altmanifoldu minimal altmanifold olarak adlandırılır (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.8. Tanım $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olmak üzere, M altmanifoldunun ikinci temel formu σ ve M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü H olsun. $\forall \rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$\sigma(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, \rho_2)H \quad (2.2.5)$$

oluyorsa M altmanifoldu $\tilde{M}$ manifoldunun total umbilik altmanifoldu olarak adlandırılır. Eğer

$$g(\sigma(\rho_1, \rho_2), H) = \lambda g(\rho_1, \rho_2), \quad \lambda \in C(M, R) \quad (2.2.6)$$

koşulu sağlanıyorsa M altmanifolduna $\tilde{M}$ manifoldunun pseudo-umbilik altmanifoldu adı verilir. Görüleceği üzere her total umbilik altmanifold ayrıca pseudo-umbilik altmanifold olur. Ancak tersi doğru değildir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.9. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ nin bir altmanifoldu M olsun. M altmanifoldunun normal demetindeki konneksiyonu $\nabla^\perp$ olmak üzere her $\rho_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ için

$$A: \chi(M)^\perp \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(V, \rho_1) \rightarrow A(V, \rho_1) = A_V \rho_1 = \nabla_{\rho_1}^\perp V - \tilde{\nabla}_{\rho_1} V$$

olarak tanımlanan bilineer dönüşüme M altmanifoldunun şekil operatörü adı verilir (Chen, 1973).

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} V = -A_V \rho_1 + \nabla_{\rho_1}^\perp V \quad (2.2.7)$$

eşitliğine ise Weingarten formülü adı verilir. M altmanifoldunun şekil operatörü A_V nin kovaryant türevi ise

$$(\nabla_{\rho_1} A)_V \rho_2 = \nabla_{\rho_1} A_V \rho_2 - A_{\nabla_{\rho_1}^\perp V} \rho_2 - A_V \nabla_{\rho_1} \rho_2 \quad (2.2.8)$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973).

$\forall \rho_2 \in \chi(M)$ ile $V \in \chi(M)^\perp$ için $g(\rho_2, V) = 0$ eşitliğinin $\rho_1 \in \chi(M)$ 'ye göre kovaryant türevinin alınması durumunda

$$\rho_1 g(\rho_2, V) = g(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2, V) + g(\rho_2, \tilde{\nabla}_{\rho_1} V) = 0 \quad (2.2.9)$$

olur. Burada (2.2.1) ve (2.1.7) formülleri kullanılırsa

$$g(\nabla_{\rho_1} \rho_2, V) + g(\sigma(\rho_1, \rho_2), V) - g(\rho_2, A_V \rho_1) + g(\rho_2, \nabla_{\rho_1}^\perp V) = 0$$

olur. Gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa

$$g(A_V \rho_2, \rho_1) = g(\sigma(\rho_1, \rho_2), V) \quad (2.2.10)$$

olacağı görülür. Bu son eşitlik M altmanifoldunun şekil operatörü A_V ile ikinci temel formu σ arasındaki bağıntıyı verir (Chen, 1973).

3. (κ, μ, ν) -KONTAK METRİK MANİFOLDLAR

3.1. Hemen Hemen (κ, μ, ν) – Kontak Metrik Manifolddlar

3.1.1. Tanım Diferansiyellenebilir bir $\tilde{M}$ manifoldunun her q noktası için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_{\tilde{M}}(q)$ tanjant vektör uzayının bir J lineer dönüşümünün olması durumunda J tensör alanına $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Bir J hemen hemen kompleks yapıyla belirtilen manifolda da bir hemen hemen kompleks manifold adı verilir.

Diferansiyellenebilir bir $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde $(1,1)$ -tipinden tensör alanı J olsun. O zaman her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$\begin{aligned} N_J(\rho_1, \rho_2) &= J^2[\rho_1, \rho_2] + [J\rho_1, J\rho_2] - J[J\rho_1, \rho_2] - J[\rho_1, J\rho_2] \\ &= -[\rho_1, \rho_2] + [J\rho_1, J\rho_2] - J[J\rho_1, \rho_2] - J[\rho_1, J\rho_2] \end{aligned}$$

biçiminde tanımlı N_J tensör alanına J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensörü denir (Yano ve Kon, 1984; Yano ve Kon, 1979).

3.1.2. Tanım Bir hemen hemen kompleks manifold $(\tilde{M}, J)$ 'nin Nijenhuis tensörü sıfır oluyorsa yani $N_J = 0$ ise $\tilde{M}$ manifolduna bir kompleks manifold adı verilir (Yano ve Kon, 1984; Yano ve Kon, 1979).

$\tilde{M}$ manifoldu üzerinde her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$g(J\rho_1, J\rho_2) = g(\rho_1, \rho_2)$$

oluyorsa bu durumda g Riemann metriği Hermitian metrik olarak adlandırılır. Hermitian metriği ile verilen hemen hemen kompleks manifolda hemen hemen Hermitian manifold denir. Ayrıca, Hermitian metriği ile verilen kompleks manifolda da Hermitian manifold denir (Yano ve Kon 1984).

$\tilde{M}$ hemen hemen Hermitian manifold olmak üzere hemen hemen Hermitian yapısının *temel* 2 –formu, aşağıdaki Φ dönüşümü ile verilir.

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, J\rho_2)$$

$\tilde{M}$ hemen hemen kompleks manifold olmak üzere eğer temel 2-formun türevi sıfır, yani ($d\Phi = 0$) oluyorsa o zaman $\tilde{M}$ manifoldundaki g Hermitian metriği, Kaehlerian metrik olarak adlandırılır. $\tilde{M}$ kompleks manifoldu Kaehlerian metriğine sahip ise bu durumda manifolda Kaehlerian manifold denir (Yano ve Kon, 1979).

3.1.3. Tanım $(2n + 1)$ –boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold $\tilde{M}$ olsun. φ , $\tilde{M}$ üzerinde birinci mertebeden kovaryant ve birinci mertebeden kontravaryant yani $(1, 1)$ -tipinden bir tensör, ξ bir vektör alanı, η da ξ nin duali (1–form) olmak üzere her $\rho_1 \in \chi(\tilde{M})$ için, aşağıdaki eşitlik sağlanıyorsa (φ, ξ, η) yapısına hemen hemen kontak yapı denir.

$$\varphi^2 \rho_1 = -\rho_1 + \eta(\rho_1)\xi, \quad \varphi\xi = 0, \quad \eta(\varphi\rho_1) = 0, \quad \eta(\xi) = 1. \quad (3.1.1)$$

Hemen hemen kontak yapı ile verilen manifolda da hemen hemen kontak manifold denir (Yano ve Kon 1984).

3.1.4. Tanım (φ, ξ, η) hemen hemen kontak yapısına sahip $(2n + 1)$ –boyutlu $\tilde{M}$ manifoldu, hemen hemen kontak manifold olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$g: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$\eta(\rho_1) = g(\rho_1, \xi) \quad (3.1.2)$$

ve

$$g(\varphi\rho_1, \varphi\rho_2) = g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2) \quad (3.1.3)$$

koşullarına sahip bir g Riemann metriği varsa $\tilde{M}$ üzerinde (φ, ξ, η, g) yapısına hemen hemen kontak metrik yapı, bu yapıya sahip $\tilde{M}$ manifolduna da hemen hemen kontak metrik manifold denir (Yano ve Kon 1984).

3.1.1. Teorem $(2n + 1)$ –boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ olsun. O zaman manifold üzerinde aşağıdaki g Riemann metriği her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için, daima vardır (Yano ve Kon, 1979).

$$g(\varphi\rho_1, \varphi\rho_2) = g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)$$

3.1.1. Sonuç $(2n + 1)$ –boyutlu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilmiş olsun. Her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için $\varphi : \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$ olmak üzere

$$g(\varphi\rho_1, \rho_2) = -g(\rho_1, \varphi\rho_2), \quad (3.1.4)$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik φ nin g Riemann metriğine göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir (Yano ve Kon 1984).

