

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ VE q -MKZ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
GÜREL BOZMA

HAZİRAN 2020

**ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ VE q -MKZ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM
ÖZELLİKLERİ**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Gürel BOZMA**

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

**ZONGULDAK
Haziran 2020**

KABUL:

Gürel BOZMA tarafından hazırlanan “Bir ve İki Değişkenli MKZ ve q-MKZ Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 30/06/2020

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Prof. Dr. Tülin COŞKUN
Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN
Düzce Üniversitesi, Gölyaka Meslek Yüksekokulu, Bilgisayar Teknolojileri Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım./....../2020

Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Gürel BOZMA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR VE İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ VE q -MKZ OPERATÖRLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Gürel BOZMA

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Haziran 2020, 257 sayfa

Hazırlanan tez bir ve iki değişkenli Meyer-König ve Zeller Operatörlerine (MKZ) ait literatürde yer alan bazı önemli çalışmaların bir araya toplandığı hem tek değişkenli hem de iki değişkenli MKZ operatörlerinin q -modifikasyonlarının temel yaklaşım özelliklerinin incelendiği önemli bir çalışmadır.

Tez altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm tezde kullanılacak temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

İkinci bölümde MKZ operatörlerine ilişkin sekiz farklı araştırmaya yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Rempulski ve Skorupka tarafından hazırlanan iki değişkenli MKZ operatörü ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölüm beş farklı araştırmacının çalışmalarını içeren q -MKZ operatörüne ilişkin özelliklerin verildiği bölümdür.

ÖZET (devam ediyor)

Beşinci bölümde Doğru ve Gupta' nın yaptığı çalışmalar kapsamında iki değişkenli q -MKZ operatörünün yaklaşım durumları incelenmiştir.

Son bölüm ise sonuç ve önerilere ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Meyer-König ve Zeller Operatörü, süreklilik modülü, yaklaşım hızı.

Bilim Kodu: 403.03.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

APPROACH CHARACTERISTICS OF ONE AND TWO VARIABLE MKZ AND q -MKZ OPERATORS

Gurel BOZMA

Zonguldak Bülent Ecevit University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. Nazmiye GONUL BILGIN

June 2020, 257 pages

The prepared thesis is an important study examining the main approach features of q -modifications of both two variables and one variable MKZ operators, where some important studies in the literature of one and two variables Meyer-König and Zeller Operators (MKZ) are gathered.

The thesis consists of six parts. The first part is devoted to the main definitions and theorems to be used in the thesis.

In the second part, eight different studies related to MKZ operators are included.

In the third part, the two variables MKZ operator and approach features prepared by Rempulska and Skorupka are examined.

The fourth part is the part where the features of the q -MKZ operator are given, which includes the work of five different researchers.

ABSTRACT (continued)

In the fifth part, the approaches of the two variables q -MKZ operator are examined within the scope of the studies carried out by Doğru and Gupta.

The last part is devoted to conclusions and recommendations.

Keywords: Meyer-König and Zeller Operators, modulus of continuity, rate of convergence.

Science Code: 403.03.00



TEŞEKKÜR

Tez çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübelerinin yanı sıra yol gösterici ve sonsuz desteğiyle her zaman yanımda olan değerli danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN' e ve tezimi okuyarak değerli görüş ve önerileriyle beni yönlendiren Sayın Prof. Dr. Tülin COŞKUN, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nejla ÖZMEN hocalarıma sonsuz teşekkür ve saygılarımı sunarım.

Hayatımın tüm aşamalarında olduğu gibi bu çalışma esnasında da desteklerini eksik etmeyen çok değerli aileme ve arkadaşlarıma çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL:	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xi
1.BÖLÜM	1
GİRİŞ	1
1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER	4
BÖLÜM 2	45
TEK DEĞİŞKENLİ MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ.....	45
2.1 Cheney ve Sharma' nın MKZ Operatörüyle İlgili Çalışmaları.....	46
2.2 Lupaş ve Müller' in MKZ Operatörüyle İlgili Çalışmaları.....	54
2.3 Sikkema' nın (1970a) Operatörlerle Asimptotik Yaklaşım İlişkin Çalışması	64
2.4 Sikkema' nın (1970b) MKZ Operatörü ile İlgili Çalışmaları	69
2.5 Hölzle' nin MKZ Operatörüne İlişkin Yaptığı Çalışmalar	86
2.6 Alkamade' nin MKZ Operatörüne İlişkin Çalışmaları	96
2.7 Rempulski ve Tomczak' ın MKZ Operatörü ile İlgili Çalışmaları	115
2.8 Rempulski ve Skorupka' nın Ağırlıklı Uzaylarda MKZ Operatörüne İlişkin Çalışmaları	123
3.BÖLÜM	141
İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ OPERATÖRLERİ.....	141
3.1 Operatörün Genel Özellikleri.....	141
3.2 Yaklaşım Teoremleri.....	148
4.BÖLÜM	159
TEK DEĞİŞKENLİ q -MKZ OPERATÖRLERİ.....	159
4.1 q -MKZ Operatörlerine İlişkin Trif' in Yaptığı Çalışmalar.....	159
4.2 q -MKZ Operatörüne İlişkin Doğru-Duman'ın Yaptığı Çalışmalar	167
4.3 Erençin, İnce ve Olgun Tarafından Verilen q -MKZ Operatörleri	190
4.4 Mahmudov ve Sabancıgil Tarafından Verilen q -MKZ Operatörleri	212

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

4.5 Şimşek' in Üretici Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Ettiği q -MKZ Operatörü	228
5.BÖLÜM	233
İKİ DEĞİŞKENLİ q -MEYER-KÖNİĞ VE ZELLER OPERATÖRLERİ	233
5.1 İki Değişkenli q -MKZ Operatörlerinin Genel Yapısı	233
5.2 İki Değişkenli q -MKZ Operatörlerinin Yaklaşım Hızı.....	242
6.BÖLÜM	249
SONUÇ VE ÖNERİLER	249
KAYNAKLAR.....	251
ÖZGEÇMİŞ	257



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$C[a, b]$: Her $x \in [a, b]$ için a ' da soldan b 'de sağdan sürekli fonksiyonlar uzayı

$\|\cdot\|_{C[a,b]}$: $C[a, b]$ uzayında norm

$\|\cdot\|_\rho$: C_ρ ve B_ρ uzaylarında norm

$L_n(f; x)$: Doğrusal pozitif operatörler dizisi

o : f ve g fonksiyonları için $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ oluyorsa $x \rightarrow \infty$ iken f ' nin mertebesi g ' den daha küçüktür bu, $f = o(g)$ şeklinde belirtilir.

O : x yeterince büyükken, $f(x)$ ve $g(x)$ pozitif olsunlar. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$, olacak şekilde pozitif bir M tamsayısı varsa, f en fazla g mertebesinde, bu durum $f = O(g)$ olarak gösterilir.

$M_n(f; x)$: Meyer-König Zeller operatörler dizisi

$M_{n,q}(f; x)$: q -Meyer-König Zeller operatörler dizisi

$(\alpha)_r$: α reel ya da kompleks bir sayı, r sıfır ya da pozitif bir tamsayı olmak üzere

$(\alpha)_r = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + r - 1)$ şeklindeki $(\alpha)_r = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}$ ve $(\alpha)_{r+1} = \alpha(\alpha + 1)$ özelliklerini sağlayan Pochhammer sembolü

${}_2F_1(a, \beta; \gamma; x)$: α, β ve γ reel ya da kompleks sabitler, Pochhammer sembolü göz önüne alınarak $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r (\beta)_r}{(\gamma)_r r!} x^r$ şeklinde yazılabilen hipergeometrik serisi

$M_n(f, b_n, x)$: Ağırlıklı uzayda tanımlı Meyer-König Zeller operatörler dizisi

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ (devam ediyor)

$M_n^*(f, b_n; x)$: Her $f \in C_r$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için $1 \leq b_n < b_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ özelliklerini sağlayan (b_n) dizisi yardımıyla $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b_n)$ için genelleştirilmiş Meyer-König ve Zeller operatörler dizisi

$\tilde{M}_{n,r}(f; x, y)$: $n, r \in \mathbb{N}$ sabit sayılar, $f \in C(I^2)$ fonksiyonlarının n .dereceden Meyer-König ve Zeller modifikasyonu

KISALTMALAR

MKZ : Meyer-König Zeller

q -MKZ : q -Meyer-König Zeller

1.BÖLÜM

GİRİŞ

Yaklaşım teorisi; özellikle fonksiyonel analiz teorisinde ortaya koyulan problemlerin çözümü için önemli bir araç niteliğindedir. Sürekli fonksiyonlara yaklaşım problemi ilk defa 1885 yılında Weierstrass tarafından ele alınmıştır. Weierstrass, kapalı bir $[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlara düzgün yakınsayan polinomların varlığını göstermiştir. Bu teorem daha sonra Bernstein tarafından $[0,1]$ aralığında kendi adıyla anılan polinomlar yardımıyla tekrar kanıtlamıştır.

1952 de Bohman ve 1953 te Korovkin bu teoremden yola çıkarak, doğrusal pozitif operatörlerin sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsaması ile ilgili oldukça önemli bir teoremi kanıtlamışlardır. Bu teoremle sonlu aralıkta düzgün yakınsamanın sağlanması için yalnızca üç koşulun araştırılmasının yeterli olacağı kanıtlanmıştır. Daha sonra çok sayıda araştırmacı tarafından yeni doğrusal pozitif operatörler tanımlanarak Korovkin tipi teorem yardımıyla yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Bu operatörlerden bazıları şunlardır: Bernstein Chlodowsky operatörleri, Szasz operatörleri, Gadjiev Ibragimov operatörleri, Meyer-König ve Zeller operatörleri vb.

Bu operatörlerden 1960 yılında Meyer-König ve Zeller tarafından

$$M_n = \begin{cases} (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ f(1), & x = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan operatör literatürde Meyer-König ve Zeller operatörü olarak adlandırılır. Kısaca MKZ operatörü olarak gösterilir.

Birçok araştırmacı bu operatörün r -inci dereceden, özellikle de $r = 2$ inci dereceden momenti ile ilgilenmişlerdir (Gupta and Rassias, 2019).

Bernstein, Szasz-Mirakjan ve Baskakov operatörleri için Korovkin Teoremi için gerekli olan $e_2(x)$ i belirlemek kolaydır. MKZ operatörleri için ise literatürde $M_n(e_2, x)$ nin açık bir ifadesi yerine birçok yazar, sadece ikinci moment olan $M_n(e_2, x) - x^2$ ile ilgilenmiştir. Müller (1967), Sikkema (1970), Lupaş and Müller (1970), Becker and Nessel (1978) ve Alkamade (1984) bu çalışmalardan bazılarıdır. 1984 de Alkamade ikinci moment için hipergeometrik seriler yardımıyla $M_n(e_2, x)$ i elde etti (Müller, 1967), (Sikkema, 1970), (Lupaş and Müller, 1970), (Becker and Nessel, 1978), (Alkamade, 1984).

Daha sonra MKZ operatörü için değişik modifikasyonlar tanımlanmıştır.

MKZ operatörünün bir genellemesi 2007 yılında Rempulski ve Skorupka tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b_n)$ ve $C_r = \{f \in C(I) : f^{(r)} \in C(I)\}$ olsun.

$$1 \leq b_n < b_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0 \text{ olmak üzere her } f \in C_r \text{ için}$$

$$M_n(f, b_n, x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k, & 0 \leq x < b_n \\ f(x), & x \geq b_n \end{cases} \quad (1.2)$$

Rempulski ve Skorupka yaptıkları çalışmada bu operatörlerle ağırlıklı uzaylarda diferensiyellenebilir fonksiyonlara yaklaşım için bazı özellikleri incelemiştir (Rempulski and Skorupka, 2007).

q -analizin 20. yüzyılın ikinci yarısında matematik alanındaki çeşitli uygulamaları ortaya çıkmaya başladıktan sonra Bernstein operatörlerinin bir q -genellemesi tanımlanmıştır. Bernstein operatörlerinin q -genellemesi ilk defa 1987 de Lupaş tarafından yapılmıştır. Daha sonra 1996 yılında Philips yeni bir genelleme tanımlayarak, yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Böylece diğer operatörlerin de q -genellemelerinin oluşturulması fikri önem kazanmıştır.

(1.1) ile verilen MKZ operatörlerinin, q -genellemesi ilk olarak 2000 yılında Trif tarafından tanımlanarak, yaklaşım ve monotonluk özellikleri incelenmiştir (Trif, 2000).

$q \in (0,1)$ için q -MKZ operatörlerini Trif;

$$M_{n,q}(f; x) = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \quad 0 \leq x < 1$$

biçiminde tanımlamıştır. Bu genellemede $M_{n,q}(e_2, x)$ ifadesinin açık formülünün elde edilememesinden dolayı 2006 yılında Doğru ve Duman $\left(f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right)\right)$ ifadesi yerine $\left(f\left(\frac{q^k[k]_q}{[n+k]_q}\right)\right)$ şeklinde bir modifikasyon yapmışlardır.

Buna göre,

$n \in \mathbb{N}$, $A \in (0,1)$ ve $q \in (0,1]$ olmak üzere $x \in [0, A]$ ve $f \in C[0, A]$ olsun.

$$u_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s)$$

olmak üzere,

$$M_n(f; q, x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

şeklinde tanımlanan operatörler bir q -Meyer-König ve Zeller operatörüdür (q -MKZ) (Doğru and Duman, 2006).

Daha sonra Erençin, İnce ve Olgun 2012 yılında (1.2) operatörlerinin q -genellemesini tanımlayarak bu operatörlerin ağırlıklı uzaylarda yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir. Bu operatörler (b_n) pozitif artan ve sınırsız bir dizi olmak üzere $q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, b_n)$ için

$$L_{n,q}(f; x) = \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

şeklinde tanımlanmıştır (Erençin vd., 2012).

İki boyutlu uzayda yaklaşım araştırmaları kapsamında Doğru ve Gupta 2006 da Doğru ve Duman tarafından verilen q -MKZ operatörlerinin iki değişkenli bir genellemesini tanımlayarak, bu operatörlerin yaklaşım özelliklerini hem Volkov (1957) teoremi hem de Heping (2005) teoremi yardımıyla incelemişlerdir (Volkov, 1957), (Heping, 2005).

Bu çalışmada hem tek hem de iki değişkenli MKZ ve q -MKZ operatörlerine ilişkin literatürdeki bazı önemli çalışmaları bir araya getirmek amaçlanmıştır.

Tezimizde ilk olarak tezde kullanılacak ön bilgiler verilecektir. İkinci bölümde tek değişkenli MKZ operatörlerine ilişkin 8 farklı araştırmacının yaptığı çalışmalardan bahsedilecektir. Üçüncü bölümde iki değişkenli MKZ operatörlerine, dördüncü bölümde 5 farklı araştırmacının yaptığı tek değişkenli q -MKZ operatörlerine değinilecektir. Beşinci bölümde ise iki değişkenli q -MKZ operatörlerine yer verilecektir.

Temel amaçtan uzaklaşmamak için bazı teoremlerin uzun ve karmaşık olan kanıtları verilmeyecektir.

1.1 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu kesimde tez için gerekli olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1.1

$[a, b]$ sonlu aralığı üzerinde tanımlı ve aralığın tüm noktalarında sürekli olup fazladan a da soldan b de sağdan sürekli olan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlar uzayına $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı denir ve kısaca $C[a, b]$ şeklinde gösterilir. Açıkça $C[a, b]$ uzayı doğrusal bir uzaydır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.2

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda $C[a, b]$ uzayında norm

$$\|f\|_C := \max_{x \in [a, b]} |f(x)| \quad (1.3)$$

ile tanımlanır. $C[a, b]$ doğrusal uzayı açıkça normlu bir uzaydır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev 1995).

Tanım 1.1.3

X normlu uzay, $Y \subset X$ alt kümesi ve $x \in X$ verilen bir nokta olsun. Y kümesinin $x \in X$ elemanına en yakın noktasına x elemanı için en iyi yaklaşım adı verilir. Bir başka deyişle, $\|x - y\|$ ifadesini en küçük yapan $y \in Y$ noktasına $x \in X$ için en iyi yaklaşım denir. Genel olarak, en iyi yaklaşım noktası y^* şeklinde gösterilir (Rivlin, 1969).

Tanım 1.1.4 (Minimaks Yaklaşım)

P_n derecesi en çok n olan tüm p_n polinomlarının kümesini belirtmek üzere, maksimum normuna göre en iyi yaklaşımın $[-1,1]$ üzerinde $|f(x) - p_n(x)|$ hata değerinin maksimumunun P_n deki bütün p_n ler üzerinden minimumu alınarak elde edilen yaklaşıma minimaks yaklaşım denir. Minimaks yaklaşım aynı zamanda düzgün yaklaşım olarak da adlandırılır (Phillips, 2003).

Weierstrass' ın ünlü teoremi bu doğrultuda aşağıdaki şekilde şekillenmiştir.

Teorem 1.1.1 (Weierstrass Teoremi)

Her $f \in C[-1,1]$ ve $\varepsilon > 0$ için bir p polinomu vardır öyleki her $x \in [-1,1]$ için

$$|f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır (Phillips, 2003).

Tanım 1.1.5

Bir $E(x)$ fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde tanımlı olsun. Her $-1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+2} \leq 1$ için

$$|E(x_j)| = \max_{-1 \leq x \leq 1} |E(x)|, \quad 1 \leq j \leq n+2$$

$$E(x_{j+1}) = -E(x_j), \quad 1 \leq j \leq n+1$$

eşitlikleri geçerli ise $E(x)$ fonksiyonu $n+2$ noktada eş salınımlıdır denir (Phillips, 2003).

Örnek 1.1.1

$[-1,1]$ üzerinde $E(x) = |x| - \frac{1}{8} - x^2$ fonksiyonu için açıkça

$$E(-1) = -E\left(-\frac{1}{2}\right) = E(0) = -E\left(\frac{1}{2}\right) = E(1)$$

eşitliği geçerli olur. E fonksiyonu $[-1,1]$ üzerinde türevlenebilirdir ve $x = 0$ da türevi vardır.

Her $0 < x \leq 1$ için $E(x) = x - \frac{1}{8} - x^2$ olacağından $E'(x) = 1 - 2x = 0$ ise $x = \frac{1}{2}$ dir. E , $x = 1$ de bir dönüm noktasına sahiptir, benzer şekilde E nin bir diğer dönüm noktası $x = -\frac{1}{2}$

dir. Böylece E , $[-1,1]$ üzerinde maksimum modüle sahip olur. Bu beş nokta $x = 0, \pm \frac{1}{2}, \pm 1$ dir ve E bu noktalarla eş salınımlıdır (Phillips, 2003).

Teorem 1.1.2

$f, C[-1,1]$ uzayında bir fonksiyon ve bir $p \in P_n$ için $f - p$ fonksiyonu $[-1,1]$ aralığına ait $n + 2$ noktada eş salınımlı olsun. Bu durumda p polinomu $[-1,1]$ üzerindeki her f fonksiyonu için P_n de bir minimaks yaklaşıma sahiptir (Phillips, 2003).

Uyarı 1.1.1

Yukarıdaki örnekte $\frac{1}{8} + x^2$ polinomu $[-1,1]$ üzerinde $|x|$ için P_3 de bir minimaks yaklaşıma sahiptir. Dikkat edilmelidir ki $\frac{1}{8} + x^2$ polinomu ikinci derece bir polinom olmakla birlikte bu polinomun P_3 deki bütün polinomların dışında $[-1,1]$ üzerinde $|x|$ e minimaks yaklaşımı vardır (Phillips, 2003).

Lemma 1.1.1

Kompakt bir metrik uzayın her açık örtüsü sonlu bir alt örtü içerir (Cheney, 1966).

Teorem 1.1.3 (Stone Yaklaşım Teoremi)

X kompakt bir metrik uzay ve A ; 1 'i ve X deki ayrık noktaları içeren $C[X]$ in bir alt cebiri olsun. Bu durumda A , $C[X]$ de yoğundur (Cheney, 1966).

Kanıt

$\bar{A}$; (A nın kapanışı) A 'daki düzgün yakınsak fonksiyon dizilerinin limitleri olan tüm f lerin kümesini belirtsin. Burada amaç $\bar{A} = C[X]$ eşitliğini göstermektir. Bunu kanıtlamak için

$$f \in \bar{A} \Rightarrow |f| \in \bar{A}$$

olduğu gösterilerek kanıt başlansın.

Weierstrass teoreminden $[-\|f\|, \|f\|]$ da $P_n(\lambda) \rightarrow |\lambda|$ düzgün olacak şekilde P_n polinomları dizisi vardır. Böylece $|f| = \lim_n P_n(f)$ ' dir.