3.1.5. Tanım $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu diferansiyellenebilir manifoldu üzerinde, (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, \varphi\rho_2) \quad (3.1.5)$$

biçimindeki Φ dönüşümü hemen hemen kontak metrik yapının temel 2 –formu olarak adlandırılır. O zaman her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, \varphi\rho_2) = -g(\rho_2, \varphi\rho_1) = -\Phi(\rho_2, \rho_1) \quad (3.1.6)$$

dir. Bu da Φ temel 2 –formun anti-simetrik olduğunu gösterir (Yano ve Kon, 1979).

3.1.6. Tanım $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifold olsun. $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ üzerinde tanımlı $(1,1)$ –tipindeki φ tensör alanı için her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ olmak üzere

$$N_{\varphi}(\rho_1, \rho_2) = \varphi^2[\rho_1, \rho_2] + [\varphi\rho_1, \varphi\rho_2] - \varphi[\varphi\rho_1, \rho_2] - \varphi[\rho_1, \varphi\rho_2] \quad (3.1.7)$$

biçiminde tanımlı (1,2) –tipinden N_{φ} tensör alanı varsa bu tensör alanına manifoldun Nijenhuis tensörü denir.

3.1.7. Tanım $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Bu durumda $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(\rho_1, f \frac{d}{dt}\right)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\rho_1, \tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna teğet bir vektör alanı; $t, \mathbb{R}$ nin bir koordinatıdır. $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ deki bir hemen hemen karmaşık yapı

$$J\left(\rho_1, f \frac{d}{dt}\right) = \left(\varphi\rho_1 - f\xi, \eta(\rho_1) \frac{d}{dt}\right) \quad (3.1.8)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece (3.1.8) de gerekli işlemler yapılırsa

$$J^2\left(\rho_1, f \frac{d}{dt}\right) = -\left(\rho_1, f \frac{d}{dt}\right) \quad (3.1.9)$$

olduğu açıktır. Bu durumda J lineer dönüşümünün $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ hemen hemen kompleks yapı olması, $J^2 = -I$ olduğu anlamına gelir (Yano ve Kon 1984).

3.1.8. Tanım $2n$ –boyutlu bir Hemen hemen kompleks manifold $\tilde{M}$ olsun. Bu manifold üzerinde tanımlı J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensörü $N_J = 0$ oluyorsa J dönüşümüne integrallenebilirdir denir.

$(2n + 1)$ –boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ ve reel doğru $\mathbb{R}$ olmak üzere $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g) \times \mathbb{R}$ ’deki J ile verilen hemen hemen kompleks yapı integrallenebilirse (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontak metrik yapısına normaldir denir (Yano ve Kon 1984).

3.1.9. Tanım $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g), (2n + 1)$ –boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0 \quad (3.1.10)$$

oluyorsa $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ manifolduna normaldir denir. Burada $d\eta$ dış türev operatörü her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$2d\eta(\rho_1, \rho_2) = \rho_1 \eta(\rho_2) - \rho_2 \eta(\rho_1) - \eta([\rho_1, \rho_2]) \quad (3.1.11)$$

ile tanımlıdır (Yano ve Kon 1984).

3.1.10. Tanım Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ 'nın altmanifoldu M olsun. O zaman $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ deki g Riemann metriği M üzerine indirgenmiş olur. Böylece (M, g) de bir Riemann manifoldu olur . Her $\rho_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$\varphi\rho_1 = E\rho_1 + F\rho_1 \quad (3.1.12)$$

ve

$$\varphi V = BV + CV \quad (3.1.13)$$

şeklinde gösterilebilir. Burada $\varphi\rho_1$ in teğet ve normal bileşenleri sırasıyla $E\rho_1$ ile $F\rho_1$, φV nin teğet ve normal bileşenleri de sırasıyla BV ile CV şeklindedir. Bu durumda alt manifolda indirgenen tensörler,

$$E : \chi(M) \rightarrow \chi(M) , \quad F : \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

ve

$$B : \chi^\perp(M) \rightarrow \chi(M) , \quad C : \chi^\perp(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümlerdir. Burada $F = 0$ ise M ye invaryant, $E = 0$ ise M ye $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nın anti-invaryant altmanifoldu denir (Pandey ve Gupta, 2008).

Şimdi her $\rho_1 \in \chi(M)$ için, (3.1.12) denklemine φ uygulanırsa

$$\varphi^2 \rho_1 = \varphi(\varphi \rho_1) = \varphi(E\rho_1 + F\rho_1)$$

yazılır. Burada (3.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} -\rho_1 + \eta(\rho_1)\xi &= \varphi(E\rho_1) + \varphi(F\rho_1) \\ &= EE\rho_1 + FE\rho_1 + EF\rho_1 + FF\rho_1 \\ &= E^2\rho_1 + FE\rho_1 + BF\rho_1 + CF\rho_1 \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

olduğu görülür. (3.1.14) denkleminin teğet bileşenlerinden

$$E^2\rho_1 + BF\rho_1 = -\rho_1 + \eta(\rho_1)\xi,$$

yazılır. O halde

$$E^2 = -I + \eta \otimes \xi - BF \quad (3.1.15)$$

dir. Şimdi (3.1.14) eşitliğinin normal bileşenlerinden,

$$FE\rho_1 + CF\rho_1 = 0$$

yazılır. Bundan

$$FE + CF = 0 \quad (3.1.16)$$

eşitliği bulunur.

Benzer olarak $V \in \chi^\perp(M)$ için,

$$\varphi^2 V = -V + \eta(V)\xi,$$

eşitliği yazılır. Burada (3.1.13) denklemi ve (3.1.12) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} -V &= \varphi(\varphi V) = \varphi(BV) + \varphi(CV) \\ &= EBV + FBV + BCV + C^2V \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

bulunur. Böylece (3.1.17) eşitliğin teğet bileşenlerinden

$$EBV + BCV = 0$$

dir. O zaman

$$EB + CB = 0 \quad (3.1.18)$$

eşitliği yazılır. (3.1.17) denkleminin normal bileşenlerinden

$$FBV + C^2V = -V$$

dir. Buradan da

$$FB + C^2 = -I \quad (3.1.19)$$

bulunur.

Ayrıca, her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için (3.1.4) denkleminde

$$g(\varphi\rho_1, \rho_2) = -g(\rho_1, \varphi\rho_2)$$

yazılabilir. Böylece (3.1.12) denklemi kullanılırsa

$$g(E\rho_1 + F\rho_1, \rho_2) = -g(\rho_1, E\rho_2 + F\rho_2),$$

$$g(E\rho_1, \rho_2) = -g(\rho_1, E\rho_2) \quad (3.1.20)$$

dir. Benzer olarak her $V, \rho_4 \in \chi^\perp(M)$ için (3.1.4) denkleminde

$$g(\phi V, \rho_4) = -g(V, \phi \rho_4)$$

yazılır. Burada (3.1.13) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(BV + CV, \rho_4) &= -g(V, B\rho_4 + C\rho_4), \\ g(V, C\rho_4) &= -g(CV, \rho_4) \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

dir. Benzer şekilde her $\rho_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için (3.1.4) denkleminde

$$g(\phi \rho_1, V) = -g(\rho_1, \phi V)$$

yazılır. Böylece (3.1.12) ile (3.1.13) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(E\rho_1 + F\rho_1, V) &= -g(\rho_1, BV + CV) \\ g(F\rho_1, V) &= -g(\rho_1, BV) \end{aligned} \quad (3.1.22)$$

eşitliklerinin olduğu görülür.

Ayrıca, $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu belirtmek üzere φ tensörünün kovaryant türevi her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için

$$(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi) \rho_2 = \tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi \rho_2 - \varphi \tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2 \quad (3.1.23)$$

biçimindedir.

Burada altmanifoldta indirgenen tensörlerin kovaryant türevleri de her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$(\nabla_{\rho_1} E) \rho_2 = \nabla_{\rho_1} E \rho_2 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 \text{ ve } (\nabla_{\rho_1} F) \rho_2 = \nabla_{\rho_1}^\perp F \rho_2 - F \nabla_{\rho_1} \rho_2 \quad (3.1.24)$$

ve

$$(\nabla_{\rho_1} B)V = \nabla_{\rho_1} BV - B\nabla_{\rho_1}^\perp V \quad \text{ve} \quad (\nabla_{\rho_1} C)V = \nabla_{\rho_1} CV - C\nabla_{\rho_1}^\perp V \quad (3.1.25)$$

şeklinde tanımlanırlar (Pandey ve Gupta, 2008).