$A, C[X]$ in bir alt cebiri ise $\bar{A}$ da $C[X]$ in bir alt cebiri olacağından $\bar{A}, C[X]$ in bir alt cebiridir. Böylece $P_n(f), \bar{A}$ ya ait olur. Dolayısıyla her $P_n(f), A$ da bir f_{nk} dizisinin limitidir.

Buradan $|f|$ fonksiyonu A daki bir dizinin limiti olmak üzere

$$\| |f| - f_{nk} \| \leq \| |f| - P_n(f) \| + \| P_n(f) - f_{nk} \|,$$

eşitsizliği sağlanır.

Daha sonra $\bar{A}$ kümesinin aşağıdaki iki latis işlemi altında kapalı olduğu göz önüne alınsın.

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

Bu iki eşitliğin sonucu olarak

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Kanıttaki son adım, X kümesinde iki nokta p ve q ile λ ve μ sayıları verildiğinde $F(p) = \lambda$ ve $F(q) = \mu$ olacak şekilde bir $F \in A$ bulunduğunu göstermektir. A, X 'deki noktaları ayırdığından $f(p) \neq f(q)$ gibi bir $f \in A$ vardır. Bu durumda f ve 1 ' in doğrusal bir kombinasyonu aşağıdaki gibi oluşur.

$$F := \frac{\lambda - \mu}{f(p) - f(q)} f + \frac{\mu f(p) - \lambda f(q)}{f(p) - f(q)} 1.$$

Burada

$F(p) = \lambda, F(q) = \mu$ ve $F \in A$ olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi kanıt için, eğer $\bar{A} \neq C[X]$ ise

$$g \in \bar{A} \Rightarrow \|g - f\| > \varepsilon \tag{1.4}$$

olacak şekilde bir $f \in C[X]$ ve bir $\varepsilon > 0$ bulunabilir.

Her bir p ve q noktası çifti için $f_{pq}(p) = f(p)$ ve $f_{pq}(q) = f(q)$ olacak şekilde $f_{pq} \in A$ bulunabilir.

$$V_{pq} := \{x \in X : f_{pq}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

açık kümesi tanımlansın. Sabit bir q için $p \in V_{pq}$ iken

$$X = \bigcup \{V_{pq} : p \in X\}$$

olduğu açıktır. Lemma 1.1.1 e göre X in örtülerinin sayısı sonludur ve $V_{p_1q}, \dots, V_{p_nq}$ olur.

$$f_q = \min\{f_{p_1q}, \dots, f_{p_nq}\}$$

olarak yazılsın.

Herhangi bir $x \in X$ için, $f_q(x) \leq f_{p_iq}(x) < f(x) + \varepsilon$ olduğundan $x \in V_{p_iq}$ olacak şekilde bir altındis i vardır.

Böylece $f_q < f + \varepsilon$ dır. Şimdi

$$V_q := \{x : f_q(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

olarak tanımlansın.

Tüm p ' ler için $f_{pq}(q) = f(q) > f(q) - \varepsilon$ olduğundan, $f_q(q) > f(q) - \varepsilon$ dır. Yani $q \in V_q$ ve sonuç olarak açık V_q kümeleri X ' in örtüsüdür. Lemma 1.1.1 e göre X ' in bu örtülerinin sonlu bir sayısı $V_{q_1}, \dots, V_{q_m}$ dir.

$$g := \max\{f_{q_1}, \dots, f_{q_m}\}$$

olarak tanımlansın. Tüm q ' lar için $f_q < f + \varepsilon$ eşitsizliği geçerlidir. Öte yandan bazı V_{q_i} lerde x ler bulunur, böylece $g(x) > f_{q_i}(x) > f(x) - \varepsilon$ dır.

Dolayısıyla $f - \varepsilon < g < f + \varepsilon$ olduğu kanıtlanmış oldu. Bu ise $g \in \bar{A}$ demektir. Bu durum yukarıda belirtilen (1.4) ile çelişmektedir. Bu ise kanıtı tamamlar.

Uyarı 1.1.2

Trigonometrik polinomlar kümesi $C_{2\pi}$ de yoğun küme oluşturur (Cheney, 1966).

Uyarı 1.1.3

X , n değişkenli uzayda kompakt bir küme olsun. n değişkenli polinomlar $C[X]$ de yoğun bir küme oluşturur (Cheney, 1966).

Tanım 1.1.6

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

$$T(\cos x) = \cos(n\theta)$$

eşitliklerini sağlayan polinoma Çebişev (Chebyshev) polinomu denir.

$$x_i = \cos(2i - 1)\pi/2n$$

n . polinomun sıfırları olmak üzere

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k,$$

ve

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

eşitlikleri geçerlidir (Cheney, 1966).

Tanım 1.1.7 (Lagrange İnterpolasyonu)

$x_0, x_1, \dots, x_n$; $n + 1$ tane farklı nokta ve f in bu noktalarda aldığı değerler belirli olsun. Bu durumda her $i = 0, \dots, n$ için

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

olmak üzere

$$P(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x)$$

olacak şekilde n . dereceden bir tek P polinomu vardır (Cheney, 1966).

Uyarı 1.1.4

T_n nin sıfırlarındaki düğümler için $\theta_i = (2i - 1)\pi/2n$ ve $x_i = \cos \theta_i$ olmak üzere Lagrange interpolasyon formülü

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i) \frac{T_n(x)(-1)^{i-1} \sin \theta_i}{x - x_i}$$

olarak belirlidir (Cheney, 1966).

Lemma 1.1.2

$n - 1$ den küçük ya da eşit dereceli P polinomları için

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| \leq \max_{-1 \leq x \leq 1} |n\sqrt{1-x^2}P(x)|$$

eşitsizliği geçerlidir (Cheney, 1966).

Kanıt

M , bu eşitsizliğin sağ tarafını sağlayan bir sayıyı gösterebilir. Tüm $x \in [-1,1]$ için

$$|P(x)| \leq M$$

olduğu gösterilmelidir. n -inci Çebişev (Chebyshev) polinomunun T_n sıfırları

$$\xi_i = \cos[(2i - 1)\pi/2n]$$

noktaları olmak üzere eğer x , $[\xi_n, \xi_1]$ aralığındaysa,

$$\sqrt{1-x^2} \geq \sqrt{1-\xi_1^2} = \sqrt{1-\cos^2 \frac{\pi}{2n}} = \sin \frac{\pi}{2n} \geq \frac{1}{n}$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla böyle her x için

$$|P(x)| \leq n\sqrt{1-x^2}|P(x)| \leq M$$

olur. $[-1,1]$ ' in kalan noktaları için, Lagrange interpolasyon formülü (ξ_i düğümlü) polinom P' ye uygulanırsa

$$P(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n P(\xi_i) \frac{T_n(-1)^{i-1} \sqrt{1-\xi_i^2}}{x-\xi_i}$$

eşitliği geçerli olur.

$x < \xi_n$ veya $x > \xi_1$ durumlarında, $x - \xi_i$ sayısının işareti aynı olacağından

$$|P(x)| \leq \frac{M}{n^2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{T_n(x)}{x-\xi_i} \right| = \frac{M}{n^2} \left| \sum_{i=1}^n \frac{T_n(x)}{x-\xi_i} \right|$$

eşitsizliği doğrudur.

$T_n(x) = 2^{n-1} \prod (x - \xi_i)$ eşitliği kullanılarak

$$T'_n(x) = \sum_{i=1}^n \left[2^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - \xi_j) \right] = \sum_{i=1}^n \frac{T_n(x)}{x - \xi_i}$$

eşitliği bulunur.

$x = \cos \theta$ alınır ve tümevarımla $|\sin n\theta / \sin \theta| \leq n$ eşitsizliği kullanılırsa,

$$|T'_n(x)| = n |\sin n\theta / \sin \theta| \leq n^2$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla iddia edildiği gibi $|P(x)| \leq M$ dir. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

Aşağıdaki Lemma trigonometrik polinomlarla ilgilidir. Burada

$$S(\theta) := \sum_{k=0}^n (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta)$$

olmak üzere

$$|a_n| + |b_n| \neq 0$$

ise S polinomu n -inci derecedendir. Eğer S çift bir fonksiyon ise,

$$S(\theta) = \frac{1}{2} [S(\theta) + S(-\theta)]$$

olur ve S sadece kosinüs teoremiyle yazılabilir. Benzer şekilde tek trigonometrik polinomlar sadece sinüs terimlerini içerir (Cheney, 1966).

Lemma 1.1.3

S, n den küçük ya da eşit dereceli tek bir trigonometrik polinom olsun. Bu durumda

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} \left| \frac{S(\theta)}{\sin \theta} \right| \leq n \max_{-\pi \leq x \leq \pi} |S(\theta)|$$

eşitsizliği sağlanır (Cheney, 1966).

Kanıt

Tümevarımla

$$\sin(k+1)\theta = \sin k\theta \cos \theta + \sin \theta \cos k\theta$$

eşitliği gösterilebilir.

$\frac{\sin k\theta}{\sin \theta}$ nın $\cos \theta$ cinsinden $k-1$ dereceli bir polinom olduğu açıktır. Bu nedenle derecesi $n-1$ den küçük ya da eşit olan bir cebirsel polinom P vardır, öyle ki

$$P(\cos \theta) = S(\theta)/\sin \theta$$

eşitliği sağlanır. Lemma 1.1.2 nin P ye uygulanması ile istenen eşitsizlik kolayca elde edilir.

Bu ise kanıtı tamamlar.

Tanım 1.1.8

$\rho: \mathbb{R} \rightarrow [1, \infty[$ sürekli monoton artan bir fonksiyon ve her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$$

olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M_f \rho(x) \quad (1.5)$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar uzayına $B_\rho(\mathbb{R})$ uzayı denir. Burada ρ fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir (Gadjiev, 1976).

Tanım 1.1.9

$C_\rho(\mathbb{R}) = \{f \in B_\rho(\mathbb{R}): f \text{ sürekli}\}$ şeklinde tanımlı uzay $\mathbb{R}$ üzerinde bir doğrusal uzaydır.

Tanım 1.1.10

ρ ağırlık fonksiyonu ve $f \in B_\rho(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$\|f\|_\rho := \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{\rho(x)} \quad (1.6)$$

ile $B_\rho(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm tanımlanır. Bu norm ile $B_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho(\mathbb{R})$ birer normlu uzaydır (Gadjiev, 1976).

Tanım 1.1.11

$\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ sürekli, her $x \in \mathbb{R}$ için $\rho(x) \geq 1$ ve

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$$

şeklinde monoton artan bir fonksiyon olmak üzere her $f \in C_\rho(\mathbb{R})$ için

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\rho(x)} = K_f < \infty \quad (1.7)$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayı $C_\rho^k(\mathbb{R})$ ile gösterilir. Açıkça $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzayı $C_\rho(\mathbb{R})$ uzayının bir alt uzayıdır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.12

X ve Y fonksiyon uzayları olsun. Her $f \in X$ için,

$$L(f, x) = g(x) \quad (1.8)$$

olacak şekilde $g \in Y$ fonksiyonu varsa L dönüşümüne X uzayından Y ye bir operatördür denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Örnek 1.1.2

i) (b_n) dizisi monoton artan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty \text{ ve } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$$

koşullarını sağlayan gerçel terimli pozitif sayı dizisi ve $0 \leq x \leq b_n$ olmak üzere

$$B_n^*(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n} b_n\right) C_n^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n-k}$$

eşitliği ile tanımlı polinomlara Bernstein-Chlodowsky Polinomları (Operatörleri) denir (Chlodowsky, 1937).

ii) $D \subset C[0, \infty[$ olmak üzere $L: D \rightarrow C[0, \infty[$ olsun. Her $x \in [0, \infty[$ için

$$L(f, x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} f(k)$$

bir operatördür. Bu operatör Szasz-Mirakjan operatörü olarak adlandırılır (Szasz, 1950).

Tanım 1.1.13

X, Y doğrusal uzaylar, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ ve $f_1, f_2 \in X$ olsun.

$L: X \rightarrow Y$ operatörü için,

$$L(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, x) = \alpha_1 L(f_1, x) + \alpha_2 L(f_2, x)$$

koşulunu sağlayan X üzerindeki L operatörüne doğrusal operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Tanım 1.1.14

$$X^+ := \{f \in X : f(x) \geq 0\}, Y^+ := \{g \in Y : g(x) \geq 0\}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon uzayları ve $L: X \rightarrow Y$ doğrusal operatörü için,

$L(X^+) \subset Y^+$ oluyorsa L 'ye doğrusal pozitif operatör denir (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

Örnek 1.1.3

i) $0 \leq x \leq 1$ ve $f \in [0,1]$ olmak üzere;

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (1.9)$$

şeklinde tanımlı polinom Bernstein operatörü olarak bilinir, açıkça doğrusal ve pozitifdir.

Aşağıdaki operatörler açıkça doğrusal ve pozitifdir.

ii) $f \in C[0, \infty]$ ve $x \in [0, \infty)$ olmak üzere,

$$S_n(f; x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!}$$

ifadesine Szasz operatörü denir.

iii) $f \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_n(f; x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} P_{m\alpha_n,k}(x) f\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right), \quad x \in [0,1]$$

ile tanımlı operatöre Szasz- Bernstein-Mirakyan (SBM) operatörü denir; burada

$$q_{n,m}(x) = \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m!}, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

$$P_{n,k} = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

şeklinde tanımlıdır.

Uyarı 1.1.5

i) L doğrusal pozitif operatörü, negatif fonksiyonları negatif fonksiyonlara dönüştürür.

ii) Doğrusal pozitif operatörler monotondur.

Uyarı 1.1.6

$\|f\|_X \neq 0$ olmak üzere, $L: X \rightarrow Y$ sınırlı doğrusal operatörü için L operatörünün normu

$$\|L\|_{X \rightarrow Y} = \sup_{\|f\|_X \neq 0} \frac{\|L(f, x)\|_Y}{\|f\|_X} \quad (1.10)$$

eşitliği ile verilir (Rudin, 1991).

Önerme 1.1.1

$L: X \rightarrow Y$ tanımlı, doğrusal pozitif bir operatör olsun. Bu durumda her $f \in X$ için

$$|L(f, x)| \leq L(|f|, x)$$

eşitsizliği sağlanır (Hacısalıhoğlu ve Hacıyev, 1995).

$C[a, b]$, uzayındaki fonksiyonlara yaklaşım için önemli bir teorem olan Korovkin Teoremi aşağıda kanıtlanmıştır.

Teorem 1.1.4 (Korovkin Teoremi)

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi olsun. Her $x \in [a, b]$ için $m = 0, 1, 2$ olmak üzere L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_{C[a, b]} = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu durumda $[a, b]$ de sürekli fazladan a da soldan b de sağdan sürekli olan tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı her f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a, b]} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Korovkin, 1960).

Kanıt

Kabulden f , $\mathbb{R}$ 'de sınırlı olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için

$$|f(x)| \leq M$$

olacak şekilde en az bir $M > 0$ vardır.

$f \in C[a, b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ vardır, öyle ki $x, t \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ olur.

Her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a, b]$ için $|t - x| < \delta$ olduğunda da $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği doğrudur. Şöyle ki

$x \in [a, b]$ ve $t \notin [a, b]$ olsun.

i) $|t - x| < \delta$ olduğunda $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği f fonksiyonu a da soldan b de sağdan sürekli olduğu için yine doğrudur.

ii) Diğer taraftan $|t - x| \geq \delta$ olduğunda ise $\frac{|t-x|^2}{\delta^2} \geq 1$ olup açıkça

$$2M \leq \frac{2M}{\delta^2} |t - x|^2$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikler ve üçgen eşitsizliği kullanılarak her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(t) - f(x)| \leq 2M < \frac{2M}{\delta^2} |t - x|^2 + \varepsilon \quad (1.11)$$

eşitsizliği yazılabilir. Operatörün doğrusallığından

$$\begin{aligned} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} &= \|L_n(f(t) - f(x) + f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &= \|L_n(f(t) - f(x), x) + L_n(f(x), x) - f(x)\|_{C[a,b]} \\ &\leq \|L_n(f(t) - f(x), x)\|_{C[a,b]} + \|f(x)\|_{C[a,b]} \|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan hipotezden ε_n sıfır dizisi için

$$\|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} \leq \varepsilon_n$$

eşitsizliği geçerli olacaktır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} &\leq \varepsilon \|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} + \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \|L_n(t^2, x) - x^2\|_{C[a,b]} \\ &\quad - 2a \|L_n(t, x) - x\|_{C[a,b]} + b^2 \|L_n(1, x) - 1\|_{C[a,b]} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. (1.11) eşitsizliği kullanılarak son eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınacak olursa;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur. Böylece her $f \in C[a, b]$ için $L_n(f, x)$; f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

$C_\rho(\mathbb{R})$ ve $C_\rho^k(\mathbb{R})$ uzaylarında Korovkin tipli teoremin varlığı aşağıda araştırılmıştır. Sonlu aralıkta tanımlı sürekli fonksiyonlar için geçerli olan Korovkin Teoreminin gerçel sayılar kümesi üzerinde sürekli olan fonksiyonlar için geçerli olmadığını veren aşağıdaki teorem Hacıyev tarafından kanıtlanmış olup Hacıyev Teoremi olarak bilinir.

Lemma 1.1.4

M_ρ ; ρ fonksiyonuna bağlı bir sabit olmak üzere L_n doğrusal pozitif operatörler dizisinin C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapması için gerekli ve yeterli koşul

$$\|L_n(\rho, x)\|_\rho \leq M_\rho$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Gadjiev, 1976).

Teorem 1.1.5 (Hacıyev Teoremi)

L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapsın. $m = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşulu sağlayan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi alındığında en az bir $f^* \in C_\rho / C_\rho^k$ fonksiyonu için

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f^*, x) - f^*(x)\|_\rho > 0$$

eşitsizliği geçerli olur (Gadjiev, 1976).

C_ρ ağırlıklı uzayında geçerli olmamakla birlikte Sonuç 1.1.1 de de verildiği üzere C_ρ^k alt uzayında Korovkin Tipli bir teorem geçerlidir.

Sonuç 1.1.1

C_ρ dan B_ρ uzayına dönüşüm yapan L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi için $m = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(t^m, x) - x^m\|_\rho = 0$$

şeklindeki üç koşul sağlansın. Bu durumda her $f \in C_\rho^k$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - f(x)\|_\rho = 0$$

eşitliği sağlanır.

Aşağıda operatörlerin yaklaşım hızı hesabı yöntemlerinden biri olan süreklilik modülü ve kanıtı birçok kaynakta bulunabilecek temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.1.15 (Süreklilik Modülü Tanımı)

$f \in C[a, b]$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\omega(f; \delta) = \sup_{\substack{t, x \in [a, b] \\ |t-x| \leq \delta}} |f(t) - f(x)| \quad (1.12)$$

ile tanımlanan $\omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonunun süreklilik modülü denir (Altomare and Campiti, 1994).

Lemma 1.1.5

Süreklilik modülü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- i) $\omega(f; \delta) \geq 0$.
- ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\omega(f; \delta_1) \leq \omega(f; \delta_2)$.
- iii) $m \in \mathbb{N}$ için $\omega(f; m\delta) \leq m\omega(f; \delta)$.
- iv) Her $\lambda \in \mathbb{R}^+$ için $\omega(f; \lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(f; \delta)$.
- v) $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega(f; \delta) = 0$.
- vi) $|f(t) - f(x)| \leq \omega(f; |t - x|)$.
- vii) $|f(t) - f(x)| \leq \left(\frac{|t-x|}{\delta} + 1\right) \omega(f; \delta)$.

Teorem 1.1.6 (Bernstein pol. için Lorentz teoremi)

$B_n(f; x)$, (1.9) da verildiği gibi tanımlı olsun. Bu durumda $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \frac{3}{2} \omega(f; n^{-\frac{1}{2}})$$

eşitsizliği geçerlidir (Lorentz, 1953).

Kanıt

$P_{k,n}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ olmak üzere Önerme 1.1.1 ve Bernstein polinomlarının doğrusallığından

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) P_{k,n}(x) - f(x) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) P_{k,n}(x) \right| \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| P_{k,n}(x)$$

eşitsizliği geçerlidir. Süreklilik modülünün vii) özelliğinde $t = \frac{k}{n}$ alınırsa;

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \leq \left(\frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği vardır. Yukarıdaki eşitsizlikle birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{\left| \frac{k}{n} - x \right|}{\delta_n} + 1 \right) \omega(f; \delta_n) P_{k,n}(x) \\ &= \omega(f; \delta_n) \left[\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) + \frac{1}{\delta_n} \sum_{k=0}^n \left| \frac{k}{n} - x \right| P_{k,n}(x) \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Sağ taraftaki ikinci toplama Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{k=0}^n P_{k,n}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 P_{k,n}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \left(\sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x \right)^2 P_{k,n}(x) \right)^{\frac{1}{2}} \right] \quad (1.13)$$

eşitsizliği yazılabilir. Operatörün doğrusallığı kullanılarak

$$B_n((t-x)^2; x) = B_n(t^2; x) - 2xB_n(t; x) + x^2 B_n(1; x)$$

$$= x^2 + \frac{x(1-x)}{n} - 2x^2 + x^2$$

$$= \frac{x(1-x)}{n}$$

eşitliği geçerli olup son eşitlik (1.13) te yerine yazılırsa

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \right] \quad (1.14)$$

eşitsizliği geçerli olur. Her $x \in [0,1]$ için

$$\sqrt{x(1-x)} \leq \max_{0 \leq x \leq 1} \sqrt{x(1-x)} = \frac{1}{2}$$

eşitsizliği doğru olduğundan (1.14) eşitsizliği

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \omega(f; \delta_n) \left[1 + \frac{1}{\delta_n} \frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}} \right]$$

olarak ifade edilebilir. $\delta_n = n^{-\frac{1}{2}}$ seçimiyle,

$$\begin{aligned} |B_n(f; x) - f(x)| &\leq \omega\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{2} \omega\left(f; n^{-\frac{1}{2}}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunabilir. Bu son eşitsizlik her $x \in [0,1]$ için $B_n(f; x)$ polinomlarının f fonksiyonuna yaklaşım hızının, $\frac{1}{\sqrt{n}}$ nin 0 a yaklaşma hızından daha küçük olduğunu göstermektedir.

Tanım 1.1.16

$f \in C_\rho^0(0, \infty)$ olsun. Herhangi bir $\delta > 0$ için

$$\Omega(f; \delta) = \sup_{|h| \leq \delta, x \in [0, b_n)} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{(1+h^2)(1+x^2)}$$

olarak tanımlı $\Omega(f; \delta)$ ifadesine f fonksiyonu için $C_\rho^0(0, \infty)$ uzayında ağırlıklı süreklilik modülü denir (İspir, 2001).

Lemma 1.1.6

$f \in C_p^0(0, \infty)$ olsun. Bu durumda Tanım 1.1.16 ile verilen ağırlıklı süreklilik modülü için aşağıdaki özellikler geçerlidir (İspir, 2001).

i) $\delta > 0$ için $\Omega(f; \delta) \geq 0$

eşitsizliği geçerlidir.

ii) $\delta_1 \leq \delta_2$ ise $\Omega(f; \delta_1) \leq \Omega(f; \delta_2)$

eşitsizliği geçerli olacaktır.

iii) Her $\delta > 0$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega(f; \delta) = 0$

olur.

iv) $m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\Omega(f; m\delta) \leq 2m(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır.

v) Her $\lambda > 0$ için

$$\Omega(f; \lambda\delta) \leq 2(1 + \lambda)(1 + \delta^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$$\text{vi) } |f(t) - f(x)| \leq (1 + x^2)(1 + (t - x)^2)\Omega(f; |t - x|).$$

$$\text{vii) } |f(t) - f(x)| \leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2) \left(1 + \frac{|t-x|}{\delta}\right) (1 + (t - x)^2)\Omega(f; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır (İspir, 2001).

Teorem 1.1.7

$-\infty < a < b < \infty$ ve L_n doğrusal pozitif operatörleri için $D \subset [a, b]$ aralığında $e_i(x) = x^i$ ve $i = 0, 1, 2$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_i, x) - e_i(x)\| = 0$$

olsun. Her $n \in \mathbb{N}_0$ için $L_n(1, x)$ in sınırlı olduğu kabul edilsin. f fonksiyonu D aralığında sürekli ve ω ; f in süreklilik modülü olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mu_n := \|(L_n([t - x]^2))(x)\|^{1/2} \quad (1.15)$$

şeklinde tanımlı ve $\|\cdot\|$, $[a, b]$ üzerindeki sup normu olmak üzere

$$\|f(x) - L_n(f, x)\| \leq \|f\| \|L_n(1, x) - 1\| + \omega(\mu_n) \|L_n(1, x) + 1\| \quad (1.16)$$

eşitsizliği geçerlidir (Shisha and Mond, 1968).

Burada $L_n(1, x) = 1$ ise (1.16) eşitsizliği

$$\|f(x) - L_n(f, x)\| \leq 2\omega(\mu_n) \quad (1.17)$$

eşitsizliğine dönüşür.

Kanıt

$x \in [a, b]$ ve δ pozitif bir sayı olsun. Verilen bir $t \in [a, b]$ için eğer $|t - x| > \delta$ ise

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq \omega(|t - x|) \\ &= \omega(|t - x|\delta^{-1}\delta) \\ &\leq (1 + |t - x|\delta^{-1})\omega(\delta) \\ &\leq [1 + (t - x)^2\delta^{-2}]\omega(\delta) \end{aligned}$$

olur.

$$|f(t) - f(x)| \leq [1 + (t - x)^2\delta^{-2}]\omega(\delta)$$

eşitsizliğinde $|t - x| \leq \delta$ olursa da sonuç doğrudur. n pozitif bir sayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |L_n(f, x) - f(x)L_n(1, x)| &\leq \omega(\delta)[L_n(1, x) + \delta^{-2}L_n([t - x]^2, x)] \\ &\leq \omega(\delta)\left[L_n(1, x) + \left(\frac{\mu_n}{\delta}\right)^2\right] \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir.

i) Eğer $\mu_n > 0$ ve $\delta = \mu_n$ alınırsa

$$\begin{aligned} |L_n(f, x) - f(x)L_n(1, x)| &\leq \omega(\mu_n)\|L_n(1, x) + 1\|, \\ |-f(x) + f(x)L_n(1, x)| &\leq \|f\| \cdot \|L_n(1, x) - 1\| \end{aligned} \quad (1.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (1.16) kanıtlanmış olur.

ii) Eğer $\mu_n = 0$ ve δ herhangi bir pozitif sayı olarak alınırsa,

$$|(L_n(f, x) - f(x)L_n(1, x))| \leq \omega(\mu_n)L_n(1, x)$$

eşitsizliği geçerli olur. $\delta \rightarrow 0$ alınarak

$$L_n(f, x) = f(x)L_n(1, x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (1.18) den

$$|f(x) - L_n(f, x)| \leq \|f\| \cdot \|L_n(1, x) - 1\|$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise (1.16) eşitsizliği demektir.

Dolayısıyla i) ve ii) den kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 1.1.7

$n = 1, 2, \dots$ için (1.15) te $c = \max(|a|, |b|)$ alırsa

$$\mu_n^2 \leq \|L_n(t^2, x) - x^2\| + 2c\|L_n(t, x) - x\| + c^2\|L_n(1, x) - 1\|$$

olur.

Bu nedenle, $k = 0, 1, 2$ için $[a, b]$ de $L_n(t^k, x)$ fonksiyonları x^k fonksiyonlarına düzgün yakınsarsa, $\mu_n \rightarrow 0$ olur (Shisha and Mond, 1968).

Teorem 1.1.8

$-\infty < a < b < \infty$, L_n doğrusal pozitif operatör olmak üzere $D \subset [a, b]$ tanım kümesine sahip f_0, f_1, f_2 $[a, b]$ aralığında sınırlı fonksiyonlar ve $n \in \mathbb{N}$ için $L_n(1, x)$ sınırlı olsun.

$a_0(x), a_1(x), a_2(x), [a, b]$ de tanımlı, sınırlı ve gerçel değerli fonksiyonlar olmak üzere her $t, x \in [a, b]$ için $K; x$ ve t den bağımsız,

$$F(t, x) \equiv \sum_{k=0}^2 a_k(x) f_k(t) \geq K(t - x)^2, \quad F(x, x) = 0 \quad (1.19)$$

eşitliğini sağlayan pozitif bir sabit olsun.

$\omega, [a, b]$ üzerinde sürekli olan f fonksiyonu için süreklilik modülünü gösterebilirsin. Bu durumda

$$\mu_n = \left\{ \frac{\|L_n F(t, x)(x)\|}{K} \right\}^{1/2}$$

şeklinde tanımlanmak üzere $\|\cdot\|; [a, b]$ üzerindeki sup normunu temsil etsin.

Bu durumda

$$\|f - L_n(f, x)\| \leq \|f\| \|L_n(1, x) - 1\| + \omega(\mu_n) \|L_n(1, x) + 1\| \quad (1.20)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dikkat edilmelidir ki $L_n(1, x) = 1$ ise genel durumda olduğu gibi, (1.20) eşitsizliği özel olarak

$$\|f(x) - L_n(f, x)\| \leq 2\omega(\mu_n)$$

eşitsizliğine dönüşür (Shisha and Mond, 1968).

Kanıt

$x \in [a, b], \delta > 0$ ve $t \in [a, b]$ olsun. Eğer $|t - x| > \delta$ ise

$$\begin{aligned} |f(t) - f(x)| &\leq \omega(|t - x|) \\ &= \omega(|t - x|\delta^{-1}\delta) \\ &\leq (1 + |t - x|\delta^{-1})\omega(\delta) \\ &\leq [1 + (t - x)^2\delta^{-2}]\omega(\delta) \\ &\leq [1 + K^{-1}F(t, x)\delta^{-2}]\omega(\delta) \end{aligned}$$

eşitsizliği doğru olur. Böylece

$$|f(t) - f(x)| \leq [1 + K^{-1}F(t, x)\delta^{-2}]\omega(\delta)$$

eşitsizliği yazılabilir. Açıkça $|t - x| \leq \delta$ olursa da sonuç doğrudur. n pozitif bir sayı olsun.

Bu durumda

$$\begin{aligned} |(L_n(f, x) - f(x)L_n(1, x))| &\leq \omega(\delta)[L_n(1, x) + \delta^{-2}K^{-1}L_nF(t, x)] \\ &\leq \omega(\delta)\left[L_n(1, x) + \left(\frac{\mu_n}{\delta}\right)^2\right] \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Daha sonra kanıt Teorem 1.1.7 nin kanıtı gibi devam edilerek sonuca ulaşılır.

Uyarı 1.1.8

$$\|L_nF(t, x)(x)\| \leq \sum_{k=0}^2 \|a_k(x)\| \|f_k - L_nf_k\|, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

eşitsizliğinden $k = 0, 1, 2$ için (L_nf_k) , $[a, b]$ üzerinde f_k ' ye düzgün yakınsaksa bu durumda $\mu_n \rightarrow 0$ olur. μ_n dizisinin yakınsamasının hızı L_nf_0, L_nf_1 ve L_nf_2 yardımıyla hesaplanabilir (Shisha and Mond, 1968).

Teorem 1.1.9 (Banach-Steinhaus Teoremi)

X ve Y Banach uzayları, $L(X, Y)$, X den Y ye sürekli lineer operatörlerin kümesi ve (L_n) de $L(X, Y)$ uzayında bir dizi olsun. X uzayındaki her x için $(L_n(x))$ dizisi Y uzayında sınırlıysa ve X uzayında yoğun olan bir A kümesindeki her y noktası için $(L_n(y))$ dizisi Y uzayında yakınsaksa, bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = L$ olacak şekilde bir $L \in L(X, Y)$ dönüşümü vardır (Terzioğlu, 1998).

Heping tarafından verilen aşağıdaki teoremden herhangi bir doğrusal pozitif operatörler dizisi için hangi koşullarda $\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - L_\infty(f, x)\| = 0$ eşitliğinin doğru olduğu araştırılmıştır.

Teorem 1.1.10

$C[0, A]$ uzayında tanımlı herhangi bir (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi ve $i = 0,1,2$ için $e_i(x) = x^i$ olmak üzere

i) $C[0,1]$ uzayında $L_n(e_2, x)$ dizisi bir $L_\infty(e_2, x)$ fonksiyonuna yakınsak,

ii) $x \in [0,1]$ olmak üzere konveks bir f fonksiyonu için $(L_n(f; x))$ dizisi artmayan

koşulları sağlansın. Bu durumda her $f \in C[0,1]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - L_\infty(f)\|_{C[0,1]} = 0$$

olacak şekilde $C[0,1]$ uzayında bir L_∞ operatörü vardır (Heping, 2005). ■

Ayrıca

$$\lambda_n := |L_n(e_2, x) - L_\infty(e_2, x)|$$

olarak tanımlanır ve c yalnızca $\|L_1(e_0)\|$ a bağlı bir sabit olarak alınırsa

$$|L_n(f, x) - L_\infty(f, x)| \leq c \omega_2(f, \sqrt{\lambda_1(x)})$$

eşitsizliği sağlanır.

Not 1.1.1

Her $i = 0,1,2$ için $(L_n(e_i))$ dizisinin $C[0,1]$ uzayında yakınsak olması $L_n(f, x)$ operatörler dizisinin yakınsaklığını garanti eder.

Doğru ve Gupta, Heping' in bu teoreminden esinlenerek aşağıdaki Heping tipli Korovkin teoremini kanıtlamışlardır.

Teorem 1.1.11

$C[0, A]$ uzayında tanımlı bir $L_n(f, x)$ doğrusal pozitif operatörler dizisi;

i) Her $i = 0,1,2$ için $L_n(e_i, x)$ dizisi bir $L_\infty(e_i, x)$ fonksiyonuna $C[0, A]$ uzayında yakınsar,

ii) $x \in [0, A]$ olsun. Konveks ve artan bir f fonksiyonu için $L_n(f, x)$ artmayandır,

koşullarını sağlasın. Bu durumda her $f \in C[0, A]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f, x) - L_\infty(f, x)\|_{C[0, A]} = 0$$

olacak şekilde $C[0, A]$ uzayında tanımlı bir L_∞ operatörü vardır (Doğru and Gupta, 2006).

Kanıt

Herhangi bir (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi i) ve ii) koşullarını sağlasın. Bu durumda keyfi bir f doğrusal fonksiyonu ve $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$L_n(f, x) = L_m(f, x) \quad (1.21)$$

eşitliği sağlansın. (L_n) operatörler dizisinin düzgün normu $\sup_{n \geq 1} \|L_n\|$ olmak üzere

$$\sup_{n \geq 1} \|L_n\| \leq \sup_{n \geq 1} \|L_n(e_0)\|_{C[0, A]} = \|L_1(e_0)\|_{C[0, A]} < \infty$$

eşitsizlikleri sağlanır. $C^2[0, A]$ uzayı, (f, f', f'') fonksiyonlarının $C[0, A]$ ya ait olduğu fonksiyonlar uzayı olmak üzere) $C[0, A]$ uzayında yoğun olup Banach-Steinhaus teoremi gereği herhangi bir $f \in C^2[0, A]$ için $(L_n(f, x))$ operatörler dizisinin $C[0, A]$ uzayında yakınsak olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$$g_1(x) := \frac{\|f\|_{C^2[0, A]}}{2} (x^2 + 2x) - f(x) \quad (1.22)$$

ve

$$g_2(x) := \frac{\|f\|_{C^2[0, A]}}{2} (x^2 + 2x) + f(x) \quad (1.23)$$

fonksiyonları tanımlansın. g_1 ve g_2 fonksiyonları artan, konveks ve doğrusaldır. Şöyle ki

$$g_1'(x) = \|f\|_{C^2[0, A]} (x + 1) - f'(x)$$

$$f'(x) \leq \|f'\|_{C[0, A]} \leq \|f\|_{C^2[0, A]}$$

eşitsizliklerinden kolayca

$$\|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) - \|f\|_{C^2[0,A]} \leq \|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) - f'(x) = g_1'(x)$$

ve

$$x\|f\|_{C^2[0,A]} \leq g_1'(x)$$

bulunur. $x \in [0, A]$ olduğundan normun tanımı gereği $g_1'(x) \geq 0$ dır. Dolayısıyla g_1 artandır. g_1 fonksiyonunun tanımından

$$g_1''(x) = \|f\|_{C^2[0,A]} - f''(x)$$

eşitliği doğru olup,

$$f''(x) \leq \|f''\|_{C[0,A]} \leq \|f\|_{C^2[0,A]}$$

eşitsizliği ile

$$-\|f\|_{C^2[0,A]} \leq -f''(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. İki eşitsizlik birlikte düşünülerek

$$\|f\|_{C^2[0,A]} - \|f\|_{C^2[0,A]} \leq \|f\|_{C^2[0,A]} - f''(x) = g_1''(x)$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$g_1''(x) \geq 0$$

olacaktır. Dolayısıyla g_1 fonksiyonu konvektir.

Benzer yolla g_2 fonksiyonunun tanımından

$$g_2'(x) = \|f\|_{C^2[0,A]}(x+1) + f'(x)$$

eşitliği geçerli olup, f fonksiyonunun artanlığı ve norm tanımından $g_2'(x) \geq 0$ dır. Böylece g_2 fonksiyonu artandır. Ayrıca

$$g_2''(x) = \|f\|_{C^2[0,A]} + f''(x)$$

eşitliği doğru olup, f fonksiyonu konveks olduğundan normun tanımı gereği $g_2''(x) \geq 0$ dır.

O halde g_2 fonksiyonu konvektir. g_1 fonksiyonunun tanımından

$$f(x) = \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2}(x^2 + 2x) - g_1(x)$$

eşitliği yazılabilir. Teoremin ii) kabulünden her $n, p > 0$ ve $i = 1, 2$ için

$$L_n(g_i; x) - L_{n+p}(g_i; x) \geq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Bunun yanında

$$L_n(f, x) = \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2} \{L_n(e_2, x) + 2L_n(e_1, x)\} - L_n(g_1, x)$$

ve

$$L_{n+p}(f; x) = \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2} \{L_{n+p}(e_2, x) + 2L_{n+p}(e_1, x)\} - L_{n+p}(g_1, x)$$

eşitlikleri doğru olup mutlak değere geçilerek

$$\begin{aligned} |L_n(f, x) - L_{n+p}(f, x)| &= \left| \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2} (L_n(e_2, x) - L_{n+p}(e_2, x) + 2(L_n(e_1, x) \right. \\ &\quad \left. - L_{n+p}(e_1, x))) - L_n(g_1, x) + L_{n+p}(g_1, x) \right| \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir.

Bu son eşitliğe üçgen eşitsizliği uygulanarak her iki tarafın $x \in [0, A]$ üzerinden maksimumu alınırsa

$$\begin{aligned} \|L_n(f) - L_{n+p}(f)\|_{C[0,A]} &\leq \frac{\|f\|_{C^2[0,A]}}{2} \left\{ \|L_n(e_2) - L_{n+p}(e_2)\|_{C[0,A]} + 2\|(L_n(e_1) - L_{n+p}(e_1))\|_{C[0,A]} \right\} \\ &\quad + \|L_n(g_1) - L_{n+p}(g_1)\|_{C[0,A]} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Eşitsizliğin sağ tarafındaki terimler (1.21) ve hipotez i) den sıfıra yakınsar. Dolayısıyla $L_n(f, x)$ operatörler dizisi $C[0, A]$ uzayında bir Cauchy dizisi olup $C[0, A]$ uzayında yakınsaktır ($C[0, A]$ uzayı tam olduğundan). Böylece $C[0, A]$ uzayındaki f fonksiyonu için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(f) - L_\infty(f)\|_{C[0, A]} = 0$$

olacak şekilde $C[0, A]$ uzayında tanımlı bir L_∞ operatörü vardır.

Benzer şekilde g_2 fonksiyonunun tanımından

$$f(x) = -\frac{\|f\|_{C^2[0, A]}}{2}(x^2 + 2x) + g_2(x)$$

eşitliği yazılabilir. Daha sonra yukarıdaki şekilde kanıt tamamlanır.

Aşağıda matematiksel analiz ve bilgisayar bilimlerinde yaygın olarak kullanılan “küçük o” ve “büyük o” gösterimleri tanıtılacaktır.

Tanım 1.1.17 (Küçük-o)

f ve g fonksiyonları için

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

oluyorsa $x \rightarrow \infty$ iken f ' nin mertebesi g ' den daha küçüktür denir. Bu, $f = o(g)$ şeklinde belirtilir.

$x \rightarrow \infty$ iken, $f = o(g)$ ifadesi $x \rightarrow \infty$ iken f ' nin g ' den yavaş büyüdüğünü söylemenin başka bir yoludur (Thomas vd., 2005).

Örnek 1.1.4 (Küçük-o notasyonunun kullanımı)

a) $x \rightarrow \infty$ iken $\ln x = o(x)$ tir, çünkü $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

b) $x \rightarrow \infty$ iken $x^2 = o(x^3 + 1)$ dir, çünkü $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 + 1} = 0$ (Thomas vd., 2005).

Tanım 1.1.18 (Büyük-o)

x yeterince büyükken, $f(x)$ ve $g(x)$ pozitif olsunlar. x yeterince büyükken

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq M,$$

olacak şekilde pozitif bir M tamsayısı varsa, f en fazla g mertebesinde denir. Bu durum $f = O(g)$ olarak gösterilir (Thomas vd., 2005).