$\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$ boyutlu kontak metrik manifold olsun. $\tilde{R}$ eğrilik tensörü, ξ karakteristik vektör alanı olmak üzere her $\rho_1, \rho_2 \in \tilde{M}$ için $\tilde{R}(\rho_1, \rho_2)\xi = 0$ koşulu sağlanır. Bu koşulu sağlayan kontak metrik manifold aynı zamanda

$$\tilde{R}(\rho_1, \rho_2)\xi = \eta(\rho_2)(\kappa\iota + \mu h)\rho_1 - \eta(\rho_1)(\kappa\iota + \mu h)\rho_2 \quad (3.1.26)$$

koşulunu da sağlar ise bu koşula (κ, μ) - sıfırlık koşulu denir. Burada h kendine eşlenik $(1,1)$ tipinde tensör alanıdır. (Boeckx,2000) ve D. E. Blair ve arkadaşları (Blair ,1995) kontak metrik manifoldlarındaki (κ, μ) sıfırlık koşullarını dikkate almıştır. Bu durumda κ, μ birer sabittir. E. Boeckx κ, μ sabitleri için Sasakian olmayan kontak metrik manifoldun tamamen lokal olarak boyutuna göre belirlendiğini kanıtladı.

Eğer ξ vektör alanı $(\kappa, \mu) -$ sıfırlık distribüsyonu ile ilişkiliyse , bu durumda (3.1.26) koşulu sağlanır ve $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldu (κ, μ) -kontak metrik manifold olarak tanımlanır. Özellikle eğer κ ve μ difransiyelenebilir sabit fonksiyonlar değilse, bu durumda $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ ye genelleştirilmiş (κ, μ) kontak metrik manifold adı verilir.

$\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü olmak üzere $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için $(\kappa, \mu, \nu) -$ kontak metrik manifoldunun eğrilik tensörü

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\rho_1, \rho_2)\xi = & \kappa[\eta(\rho_2)\rho_1 - \eta(\rho_1)\rho_2] + \mu[\eta(\rho_2)h\rho_1 - \eta(\rho_1)h\rho_2] \\ & + \nu[\eta(\rho_2)\varphi h\rho_1 - \eta(\rho_1)\varphi h\rho_2] \end{aligned} \quad (3.1.27)$$

olarak tanımlanır. Burada $\kappa, \mu, \nu \in C^\infty(M^{2n+1}, \mathbb{R})$ dir.

$\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$ -boyutlu bir hemen hemen kontak metrik manifold olsun. $\tilde{M}$ üzerinde $d\eta = 0$ ve $d\Phi = 2\eta \wedge \Phi$ eşitlikleri sağlanıyorsa bu durumda manifolda bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu denir. Ayrıca

$$\Phi(\rho_1, \rho_2) = g(\rho_1, \varphi \rho_2) \quad (3.1.28)$$

dir. Burada Φ , $\tilde{M}^{2n+1}$ üzerinde temel 2-formdur. T.Koufogiorgas ve arkadaşları tarafından (κ, μ, ν) – kontak metrik manifoldları tanımlanmıştır (Koufogiorgas ve ark, 2008).

Hemen hemen Kenmotsu manifoldu bir (κ, μ, ν) -distribüsyonunu sağlıyorsa bu durumda hemen hemen Kenmosu manifolduna hemen hemen (κ, μ, ν) – Kenmotsu uzayı adı verilir (Carriazo ve ark, 2013). Daha sonra kontak metrik yapıya sahip olmayan ancak (3.1.27) koşulunu sağlayan manifoldlar incelenmiştir. Hemen hemen (κ, μ, ν) - kosimplektik uzayı P. Dacko ve Olzak tarafından tanımlanmıştır (Dakko ve ark, 2005). Takip eden çalışmalarda M.Atçeken (κ, μ, ν) –Kenmotsu uzayında çok önemli karakterizasyonlar elde etmiştir (Atçeken, 2021). Atçeken, ayrıca bir çok farklı yapının pseudo-paralel altmanifoldlarını araştırmıştır.

Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ kontak metrik manifoldunda L Lie türevi, h simetrik tensörü olmak üzere;

$$\begin{aligned} h : \chi(\tilde{M}) &\rightarrow \chi(\tilde{M}) \\ \rho_1 &\rightarrow h(\rho_1) = \frac{1}{2}(L_\xi \varphi)\rho_1 = \frac{1}{2}\{L_\xi \varphi \rho_1 - \varphi L_\xi \rho_1\} \end{aligned} \quad (3.1.29)$$

şeklinde tanımlı $(1,1)$ -tipinden h tensör alanı verilsin. Bu durumda h simetrik tensörü aşağıdaki eşitlikleri sağlar:

$$h\varphi = -\varphi h, \quad h\xi = 0, \quad iz(h) = iz(\varphi h) = 0, \quad (3.1.30)$$

$\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ –boyutlu (κ, μ, ν) –Kenmotsu uzayı olmak üzere

$$\begin{aligned} h^2 &= (\kappa + 1)\varphi^2, \quad \kappa \leq -1 \text{ için} \\ \xi(\kappa) &= 2(\kappa + 1)(\nu - 2) \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

dir. Ayrıca $(2n + 1)$ –boyutlu bir (κ, μ, ν) – Kenmotsu uzayı her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(\tilde{M})$ için,

$$(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi) \rho_2 = g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi - \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) \quad (3.1.32)$$

eşitliğini sağlar. Burada $\tilde{\nabla}$, Riemann konneksiyon, g de Riemann metriğidir, (3.1.32)’da $\rho_2 = \xi$ alınırsa

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} \xi = -\varphi^2 \rho_1 - \varphi h \rho_1 \quad (3.1.33)$$

elde edilir (Venkatesha, Srikantha ve Siddesha, 2019).

3.1.1. Teorem $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, Bir hemen hemen (κ, μ, ν) – Kenmotsu uzayının altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned} (\nabla_{\rho_1} E) \rho_2 &= A_{F \rho_2} \rho_1 + B \sigma(\rho_1, \rho_2) + \eta(\rho_2)(E \rho_1 + h \rho_1) \\ &\quad + g(E \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

ve

$$(\nabla_{\rho_1} F) \rho_2 = -\sigma(\rho_1, E \rho_2) + C \sigma(\rho_1, \rho_2) + \eta(\rho_2)(F \rho_1 + h \rho_1) \quad (3.1.35)$$

dir.

İspat: Her $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için (3.1.32) denkleminde

$$(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi) \rho_2 = g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi - \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1)$$

yazılır. Buradan (3.1.23) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi \rho_2 - \varphi \tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi \rho_2 - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi - \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) = 0$$

yazılır. Böylece denklem (2.2.1) ve (3.1.12) den

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} E \rho_2 + \tilde{\nabla}_{\rho_1} F \rho_2 - \varphi \left(\nabla_{\rho_1} \rho_2 + \sigma(\rho_1, \rho_2) \right) - g(E \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi - \eta(\rho_2)(E \rho_1 + h \rho_1) - \eta(\rho_2)(F \rho_1 + h \rho_1) = 0,$$

elde edilir. Buradan (2.2.1), (3.2.17), (3.1.12) ve (3.1.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & \nabla_{\rho_1} E \rho_2 + \sigma(\rho_1, E \rho_2) - A_{F \rho_2} \rho_1 + \nabla_{\rho_1}^\perp F \rho_2 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - F \nabla_{\rho_1} \rho_2 \\ & - B \sigma(\rho_1, \rho_2) - C \sigma(\rho_1, \rho_2) + g(E \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi \\ & - \eta(\rho_2)(E \rho_1 + h \rho_1) - \eta(\rho_2)(F \rho_1 + h \rho_1) = 0, \end{aligned}$$

olur. Yukarıdaki denklemin teğet parçalarından

$$\begin{aligned} & \nabla_{\rho_1} E \rho_2 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - A_{F \rho_2} \rho_1 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) \\ & - \eta(\rho_2)(E \rho_1 + h \rho_1) + g(E \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi = 0, \end{aligned}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_{\rho_1} E) \rho_2 &= A_{F \rho_2} \rho_1 + B \sigma(\rho_1, \rho_2) + \eta(\rho_2)(E \rho_1 + h \rho_1) \\ &+ g(E \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin normal parçalarından

$$\nabla_{\rho_1}^\perp F \rho_2 - F \nabla_{\rho_1} \rho_2 + \sigma(\rho_1, E \rho_2) - C \sigma(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_2)(F \rho_1 + h \rho_1) = 0$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(\nabla_{\rho_1} F) \rho_2 = -\sigma(\rho_1, E \rho_2) + C \sigma(\rho_1, \rho_2) + \eta(\rho_2)(F \rho_1 + h \rho_1)$$

elde edilir.