Örnek 1.1.5 (Büyük-o notasyonunun kullanımı)

a) $x \rightarrow \infty$ iken $x + \sin x = O(x)$ ' tir, çünkü x yeterince büyükken $\frac{x+\sin x}{x} \leq 2$ olur.

b) $x \rightarrow \infty$ iken $e^x + x^2 = O(e^x)$ ' tir, çünkü $x \rightarrow \infty$ iken $\frac{e^x+x^2}{e^x} \rightarrow 1$ olur.

c) $x \rightarrow \infty$ iken $x = O(e^x)$ ' tir, çünkü $x \rightarrow \infty$ iken $\frac{x}{e^x} \rightarrow 0$ olur (Thomas vd., 2005).

Tanımlara yeniden bakılırsa yeterince büyük x değerlerinde pozitif olan fonksiyonlar için $f = o(g)$ 'nin, $f = O(g)$ anlamına geldiği görülür. Ayrıca, f ve g aynı oranda büyüyorsa, $f = O(g)$ ve $g = O(f)$ olur.

Lokal (yerel) hata hesabını içeren aşağıdaki iki teoremle polinom operatörleri ile yaklaşımın derecesi kanıtsız olarak verilecektir.

Teorem 1.1.12

(L_n) trigonometrik polinom operatörlerinin bir dizisi olsun. $g(x) = 1, \cos x, \sin x$ olmak üzere

$$\|L_n(g, x) - g(x)\| = o(n^{-2})$$

koşulu sağlanıyorsa bu durumda her $x_0 \in [-\pi, \pi]$ için c_1 ve c_2 sabitleri vardır öyleki,

$$\left\| L_n \left(\sin^2 \left(\frac{t-x}{2} \right), x \right) \right\|_{[x_0-c_1n^{-1}, x_0+c_1n^{-1}]} \geq c_2 n^{-2}$$

eşitsizliği sağlanır (DeVore, 1972).

Teorem 1.1.13

(L_n) cebirsel polinom operatörlerinin pozitif bir dizisi ve $0 < \delta < a$ olsun. Eğer her $i = 0,1,2$ için

$$\|L_n(e_i, x) - e_i(x)\|_{[-a,a]} = o(n^{-2})$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda c_1, c_2 ve n sabitleri vardır öyleki her $x_0 \in [-\delta, \delta]$ ve $n \geq N$ için

$$D := [x_0 - c_1 n^{-1}, x_0 + c_1 n^{-1}]$$

olmak üzere

$$\|L_n((t-x)^2, x)\|_D \geq c_2(a^2 - x_0^2)n^{-2}$$

eşitsizliği sağlanır (DeVore, 1972).

Teorem 1.1.14

(L_n) , $C[-a, a]$ üzerinde pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Bu durumda her $i = 0,1$ için

$$\|L_n(e_i, x) - e_i(x)\|_{[-a,a]} = o(n^{-2})$$

eşitliği sağlandığı halde

$$\|L_n(e_2, x) - e_2(x)\|_{[-a,a]} = o(n^{-2})$$

durumu sağlanmaz (DeVore, 1972).

Teorem 1.1.15

$$\|L_n\| = \sup_{\|f\|_{C[a,b]} \leq 1} \|L_n(f, x)\|_{C[a,b]}$$

olmak üzere $C[a, b]$ sürekli fonksiyonların uzayı, E bir öklidyen uzay, K^k , k -ıncı dereceden konveks fonksiyonların uzayı olsun. L_n doğrusal pozitif operatörler dizisi

$L_n: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ olsun. Eğer her $w \in E$ ve $j = 0,1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_j, w) - e_j(w)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa bu durumda her $n > n_0$ için $\|L_n\| \leq 8$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir n_0 pozitif sabiti vardır (Radu, 2004).

Kanıt

$$\rho := \min \left\{ \frac{1}{240}, \frac{1}{120}, \frac{b-a}{1+|a|} \right\}$$

olsun. E bir öklidyen uzay olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_n(e_j, w) - e_j(w)\|_{C[a,b]} = 0$$

eşitliğinden $\|w\| = 1$ olmak üzere j ile w arasında düzgün bir bağıntı ve bir n_0 doğal sayısı vardır öyleki her $w \in E$, $j = 0,1$ ve $n > n_0$ için

$$\|L_n(e_j, w) - e_j(w)\|_{C[a,b]} \leq \rho$$

eşitsizliği geçerli olur. $n > n_0$ sabit bir nokta olsun. $\|f\|_{[a,b]} \leq 1$ olan her $f \in C[a,b]$ için $\|L_n(f, x)\|_{C[a,b]} \geq 8$ olduğu kabul edilsin. Bir $z \in [a,b]$ için $\|L_n(f, z)\| = \|L_n(f, x)\|_{C[a,b]}$ olsun. O halde iki durum söz konusudur.

1.Durum

Her $x \in [a,b]$ için

$$\|L_n(f, x) - L_n(f, z)\| < \frac{1}{32} \|L_n(f, x)\|_{C[a,b]}$$

olur. Her $x, y \in [a,b]$ için

$$\|L_n(f, x)\| \geq \frac{31}{32} \|L_n(f)\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece her $x \in [a,b]$ için

$$\|L_n(f, x) - L_n(f, y)\| < \frac{1}{16} \|L_n(f)\|_{C[a,b]}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$w := \frac{L_n(f, a)}{\|L_n(f, a)\|},$$

$$\mu := \frac{4}{5} \|L_n(f, a)\|,$$

$$g := \frac{\mu}{2(b-a)} ((2b-3a)e_0 + e_1)w - f$$

tanımlamaları yapılsın. $g \in K^{-1}$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için $x, y \in [a, b]$ ve $t > 0$ olsun. $\mu > 6$ olduğu dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \|g(x) + tg(y)\| - \|g(x)\| &= \|(1+t)g(x) + t(g(y) - g(x))\| - \|g(x)\| \\ &\geq t(\|g(x)\| - \|g(x) - g(y)\|) \\ &\geq t\left(\mu\left(1 + \frac{x-a}{2(b-a)}\right)\|w\| - 2\|f(x)\| \right. \\ &\quad \left. - \|f(y)\| - \mu\frac{|y-x|}{2(b-a)}\|w\|\right) \\ &\geq t\left(\frac{1}{2}\mu - 3\right) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. L_n pozitif olduğundan $L_n(g, x) \in K^{-1}$ dir, fakat bu bir çelişkidir.

Çünkü

$$\begin{aligned} \|L_n(g, a) + L_n(g, b)\| - \|L_n(g, a)\| &\leq \left\| \frac{5}{2}\mu w - L_n(f, a) - L_n(f, b) \right\| - \|\mu w - L_n(f, a)\| \\ &+ \mu \left(\left(3 + \frac{3|a|}{2(b-a)} \right) \|L_n(e_0 w) - e_0 w\|_{[a,b]} + \frac{3}{2(b-a)} \|L_n(e_1 w) - e_1 w\|_{[a,b]} \right) \\ &\leq \|L_n(f, a) - L_n(f, b)\| - \frac{1}{4}\mu + \frac{\mu}{40} \\ &\leq \frac{1}{16} \|L_n(f)\|_{C[a,b]} - \frac{9}{50} \|L_n(f, a)\| \end{aligned}$$

$$< 0$$

olur.

2.Durum

$x \in [a, b]$ olsun.

$$\|L_n(f, x) - L_n(f, z)\| \geq \frac{1}{32} \|L_n(f)\|_{C[a,b]}$$

olacak şekilde μ, w, g

$$\mu := \frac{1}{5} \|L_n(f, x) + 4L_n(f, z)\|,$$

$$w := \frac{1}{5\mu} (L_n(f, x) + 4L_n(f, z)),$$

$$g := \mu e_0 w - f$$

şeklinde tanımlanırsa

$$\mu > \frac{4}{5} \|L_n(f, z)\| - \frac{1}{5} \|L_n(f, x)\| \geq \frac{3}{5} \|L_n(f)\|_{C[a,b]} \geq \frac{24}{5}$$

eşitsizliği doğru olacaktır. Her $x_1, x_2 \in [a, b]$ ve $t > 0$ için

$$\begin{aligned} \|g(x_1) + tg(x_2)\| - \|g(x_1)\| &\geq t(\|g(x_1)\| - \|g(x_1) - g(x_2)\|) \\ &\geq t(\mu\|w\| - 2\|f(x_1)\| - \|f(x_2)\|) \\ &\geq t(\mu - 3) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur. Böylece $g \in K^{-1}$ dır. Dolayısıyla $L_n(g, x) \in K^{-1}$ olur ki bu bir çelişkidir. Çünkü

$$\begin{aligned} \|L_n(g, x) + 4L_n(g, z)\| - \|L_n(g, x)\| &\leq 6\mu\|L_n(e_0 w) - e_0 w\|_{C[a,b]} - \|\mu w - L_n(f, x)\| \\ &< 6\mu\rho - \frac{4}{5} \|L_n(f, z) - L_n(f, x)\| \end{aligned}$$

$$\leq \|L_n(f, x)\|_{C[a,b]} \left(6\rho - \frac{1}{40}\right)$$

$$\leq 0$$

eşitsizliği yazılabilir.

Bu çelişkilerden her iki durumda da

$$\|L_n(f)\|_{C[a,b]} \leq 8$$

olduğu elde edilir. $\|f\|_{C[a,b]} \leq 1$ keyfi olarak verildiğinden teorem kanıtlanmış olur.

Teorem 1.1.16 (Popoviciu Teoremi)

$f(x)$ sürekli fonksiyon ve $\omega(\delta)$, $f(x)$ fonksiyonunun süreklilik modülü olsun. Bu durumda

$$|f(x) - B_n(x)| \leq \frac{5}{4} \omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (1.24)$$

eşitsizliği geçerlidir (Lorentz, 1953).

Kanıt

$\delta > 0$ ve $[0,1]$ aralığındaki herhangi bir x_1, x_2 için $\lambda = \lambda(x_1, x_2; \delta)$ tamsayı $[|x_1 - x_2|\delta^{-1}]$; $f(x_1) - f(x_2)$ farkı $< \delta$ uzunluk aralıklarıyla $f(x)$ fonksiyonunun $\lambda + 1$ farklarının toplamıdır. Bu nedenle

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq (\lambda + 1)\omega(\delta) \quad (1.25)$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} |f(x) - B_n(x)| &\leq \sum_{v=0}^n \left|f(x) - f\left(\frac{v}{n}\right)\right| p_v(x) \\ &\leq \omega(\delta) \sum_{\lambda \geq 1}^n \left\{1 + \lambda\left(x, \frac{v}{n}; \delta\right)\right\} p_v = \omega(\delta) \left\{1 + \sum_{\lambda \geq 1} \lambda\left(x, \frac{v}{n}; \delta\right) p_v\right\} \\ &\leq \omega(\delta) \left\{1 + \delta^{-1} \sum_{\lambda \geq 1} \left|x - \frac{v}{n}\right| p_v\right\} \leq \omega(\delta) \left\{1 + \delta^{-2} \sum_{v=0}^n \left(\frac{v}{n} - x\right)^2 p_v\right\} \end{aligned}$$

$$\leq \omega(\delta)\{1 + (4n\delta^2)^{-1}\}$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ seçilerek (1.24) elde edilir.

C sabitinin en küçük değeri

$$|f(x) - B_n(x)| \leq C\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (1.26)$$

her f fonksiyonu için doğrudur ve her n bilinmemektedir; her durumda $C < 5/4$ vardır.

Ayrıca, aşağıdaki örnekte görüldüğü gibi $C \geq 1$ 'dir. $\delta_n = o(n^{-\frac{1}{2}})$ olsun ve $f_n(x)$ 'in x_0 , $0 < x_r < 1$ değerinde sıfıra, $[0, x_0 - \delta_n]$ ve $[x_0 + \delta_n]$ de 1 e eşit olan fonksiyon olduğunu varsayalım ve $[0,1]$ in geri kalanında doğrusal olsun. Büyük n için f_n fonksiyonunun $\omega\left(n^{-\frac{1}{2}}\right) = 1$ dir. Ayrıca,

$$|f_n(x_0) - B_n(x_0)| = B_n(x_0) \geq \sum_{\left|\frac{v}{n} - x_0\right| \geq \delta_n} p_v(x_0) = 1 - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \rightarrow 0$$

geçerlidir. Bu nedenle (1.26) $C < 1$ ise doğru olamaz.

Dolayısıyla $\omega(\delta)$ fonksiyonu, (1.26) da daha hızlı sıfıra yaklaşan başka bir fonksiyonla değiştirilemez. Bu aynı zamanda tek bir sürekli fonksiyon örneği ile de gösterilebilir. Sabit $0 < x_0 < 1, 0 < \alpha \leq 1$ olan $f(x) = |(x - x_0)|^\alpha$ işlevi $\text{Lip}\alpha$ sınıfına aittir. $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ olmak üzere $\omega(\delta) = \delta^\alpha$ olsun, belirli bir sabit $C > 0$ için

$$|f(x_0) - B_n(x_0)| = B_n(x_0) = \sum_{v=0}^n \left|\frac{v}{n} - x_0\right|^\alpha p_v(x_0) \geq n^{-\frac{1}{2}\alpha} \sum_{\left|\frac{v}{n} - x_0\right| \geq n^{-1/2}} p_v(x_0) \cong Cn^{-\frac{1}{2}\alpha}$$

ifadesi elde edilir.

Aşağıda q -analiz için gerekli olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 1.1.19

q pozitif bir gerçel sayı olmak üzere, negatif olmayan bir k sayısının q -genellemesi

$$[k]_q = \begin{cases} \frac{1 - q^k}{1 - q}, & q \neq 1 \\ k, & q = 1 \end{cases} \quad (1.27)$$

şeklinde tanımlanır (Andrews vd., 1999).

$k = 1, 2, 3, \dots, n$ için $[k]_q$;

$$[k]_q = \{1, \quad 1 + q, \quad 1 + q + q^2, \dots, 1 + q + q^2 + q^3, \dots, 1 + q + \dots + q^{n-1}\}$$

şeklinde de gösterilir.

Tanım 1.1.20

q -faktöriyel

$$[k]_q! = \begin{cases} [k]_q [k-1]_q \cdots [1]_q, & k = 1, 2, \dots \\ 1, & k = 0 \end{cases} \quad (1.28)$$

şeklinde tanımlıdır (Andrews vd., 1999).

Tanım 1.1.21

q -binom katsayısı;

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!} \quad (n \geq k \geq 0) \quad (1.29)$$

şeklinde tanımlanır (Andrews vd., 1999).

Teorem 1.1.17 (q-pascal kuralı)

$1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere q -binom katsayıları için;

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \quad (1.30)$$

ve

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

eşitlikleri geçerlidir (Goodman vd., 1999).

Teorem 1.1.18

$yx = qxy$, $xq = qx$, $yq = qy$ eşitliklerini sağlayan komütatif q -binom formülü

$$(x + y)^n = \sum_{j=0}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q y^{n-j} x^j \quad (1.32)$$

şeklinde verilir (Goodman vd., 1999).

Sonuç 1.1.2

Bir q parametresi için

$$yx = qxy \text{ , } xq = qx \text{ , } yq = qy$$

olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1-x)^{n-k} = 1 \quad (1.33)$$

ve

$$(x + xy)^n = x^n (1 + y)(1 + qy) \dots (1 + q^{n-1}y) \quad (1.34)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Uyarı 1.1.9

q pozitif gerçel sayıları için

$$\text{i) } (1 - x)^{n-k} = \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) \quad (1.35)$$

$$\text{ii) } \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{s=0}^{n-k-1} (1 - q^s x) = 1 \quad (1.36)$$

$$\text{iii) } \frac{[k]_q}{[n]_q} = \frac{q[k-1]_q + 1}{[n]_q} \quad (1.37)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 1.1.22

$$(x, q)_n = \prod_{s=0}^{n-1} (1 - q^s x) \quad (1.38)$$

ve

$$\frac{1}{(x, q)_n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k, \quad |x| < 1 \quad (1.39)$$

olup, $k \geq 0$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Andrews vd., 1999).

$$[k]_q = q[k-1]_q + 1 \quad (1.40)$$

$$[k]_q = q^2[k-2]_q + q + 1 \quad (1.41)$$

$$[k]_q = q^3[k-3]_q + q^2 + q + 1 \quad (1.42)$$

Tanım 1.1.23

$I^2 = [0, A] \times [0, A]$ olmak üzere $C(I^2)$, I^2 üzerinde tanımlı gerçel değerli sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. $C(I^2)$ uzayı;

$$\|f\|_{C(I^2)} = \max_{(x,y) \in I^2} |f(x, y)|$$

normu ile bir Banach uzayıdır (Doğru and Gupta, 2006).

Tanım 1.1.24

$(f_{n,m})$, $C(I^2)$ üzerinde bir fonksiyon dizisi olmak üzere

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|f_{n,m} - f\|_{C(I^2)} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \max_{(x,y) \in I^2} |f_{n,m}(x, y) - f(x, y)| = 0$$

koşulu sağlanıyorsa $(f_{n,m})$ fonksiyon dizisi I^2 üzerinde f ye düzgün yakınsar denir (Doğru and Gupta, 2006).

Teorem 1.1.19 (Volkov Teoremi)

D, I^2 de kompakt bir bölge, $C(D)$, bu D bölgesinde tanımlı sürekli ve gerçel değerli fonksiyonların kümesi ve $L_{m,n}(f(t,s);x,y)$, $C(D)$ üzerinde tanımlı doğrusal pozitif bir operatörler dizisi olsun. $f_0 = e_{00}(t,s) = 1$, $f_1 = e_{10}(t,s) = t$, $f_2 = e_{01}(t,s) = s$ ve $f_3 = e_{20}(t,s) + e_{02}(t,s) = t^2 + s^2$

olmak üzere $(L_{m,n})$ doğrusal pozitif operatörler dizisi

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|L_{m,n}(f_i; x, y) - f_i(x, y)\|_{C(D)} = 0 \quad i = 0,1,2,3 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

koşullarını sağlıyorsa bu durumda her $f \in C(D)$ için D üzerinde

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|L_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)\|_{C(D)} = 0 \quad (m, n \rightarrow \infty)$$

eşitliği sağlanır (Volkov, 1957).

Tanım 1.1.25

$\delta_1, \delta_2 > 0$ ve $f \in C(I^2)$ olmak üzere, iki değişkenli fonksiyonlar için süreklilik modülü

$$\omega(f; \delta_1, \delta_2) = \sup\{|f(t,s) - f(x,y)| : (t,s), (x,y) \in I^2, |t-x| \leq \delta_1, |s-y| \leq \delta_2\}$$

şeklinde tanımlıdır. Her $f \in C(I^2)$ için

$\delta_1, \delta_2 \rightarrow 0$ için $\omega(f; \delta_1, \delta_2)$ monoton olduğundan

$$|f(t,s) - f(x,y)| \leq \omega(f; |t-x|, |s-y|)$$

$$\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left(\frac{|t-x|}{\delta_1} + 1 \right) \left(\frac{|s-y|}{\delta_2} + 1 \right) \quad (1.43)$$

eşitsizliği geçerlidir (Stancu, 1972), (Barbosu, 2000).



BÖLÜM 2

TEK DEĞİŞKENLİ MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ

1960'da Meyer-König ve Zeller, Bernstein kuvvet serileri yardımıyla bir doğrusal pozitif operatörler dizisi tanıttı. Cheney ve Sharma 1964 te bu operatörleri modifiye etti. Daha sonra Alkamade 1984 te bu modifikasyon için $M_n(e_2, x)$ i açık olarak hesaplayabilmiştir.

Burada Meyer-König ve Zeller' in tanımladığı operatör hatırlatılarak bu operatörün doğrusallığı ve pozitifliği gösterilecektir.

$a \in [0,1]$ ve $f \in C[0, a]$ olsun.

$$M_n(f, x) = \begin{cases} (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ f(1), & x = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (1.1)$$

şeklinde tanımlanan operatör Meyer-König ve Zeller operatörüdür (Meyer-König and Zeller, 1960).

(1.1) ile verilen $M_n(f, x)$ MKZ operatörleri doğrusal ve pozitifdir.

i) Gerçekten $M_n(f, x)$ in doğrusallığı için $0 < a < 1$ olsun, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, a]$ için;

$$\begin{aligned} M_n(\alpha f + \beta g, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) + \beta g\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &\quad + (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \beta g\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha(1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\
&+ \beta(1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\
&= \alpha M_n(f, x) + \beta M_n(g, x)
\end{aligned}$$

olup $M_n(f, x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_n(f, x)$ pozitiftir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$$M_n(f, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \quad (x \in [0,1); n \in \mathbb{N})$$

olduğundan $x \in [0, a], 0 < a < 1$ için

$$(1-x)^{n+1} \geq 0, \binom{n+k}{k} \geq 0$$

ve

$$f \geq 0 \text{ olduğundan } f\left(\frac{k}{n+k+1}\right) \geq 0$$

bulunur ki bu da $M_n(f, x)$ operatörünün pozitif olması demektir.