3.1.2. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) - Kenmotsu - uzayının alt manifoldu M olsun. Her $\rho_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ için

$$(\nabla_{\rho_1} B)V = A_{CV}\rho_1 + EA_V\rho_1 - g(F\rho_1 + h\rho_1, V)\xi \quad (3.1.36)$$

ve

$$(\nabla_{\rho_1} C)V = -FA_V\rho_1 - \sigma(\rho_1, BV) \quad (3.1.37)$$

dir.

İspat: Her $\rho_1 \in \chi(M)$ ve $V \in \chi(M)^\perp$ için (3.1.32) kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi)V = g(\varphi\rho_1 + h\rho_1, V)\xi - \eta(V)(\varphi\rho_1 + h\rho_1),$$

Yazılır. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi)V - \varphi\tilde{\nabla}_{\rho_1} V - g(F\rho_1 + h\rho_1, V)\xi = 0,$$

böylece (2.2.7) ve (3.1.12) denklemlerinden

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} BV + \tilde{\nabla}_{\rho_1} CV - \varphi(-A_V\rho_1 + \nabla^\perp_{\rho_1} V) - g(F\rho_1 + h\rho_1, V)\xi = 0,$$

yazılır. (2.2.1) ve (3.1.13) denklemleri de kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho_1} BV + a(\rho_1, BV) - A_{CV}\rho_1 + \nabla^\perp_{\rho_1} V + EA_V\rho_1 + FA_V\rho_1 \\ - B\nabla^\perp_{\rho_1} V - C\nabla^\perp_{\rho_1} - g(F\rho_1 + h\rho_1, V)\xi = 0, \end{aligned}$$

olur. Buradan son denklemin teğet parçasından

$$\nabla_{\rho_1} BV - B\nabla^\perp_{\rho_1} V - A_{CV}\rho_1 + EA_V\rho_1 - g(F\rho_1 + h\rho_1, V)\xi = 0$$

Böylece (3.1.24) denkleminde

$$(\nabla_{\rho_1} B)V = A_{CV}\rho_1 + EA_V\rho_1 - g(F\rho_1 + h\rho_1, V)\xi$$

elde edilir.

Diğer taraftan yukarıdaki denklemin normal parçasından

$$\nabla_{\rho_1}^\perp CV - C\nabla_{\rho_1}^\perp V + FA_V\rho_1 + \sigma(\rho_1, BV) = 0,$$

olduğundan (3.1.25) denkleminde

$$(\nabla_{\rho_1} C)V = -FA_V\rho_1 - \sigma(\rho_1, BV)$$

elde edilir.

4. KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLAR

4.1. Bir Hemen Hemen (κ, μ, ν) – Kenmotsu Uzayının Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları

4.1.1. Tanım Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin bir altmanifoldu M olmak üzere, M nin her bir p noktasındaki $T_M(q)$ tanjant uzayını r –boyutlu D_q alt uzaya götüren dönüşüm D olsun. $\xi \in \chi(M)$ olmak üzere her $q \in M$ ve her $\rho_{1q} \in \Gamma(D_q)$ vektörü için, $\varphi\rho_{1q}$ ve D_q vektör alt uzayının arasındaki $\theta_D(q)$ açısı bağımsız ve sabit yani $q \in M$ ve $\rho_{1q} \in \Gamma(D_q)$ seçiminden bağımsız ise M üzerinde D distribüsyonuna slant distribüsyon denir. θ_D sabit açısına da D distribüsyonunun slant açısı denir. Bundan sonra slant distribüsyon D_θ ile gösterilecektir.

4.1.1. Teorem $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun bir altmanifoldu M ve D_θ da M üzerinde ξ ye ortogonal distribüsyon olsun. O zaman D_θ distribüsyonunun slant olması için gerek ve yeter şart her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$(wT)^2\rho_1 = -\lambda\rho_1$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1]$ ($\lambda = \cos^2 \theta$) sabitinin var olmasıdır. Burada w, D_θ üzerinde bir ortogonal projeksiyondur (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 1999).

4.1.2. Tanım $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldun bir altmanifoldu M ve $q \in M$ için ξ_q ile lineer bağımlı olmayan sıfırdan farklı bir vektör ρ_1 olsun. $E\rho_1$ ile $\varphi\rho_1$ in arasındaki açıya slant açısı denir. Bu açıyı $\theta(q)$ ile gösterirsek $\forall q \in M$ noktası ve $\forall \rho_1 \in T_M(q) - \{\xi_q\}$ için $\theta(q)$ slant açısı sabit ise M ye $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin slant altmanifoldudur denir. Ayrıca $\theta(q) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ dir (Cabrerizo ve Arkadaşları 2000).

Buna göre bir hemen hemen kontak metrik manifoldunu

- i. Anti-invariant altmanifoldları özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

ii. İnvaryant altmanifoldları ise $\theta = 0$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold ne invaryant ne de anti-invaryant altmanifold ise proper slant altmanifold olarak adlandırılır.

4.1.2. Teorem Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin ξ ye teğet altmanifoldu M olsun. O zaman M bir slant altmanifolddur ancak ve ancak

$$E^2 = -\lambda(I - \eta \otimes \xi) \quad (4.1.1)$$

olacak biçimde bir $\lambda \in [0, 1]$ sabiti vardır. Ayrıca M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dir (Cabrerizo ve Arkadaşları 2000).

4.1.1. Sonuç Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin θ slant açılı bir slant altmanifoldu M olsun. O halde $\rho_1, \rho_2 \in \chi(M)$ için

$$g(E\rho_1, E\rho_2) = \cos^2 \theta \{g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)\} \quad (4.1.2)$$

ve

$$g(F\rho_1, F\rho_2) = \sin^2 \theta \{g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)\} \quad (4.1.3)$$

dir (Cabrerizo ve Arkadaşları 2000).

İspat : (3.1.20) denkleminde ρ_1 yerine $E\rho_1$ alınır ve (4.1.1) denklemini kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(E\rho_1, E\rho_2) &= -g(E^2\rho_1, \rho_2) \\ &= g(\cos^2 \theta (\rho_1 - \eta(\rho_1)\xi), \rho_2) \\ &= \cos^2 \theta \{g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)\} \end{aligned}$$

yazılır. Böylece (4.1.2) eşitliği ispatlanmış olur. Diğer taraftan (4.1.3) eşitliğini ispatlamak için (3.1.3) ve (3.1.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\varphi\rho_1, \varphi\rho_2) &= g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2), \\
g(E\rho_1 + F\rho_1, E\rho_2 + F\rho_2) &= g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2) \\
g(E\rho_1, E\rho_2) + g(F\rho_1, F\rho_2) &= g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)
\end{aligned}$$

dir. Burada, (4.1.2) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(F\rho_1, F\rho_2) &= g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2) - \cos^2\theta\{g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)\} \\
&= \sin^2\theta\{g(\rho_1, \rho_2) - \eta(\rho_1)\eta(\rho_2)\}
\end{aligned}$$

dir. Böylece (4.1.3) denklemi de ispatlanmış olur.

4.1.3. Tanım Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda

- i. $TM = D^\perp \oplus D_\theta, \xi \in \Gamma(D_\theta)$,
- ii. $D^\perp$ distribüsyonu, anti-invaryant distribüsyon, yani, $\varphi D^\perp \subset (T^\perp M)$,
- iii. M üzerinde D_θ , θ –slant açılı slant distribüsyon olacak şekilde D_θ ve $\varphi(D_\theta)$ arasındaki sabit slant açısı $\theta \neq \pi/2$ dir,

şartlarını sağlayan iki ortogonal distribüsyon $D^\perp$ ve D_θ varsa M ye $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin kontak psedo-slant alt manifoldu denir (Khan ve Khan 2007).

Bu tanımda $\theta = 0$ ise kontak pseudo slant altmanifold semi-invaryant altmanifold adını alır. Böylece kontak pseudo slant altmanifold semi-invaryant altmanifoldların bir genellemesidir. Diğer taraftan eğer, $\text{boy}(D^\perp) = d_1$ ve $\text{boy}(D_\theta) = d_2$ ile gösterilirse aşağıdaki koşulları elde edilir.

- i. $d_2 = 0$ ise M , bir anti- invaryant altmanifolddur.
- ii. $d_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M , bir invaryant altmanifolddur.
- iii. $d_1 = 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M , θ slant açılı proper-slant altmanifolddur.

iv. Eğer $d_1, d_2 \neq 0$ ve $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ise M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ nin kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

$$w_1 : \chi(M) \rightarrow \Gamma(D^\perp), \quad w_2 : \chi(M) \rightarrow \Gamma(D_\theta)$$

ortogonal projeksiyonları gösterebilir. Her $\rho_1 \in \chi(M)$ için

$$\rho_1 = w_1 \rho_1 + w_2 X \rho_1 + \eta(\rho_1) \xi \quad (4.1.4)$$

şeklinde yazılabilir. O halde $w_1 \rho_1 \in \Gamma(D^\perp)$ ile $w_2 \rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$ dir.

Şimdi (4.1.4) denkleminin φ uygulanırsa,

$$\varphi \rho_1 = \varphi w_1 \rho_1 + \varphi w_2 \rho_1$$

yazılır. Burada (3.1.12) eşitliği kullanılırsa

$$E \rho_1 + F \rho_1 = E w_1 \rho_1 + F w_1 \rho_1 + E w_2 \rho_1 + F w_2 \rho_1$$

olduğu görülür. $w_1 \rho_1 \in \Gamma(D^\perp)$ olduğundan $E w_1 \rho_1 = 0$ dir.

$$E \rho_1 + F \rho_1 = E w_2 \rho_1 + F w_1 \rho_1 + F w_2 \rho_1 \quad (4.1.5)$$

olur. Böylece bu denklemin teğet ile normal bileşenleri sırasıyla

$$E \rho_1 = E w_2 \rho_1$$

ve

$$F \rho_1 = F w_1 \rho_1 + F w_2 \rho_1$$

olduğu görülür. Burada

$$\varphi w_1 \rho_1, \quad E w_1 \rho_1 = 0$$

ve

$$\varphi w_2 \rho_1 = E w_2 \rho_1 + F w_2 \rho_1, \quad E w_2 \rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$$

dir.

$D^\perp$ ve D_θ , M üzerinde ortogonal distribüsyonlar olduğundan her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $q_1 \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\varphi \rho_1 = E \rho_1 + F \rho_1 \quad (4.1.6)$$

ve

$$\varphi q_1 = E q_1 + F q_1 = F q_1 \in F(D^\perp), \quad E q_1 = 0 \quad (4.1.7)$$

dir. Şimdi (3.1.3) eşitliğinden

$$g(\varphi \rho_1, \varphi q_1) = g(\rho_1, q_1) - \eta(\rho_1)\eta(q_1)$$

yazılır. O halde (4.1.6) ile (3.1.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(E \rho_1 + F \rho_1, F q_1) &= g(\rho_1, q_1) - \eta(\rho_1)g(q_1, \xi) \\ g(E \rho_1, F q_1) + g(F \rho_1, F q_1) &= g(\rho_1, q_1) \\ g(F \rho_1, F q_1) &= 0, \end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada $F \rho_1 \in F(D_\theta)$ ve $F q_1 \in F(D^\perp)$ olduğundan, $F(D^\perp)$ ve $F(D_\theta)$ distribüsyonlarının birbirlerine ortogonal olduğunu gösterir. Böylece $T^\perp M$ –normal uzayı

$$T^\perp M = F(D^\perp) \oplus F(D_\theta) \oplus \mu', \quad F(D^\perp) \perp F(D_\theta)$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada μ' , $\varphi(TM)$ nin $T^\perp M$ deki ortogonal tümleyenidir.

4.1.3. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) – Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda anti-invariant distribüsyonu $D^\perp$ daima integrallenebilirdir

İspat : Her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ için, (3.1.32) denkleminde

$$\begin{aligned} (\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi) \rho_2 &= g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi - \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) \\ &= g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi \end{aligned}$$

eşitliği vardır. Bu denklemde (2.2.1), (2.2.7), (3.1.12) , (3.1.13) ve (3.1.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi \rho_2 - \varphi \tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2 - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi &= 0, \\ \tilde{\nabla}_{\rho_1} F \rho_2 - \varphi(\nabla_{\rho_1} \rho_2 + \sigma(\rho_1, \rho_2)) - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi &= 0, \\ -A_{F \rho_2} \rho_1 + \nabla_{\rho_1}^\perp \rho_2 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - F \nabla_{\rho_1} \rho_2 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) \\ - C \sigma(\rho_1, \rho_2) - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemlerin teğet bileşenlerinden

$$-A_{F \rho_2} \rho_1 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) - g(F \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi = 0 \quad (4.1.16)$$

denklemini bulunur. (4.1.16) denkleminde ρ_1 ve ρ_2 yer değiştirirse

$$-A_{F \rho_1} \rho_2 - E \nabla_{\rho_2} \rho_1 - B \sigma(\rho_2, \rho_1) - g(F \rho_2 + h \rho_2, \rho_1) \xi = 0 \quad (4.1.17)$$

eşitliği elde edilir. (4.1.16) denkleminde (4.1.17) denklemini çıkararak ve σ ile h 'nin simetrik olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned} A_{F \rho_2} \rho_1 - A_{F \rho_1} \rho_2 + E[\nabla_{\rho_1} \rho_2 - \nabla_{\rho_2} \rho_1] &= 0, \\ A_{F \rho_2} \rho_1 - A_{F \rho_1} \rho_2 + E[\rho_1, \rho_2] &= 0, \\ E[\rho_2, \rho_1] &= A_{F \rho_2} \rho_1 - A_{F \rho_1} \rho_2. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

olur. Öte yandan, her $U \in \chi(M)$ için, (2.2.1), (2.2.7), (2.2.10), (3.1.23) ve (3.1.32) kullanılırsa,

$$g(A_{F \rho_2} \rho_1 - A_{F \rho_1} \rho_2, U) = g(\sigma(\rho_1, U), F \rho_2) - g(\sigma(\rho_2, U), F \rho_1)$$

$$\begin{aligned}
&= g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) - g(\tilde{\nabla}_U \rho_2, F\rho_1) \\
&= g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) + g(\varphi \tilde{\nabla}_U \rho_2, \rho_1) \\
&= g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) + g(\tilde{\nabla}_U \varphi \rho_2 - (\tilde{\nabla}_U \varphi) \rho_2, \rho_1) \\
&= g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) + g(-A_{F\rho_2} U + \nabla_U^\perp F\rho_2, \rho_1) \\
&\quad - g(g(U + hU, \rho_2) \xi, \rho_1) \\
&= g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) - g(A_{F\rho_2} U, \rho_1) \\
&= g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) + g(\sigma(\rho_1, U), F\rho_2) = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$A_{F\rho_2} \rho_1 = A_{F\rho_1} \rho_2$$

olduğu ortaya çıkar. Bu eşitlik gereğince (4.1.18) denkleminde $[\rho_2, \rho_1] \in \Gamma(D^\perp)$ olduğundan $E[\rho_2, \rho_1] = 0$ dır. Böylece $D^\perp$ daima integrallenebilir.