2.1 Cheney ve Sharma' nın MKZ Operatörüyle İlgili Çalışmaları

Aşağıdaki teoremden Cheney ve Sharma tarafından kanıtlanan $M_n(f, x)$ operatörünün monotonluğu ile ilgili özellik verilecektir.

İlk olarak Cheney ve Sharma' nın Meyer-König ve Zeller' in tanımladığı MKZ operatöründe $f\left(\frac{v}{v+n+1}\right)$ yerine $f\left(\frac{v}{v+n}\right)$ olarak modifiye ettikleri operatörün doğrusal ve pozitif olduğu gösterilecektir.

Tanım 2.1.1

$D[0,1]; [0,1)$ üzerinde tanımlanan gerçel fonksiyonlar kümesi olsun. Bu durumda $D[0,1)$ üzerinde M_n MKZ operatörleri şu şekilde tanımlıdır:

$$M_n(f, x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right) \quad (x \in [0,1]; n \in \mathbb{N}) \quad (2.1)$$

$$M_n(f, 1) = f(1) \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada $f(1)$ var ve $f, 1'$ de soldan sürekli iken

$$\lim_{x \uparrow 1} (M_n f)(x) = f(1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

eşitliğinin geçerli olması ile $M_n(f, 1)$ tanımlıdır (Cheney and Sharma, 1964).

Lemma 2.1.1

(2.1) ile verilen MKZ operatörleri doğrusal ve pozitifdir.

Kanıt

i) Gerçekten $M_n(f, x)$ in doğrusallığı için $0 < a < 1$ olsun, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, a]$ için;

$$\begin{aligned} M_n(\alpha f + \beta g, x) &= (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{k}{n+k}\right) + \beta g\left(\frac{k}{n+k}\right) \right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &\quad + (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= \alpha (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &\quad + \beta (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\ &= \alpha M_n(f, x) + \beta M_n(g, x) \end{aligned}$$

olup $M_n(f, x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_n(f, x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$$M_n(f, x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right) (x \in [0,1]; n \in \mathbb{N})$$

olduğundan $x \in [0, a]$ için

$$(1 - x)^{n+1} \geq 0, \binom{n+k}{k} \geq 0$$

ve

$$f \geq 0 \text{ olduğundan } f\left(\frac{k}{n+k}\right) \geq 0$$

bulunur ki bu da $M_n(f, x)$ operatörünün pozitif olması demektir.

Lemma 2.1.2

Her $x \in [0,1)$ ve $i = 0,1$ için; $e_i: x \rightarrow x^i$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (2.1) ile verilen MKZ operatörleri için

$$i) M_n(e_0, x) = 1$$

ve

$$ii) M_n(e_1, x) = x \tag{2.3}$$

eşitlikleri sağlanır (Cheney and Sharma, 1964).

Kanıt

$$M_n(f, x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{n+v}{v} x^v$$

eşitliği için

$$\frac{1}{(1 - x)^{n+1}} = \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{n+v}{v} x^v$$

seri açılımı kullanılarak

$$\begin{aligned} \text{i) } M_n(f, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} 1 \cdot \binom{n+v}{v} x^v \\ &= (1-x)^{n+1} \cdot (1-x)^{-n-1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } M_n(f, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{v}{v+n} \binom{n+v}{v} x^v \\ &= (1-x)^{n+1} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^k \frac{v}{v+n} \frac{(n+v)(n+v-1)!}{n! v(v-1)!} x^v \right) \\ &= (1-x)^{n+1} x \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=1}^k \frac{(n+v-1)!}{n! (v-1)!} x^{v-1} \right) \\ &= (1-x)^{n+1} x \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{v=0}^{k+1} \binom{n+v}{v} x^v \right) \\ &= (1-x)^{n+1} x \sum_{v=0}^{\infty} \binom{n+v}{v} x^v \\ &= (1-x)^{n+1} x (1-x)^{-n-1} \\ &= \frac{(1-x)^{n+1}}{(1-x)^{n+1}} x \\ &= x \end{aligned}$$

eşitlikleri kolayca elde edilir.

Teorem 2.1.1

f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $M_n(f, x)$ MKZ operatör dizisi azalmayıdır (Cheney and Sharma, 1964).

Kanıt

f fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0$ ve $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ olmak üzere

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$M_n(f, x) \geq M_{n+1}(f, x)$$

olduğu gösterilmelidir.

$$M_n(f, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} x^v$$

ve

$$M_{n+1}(f, x) = (1-x)^{n+2} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} x^v$$

olduğundan

$$\begin{aligned} M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} x^v \\ &\quad - (1-x)^{n+2} \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} x^v \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. İki toplam $(1-x)^{n+1}$ ortak parantezine alınırsa,

$$\begin{aligned} M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{v=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} - (1-x) f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} \right) x^v \\ &= (1-x)^{n+1} \left\{ \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} x^v - \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} x^v \right. \\ &\quad \left. + x \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} x^v \right\} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$v = 0$ için açıkça

$$f(0) \binom{n}{0} - f(0) \binom{n+1}{0} = 0$$

eşitliği geçerli olduğundan son eşitlik

$$\begin{aligned}
M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} x^v \\
&\quad - \sum_{v=1}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} x^v \\
&\quad + x \sum_{v=0}^{\infty} f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} x^{v+1}
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Eşitliğin sağ tarafındaki son toplamda $v \rightarrow v-1$ alınırsa toplamdaki terim

$$\sum_{v=1}^{\infty} f\left(\frac{v-1}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} x^v$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda f fonksiyonunun konveksliğinden

$$\begin{aligned}
M_n(f; x) - M_{n+1}(f; x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} \left(f\left(\frac{v}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} - f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \binom{v+n+1}{v} \right. \\
&\quad \left. + f\left(\frac{v-1}{v+n}\right) \binom{v+n}{v} \right) x^v
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$M_n(f; x) - M_{n+1}(f; x) > 0$$

elde edilir. Burada $M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x)$ farkının durumunu açıkça göstermek için α_1, α_2 yukarıda belirtilen koşulları sağlamak üzere her v için

$$\alpha_1 = \binom{v+n+1}{v}^{-1} \binom{v+n}{v-1},$$

$$\alpha_2 = \binom{v+n+1}{v}^{-1} \binom{v+n}{v}$$

$$x_1 = \frac{v-1}{v+n}$$

ve

$$x_2 = \frac{v}{v+n}$$

olarak alınsın. Açıkça α_1 ve α_2 negatif değeri almaz ve $\alpha_1 + \alpha_2$ toplamı için

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\frac{(v+n)!}{(n+1)!(v-1)!}}{\frac{(v+n+1)!}{v!(n+1)!}} + \frac{\frac{(v+n)!}{n!v!}}{\frac{(v+n+1)!}{v!(n+1)!}} = \frac{v}{v+n+1} + \frac{n+1}{v+n+1} = 1$$

eşitliği yazılabilir. $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ için de

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \frac{v}{v+n+1} \frac{v-1}{v+n} + \frac{n+1}{v+n+1} \frac{v}{v+n} = \frac{v}{v+n+1}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece f fonksiyonu konveks olduğundan

$$f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

eşitsizliği yardımıyla

$$M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x) \geq 0$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Burada $M_n(f, x) = M_{n+1}(f, x)$ durumunun yalnızca $f\left(\frac{v}{v+n+1}\right) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$ için geçerli olduğuna dikkat edilmelidir. Bu ise $M_n(f, x)$ operatör dizisinin azalmayan olması demektir.

Lemma 2.1.3

$|f''| \leq k, 0 \leq \alpha, 0 \leq \beta$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. Bu durumda

$$|\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y)| \leq \frac{1}{4} k(x-y)^2$$

eşitsizliği geçerlidir (Cheney and Sharma, 1964).

Teorem 2.1.2

$|f''| \leq k$ olsun. Bu durumda

$$|M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x)| \leq \frac{1}{4} k(1-x)n^{-2}$$

ve

$$|M_n(f, x) - f(x)| \leq \frac{1}{3} k(1-x)n^{-1}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Cheney and Sharma, 1964).

Kanıt

f konveks olduğunda $M_n(f, x)$ in monotonluğuna ilişkin teoremden

$$M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} \binom{v+n+1}{v} [\alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) - f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)] x^v$$

yazılabilir. Yukarıdaki lemma uygulanıp x_1 ile x_2 için ifadeler eklenirse

$$\begin{aligned} |M_n(f, x) - M_{n+1}(f, x)| &\leq (1-x)^{n+1} \sum_{v=1}^{\infty} \binom{v+n+1}{v} \frac{k}{4} (x_1 - x_2)^2 x^v \\ &\leq (1-x)^{n+1} \frac{k}{4} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(v+n+1)x^v}{(v+n)(n^2+n)} \binom{v+n-1}{v} \\ &\leq \frac{k}{4n^2} (1-x) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. İkinci eşitsizlik

$$\begin{aligned} |f(x) - M_n(f, x)| &\leq \sum_{v=n}^{\infty} |M_{v+1}(f, x) - M_v(f, x)| \\ &\leq \frac{k}{4} (1-x) \sum_{v=n}^{\infty} \frac{1}{v^2} \\ &\leq \frac{k}{3n} (1-x) \end{aligned}$$

eşitsizliğinden kolayca elde edilir.

2.2 Lupaş ve Müller' in MKZ Operatörüyle İlgili Çalışmaları

$K = [0,1]$ ve K üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı $C(K)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(K)$ için n .MKZ operatörü

$$m_{nk}(x) := (1-x)^{n+1}x^k \binom{n+k}{k}$$

ve n .Bernstein kuvvet serisi yardımıyla $0 \leq x < 1$ olmak üzere

$$M_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) f\left(\frac{k}{n+k}\right) \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.

$K' = [0,1)$ olmak üzere bu operatör $C(K)$ uzayından $C(K')$ uzayına dönüşüm sağlar. $M_n(f, 1)$ Meyer-König and Zeller (1960) tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Meyer-König and Zeller, 1960).

$$M_n(f, 1) := \lim_{x \uparrow 1} M_n(f, x) = f(1) \quad (2.5)$$

M_n in normu;

$$\|M_n\| := \sup_{\|f\| \leq 1} \|M_n f\| = 1$$

eşitliği ile belirlidir.

Uyarı 2.2.1

Meyer-König ve Zeller tarafından $e_i(x) := x^i$ olmak üzere Korovkin Teoreminin koşulları olan her $n = 1, 2, \dots$ ve $i = 0, 1$ için

$$M_n e_i = e_i, \quad (2.6)$$

eşitlikleri kolayca elde edilebilmiştir.

Ancak $i = 2$ için bu tarzda bir eşitlik elde edilememiş fakat her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n(x)$ fonksiyonu

$$|R_n(x)| \leq \frac{8}{27n(n-1)}$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned}
M_n(e_2, x) - e_2(x) &= x(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k+1} m_{n-1,k}(x) \\
&= \frac{x(1-x)^2}{n-1} \left[\sum_{k=0}^{\infty} m_{n-2,k}(x) - 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n+k+1} m_{n-2,k}(x) \right] \\
&= \frac{x(1-x)^2}{n} - R_n(x)
\end{aligned}$$

şeklinde bir ifade elde edilmiştir. Böylece $n \rightarrow \infty$ iken $i = 2$ için

$$M_n(e_2, x) = e_2(x) + \frac{x(1-x)^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (2.7)$$

eşitliği sağlanmıştır.

Uyarı 2.2.2

$t = 0, 1, \dots, n = 1, 2, \dots$, ve $x \in K'$ olsun. Müller (1967), Müller (1968) Bernstein kuvvet serileri ile bağlantılı olarak kullanışlı bir eşitlik vermiştir (Müller, 1967), (Müller, 1968).

$$S_{t,n}(x) := \frac{1}{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{nx}{1-x}\right)' m_{nk}(x) \quad (2.8)$$

Burada

$$S_{0,n}(x) = \frac{1}{1-x},$$

$$S_{1,n}(x) = \frac{x}{(1-x)^2},$$

eşitlikleri kolayca hesaplanabilir.

$t \geq 2$ için $S_{t,n}(x)$ i hesaplamak amacıyla aşağıdaki rekürans bağıntısı kullanılır.

$$S_{t+1,n}(x) = \frac{ntx}{(1-x)^2} S_{t-1,n}(x) + x \frac{d}{dx} S_{t,n}(x),$$

Ayrıca t üzerinden tümevarım hesabıyla

$$0 \leq S_{2t,n}(x) \leq \frac{W_n(2t)n^t}{(1-x)^{2t+1}}, \quad x \in K' \quad (2.9)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu gösterilebilir.

Buradaki $W_n(2t)$; sabit bir t için n de monoton azalan bir fonksiyondur.

Tanım 2.2.1

$C^{(p)}(K)$ uzayı p -kez diferansiyellenebilir fonksiyonların doğrusal alt uzayı olsun. $\beta \in [1,2]$ ve N pozitif sabit olmak üzere Z_β^N , her $h \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $0 \leq x + 2h \leq 1$ için

$$|f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| \leq N|h|^\beta$$

eşitsizliği sağlayan $C(K)$ daki fonksiyonların doğrusal bir alt uzayı olsun.

$\alpha \in (0,1]$, $f \in C^{(1)}(K)$ ve $f' \in \text{Lip}_M \alpha$ olsun. $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ olmak üzere ortalama değer teoremini ve

$$\begin{aligned} |f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| &= |f'[x + (\theta_1 + 1)h] - f'(x + \theta_2 h)| \cdot |h| \\ &\leq M[(1 + \theta_1 + \theta_2)|h|]^\alpha |h| \\ &< 3M|h|^{\alpha+1}, \end{aligned}$$

eşitsizliğini sağlayan bu fonksiyonlar kısaca $f \in Z_{\alpha+1}^{3M}$ ile gösterilir.

Teorem 2.2.1 (Mamedov Teoremi)

$\mathbb{Q}^{(2)}(x_0)$, $x_0 \in [a, b]$ sabit noktasındaki ikinci türevin bulunduğu $\mathbb{Q}(a, b)$ fonksiyonlarının alt kümesini belirtsin.

$f \in \mathbb{Q}^{(2)}(x_0)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için (L_n) operatörler dizisi $\varphi(n) \neq 0, \varphi(n) \rightarrow \infty$ iken x_0 noktasında

$$L_n(1; x_0) = 1 + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

$$L_n(t; x_0) = x_0 + \frac{\psi_1(x_0)}{\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

$$L_n(t^2; x_0) = x_0^2 + \frac{\psi_2(x_0)}{\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

eşitliklerini sağlasın. Eğer

$$L_n\{(t - x_0)^{2m+2}; x_0\} = o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \quad (n \rightarrow \infty)$$

eşitliğini sağlayan bir m sayısı varsa bu durumda

$$L_n(f; x_0) - f(x_0) = \frac{2\psi_1(x_0)f'(x_0) + \{\psi_2(x_0) - 2x_0\psi_1(x_0)\}f''(x_0)}{2\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

eşitliği sağlanır (Mamedov, 1959).

Uyarı 2.2.3

Mamedov tarafından bazı asimptotik yaklaşım formüllerinin türevi için Teorem 2.2.1 in bazı uygulamaları verilmiştir.

Teorem 2.2.2

Her $f \in C^{(2)}(K)$ fonksiyonu için

$$\|M_n f - f\| \leq \frac{2}{27n} \|f''\| + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (n \rightarrow \infty).$$

eşitsizliği sağlanır (Lupaş and Müller, 1970).

Kanıt

$f \in C^{(2)}(K)$ olsun. Kalan terimin normu doğrusal pozitif operatör dizilerinin yaklaşımının asimptotik değeri ile ilgili yukarıdaki Mamedov (1959) teoremi kullanılarak hesaplanacaktır (Mamedov, 1959) (Schurer, 1965) (Müller, 1967). $x \in K'$ sabit bir nokta

$$\Omega_j(t) := |t - x|^j, j = 0, 1, \dots, \quad (2.10)$$

olmak üzere $\varphi(n)$ dizisi

$\varphi(n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$ ve $m > 1$ tamsayısı için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) M_n(\Omega_{2m}, x) = 0, \quad (2.11)$$

eşitliğini sağlayan bir dizi olsun.

Ayrıca M_n operatörleri $n \rightarrow \infty$ iken

$$M_n(e_0, x) = e_0(x) + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

ve her $i = 1, 2$ için

$$M_n(e_i, x) = e_i(x) + \frac{\varrho_i(x)}{\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right)$$

özelliklerine sahip olsun. Bu durumda

$$M_n(f, x) - f(x) = \frac{2f'(x)\varrho_1(x) + f''(x)[\varrho_2(x) - 2x\varrho_1(x)]}{2\varphi(n)} + o\left(\frac{1}{\varphi(n)}\right) \quad (2.12)$$

eşitliği geçerlidir. (2.6) ve (2.7) yi kullanarak

$$\varrho_1(x) = 0,$$

$$\varrho_2(x) = x(1-x)^2,$$

$$\varphi(n) = n$$

eşitlikleri yazılabilir. Üstelik

$$M_n(\Omega_4, x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{nk}(x) \Omega_4\left(\frac{k}{n+k}\right),$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$\frac{k}{n+k} - x = \frac{1-x}{n+k} \left(k - \frac{nx}{1-x}\right)$$

eşitliği (2.9) da kullanılarak

$$\begin{aligned}
\varphi(n)M_n(\Omega_4, x) &\leq \frac{\varphi(n)(1-x)^4}{n^4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{nx}{1-x}\right)^4 m_{nk}(x) \\
&= \varphi(n) \frac{(1-x)^5}{n^4} S_{4,n}(x) \\
&\leq \frac{W_n(4)}{n^3}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Yani (2.11) koşulu $m = 2$ için de sağlanmıştır. Dolayısıyla (2.12) denkleminde

$$M_n(f, x) - f(x) = \frac{x(1-x)^2 f''(x)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \rightarrow \infty) \quad (2.13)$$

eşitliği geçerlidir. Son olarak

$$x(1-x)^2 \leq \frac{4}{27}$$

eşitsizliği ve (2.13) eşitliğinin $x = 1$ için de doğru olmasından kanıt tamamlanmış olur.

Elde edilen bu sonuç Cheney and Sharma (1964) nın elde ettiği sonuçtan daha kesin bir sonuçtur.

Dikkat edilmelidir ki Teorem 2.2.2 de her $f'' \neq 0$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M_n(f, x)$ doğrusal pozitif dizisi ile $f \in C^{(2)}(K)$ e yaklaşımın derecesi $O(n^{-1})$ dir.

Aşağıda genel bir doğrusal pozitif operatör dizisi için iki genel teorem verilecektir.

Teorem 2.2.3

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $L_n: C(K) \rightarrow C(K)$ doğrusal pozitif dizisi için $L_n e_0 = e_0$ sağlansın. Herhangi bir $\delta > 0$ için f nin $\omega(f, \delta)$ süreklilik modülü olsun. Ω_{2m} , (2.10) da tanımlandığı şekilde olmak üzere

$$\|L_n f - f\| \leq \inf_{m=1,2,\dots} \{1 + \delta^{-2m} \|L_n(\Omega_{2m}, x)\|\} \omega(f, \delta) \quad (2.14)$$

eşitsizliği sağlanır (Lupaş and Müller, 1970).

Kanıt

λ gerçel bir pozitif sayısı için $\llbracket \lambda \rrbracket$, λ nın tam kısmını belirtmek üzere, süreklilik modülünün sağladığı

$$\omega(f; \lambda \delta) \leq (1 + \llbracket \lambda \rrbracket) \omega(f; \delta),$$

eşitsizliği kullanılacaktır. Keyfi bir $x \in K$ için

$$F(t) := f(t) - f(x),$$

$$e(t) := t - x,$$

$$\lambda(t) := \frac{|e(t)|}{\delta}, \quad (\delta > 0)$$

tanımlamaları yapılsın. Burada

$$|L_n f - f| \leq L_n(|F|, x) \leq \omega(f; \delta) \llbracket 1 + L_n(\llbracket \lambda \rrbracket, x) \rrbracket \quad (2.15)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Dikkat edilmelidir ki her $\lambda < 1$ için $\llbracket \lambda \rrbracket = 0$ olduğundan L_n nin monoton artan bir operatör olduğunu dikkate alınarak

$$L_n(\llbracket \lambda \rrbracket, x) \leq L_n(\lambda, x) \leq L_n(\lambda^2, x) \leq \dots \leq L_n(\lambda^{2m}, x) \leq L_n(\lambda^{2m}, x) = \delta^{-2m} L_n(\Omega_{2m}, x)$$

eşitsizliği bulunur. Bu son eşitsizlik (2.15) ve (2.5) eşitsizlikleri birlikte düşünülerek (2.14) elde edilir.