4.1.4. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda D_θ slant distribüsyonu integrallenir. Ancak ve ancak her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D_\theta)$ için,

$$\begin{aligned}
&w_1\{\nabla_{\rho_1} E\rho_2 - A_{F\rho_2} \rho_1 - E\nabla_{\rho_2} \rho_1 - B\sigma(\rho_1, Y_1) + \eta(\rho_2)(E\rho_1 + h\rho_1) \\
&\quad + \eta(\rho_2)(F\rho_1 + h\rho_1)\} = 0
\end{aligned}$$

dir.

İspat $D^\perp$ ve D_θ üzerindeki projeksiyonları sırasıyla w_1 ve w_2 ile gösterelim. Her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D_\theta)$ için, (3.1.32) denkleminden

$$(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi) \rho_2 = g(\varphi \rho_1 + h\rho_1, \rho_2) \xi - \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h\rho_1)$$

eşitliği vardır. (3.1.23) uygulanırsa

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi \rho_2 - \varphi \tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2 - g(\varphi \rho_1 + h\rho_1, \rho_2) \xi + \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h\rho_1) = 0$$

yazılır. (2.2.1) ve (3.1.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \tilde{\nabla}_{\rho_1} E \rho_2 + \tilde{\nabla}_{\rho_1} F \rho_2 - \varphi \left(\nabla_{\rho_1} \rho_2 + \sigma(\rho_1, \rho_2) \right) \\ & - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi + \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) = 0. \end{aligned}$$

Böylece (2.2.1), (2.2.7), (3.1.12) ve (3.1.13) denklemlerinden

$$\begin{aligned} & \nabla_{\rho_1} E \rho_2 + \sigma(\rho_1, E \rho_2) - A_{F \rho_2} \rho_1 + \nabla_{\rho_1}^\perp F \rho_2 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - F \nabla_{\rho_1} \rho_2 \\ & - B \sigma(\rho_1, \rho_2) - C \sigma(\rho_1, \rho_2) - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi + \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin teğet bileşenlerinden

$$\begin{aligned} & \nabla_{\rho_1} E \rho_2 - A_{F \rho_2} \rho_1 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) \\ & - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi + \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) = 0. \end{aligned}$$

yazılır. Yukarıdaki denklemde gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \nabla_{\rho_1} E \rho_2 - A_{F \rho_2} \rho_1 - E \nabla_{\rho_2} \rho_1 + E \nabla_{\rho_2} \rho_1 - E \nabla_{\rho_1} \rho_2 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) - \\ & g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi + \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) = 0, \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E[\rho_1, \rho_2] &= \nabla_{\rho_1} E \rho_2 - A_{F \rho_2} \rho_1 - E \nabla_{\rho_2} \rho_1 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) \\ & - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_2) \xi + \eta(\rho_2)(\varphi \rho_1 + h \rho_1). \end{aligned}$$

Burada $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D_\theta)$, $[\rho_1, \rho_2] \in \Gamma(D_\theta)$ dir. Böylece, yukarıdaki denklemin her iki tarafına w_1 uygulanırsa $w_1 E[\rho_1, \rho_2] = 0$ olduğundan

$$w_1 \{ \nabla_{\rho_1} E \rho_2 - A_{F \rho_2} \rho_1 - E \nabla_{\rho_2} \rho_1 - B \sigma(\rho_1, \rho_2) + \eta(\rho_2)(E \rho_1 + h \rho_1) + \eta(\rho_2)(\varphi F + h \rho_1) \} = 0$$

elde edilir. Bu da teoremi ispatlar.

4.1.4. Tanım Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

- i. Her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D_\theta)$ için $\sigma(\rho_1, \rho_2) = 0$ ise M 'ye D_θ -total geodezik altmanifold,
- ii. Her $\rho_3, \rho_4 \in \Gamma(D^\perp)$ için, $\sigma(\rho_3, \rho_4) = 0$ ise M 'ye $D^\perp$ -total geodezik altmanifold,
- iii. Her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $\rho_3 \in \Gamma(D^\perp)$ için, $\sigma(\rho_1, \rho_3) = 0$ ise M 'ye mixed-total geodezik altmanifold denir.

4.1.5. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldu ya bir anti-invaryant ya da mixed-total geodezik altmanifolddur.

İspat Her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$, $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için (3.1.10), (3.1.23), (3.1.25), (3.1.28) ve (3.1.29) ve (3.1.32) kullanarak,

$$\begin{aligned}
 g(A_V \rho_1, \rho_2) &= g(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \rho_2, V) = -g(\tilde{\nabla}_{\rho_1} V, \rho_2) - g(\varphi \tilde{\nabla}_{\rho_1} V, \varphi \rho_2) \\
 &= g((\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi)V - \tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi V, \varphi \rho_2) \\
 &= g((\varphi \rho_1 + h \rho_1, V) \xi, \varphi \rho_2) - \eta(V)(\varphi \rho_1 + h \rho_1) - \\
 &\quad g(\tilde{\nabla}_{\rho_1} B V + \tilde{\nabla}_{\rho_1} C V, F \rho_2) \\
 &= -g(\sigma(\rho_1, C V), F \rho_2) - g(\nabla_{X_1}^\perp C V, C \rho_2)
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
 g(A_V \rho_1, \rho_2) &= -g(\sigma(\rho_1, B V), F \rho_2) - g((\nabla_{\rho_1} C)V + C \nabla_{\rho_1}^\perp V, F \rho_2) \\
 &= -g(\sigma(\rho_1, B V), F \rho_2) - g(-\sigma(\rho_1, B V) - F A_V \rho_1, F \rho_2) \\
 &= g(F A_V \rho_1, F \rho_2) = -g(B F A_V \rho_1, \rho_2)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece gerekli işlemler yapılır ve (3.1.15) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_V \rho_1, \rho_2) &= -g(-A_V \rho_1 + \eta(A_V \rho_1) \xi - E^2 A_V \rho_1, \rho_2) \\ &= g(A_V \rho_1, \rho_2) + g(E^2 A_V \rho_1, \rho_2), \end{aligned}$$

yazılır. Yani;

$$-\cos^2 \theta g(A_V \rho_1 + \eta(A_V \rho_1) \xi, \rho_2) = -\cos^2 \theta g(A_V \rho_1, \rho_2) = 0$$

dır. Bu ise M nin ya mixed-total geodezik ya da bir anti-invariant altmanifold olduğunu gösterir.

4.1.6. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldu ya bir anti-invariant ya da $D^\perp$ -total geodezik altmanifolddur.

İspat Her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$, $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için (3.1.13), (3.1.23), (3.1.25) ve (3.1.32) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} g(\sigma(\rho_1, \rho_2), V) &= -g(\tilde{\nabla}_{\rho_2} V, \rho_1) = -g(\varphi \tilde{\nabla}_{\rho_2} V, \varphi \rho_1) \\ &= g((\tilde{\nabla}_{\rho_2} \varphi)V - \tilde{\nabla}_{\rho_2} \varphi V, \varphi \rho_1) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_{\rho_2} BV, F\rho_1) - g(\tilde{\nabla}_{\rho_2} CV, F\rho_1) \\ &\quad - g(\sigma(\rho_2, CV), F\rho_1) - g(\nabla_{\rho_2}^\perp CV, F\rho_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da (3.1.15) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\sigma(\rho_1, \rho_2), V) &= -g(\sigma(\rho_2, BV), F\rho_1) - g((\nabla_{\rho_2} C)V, F\rho_1) \\ &= -g(\sigma(\rho_2, BV), F\rho_1) + g(\sigma(\rho_2, BV) + F(A_V \rho_2), F\rho_1) \\ &= g(F A_V \rho_2, F\rho_1) = -g(B A_V \rho_2, \rho_1) \\ &\quad - g(-A_V \rho_2 + \eta(A_V \rho_2) \xi + E^2 A_V \rho_2, \rho_1) \\ &= g(A_V \rho_2, \rho_1) + g(E^2 A_V \rho_2, \rho_1) \end{aligned}$$

veya

$$-\cos^2\theta g(A_V\rho_2 - \eta(A_V\rho_2)\xi, \rho_1) = -\cos^2\theta g(A_V\rho_2, \rho_1) = 0$$

elde edilir. Buradan $\cos^2\theta g(\sigma(\rho_1, \rho_2), V) = 0$ dir. Bu da M 'nin $D^\perp$ -total geodezik ya da bir anti-invariant altmanifold olduğu anlamına gelir.