Uyarı 2.2.4

M_n operatörler dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(K)$ fonksiyonu için

$$\|M_n f - f\| \leq \frac{31}{27} \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

eşitsizliği geçerlidir (Lupaş and Müller, 1970).

Kanıt

(2.6) ve

$$\sup_{\substack{n=1,2,\dots \\ x \in [0,1]}} n[M_n(e_2, x) - e_2(x)] = \frac{4}{27}$$

eşitliğinden

$$\begin{aligned} M_n \Omega_2 &= M_n e_2 - 2e_1 M_n e_1 + e_2 M_n e_0 \\ &= M_n e_2 - e_2 \end{aligned}$$

eşitliği vardır, böylece

$$\|M_n \Omega_2\| \leq \frac{4}{27n}$$

eşitsizliği geçerli olacaktır. Bu eşitsizlik (2.5) te yerine yazılır ve $m = 1, \delta = n^{-1/2}$ alınırsa kanıt kolayca elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.4

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C(K) \rightarrow C(K)$ doğrusal pozitif dizisi $i = 0, 1$ için $L_n(e_i, x) = e_i(x)$ eşitliğini sağlayan operatörler dizisi olsun. $f \in C^{(1)}(K)$ olsun. $\omega(f', \delta); f'$ fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere herhangi bir $\delta > 0$ sayısı için

$$\|L_n f - f\| \leq \inf_{m=1,2,\dots} \{ \|L_n(\Omega_2, x)\|^{1/2} + \delta^{-m} \|L_n(\Omega_{m+1}, x)\| \} \omega(f'; \delta). \quad (2.16)$$

eşitliği geçerli olur (Lupaş and Müller, 1970).

Kanıt

Burada Teorem 2.2.3 ün kanıtıyla aynı gösterim kullanılacaktır. $f \in C^{(1)}(K)$ olsun. K deki sabit bir x için

$$\min(x, t) < T = T(x, t) < \max(x, t)$$

olmak üzere

$$F(t) = e(t)f'(x) + e(t)[f'(T) - f'(x)]$$

eşitliği geçerlidir.

L_n operatörleri doğrusal, pozitif ve $L_n(e, x) = 0$ olduğundan

$$F_1(t) := e(t)[f'(T) - f'(x)]$$

olmak üzere

$$|L_nf - f| \leq L_n(|F_1|, x)$$

eşitsizliği kolayca yazılır. Ayrıca yukarıdaki süreklilik modülü özelliğinde $\delta > 0$ olmak üzere

$$\lambda := \frac{|T - x|}{\delta}$$

alınarak

$$L_n(|F_1|, x) \leq \omega(f'; \delta)[L_n(|e|, x) + L_n(|e|, x)[[\lambda]]]$$

eşitsizliği bulunur. Schwarz eşitsizliğinden

$$L_n(|e|, x) \leq \sqrt{(L_n \Omega_2)}$$

durumu geçerli olup böylece

$$L_n(|e|[[\lambda]], x) \leq \lim_{\lambda > 1} L_n(|e|\lambda, x) \leq \dots \leq \lim_{\lambda > 1} L_n(|e|\lambda^m, x) \leq \delta^{-m} L_n(\Omega_{m+1}, x)$$

eşitsizliği bulunur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Uyarı 2.2.5

M_n operatörleri için (2.16) eşitsizliğinde $m = 1$ ve $\delta = n^{-1/2}$ alınsın. $C^{(1)}(K)$ uzayında

$$\|M_nf - f\| \leq \frac{2(2 + 3\sqrt{3})}{27\sqrt{n}} \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği geçerlidir (Lupaş and Müller, 1970).

Elde edilen bu sonuç, Teorem 1.1.6 da verilen Bernstein polinomları için Lorentz (1953) teoremine benzer olduğu için, bu eşitsizliğe M_n operatörleri için Lorentz Teoremi denilebilir (Lorentz,1953), (Lupaş and Müller, 1970).

Uyarı 2.2.6

$f' \in \text{Lip}_M \alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\|M_n f - f\| \leq \frac{2(2 + 3\sqrt{3})}{27} n^{-(\alpha+1)/2} ,$$

eşitsizliği geçerlidir. Yani $M_n(f, x)$ dizisi ile f ye yaklaşımın derecesi en az $(n^{-(\alpha+1)/2})$ dir.

Uyarı 2.2.7

$L: C(K) \rightarrow C(K)$ doğrusal pozitif bir operatör olsun. Freud, f nin aşağıdaki ikinci kısmi süreklilik modülü yardımıyla $\|Lf\|$ düzgün normunu hesaplamıştır (Freud, 1959).

$0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\omega_2(f; \delta) := \max_{\substack{|h| \leq \delta \\ x \in K}} |f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x)| \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlı süreklilik modülü kullanılmıştır.

Teorem 2.2.5

$\omega_2(f; \delta)$, (2.17) de tanımlı $f \in C(K)$ nin ikinci süreklilik modülü olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_n f - f\| \leq \frac{19}{9} \omega_2 \left(f; \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right) ,$$

eşitsizliği geçerlidir (Lupaş and Müller, 1970).

Kanıt

Teoremin kanıtını $K = [0,1]$ aralığı $2j$ çift şerit yerine sadece j bölme olarak değiştirilirse

$$\|Lf\| \leq (\|L\| + j^2 \|L^{(2)}\|) \omega_2 \left(f; \frac{1}{j} \right) , (j = 1, 2, \dots) , \quad (2.18)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Burada $\|L\|$, L operatörünün normudur ancak her $f \in C^{(2)}(K)$ için

$$\|L^{(2)}\| = \sup_{\|f''\| \leq 1} \|Lf\|$$

normu bir yarı normdur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(M_n - I)$ nın normu

$$\|M_n - I\| := \sup_{\|f\| \leq 1} \|M_n f - f\| \leq 2$$

eşitliği ile verilir. $C^{(2)}(K)$ uzayında Teorem 2.2.2 uygulanılarak

$$\|(M_n - I)^{(2)}\| = \sup_{\|f''\| \leq 1} \|M_n f - f\| \leq \frac{1}{9n}$$

eşitsizliği bulunur. Son iki eşitsizliğin (2.18) de yerine yazılması ve $j = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ alınmasıyla istenen sonuç elde edilmiş olur.

Uyarı 2.2.8

Her $f \in Z_\beta^N$ ve $\beta \in [1,2]$ için

$$\|M_n f - f\| \leq \frac{19}{9} N \lfloor n \rfloor^{-\beta/2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Başka bir deyişle bir $f \in Z_\beta^N$ fonksiyonuna $M_n(f, x)$ dizisi ile yaklaşımın derecesi $n^{-\beta/2}$ den azdır.

2.3 Sikkema' nın (1970a) Operatörlerle Asimptotik Yaklaşım İlişkin Çalışması

Sikkema' nın bir sonraki kesimde verilecek olan MKZ operatörleriyle yaptığı çalışmalara geçmeden önce bu kesimde yine Sikkema tarafından herhangi bir operatör için verilen aşağıdaki tanım, teorem ve uyarılar verilecektir.

Tanım 2.3.1

$H^{(s)}(\xi)$ ile, gerçel x ekseninde tanımlanan ve aşağıdaki özelliklere sahip olan tüm gerçel değerli $f(x)$ fonksiyonlarının kümesi belirtilecektir (Sikkema, 1970a).

i) $s \geq 1$ olmak üzere $f(x)$, $x = \xi$ da s kere diferansiyellenebilir,dir,

ii) $f(x)$ x -ekseninin sonlu her alt aralığında sınırlıdır,

iii) $|x| \rightarrow \infty$ iken $f(x) = O|x|^s$ dir.

Teorem 2.3.1

q çift sayısı $q \geq 2$ olacak şekilde verilsin, $n \in \mathbb{N}$ ve $c \leq \xi \leq d$ olmak üzere (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi $L_n: H^{(q)}(\xi) \rightarrow C[c, d]$ olarak tanımlansın. $k \in \{0, 1, \dots, q\}$ için

$$\alpha_{nk}(\xi) = \frac{\psi_k(\xi)}{\varphi(n)} + o \frac{1}{\varphi(n)} \quad (2.19)$$

ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$ ve $\psi_k(\xi)$, n den bağımsız olmak üzere

$$L_n(t^k; \xi) = \xi^k + \alpha_{nk}(\xi) \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlı olsun.

Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için L_n operatörleri $m > q$ olacak şekilde bir çift sayı için $(t - \xi)^m$ e uygulanabilir ve

$$L_n((t - \xi)^m; \xi) = o \frac{1}{\varphi(n)} \quad (n \rightarrow \infty). \quad (2.21)$$

olsun. Her bir $f(x) \in H^{(q)}(\xi)$ için

$$\alpha(\xi) = \sum_{r=0}^q \left\{ \sum_{s=0}^r (-1)^{r-s} \binom{r}{s} \xi^{r-s} \psi_s(\xi) \right\} \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!} \quad (2.22)$$

olmak üzere $n \rightarrow \infty$ iken

$$L_n(f(t); \xi) - f(\xi) = \frac{\alpha(\xi)}{\varphi(n)} + o \frac{1}{\varphi(n)}$$

eşitliği geçerlidir (Sikkema, 1970a)

Kanıt

$f(x) \in H^{(q)}(\xi)$ olduğundan tüm t ler için

$$f(t) = f(\xi) + \sum_{r=1}^q \frac{(t-\xi)^r}{r!} f^{(r)}(\xi) + (t-\xi)^q h(t-\xi) \quad (2.23)$$

olur. Burada $h(u)$ tüm u -ekseninde sınırlı ve $\lim_{u \rightarrow \infty} h(u) = 0$ dır. $h(0) = 0$ tanımlandığında $u = 0$ da sürekli olur. Bunun anlamı her $\varepsilon > 0$ için $|t - \xi| < \eta$ olacak şekilde her t için

$$|h(t - \xi)| < \varepsilon \quad (2.24)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\eta > 0$ var olmasıdır.

$h(u)$ nun tüm u -eksenindeki sınırlılığından her t için $|h(t - \xi)| \leq N$ olacak şekilde bir $N > 0$ sayısının var olduğu görülür.

$$\lambda_n(t) = \begin{cases} 0, & |t - \xi| < \eta \text{ ise} \\ 1, & |t - \xi| \geq \eta \text{ ise} \end{cases}$$

ifadesi yerine yazılırsa $|t - \xi| \geq \eta$ için $|h(t - \xi)| \leq N\lambda_n(t)$ elde edilir. Bu eşitsizlik (2.24) ile birlikte düşünülürse

$$|h(t - \xi)| < \varepsilon + N\lambda_n(t) \quad (2.25)$$

sonucuna ulaşılır. L_n operatörü (2.23) e uygulanırsa

$$L_n(f(t); \xi) - f(\xi)L_n(1; \xi) - \sum_{r=1}^q L_n((t-\xi)^r; \xi) \frac{f^{(r)}(\xi)}{r!} = L_n((t-\xi)^q h(t-\xi); \xi) \quad (2.26)$$

eşitliği elde edilir. Sağ taraf için (2.25) ve L_n operatörünün monotonluğundan

$$\begin{aligned} L_n((t-\xi)^q h(t-\xi); \xi) &\leq \varepsilon L_n((t-\xi)^q; \xi) + N L_n((t-\xi)^q \lambda_n(t); \xi) \\ &\leq \varepsilon L_n((t-\xi)^q; \xi) + Q L_n((t-\xi)^m; \xi) \\ &= \varepsilon \frac{P(\xi)}{\varphi(n)} + Q L_n((t-\xi)^m; \xi) \end{aligned} \quad (2.27)$$

eşitsizliği geçerli olur. Burada Q belirli bir sabittir ve (2.20) ile (2.19) dan

$$P(\xi) = \sum_{s=0}^q (-1)^{q-s} \binom{q}{s} \xi^{q-s} \psi_s(\xi) + o(1)$$

şeklindedir. (2.26) da (2.20) ve (2.19) un uygulanması ve (2.21) ile (2.27) nin kullanılmasıyla $\alpha(\xi)$, (2.22) de tanımlandığı şekilde olmak üzere

$$\left| L_n(f(t); \xi) - f(\xi) - \frac{\alpha(\xi)}{\varphi(n)} + \frac{b_n(\xi)}{\varphi(n)} \right| \leq \frac{P(\xi)}{\varphi(n)} + \frac{c_n(\xi)}{\varphi(n)}$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikte $b_n(\xi)$ ve $c_n(\xi)$, $n \rightarrow \infty$ iken sıfıra yakınsayan dizilerdir.

Uyarı 2.3.1

Teorem 2.3.1 in koşulları altında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) \{L_n(f(t); \xi) - f(\xi)\} = \alpha(\xi)$$

eşitliği geçerlidir (Sikkema, 1970a).

Teorem 2.3.2

Teorem 2.3.1 de (2.19) da

$$\varphi(n) = n, \quad o \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{1}{n^2} \quad (2.28)$$

yazılmasıyla ve m ($m > q$) çift sayısının varlığı ile ilgili koşul yerine

$$L_n((t - \xi)^q; \xi) = o \frac{1}{n^2} \quad (2.29)$$

alınırsa

$$L_n(f(t); \xi) - f(\xi) = \frac{\alpha(\xi)}{n} + o \frac{1}{n^2}$$

eşitliği geçerli olur (Sikkema, 1970a).

Kanıt

(2.19), (2.20) ve (2.28) den (2.26) kullanılarak $n \rightarrow \infty$ iken $d_n(\xi)$ sınırlı olmak üzere

$$\left| L_n(f(t); \xi) - f(\xi) - \frac{\alpha(\xi)}{n} + \frac{d_n(\xi)}{n^2} \right| \leq N L_n((t - \xi)^q; \xi) \quad (2.30)$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.29) nedeniyle (2.30) un sağ tarafı $O \frac{1}{n^2}$ dır. Bu ise teoremi kanıtlar.

Teorem 2.3.3

$q \geq 2$ olacak şekilde bir çift sayı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $c \leq \xi \leq d$ olmak üzere (L_n) doğrusal pozitif operatörler dizisi $L_n: H^{(q)}(\xi) \rightarrow C[c, d]$ olarak tanımlansın. L_n operatörleri $(t - \xi)^{q+1}$ ve $(t - \xi)^{q+2}$ a uygulanabilir ve

$$L_n((t - \xi)^r; \xi) = O \frac{1}{n^{[(r+1/2)]}} \quad (r = 0, 1, \dots, q + 2) \quad (2.31)$$

olsun. Bu durumda her bir $f(t) \in H^{(q)}(\xi)$ için

$$L_n(f(t); \xi) = \sum_{r=0}^q \frac{L_n((t - \xi)^r; \xi)}{r!} f^{(r)}(\xi) + o \frac{1}{n^{\frac{1}{2}q}} \quad (2.32)$$

eşitliği geçerli olur (Sikkema, 1970a).

Uyarı 2.3.2

(2.32) eşitliği aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}q} \left\{ L_n(f(t); \xi) - \sum_{r=0}^q \frac{L_n((t - \xi)^r; \xi)}{r!} f^{(r)}(\xi) \right\} = 0 \quad (2.33)$$

Uyarı 2.3.3

Eğer

$$L_n((t - \xi)^q; \xi) = \frac{c_q(\xi)}{n^{\frac{1}{2}q}} + o \frac{1}{n^{\frac{1}{2}q}} \quad (2.34)$$

ise (2.33) eşitliği aşağıdaki şekilde yazılabilir (Sikkema, 1970a).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2}q} \left\{ L_n(f(t); \xi) - \sum_{r=0}^q \frac{L_n((t - \xi)^r; \xi)}{r!} f^{(r)}(\xi) \right\} = c_q(\xi) \frac{f^{(q)}(\xi)}{q!}.$$

Kanıt

(2.26) ve (2.27) den $m = q + 2$ alınır

$$\left| L_n(f(t); \xi) - \sum_{r=0}^q \frac{L_n((t - \xi)^r; \xi)}{r!} f^{(r)}(\xi) \right| \leq \varepsilon L_n((t - \xi)^q; \xi) + Q L_n((t - \xi)^{q+2}; \xi)$$

eşitsizliği yazılabilir. Teorem 2.3.3 deki (2.31) eşitliğinden Uyarı 2.3.3 kanıtlanmış olur.

2.4 Sikkema' nın (1970b) MKZ Operatörü ile İlgili Çalışmaları

M_n , MKZ Operatörleri (2.1) de tanımlandığı şekilde kullanılacaktır.

Teorem 2.4.1

$f(t) \in B[0,1]$ ve $t = 1$ de soldan sürekli f fonksiyonu için $\xi \in [0,1]$ de f nin 4. türevi sonlu olmak üzere,

$$\begin{aligned} M_n(f(t), \xi) - f(\xi) &= \frac{\xi(1 - \xi)^2}{2n} f''(\xi) + \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{1}{2} \xi(1 - \xi)^2 (2\xi - 1) f''(\xi) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \xi(1 - \xi)^3 (1 - 5\xi) f'''(\xi) + \frac{1}{8} \xi^2(1 - \xi)^4 f^{IV}(\xi) \right\} + on^{-2} \end{aligned} \quad (2.35)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikte f çift ξ de sonlu bir 6. türeve sahipse (2.35) eşitliğindeki on^{-2} yerine On^{-3} gelir (Sikkema, 1970b).

Kanıt, aşağıdaki üç teorem, lemma ve sonuç yardımıyla elde edilir.

Teorem 2.4.2

$K^{(q)}(\xi)$; $q \geq 2$ çift sayısı için $f \in B[0,1]$ olup fazladan $t = 0$ da soldan sürekli ve $\xi \in [0,1]$ için $f^{(q)}(\xi)$ türevleri var olan fonksiyonların bir sınıfı olsun. $L_n: K^{(q)}(\xi) \rightarrow C[0,1]$ doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olmak üzere L_n , $(t - \xi)^{q+1}$ ve $(t - \xi)^{q+2}$ ye uygulanabilir olsun. Bu durumda

$$L_n((t - \xi)^r, \xi) = On^{-(r+1)/2} \quad (r = 0, 1, \dots, q + 2)$$

oluyorsa bu durumda her $f \in K^{(q)}(\xi)$ için

$$L_n(f(t), \xi) = \sum_{r=0}^q \frac{1}{r!} L_n((t - \xi)^r, \xi) f^{(r)}(\xi) + o n^{-\frac{1}{2}q}$$

eşitliği geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Bu teorem Sikkema (1970a) daki Teorem 3 ün bir sonucudur.

Teorem 2.4.3

$\xi \in [0,1]$ olmak üzere $f(t) \in K^{(q+2)}(\xi)$ ve Teorem 1 deki koşullar sağlansın. Bu durumda L_n operatörler dizisi için

$$L_n(f(t); \xi) = \sum_{r=0}^q \frac{1}{r!} L_n((t - \xi)^r; \xi) f^{(r)}(\xi) + O n^{-(\frac{1}{2}q+1)}$$

eşitliği geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Kanıt

Bu teoremin kanıtı Sikkema (1970a) daki Teorem 2 ve Teorem 3 ün kanıtından kolayca elde edilir.