4.1.7. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda B paralel ise M ya mixed geodezik ya da anti-invariant altmanifolddur.

İspat Her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ için, Eşitlik (3.1.24) ve (3.1.25) B paralelse F paraleldir. Yani $\nabla F = 0$ dir. Böylece

$$C\sigma(\rho_1, \rho_2) - \sigma(\rho_1, E\rho_2) = 0$$

yazılır. Burada $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$, $E\rho_2 Y_1 = 0$ olduğundan yukarıdaki denklemde ρ_1 'in yerine $E\rho_1$ yazılırsa

$$C\sigma(E\rho_1, \rho_2) = 0$$

denklemini elde edilir. Tekrar yukarıdaki denklemde ρ_1 in yerine $E\rho_1$ kullanılır ve (4.1.1) uygulanırsa

$$C\sigma(E^2\rho_1, \rho_2) = -C\cos^2\theta\sigma(\rho_1, \rho_2) = 0$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla ya $\sigma(\rho_1, \rho_2) = 0$ (M mixed geodezik) ya da $\theta = \frac{\pi}{2}$ (M anti-invariant) dir.

4.1.8. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda B paralel ise, M ya minimaldir ya da anti-invariant altmanifolddur.

İspat Her $\rho_1 \in \Gamma(D_\theta)$ ve $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ için, (3.1.24) ve (3.1.25) dan B paralel ise F paraleldir. Yani $\nabla F = 0$ dir. Bu da

$$C \sigma(\rho_1, \rho_2) - \sigma(\rho_1, E\rho_2) = 0$$

anlamına gelir. Buradan $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ ve $E\rho_2 = 0$ için

$$C \sigma(\rho_1, \rho_2) = 0$$

olur. Yukarıdaki denklemde ρ_1 in yerine $E\rho_1$ kullanılırsa,

$$C \sigma(E\rho_1, \rho_2) = 0$$

denklemini elde edilir. M total umbilik olduğundan

$$C g(E\rho_1, \rho_2)H = 0$$

dir. Tekrar yukarıdaki denklemde ρ_1 in yerine $E\rho_1$ kullanılır ve (4.1.1) uygulanırsa

$$C g(E^2\rho_1, \rho_2)H = -C \cos^2\theta g(\rho_1, \rho_2)H = 0$$

elde edilir. Buradan da ya $\theta = \frac{\pi}{2}$ (M anti-invariant) ya da $H = 0$ (M minimal) dir.

4.1.9. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda, eğer F tensörü D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise M D_θ -geodeziktir ya da $\sigma(\rho_1, \rho_2)$, D_θ üzerinde $-\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile C^2 'nin bir karakteristik vektörüne sahiptir.

İspat: Her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D_\theta)$ için, (3.1.25) den,

$$C \sigma(\rho_1, \rho_2) - \sigma(\rho_1, E\rho_2) = 0 \quad (4.1.12)$$

denklemini vardır. Diğer taraftan D_θ slant olduğundan ρ_2 yerine $\rho_2 - \eta(\rho_2)\xi$ yazılırsa

$$C \sigma(\rho_1, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi) - \sigma(\rho_1, E\rho_2) = 0$$

olur. Böylece

$$C \sigma(\rho_1, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi) = \sigma(\rho_1, E\rho_2) \quad (4.1.13)$$

eşitliği vardır. Şimdi C tensörü (4.1.13)'e uygulanırsa

$$C^2 \sigma(\rho_1, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi) = C \sigma(\rho_1, E\rho_2) \quad (4.1.14)$$

elde edilir. (4.1.12)'de ρ_2 yerine $E\rho_2$ alınırsa,

$$\sigma(\rho_1, E^2\rho_2) = C \sigma(\rho_1, E\rho_2) \quad (4.1.15)$$

bulunur. Dolayısıyla (4.1.1), (4.1.14) ve (4.1.15)'yi kullanılırsa

$$C^2 \sigma(\rho_1, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi) = C \sigma(\rho_1, E\rho_2) = \sigma(\rho_1, E^2\rho_2) = -\cos^2\theta \sigma(\rho_1, \rho_2 - \eta(\rho_2)\xi)$$

eşitliklerini elde edilir. Burada ya $\sigma = 0$ 'dır. Bu da M 'nin D_θ -geodezik yada $\sigma, -\cos^2\theta$ karakteristik değerli C^2 nin bir karakteristik vektörüdür.

4.1.10. Teorem Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumunda aşağıdaki önermelerden en az biri doğru olur.

- i. M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.
- ii. $H \in \Gamma(\mu')$.
- iii. $\text{boy}(D^\perp) = 1$.

İspat $\rho_1 \in \Gamma(D^\perp)$ olsun. (3.1.32) kullanılırsa,

$$(\tilde{\nabla}_{\rho_1} \varphi)\rho_1 = g(\varphi\rho_1 + h\rho_1, \rho_1)\xi - \eta(\rho_1)(\varphi\rho_1 + h\rho_1)$$

yazılır. Buradan (2.2.1) ve (3.1.12) uygulanırsa

$$\tilde{\nabla}_{\rho_1} F \rho_1 - \varphi \left(\nabla_{\rho_1} \rho_1 + \sigma(\rho_1, \rho_1) \right) - g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_1) \xi = 0,$$

olur. Buradan (2.2.7) ve (3.1.13), uygulanırsa

$$\begin{aligned} -A_{F\rho_1} \rho_1 + \nabla_{\rho_1}^\perp F \rho_1 - F \nabla_{\rho_1} \rho_1 - B \sigma(\rho_1, \rho_1) \\ -C \sigma(X_1, X_1) - g(X_1 + h X_1, X_1) \xi = 0 \end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemin teğet bileşenlerinden

$$-A_{F\rho_1} \rho_1 + B \sigma(\rho_1, \rho_1) + g(\varphi \rho_1 + h \rho_1, \rho_1) \xi = 0.$$

yazılır. Bu denklemin her iki tarafı $\rho_2 \in \Gamma(D^\perp)$ ile çarpılırsa

$$g(A_{F\rho_1} \rho_1, \rho_2) + g(B \sigma(\rho_1, \rho_1), \rho_2) = 0$$

elde edilir. M total umbilik altmanifold olduğundan,

$$\begin{aligned} g(A_{F\rho_1} \rho_2, \rho_1) + g(B \sigma(\rho_1, \rho_1), \rho_2) &= 0 \\ g(\sigma(\rho_2, \rho_1), F \rho_1) - g(\sigma(\rho_1, \rho_1), F \rho_2) &= 0 \\ g(\rho_2, \rho_1) g(H, F \rho_1) - g(\rho_1, \rho_1) g(H, F \rho_2) &= 0 \\ g(\rho_1, \rho_1) g(BH, \rho_2) - g(\rho_2, \rho_1) g(BH, \rho_1) &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Yani

$$g(BH, \rho_2) \rho_1 - g(BH, \rho_1) \rho_2 = 0$$

olur. Burada $BH = 0$ yada ρ_1 ve ρ_2 lineer bağımlıdır. Eğer $BH \neq 0$ ise bu $H \in \Gamma(\mu)$ demektir. Eğer ρ_1 ve ρ_2 lineer bağımlı ise bu da anti-invaryant distribüsyon $D^\perp$ 'in bir boyutlu olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\text{boy}(D^\perp) = 1$ dir. M kontak pseudo-slant altmanifold olduğundan $\text{boy}(D_\theta) \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ dir. $d_1 d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ olduğundan M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışıldı. Bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifold olması için gerek ve yeterli şartlar verilip, bir hemen hemen (κ, μ, ν) -Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldunun tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Son olarak, distribüsyonların geodeziklik kavramları tanımlandı ve bazı sonuçlar elde edildi. Bu sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) –Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda,

- i. Anti-invariant distribüsyonu $D^\perp$ daima integrallenebilirdir .
- ii. D_θ slant distribüsyonu integrallenir. Ancak ve ancak her $\rho_1, \rho_2 \in \Gamma(D_\theta)$ için,

$$w_1\{\nabla_{\rho_1}E\rho_2 - A_{F\rho_2}\rho_1 - E\nabla_{\rho_2}\rho_1 - B\sigma(\rho_1, Y_1) + \eta(\rho_2)(E\rho_1 + h\rho_1) + \eta(\rho_2)(F\rho_1 + h\rho_1)\}=0$$

dir.

Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen (κ, μ, ν) – Kenmotsu uzayının kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda,

- i. M altmanifoldu ya bir anti-invaryant ya da mixed-total geodezik altmanifolddur.
- ii. M altmanifoldu ya bir anti-invaryant ya da $D^\perp$ -total geodezik altmanifolddur.
- iii. B paralel ise M ya mixed geodezik ya da anti-invariant altmanifolddur.
- iv. B paralel ise, M ya minimaldir ya da anti- invaryant altmanifolddur.
- v. Eğer F tensörü D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise M D_θ –geodeziktir ya da $\sigma(X_1, Y_1)$, D_θ üzerinde $-\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile C^2 'nin bir karakteristik vektörüne sahiptir.

Aşağıdaki önermelerden en az biri doğru olur.

- i. M proper kontak pseudo-slant altmanifolddur,
- ii. $H \in \Gamma(\mu')$,
- iii. $\text{boy}(D^\perp) = 1$.

Yukarıdaki teoremlerden elde edilen sonuçlar başka manifoldlarda da çalışılabilir ve farklı sonuçlar elde edilebilir.



KAYNAKLAR

- Atçeken, M. (2010). Warped Product Semi-Slant Submanifolds in Kenmotsu Manifold. *Turk J. Mat.* (34), 425-432.
- Atçeken, M and S. K. Hui. (2012). Slant and Pseudo-Slant Submanifolds in (LCS)-n Manifolds. *Czechoslovak M. J.*, 63(138), 177-190.
- Atçeken, M., Dirik, S. and Yıldırım, U. (2015). Pseudo-Slant Submanifolds of a Locally Decomposable Riemannian manifold, *J. Ad. Math.*, 11(8), 5587–5599.
- Atçeken, A. Certain Results on Invariant submanifolds of an Almost Kenmotsu (k, μ, ν) -Space, *Arab. J. Math.*, 10 (2021), 543-554.
- Boothby, W. M. (1986). An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. *Academic Press, Inc.*, London.
- Boeckx, E. (2000). A full classification of contact metric (k, μ) -spaces. *Illinois Journal of Mathematics*, 44(1), 212-219.
- Blair, D. E. , Koufogiorgos, T and Papantoniou , B. J. Contact Metric Manifolds Satisfying a Nullity Condition, *Israel J. Math.*, 91 (1995), 189–214
- Carriazo, A and Martin-Molina, V. (2013) Almost Cosymplectic and Almost Kenmotsu (k, μ, ν) -Spaces, *Mediterr. J. Math.*, 10, 1551-1571.
- Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000). Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds. *Glasgow Math., J.* 42, 125-138.
- Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (2000). Structure on a Slant Submanifolds of a Contact Manifold. *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 31(7), 857-864.
- Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (1999). Semi-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *Geometriae Dedicata*, 78, 183-199.
- Chaubey, S. K., and Yadav, S. (2018). Certain Results on Almost Kenmotsu (κ, μ, ν) -Spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*, 6(1), 128-133.
- Chen, B. Y. (1973). Geometry of Submanifolds, *Pure and Applied Mathematics.*, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York.
- Chen, B. Y. (1990). Geometry of Slant Submanifolds., *Katholieke Universiteit Leuven*.
- Chen, B. Y. and Tazawa, Y. (1990). Slant Surfaces With Codimensions. 2, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 11(3), 29-43.
- Dacko, P and Z. Olszak, On almost cosymplectic (k, μ, ν) -spaces, *Banach Center Publ.*, 69(1) (2005), 211-220.

- Dirik, S. and Cetin, V. (2022). The Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds of a (κ, μ) –Contact Metric Manifold, *Journal of Engineering Research and Applied Science*, 11(2), 2171-2177.
- Dirik, S. (2019). The Integrability Conditations Of Contact Pseudo - Slant Submanifolds in a (κ, μ) –Contact Metric Manifold, 2. *Uluslararası 19 Mayıs Yenilikçi Bilimsel Yaklaşımlar Kongresi*, 331-339.
- Dirik, S. (2019). Geodesic Stiuations of Contact Pseudo-Slant Submanifolds İn A (κ, μ) –Contact Metric Manifold, 2. *Uluslararası 19 Mayıs Yenilikçi Bilimsel Yaklaşımlar Kongresi*, 340-350
- Dirik, S. and Atçeken, M. (2014) On The Geometry of Pseudo-Slant Submanifolds of a Kenmotsu Manifolds, *Gulf J. Math.*, 2, 51-66,
- Dirik, S. and Atçeken, M. (2016). Pseudo-Slant Submanifolds In Cosymplectic Space Forms, *Acta Universitatis Sapientiae: Mathematica*, 8, 1, 53-74, doi: 10.1515/ausm-2016-0004.
- Dirik, S., Atçeken, M. and Yildirim, U. (2016). Contact Pseudo-Slant Submanifold of A Kenmotsu Manifold. *Journal of Mathematics and Computer Science-ISR Pupliciations*, 16(3), 386-394.
- Duggal, K. L. and Bejancu,A. (1996) Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications. *Kluwer, Dordrecht*.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri.*, İnönü Üniversitesi Yayınları.
- Khan M. A, Uddin S and Singh K. (2011). A Classification on Totally Umbilical Proper Slant and Hemi-Slant Submanifolds of a Nearly Trans-Sasakian Manifold. *Differential Geometry-Dynamical Systems.*, 13, 117-127.
- Khan V. A and Khan M. A. (2007). Pseudo-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold., *Indian J. Prue Appl. Math.*, (38)31-42.
- Khan V. A and Khan M. A. (2007). Slant and Semi-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *Mathematica Slovaca*, Vol. (57)5,483-494.
- Koufogiorgos T, Markellos, M and Papantoniou V. J. (2008). The Harmonicity of the Reeb Vector Fields on Contact 3-Manifolds, *Pasific J. Math.*, 234(2), 325-344.
- Koufogiorgos, T. (1997). Contact Riemannian Manifolds with Constant Sectional Curvature, *Tokyo Journal of Mathematics*, 20, 1,13-22.
- Lotta, A. (1996). Slant Submanifolds in Contact Geometry. *Bull. Math. Soc. Roumanie*, 39, 183-198.

- Lotta, A. (1998). Three-Dimensional Slant Submanifolds of K-Contact Manifolds. *Balkan J. Geom. Appl.*, 3 (1), 37-51.
- O'Neill B. (1983). Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativit. *Pure and Applied Mathematics*, 103. Acedemic Press, Inc. Newyork.
- Pandey, P. K. and Gupta, R. S. (2008). Characterization of a Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold. *Novi. Sad., J. Math*, Vol. 38 (1), 97-102.
- Mert, T and Atçeken, M. (2023). Some Important Properties of Almost Kenmotsu (k, μ, ν) -Space on the Conccircular Curvature Tensor. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 6(1), 51-60.
- Venkatesha, V., Srikantha, N. and Siddesha, M.S. (2019). On Pseudo-Slant Submanifolds of (κ, μ) –Contact Space Forms, *Palestine Journal of Mathematics*, Vol. 8(2), 248–257
- Yano, K. and Kon, M. (1984). Structures on Manifolds. *Series in Pure Mathematics*, Singapore: 3. World Scientific Publishing Co., 72.
- Yano, K. and Kon, M. (1979). Anti-Invariant Submanifolds of Sasakian Space Form. *Kodai Math, J.* 2, 171-186

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Hüseyin YİĞİT

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

DİRİK, S., & YİĞİT, H. (2023). CONTACT PSEUDO-SLANT SUBMANIFOLDS OF A PARA-SASAKIAN MANIFOLD ACORDİNG TO TYPE 1, TYPE 2, TYPE 3 CASES. *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology*, 4(1), 65-83.