Lemma 2.4.1

$[0,1]$ üzerinde $r = 0,1,2,3,4$ olmak üzere MKZ operatörleri $M_n((t - x)^r, x)$ için aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Sikkema, 1970b).

i) Her $x \in [0,1]$ için $M_n(1, x) = 1$.

ii) Her $x \in [0,1]$ için $M_n(t - x, x) = 0$.

iii) Her $r, n \in \mathbb{N}$ için $M_n((t - 1)^r, 1) = 0$.

iv) Her $x \in [0,1]$ ve $n \geq 3$ için

$$M_n((t - x)^2, x) = \frac{x(1 - x)^2}{n} + \frac{x(1 - x)^2(2x - 1)}{n^2} + O n^{-3}.$$

v) Her $x \in [0,1]$ ve $n \geq 3$ için

$$M_n((t-x)^3, x) = \frac{x(1-x)^3(1-5x)}{n^2} + On^{-3}.$$

vi) Her $x \in [0,1]$ ve $n \geq 3$ için

$$M_n((t-x)^4, x) = \frac{3x^2(1-x)^4}{n^2} + On^{-3}.$$

Kanıt

i) ve ii) $[0,1]$ üzerinde $M_n(1, x) = 1$ ve $M_n(t, x) = x$ olduğundan (Müller, 1967) her $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n(1, x) = 1, M_n(t-x, x) = 0 \quad (2.36)$$

eşitlikleri yazılabilir.

iii) $M_n(f(t), 1) = \lim_{x \uparrow 1} (f(t), x) = f(1)$ olduğundan açıkça her $r, n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n((t-1)^r, 1) = 0 \quad (2.37)$$

eşitliği geçerlidir.

iv) $M_n(1, x) = 1$ ve $M_n(t, x) = x$ olduğundan her $x \in [0,1)$ noktasında $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} M_n((t-x)^2; x) &= M_n(t^2; x) - x^2 \\ &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k^2}{(n+k)^2} - x^2 \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k+1}{n+k+1} - x^2 \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \left\{ \frac{k}{n+k} + \frac{n}{(n+k)(n+k+1)} \right\} - x^2 \\ &= nx(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k)(n+k+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{n+k+1} \\
&= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k+1} - \frac{2}{(n+k-1)(n+k+1)} \right\} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{n-1} \sigma_n(x) \\
&= \frac{x(1-x)^2}{n} + \frac{x(1-x)^2}{n^2} - \sigma_n(x) + O n^{-3}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\sigma_n(x)$;

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= 2x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k-1)(n+k+1)} \\
&= \frac{2x}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{(n+k-1)}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Ayrıca $n \geq 3$ için

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{2x}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k-2} - \frac{3}{(n+k-2)(n+k+1)} \right\} \\
&= \frac{2x(1-x)^3}{(n-1)(n-2)} + O n^{-3} \\
&= \frac{2x(1-x)^3}{n^2} + O n^{-3}
\end{aligned} \tag{2.40}$$

eşitlikleri yazılabilir. Sonuç olarak $[0,1)$ aralığı üzerinde (2.38) - (2.40) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
M_n((t-x)^2, x) &= \frac{x(1-x)^2}{n} + \frac{x(1-x)^2}{n^2} - \frac{2x(1-x)^3}{n^2} + O n^{-3} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{n} + \frac{x(1-x)^2(2x-1)}{n^2} + O n^{-3}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu formül (2.37) nin bir sonucu olarak $[0,1]$ aralığı üzerinde bir noktada doğrudur.

v) $[0,1]$ üzerinde

$$M_n((t-x)^3, x) = M_n(t^3, x) - 3xM_n(t^2, x) + 2x^3, \quad (2.42)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $[0,1)$ aralığı üzerinde aşağıdaki

$$\begin{aligned} M_n(t^3, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k^3}{(n+k)^3} \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{(k+1)^2}{(n+k+1)^2} \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \left\{ \frac{k^2}{(n+k)^2} + \frac{2nk}{(n+k)^2(n+k+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n^2}{(n+k)^2(n+k+1)^2} \right\} \\ &= xM_n(t^2, x) + T_1 + T_2 \end{aligned} \quad (2.43)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Burada T_1 ve T_2 aşağıdaki şekilde ayrı ayrı hesaplanacaktır. T_1 için

$$\begin{aligned} T_1 &= 2nx(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k}{(n+k)^2(n+k+1)} \\ &= 2nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k+1)(n+k+2)} \\ &= 2nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k} - \frac{1}{(n+k)(n+k+1)} \right\} \frac{1}{n+k+2} \\ &= 2x^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{n+k+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2x^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k+1)(n+k+2)} \\
& = 2x^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k-1} - \frac{3}{(n+k-1)(n+k+2)} \right\} \\
& + 2x^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k-1)(n+k-2)} + On^{-3} \\
& = \frac{2x^2(1-x)^2}{n-1} + \frac{6x^2}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{n+k-2} \\
& - \frac{2x^2(1-x)^3}{(n-1)(n-2)} + On^{-3} \\
& = \frac{2x^2(1-x)^2}{n} + \frac{2x^2(1-x)^2}{n^2} - \frac{8x^2(1-x)^3}{n^2} - On^{-3}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

eşitlikleri geçerlidir. Benzer şekilde T_2 için

$$\begin{aligned}
T_2 & = n^2 x(1-x)^{n+1} x \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k)^2(n+k+1)^2} \\
& = nx(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k)(n+k+1)^2} \\
& = nx(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k-1)(n+k-2)(n+k-3)} + On^{-3} \\
& = \frac{x(1-x)^4}{n^2} + On^{-3}
\end{aligned} \tag{2.45}$$

eşitlikleri yazılabilir. (2.38),(2.40),(2.41),(2.43)-(2.45) eşitlikleri birlikte düşünülürse her $x \in [0,1)$ noktası için

$$M_n(t^3, x) = x^3 + \frac{3x^2(1-x)^2}{n} + \frac{x(1-x)^2(1-9x+11x^2)}{n^2} + On^{-3} \tag{2.46}$$

ve

$$M_n((t-x)^3, x) = \frac{x(1-x)^3(1-5x)}{n^2} + On^{-3} \quad (2.47)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu formüller (2.37) nin bir sonucu olarak $[0,1]$ aralığı üzerinde de doğrudur.

vi) Yine $[0,1]$ aralığı üzerinde $(t-x)^4$ için

$$M_n((t-x)^4, x) = M_n(t^4, x) - 4xM_n(t^3, x) + 6x^2M_n(t^2, x) - 3x^4 \quad (2.48)$$

eşitliği geçerlidir. Şimdi öncelikle $[0,1]$ aralığı üzerinde $M_n(t^4, x)$ ifadesi hesaplanacaktır.

Tanımdan

$$\begin{aligned} M_n(t^4, x) &= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k^4}{(n+k)^4} \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \left\{ \frac{k^3}{(n+k)^3} + \frac{3nk^2}{(n+k)^2(n+k+1)^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{3nk}{(n+k)^2(n+k+1)^2} + \frac{n^3}{(n+k)^3(n+k+1)^3} \right\} \\ &= xM_n(t^3, x) + U_1 + U_2 + On^{-3} \end{aligned} \quad (2.49)$$

eşitliği geçerli olup U_1 ve U_2 aşağıdaki şekilde ayrı ayrı hesaplanacaktır. Burada U_1 eşitliği için aşağıdaki

$$\begin{aligned} U_1 &= 3nx(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k^2}{(n+k)^2(n+k+1)^2} \\ &= 3nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k+1}{(n+k+1)(n+k+2)^2} \\ &= 3nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \left\{ \frac{k}{n+k} + \frac{n}{(n+k)(n+k+1)} \right\} \frac{1}{(n+k+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 3nx^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k+3)^2} \\
&+ 3n^2x^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k)(n+k+1)(n+k+2)^2} \\
&= 3nx^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k} - \frac{3}{(n+k)(n+k+3)} \right\} \frac{1}{n+k+3} \\
&+ 3nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k-1)(n+k+2)^2} \\
&= 3x^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{n+k+3} \\
&- 9nx^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k)(n+k+3)^2} \\
&+ 3nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k-1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2}{(n+k-1)(n+k+1)} \right\} \frac{1}{(n+k+2)^2} \\
&= 3x^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+k-1} - \frac{4}{(n+k-1)(n+k+3)} \right\} \\
&- 9x^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k+3)^2} \\
&+ \frac{3n}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{(n+k+2)^2} + On^{-3} \\
&= \frac{3x^3(1-x)^2}{n-1} - 21x^3(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{(n+k-1)(n+k+3)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3nx^2}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{(n+k-2)(n+k+2)} + On^{-3} \\
& = \frac{3x^3(1-x)^2}{n-1} - \frac{21x^3}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{n+k+3} \\
& + \frac{3nx^2}{(n-1)(n-2)} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-3}{k} \frac{x^k}{n+k+2} + On^{-3} \\
& = \frac{3x^3(1-x)^2}{n-1} - \frac{21x^3}{n-1} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} \frac{x^k}{n+k-2} \\
& + \frac{3nx^2}{(n-1)(n-2)} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-3}{k} \frac{x^k}{n+k-3} + On^{-3} \\
& = \frac{3x^3(1-x)^2}{n} + \frac{3x^3(1-x)^2}{n^2} - \frac{21x^3(1-x)^3}{n^2} + \frac{3x^2(1-x)^4}{n^2} + On^{-3} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. U_2 için de

$$\begin{aligned}
U_2 & = 3nx(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{k}{(n+k)^2(n+k+1)^2} \\
& = 3nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \frac{x^k}{(n+k+1)(n+k+2)^2} \\
& = 3nx^2(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k \frac{x^k}{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)} + On^{-3} \\
& = \frac{3x^2(1-x)^3}{(n-1)(n-2)} + On^{-3} \\
& = \frac{3x^2(1-x)^3}{n^2} + On^{-3} \tag{2.51}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olur. (2.46),(2.48)-(2.51) ifadeleri kullanılarak her $x \in [0,1)$ noktası için

$$M_n((t-x)^4, x) = \frac{3x^2(1-x)^4}{n^2} + On^{-3} \quad (2.52)$$

eşitliği yazılabilir. (2.37) nin bir sonucu olarak bu formül $x = 1$ de de doğrudur. Böylece $[0,1]$ deki her nokta için kanıt tamamlanmış olur.

Sonuç 2.4.1

Müller (1967) de $M_n((t-x)^5, x)$ ve $M_n((t-x)^6, x)$ in $[0,1]$ aralığının her noktasında On^{-3} üncü dereceden hesaplarını yapmıştır. Bu sonuç ile (2.27),(2.32),(2.47),(2.52) eşitlikleri ve Teorem 2.4.2 ve 2.4.3 ün uygulanmasıyla aşağıdaki teorem verilebilir (Müller, 1967), (Sikkema, 1970b).

Teorem 2.4.4

$f \in K^{(4)}(\xi)$ olsun. $n \rightarrow \infty$ iken $M_n(f(t), \xi)$ nin $f(\xi)$ ye yaklaşım hızı için asimptotik bağıntı

$$M_n(f(t), \xi) - f(\xi) = \frac{\xi(1-\xi)^2}{2n} f''(\xi) + \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{2} \xi(1-\xi)^2(2\xi-1)f'''(\xi) \right. \\ \left. + \frac{1}{6} \xi(1-\xi)^3(1-5\xi)f'''(\xi) + \frac{1}{8} \xi^2(1-\xi)^4 f^{IV}(\xi) \right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ile verilir. Burada $f \in K^{(6)}(\xi)$ olması durumunda da on^{-2} yerine On^{-3} alınması ile teorem yine geçerli olur (Sikkema, 1970b).

Uyarı 2.4.1

Böylece Teorem 2.4.1 de verilen (2.35) eşitsizliği gösterilmiş olur (Sikkema, 1970b).

Uyarı 2.4.2

$n \in \mathbb{N}$ olsun. $L_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ olan doğrusal pozitif operatör dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde her $n \in \mathbb{N}$ ve $k = 0,1,2$ için

$$L_n(t^k, x) = x^k + \alpha_{nk}(x) \quad (2.53)$$

şeklinde tanımlı olsun. Burada $\xi \in [0,1]$ noktası ve $k = 0,1,2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_{nk}(\xi) = 0 \quad (2.54)$$

eşitliği geçerli olmak üzere $[0,1]$ üzerinde $f(t)$ ve süreklilik modülü $\omega(\delta)$ yardımıyla,

$$|L_n(f(t); \xi) - f(\xi)| \leq |f(\xi)| |L_n(1; \xi) - 1| + \{L_n(1; \xi) + \delta^{-2} L_n((t - \xi)^2; \xi)\} \omega(\delta) \quad (2.55)$$

eşitsizliği geçerlidir. Yani Shisha and Mond (1968) tarafından $L_n(e_i, x) = e_i(x)$ olarak Teorem 1.1.7 de kanıtlanan (2.55) eşitsizliği (2.53) te verilen operatörler için de geçerlidir (Shisha and Mond, 1968), (Sikkema, 1970b).

Sonuç 2.4.2

(2.55) eşitsizliğinde özel olarak M_n MKZ operatörünün alınması durumunda $[0,1]$ üzerinde (2.27) ve (2.53) ün bir sonucu olarak

$$M_n(1, x) = 1, \quad M_n(t, x) = x, \quad M_n((t - x)^2, x) = \alpha_{n2}(x) \quad (2.56)$$

eşitlikleri geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Uyarı 2.4.3

(2.55) eşitsizliğinde M_n operatörünün kullanılmasıyla

$$|M_n(f(t); \xi) - f(\xi)| \leq \{1 + \delta^{-2} \alpha_{n2}(\xi)\} \omega(\delta) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.57)$$

eşitsizliği elde edilebilir.

M_n pozitif bir operatör olduğundan Teorem 2.4.5 te kanıtlanacak olan $\xi \in (0,1)$ için

$$\alpha_{n2}(\xi) > 0 \quad (2.58)$$

eşitsizliği $\xi \in (0,1)$ ve $\delta = \{\alpha_{n2}(\xi)\}^{\frac{1}{2}}$ kullanılırsa (2.55) eşitsizliği

$$|M_n(f(t); \xi) - f(\xi)| \leq 2\omega\left(\{\alpha_{n2}(\xi)\}^{\frac{1}{2}}\right) \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2.59)$$

eşitsizliğine dönüşür. Bu eşitsizlik her $\xi = 0$ için (2.1), (2.2) ve $\omega(0) = 0$ olduğunda doğrudur. Ayrıca $\xi = 1$ olması ve $\alpha_{n2}(1) = 0$ durumunda da (2.59) formülü geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Aşağıdaki teoremde (2.59) dan $\alpha_{n2}(\xi)$ için bir türev hesabı verilecektir.

Teorem 2.4.5

$[0,1]$ üzerinde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq \alpha_{n2}(x) \leq \frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)^2} \quad (2.60)$$

eşitsizliği geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Kanıt

(2.2) nin bir sonucu olarak $x = 1$ de (2.60) eşitsizliği doğrudur. Bu yüzden $x \in [0,1)$ kabul edilsin. Kanıt $n \geq 3$, $n = 1$ ve $n = 2$ şeklinde 3 kısma bölünecektir.

1.Kısım

(2.56) ve (2.38) den $[0,1)$ üzerinde her $n = 3,4, \dots$ için

$$g(t) = 1 - \frac{t}{(n+1-2t)}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \alpha_{n2}(x) &= M_n(t^2; x) - x^2 \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} \frac{x^k}{n+k-1} \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k g\left(\frac{k}{n+k-1}\right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

eşitliği geçerlidir. $y = g(t)$ hiperbolü $t = 0$ doğrusunu $A(0,1/(n+1))$ noktasında keser, bu noktadaki teğetin eğimi;

$$m = -(n-1)/(n+1)^2$$

ye eşittir. Aynı zamanda

$$h(t) = \frac{1}{n+1} - \frac{n-1}{(n+1)^2} t - \frac{t^2}{(n+1)^2} \quad (2.62)$$

olmak üzere $y = h(t)$ parabolü $(0,1]$ üzerinde A da aynı teğete sahiptir ve böylece $n \geq 3$ için

$$h(t) > g(t) \quad (2.63)$$

eşitsizliği geçerli olur. (2.61) ve (2.63) ten $[0,1)$ üzerinde

$$\begin{aligned} \alpha_{n2}(x) &\leq x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k h\left(\frac{k}{n+k-1}\right) \\ &= x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{(n+1)k}{(n+1)^2(n+k-1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2}{(n+1)^2(n+k-1)^2} \right\} \\ &= x(1-x) \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{n-1}{(n+1)^2} x - \frac{1}{(n+1)^2} (x^2 + \alpha_{n-1,2}(x)) \right\} \\ &\leq x(1-x) \left\{ \frac{1}{n+1} - \frac{n-1}{(n+1)^2} x - \frac{x^2}{(n+1)^2} \right\} \\ &= \frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $n \geq 3$ için (2.60) gösterilmiş olur.

2.Kısım

$[0,1)$ aralığı üzerinde $n = 1$ için

$$\begin{aligned} \alpha_{12}(x) &= M_1(t^2; x) - x^2 \\ &= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+1}{k} x^k \frac{k^2}{(k+1)^2} - x^2 \\ &= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{k^2}{k+1} - x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left\{ k-1 + \frac{1}{k-1} \right\} - x^2 \\
&= (1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+1} - x(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+2} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{2} + x^2(1-x)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k+3} \\
&\leq \frac{x(1-x)^2}{2} + x^2(1-x)^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \frac{x^2}{1-x} \right\} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{2} + x^2(1-x)^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \frac{x}{1-x} \right\} \\
&\leq \frac{x(1-x)^2}{2} + x^2(1-x)^2 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{x}{1-x} \right\} \\
&= \frac{x(1-x)^2}{2} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Böylece $[0,1)$ üzerinde $n = 1$ için (2.60) eşitsizliği elde edilir.

3.Kısım

$[0,1)$ aralığı üzerinde $n = 2$ için de

$$\begin{aligned}
\alpha_{22}(x) &= M_2(t^2; x) - x^2 \\
&= (1-x)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{k} x^k \frac{k^2}{(k+2)^2} - x^2 \\
&= (1-x)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{k-1} x^k \frac{k}{k+2} - x^2 \\
&= (1-x)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{k-1} x^k \left\{ \frac{k-1}{k+1} + \frac{2}{(k+1)(k+2)} \right\} - x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(1-x)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+1}{2} \frac{x^k}{(k+1)(k+2)} \\
&= x(1-x)^3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k+3} x^k \\
&= x(1-x)^3 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{4}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{5}{7}x^4 + \dots \right\}
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Böylece $n = 2$ için (2.60) ın sağ tarafı için

$$x(1-x)^3 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{4}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{5}{7}x^4 + \dots \right\} \leq \frac{x(1-x)^2}{3} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{9} \quad (2.64)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada son (2.64) eşitsizliği $x = 0$ için $(0,1)$ aralığında doğru olduğundan her iki taraf $x(1-x)$ e bölünürse $(0,1)$ aralığı üzerinde

$$(1-x)^2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{2}{4}x + \frac{3}{5}x^2 + \frac{4}{6}x^3 + \frac{5}{7}x^4 + \dots \right\} - \frac{1-x}{3} - \frac{x(2-x)}{9} \leq 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlik

$$(1-x) \left\{ \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{3} \right)x + \left(\frac{3}{5} - \frac{2}{4} \right)x^2 + \left(\frac{4}{6} - \frac{3}{5} \right)x^3 + \dots \right\} - \frac{1-x}{3} - \frac{x(2-x)}{9} \leq 0$$

ya da

$$(1-x) \left\{ \frac{1}{6} + \frac{2}{4.5}x + \frac{2}{5.6}x^2 + \frac{2}{6.7}x^3 + \dots \right\} - \frac{2-x}{9} \leq 0$$

şeklinde de yazılabilir. Böylece $(0,1)$ aralığı üzerinde

$$(1-x) \left\{ \frac{1}{6} + \frac{1}{10}x(1+x+x^2+\dots) \right\} - \frac{2-x}{9} \leq 0$$

veya

$$\frac{1}{6}(1-x) + \frac{1}{10}x - \frac{2-x}{9} \leq 0$$

eşitsizlikleri doğrudur. Yani (2.64) eşitsizliğinin doğruluğundan $n = 2$ durumunda da (2.60) eşitsizliği geçerlidir.

Sonuç olarak her $n \in \mathbb{N}$ için (2.60) kanıtlanmış olur.

(2.61) in ilk kısmından açıkça $x \in [0,1]$ için $\alpha_{n2}(x) > 0$ dır. Bu ise Teorem 2.4.5 in kanıtını tamamlar.

Teorem 2.4.6

$f \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda her $x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|M_n(f(t), x) - f(x)| \leq 2\omega \left\{ \sqrt{\frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)^2}} \right\} \quad (2.65)$$

ve

$$|M_n(f(t), x) - f(x)| \leq \left\{ 1 + x(1-x)^2 + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)} \right\} \omega \left((n+1)^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.66)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Kanıt

(2.53) eşitliği her $\xi \in [0,1]$ için sağlansın. Burada L_n yerine M_n operatörleri $M_n(1, x) = 1$, $M_n(t, x) = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t^2, x) = x^2$ eşitlikleri dikkate alınabilir. (2.59) ve (2.60) tan (2.65) hemen vardır.

(2.57) ve (2.60) birlikte dūřünölerek $\delta = (n+1)^{-\frac{1}{2}}$ alınarak (2.66) eřitsizlięi elde edilmiř olur. Dikkat edilmelidir ki Teorem 2.4.6 da hata ξ ve n ye baęlıdır.

şimdi aşağıdaki lemmada türev yardımıyla yalnızca n ye bağlı olan hata hesabı verilecektir.

Lemma 2.4.2

$[0,1]$ üzerinde her $n = 2, 3, \dots$ için

$$n \left\{ \frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)^2} \right\} < \frac{4}{27} \left(1 - \frac{n^2 - 5}{4(n^2 - 1)^2} \right). \quad (2.67)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $n = 1$ için (2.67) nin sol tarafı 0,1113 den daha küçüktür (Sikkema, 1970b).

Kanıt

$x = 0$ ve $x = 1$ için eşitsizlik açıkça geçerlidir. Bu yüzden $x \in (0,1)$ alınsın. Bu durumda

$$l_n(x) := x(1-x)\{(n+1)(1-x) - 2x\}$$

olmak üzere

$$n \left\{ \frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)^2} \right\} < \frac{n}{(n+1)^2} l_n(x) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.68)$$

eşitsizliği yazılabilir. Açıkça $(0,1)$ üzerinde $l_n(x)$ negatif değildir. Bu durumda her $n \geq 2$ için

$$x = (2n - \sqrt{n^2 + 3})/3(n-1)$$

noktasında mutlak maksimumu vardır. (2.68) in sağ tarafındaki bu nokta için

$$\begin{aligned} \frac{n}{(n+1)^2} l_n(x) &= \frac{2n}{27(n^2-1)^2} \left\{ n^3 - 9n + n(n^2+3)(1+3n^{-2})^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &< \frac{2n}{27(n^2-1)^2} \left\{ n^3 - 9n + n(n^2+3) \left(1 + \frac{3}{2}n^{-2} \right) \right\} \\ &= \frac{4}{27} \left(1 - \frac{n^2-5}{4(n^2-1)^2} \right) \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu ise (2.67) yi kanıtlar.

$n = 1$ için benzer metotla (2.67) nin sol tarafının 0,1113 den daha küçük olacağı gösterilebilir. Böylece Lemma 2.4.2 nin kanıtı tamamlanmış olur.

Teorem 2.4.7

$f(t) \in C[0,1]$ olsun. Bu durumda $n = 2, 3, \dots$ olmak üzere $x \in [0,1]$ aralığındaki her nokta için

$$|M_n(f(t), x) - f(x)| < \left\{ 1 + \frac{4}{27} \left(1 - \frac{n^2-5}{4(n^2-1)^2} \right) \right\} \omega \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (2.69)$$

ve

$$|M_1(f(t), x) - f(x)| < 1,1113 \omega(1) \quad (2.70)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Kanıt

(2.54) koşulundan her $\xi \in [0,1]$ noktası için $M_n(1, x) = 1, M_n(t, x) = x$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n(t^2, x) = x^2$ kullanılarak $L_n = M_n$ alınsın. (2.57) ve (2.60) birlikte düşünülerek her $\delta > 0, n \in \mathbb{N}$ için

$$|M_n(f(t), x) - f(x)| \leq \left\{ 1 + \frac{1}{n\delta^2} n \left(\frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{x^2(1-x)(2-x)}{(n+1)^2} \right) \right\} \omega(\delta)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\delta = n^{-\frac{1}{2}}$ alınır ve Lemma 2.4.2 kullanılırsa teoremin kanıtı tamamlanmış olur.

Uyarı 2.4.4

Teorem 2.4.7 den her $f \in C[0,1]$ için $x \in [0,1]$ noktasında

$$|M_n(f(t); x) - f(x)| < 1 \frac{4}{27} \omega \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.71)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu sonuç Teorem 2.4.7 den kesinlikle daha küçük bir sonuç verir. (2.71) de $\leq$ durumu Lupaş and Müller (1970) deki çalışmalarında verilmiştir (Lupaş and Müller, 1970), (Sikkema, 1970b).

2.5 Hölzle' nin MKZ Operatörüne İlişkin Yaptığı Çalışmalar

Tanım 2.5.1

Belirli bir doğrusal pozitif operatörler dizisi L_n için, U_{kx} özdeş dağılımlı rastgele bağımsız değişkenlerin toplamı olmak üzere (D_n) dizisi

$$D_n(L_n, B) := \sup \{ \|L_n f - f\| \omega(f, n^{-1/2})^{-1} : f \in C(B) \}$$

olarak tanımlanır.

Burada $\|\cdot\|$ normu Cebsev-normu ve $B, \mathbb{R}$ içerisinde uygun bir kompakt aralığı belirtmektedir. (D_n) nin yakınsama hızının $O(h(\sqrt{n})^{-1})$ olduğu kanıtlanmıştır, burada h ;

$$(U_{1x} - EU_{1x})^2 h(U_{1x} - EU_{1x})$$

sınırlı olacak şekilde uygun bir fonksiyondur.

Uyarı 2.5.1

Hözlle bu (L_n) doğrusal pozitif operatör dizisini özel olarak $\tilde{M}_n$ MKZ operatör dizisinin bir modifikasyonu içinde uygulamış ve bu operatör için

$$\sup\{D_n(\tilde{M}_n, [0,1]): n \in \mathbb{N}\} = \frac{37 - 16\sqrt{3}}{9}$$

olarak bulmuştur.

Aşağıdaki uyarıda bu kesimde kullanılacak gösterim ve kabuller verilecektir.

Uyarı 2.5.2

$A, \mathbb{R}$ de (sınırlılığı gerekli olmayan) bir aralık olsun. Her $x \in A$ için, $(U_{kx}: k \in \mathbb{R})$ aşağıdaki özelliklere sahip özdeş dağılımlı rastgele değişkenlerin bağımsız bir dizisini gösterecektir.

i) $x \in A$ için $\mu(x) := EU_{1x}$ olsun; μ fonksiyonu A da sürekli, A' nin içinde iki kez diferensiyellenebilirdir ve A' da $\mu' \neq 0$ dır. μ'' de A' nin herhangi bir kompakt alt aralığında sınırlı olup μ nün tersi θ ile gösterilecektir.

ii) $V(x) := E(U_{1x} - \mu(x))^2$ varyansı vardır ve $x \in A'$ için pozitifdir. $1/V$ fonksiyonu A' nin herhangi bir kompakt alt aralığında sınırlıdır.

iii) Aşağıdaki özelliklere sahip bir $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ çift fonksiyonu vardır.

a) $h, \mathbb{R}_+$ da azalmayandır,

b) $\lim_{y \rightarrow \infty} h(y) = \infty$,

c) $y \rightarrow y/h(y)$ fonksiyonu tanımlıdır ve $\mathbb{R}_+$ da azalmayandır,

d) $E(U_{1x} - \mu(x))^2 h(U_{1x} - \mu(x))$, A' nın herhangi bir kompakt alt aralığında sınırlıdır.

iv) U_{1x} in sadece $\mu(A)$ daki değerleri alınacaktır.

Lemma 2.5.1

$n_0 \in \mathbb{N}$ olsun ve her $n \geq n_0$ tamsayısı için g_n , $\mu' > 0$ için artan ve $\mu' < 0$ için azalan $n\mu(A)$ yı A ya dönüştüren bir fonksiyon olsun. g_n nin tersi $\bar{g}_n$ için $(\bar{g}_n(x) - n\mu(x): n \geq n_0)$ dizisi A' nın herhangi bir kompakt alt aralığında düzgün sınırlıdır.

Tanım 2.5.2

(Y_{nx}) rastgele değişkenlerin dizisi

$$Y_{nx} := g_n \left(\sum_{k=1}^x U_{kx} \right), \quad x \in A,$$

olarak tanımlıdır. A nın herhangi bir kompakt alt aralığı üzerinde A nın ∂A sınırındaki bir x noktasına yaklaşırken sıfıra yakınsayan ve

$$nE(Y_{nx} - x)^2 \leq p(x), x \in A, n \geq n_0 \quad (2.72)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $p: A \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır.

Özel olarak $\mu(x) = x$ ise ve $g_n(y) = y/n$ seçilirse $p = V$ olur. Şimdi, A nın kapanışı $\bar{A}$ üzerindeki tüm düzgün sürekli gerçel değerli fonksiyonların uzayı $C_u(\bar{A})$ dan A daki tüm gerçel değerli fonksiyonların $M(A')$ uzayına eşleyen

$$L_n f(x) := E f(Y_{nx}), x \in A', n \geq n_0 \quad (2.73)$$

eşitliği ile doğrusal pozitif operatör dizisi (L_n) tanımlansın. (2.72) den

$$\lim_{x \rightarrow a} L_n f(x) = f(a), a \in \partial A$$

eşitliği geçerlidir. Böylece her $a \in \partial A$ için $L_n: C_u(\bar{A}) \rightarrow M(\bar{A})$ olmak üzere

$$L_n f(a) := f(a)$$

eşitliği tanımlanabilir. f nin süreklilik modülü $\omega(f, \cdot)$ ile belirtilmek üzere $x \in \bar{A}$ için

$$H_n(x) = H_n(L_n, x) := \sup \left\{ |L_n f(x) - f(x)| \omega \left(f, n^{-\frac{1}{2}} \right)^{-1} : f \in C_u(\bar{A}) \right\} \quad (2.74)$$

tanımlaması yapılsın. Tüm f sabit fonksiyonları için $L_n f = f$ olmak üzere, bunlar (2.74) ve devamında dikkate alınmayacaktır. (Walk, 1970) de (2.73) ile tanımlanan herhangi bir L_n operatörü için

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P \left[|Y_{nx} - x| > kn^{-\frac{1}{2}} \right], x \in A' \quad (2.75)$$

eşitliğinin sağlanacağı kanıtlandı.

Önerme 2.5.1

$A' \times A'$ üzerinde fonksiyonların bir (l_n) dizisi

$$l_n(x, y) := \begin{cases} |y - x|, & |y - x| > n^{-\frac{1}{2}} \\ 0, & |y - x| \leq n^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

ve $x \in A'$ için

$$H'_n(x) = H'_n(L_n, x) := 1 + \sqrt{n E l_n(x, Y_{nx})} \quad (2.76)$$

tanımlaması yapılsın. (2.75) ve (2.72) den her $x \in A'$ için

$$H_n(x) \leq H'_n(x) \leq 1 + \sqrt{p(x)} \quad (2.77)$$

eşitsizliği geçerlidir (Hölzle, 1980).

Önerme 2.5.2

$B, \bar{A}$ nın kompakt bir alt aralığı olsun. (2.77) den

$$D_n = D_n(L_n, B) := \sup \{ H_n(x) : x \in B \} \quad (2.78)$$

şeklinde tanımlı (D_n) dizisi sınırlıdır.

$$D = D((L_n), B) := \sup \{ D_n : n \geq n_0 \}$$

şeklinde tanımlansın. D ;

$$\sup\{|L_n f(x) - f(x)|: x \in B\} \leq D\omega\left(f, n^{-\frac{1}{2}}\right), f \in C_u(\bar{A}), n \geq n_0 \quad (2.79)$$

tahminindeki en iyi sabittir (Hölzle, 1980).

Walk merkezi limit teoremini kullanarak, zayıf koşullar altında normal dağılımla bağlantılı olarak D_n nin asimptotik olarak en iyi sabit D^* a yakınsadığını kanıtlayabilmiştir.

Not 2.5.1

$B, \bar{A}$ nın kompakt bir alt aralığı olsun.

$$C_n = C_n(L_n, B) := \sup\{H'_n(x): x \in B \cap A'\} \quad (2.80)$$

tanımlaması yapılsın. (2.77) den $D_n \leq C_n$ eşitsizliği sağlanır. Basit bir hesapla

$$C^* := 1 + (2/\pi)^{1/2} \gamma^{-1} \exp(-\gamma^2/2)$$

olmak üzere

$$C_n = C^* + O\left(h(\sqrt{n})^{-1}\right) \quad (2.81)$$

eşitliği geçerlidir (Hölzle, 1980).

Uyarı 2.5.3

$k \in \mathbb{N}_0$ için $A = [0,1)$ ve $P[U_{1x} = k] = (1-x)x^k$ ise $g_n(y) = y/(n+y)$ alınarak

$$M_n f(x) = (1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

klasik M_n Meyer-König and Zeller (1960) operatörlerine ulaşılır (Meyer-König and Zeller, 1960).

ve $g_n(y) = y/(n+y-1)$ alınarak

$$M_n^* f(x) = (1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k-1}\right), \quad n \geq 2$$

Cheney and Sharma (1964) nın M_n^* modifikasyonu elde edilir ve

$$D^*((M_n), [0,1]) = D^*((M_n^*), [0,1]) = 1.00937 \dots$$

olur (Cheney and Sharma, 1964), (Walk,1970)-(Walk,1980) ve (Hölzle, 1980).

Tanım 2.5.3

MKZ Operatörleri tarafından sürekli fonksiyonların yakınlştırılmasında en iyi sabit olan

$$D((\tilde{M}_n), [0,1]) = \sup \left\{ |\tilde{M}_n f(x) - f(x)| \omega\left(f, n^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} : x \in [0,1], f \in C[0,1], n \in \mathbb{N} \right\}$$

yi hesaplamak için

$$\tilde{M}_n f(x) := M_{n+1}^* f(x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{n} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right), n \in \mathbb{N}$$

şeklinde tanımlansın (Hölzle, 1980).

Bundan sonraki kesimde Bernstein polinomları için Sikkema (1959) ile benzer bir yöntem kullanarak MKZ için en iyi sabit hesaplanacaktır (Sikkema, 1959). C_n için basit bir tahmin elde edilecektir. M_n^* , Cheney ve Sharma modifikasyonu (2.73) ile verilen olasılık gösteriminde $A = [0,1)$ için

$$P[Y_{n+1,x} = g_{n+1}(k)] = p_{nk}(x) := \binom{n+k}{n} (1-x)^{n+1} x^k, k \in \mathbb{N}_0$$

olmak üzere

$$\mu(x) = \frac{x}{1-x}, V(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \theta(y) = \frac{y}{1+y}, g_{n+1}(y) = \frac{y}{n+y}$$

$$\tilde{M}_n f(x) = Ef(Y_{n+1}, x)$$

eşitlikleri geçerli olur. (2.74) ile verilen H_n için

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P \left[|Y_{n+1,x} - x| > kn^{-\frac{1}{2}} \right]$$

eşitliği geçerlidir (Hölzle, 1980).

Uyarı 2.5.4

(2.76) eşitliğine benzer şekilde $H'_n(x)$;

$$H'_n(x) = H'_n(\tilde{M}_n, x) := 1 + \sqrt{nEl_n(x, Y_{n+1,x})}$$

şeklinde tanımlansın. Ayrıca

$C_n = C_n(\tilde{M}_n, [0,1])$ ve $D_n = D_n(\tilde{M}_n, [0,1])$ sırasıyla (2.80) ve (2.78) de olduğu gibi tanımlansın. Şimdi H'_n için bir gösterim verilecektir (Hölzle, 1980).

Tanım 2.5.4

$$q_{nk}(x) := \binom{n+k-1}{n} (1-x)^{n+1} x^k$$

$\llbracket x \rrbracket$, x değerini aşmayan en büyük tamsayıyı, $I_{nm}^{(1)}$ ve $I_{nm}^{(2)}$ ise aralıkları belirtmek üzere

$$I_{nm}^{(1)} := \left[\theta \left(\frac{m-1}{n} \right) - n^{-\frac{1}{2}}, \theta \left(\frac{m}{n} \right) - n^{-\frac{1}{2}} \right), m = \left[n\mu \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \right] + 1, \dots,$$

$$I_{nm}^{(2)} := \left(\theta \left(\frac{m-1}{n} \right) - n^{-\frac{1}{2}}, \theta \left(\frac{m}{n} \right) - n^{-\frac{1}{2}} \right], m = 1, 2, \dots, \left\lceil n\mu \left(1 - n^{-\frac{1}{2}} \right) \right\rceil + 1$$

şeklinde tanımlansın (Hölzle, 1980).

$$Q_{n1}(x) := 0, x \in \left[1 - n^{-\frac{1}{2}}, 1 \right),$$

$$Q_{n1}(x) := q_{nm}(x), x \in I_{nm}^{(1)}$$

$$Q_{n2}(x) := 0, x \in \left(0, n^{-\frac{1}{2}} \right],$$

$$Q_{n2}(x) := q_{nm}(x), x \in I_{nm}^{(2)}$$

tanımlamaları yapılsın (Hölzle, 1980).

Lemma 2.5.2

Yukarıdaki tanımdaki gösterimler dikkate alınarak

$$El_n(x, Y_{n+1,x}) = \sum |x - g_{n+1}(k)| p_{nk}(x)$$

eşitliğinde toplam tüm k ler üzerinden alınıp

$$|x - g_{n+1}(k)| > n^{-\frac{1}{2}}$$

ve

$$(x - g_{n+1}(k))p_{nk}(x) = q_{n,k+1}(x) - q_{nk}(x)$$

durumları göz önüne alınırsa

$$H'_n(x) = 1 + \sqrt{n(Q_{n1}(x) + Q_{n2}(x))}, x \in (0,1)$$

eşitliği geçerlidir (Hölzle, 1980).

Uyarı 2.5.5

q_{nm} , $I_{nm}^{(1)}$ de artan ve $I_{nm}^{(2)}$ de azalan olsun.

$$T_1(t,n) := \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(n+1)\Gamma(t)} \left(1 - \frac{t}{n+t} + n^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \left(\frac{t}{n-t} - n^{-\frac{1}{2}}\right)^t,$$

$$T_2(t,n) := \frac{\Gamma(n+t)}{\Gamma(n+1)\Gamma(t)} \left(1 - \frac{t-1}{n+t-1} - n^{-\frac{1}{2}}\right)^{n+1} \left(\frac{t-1}{n-t+1} + n^{-\frac{1}{2}}\right)^t,$$

olmak üzere

$$x_{n1} := \sup \left\{ T_1(m,n) : m = \left\lfloor n\mu \left(n^{-\frac{1}{2}} \right) \right\rfloor + 1, \dots \right\},$$

$$x_{n2} := \sup \left\{ T_2(m,n) : m = 1, 2, \dots, \left\lfloor n\mu \left(1 - n^{-\frac{1}{2}} \right) \right\rfloor + 1 \right\},$$

için

$$C_n \leq 1 + \sqrt{n(x_{n1} + x_{n2})}$$

eşitsizliği yazılabilir (Hölzle, 1980).

Aşağıdaki lemmada $\sup T_i(\cdot, n)$ için küçük aralıklar verilecektir.

Lemma 2.5.3

$$U_i(t, n) := \ln \frac{T_i(t+1, n)}{T_i(t, n)}$$

olmak üzere

i) $n \geq 2$ için $U_1(\cdot, n)$; $n \geq 3$ içinse $U_2(\cdot, n)$ azalmayandır,

ii) $n \geq 16$ ise

$$U_1\left(\frac{1}{2}n, n\right) > 0, U_2\left(\frac{1}{2}n - 2n^{1/2}, n\right) > 0, U_2\left(\frac{1}{2}n - 1, n\right) < 0$$

ve $n \geq 36$ ise

$$U_1\left(\frac{1}{2}n + 2n^{1/2} - 1, n\right) < 0$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Hözlze, 1980).

Oldukça uzun olan kanıtlar Hözlze (1977) de bulunabilir (Hözlze, 1977).

Lemma 2.5.4

$n \geq 36$ ise

$$x_{n1} \leq \sup \left\{ T_1\left(\frac{1}{2}n + \tau n^{1/2}, n\right) : \tau \in [0, 2] \right\},$$

$$x_{n2} \leq \sup \left\{ T_2\left(\frac{1}{2}n - \tau n^{1/2}, n\right) : \tau \in [0, 2] \right\}$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Hözlze, 1980).

Hözlze (1977) de, uygun kuvvet serilerinde $\ln T_1\left(\frac{1}{2}n + \tau n^{1/2}, n\right)$ ve $\ln T_2\left(\frac{1}{2}n - \tau n^{1/2}, n\right)$ genişlemeleri yapılarak aşağıdaki teorem verilebilir (Hözlze, 1977).

Teorem 2.5.1

$n \geq 36$ ise

$$C_n \leq 1 + 2^{1/2} 3^{-3/2} \pi^{-1/2} \exp\left(-\frac{27}{8}\right) \left(\exp\left(-\frac{15}{8} n^{-1/2} + 5n^{-1}\right) + \exp\left(\frac{39}{8} n^{-1/2} + 15n^{-1}\right) \right) \\ \leq 1.02322$$

eşitsizliği geçerlidir (Hölzle, 1980).

Not 2.5.2

$C^*\left((\tilde{M}_n), [0,1]\right) = 1 + 2^{3/2} 3^{-3/2} \pi^{-1/2} \exp\left(-\frac{27}{8}\right)$ olması bu (2.81) in tek taraflı sayısal bir versiyonudur.

Hölzle (1977) de, $i = 1, 2$ ve $n = 1, \dots, 35$ için x_{ni} hesaplanmasıyla aşağıdaki teoremdeki gibi C_n için üst sınırlar elde edilir (Hölzle, 1977).

Teorem 2.5.2

$n \in \mathbb{N}$ ise $C_n \leq 1.03195$ eşitsizliği $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$ ise de $C_n \leq 1.03143$ eşitsizliği geçerli olur (Hölzle, 1980).

Aşağıda en iyi sabit D 'nin değeri hesaplanmıştır.

Teorem 2.5.3

$\tilde{M}_n$ operatör dizisi için

$$D\left((\tilde{M}_n), [0,1]\right) = D_3 = \frac{37 - 16\sqrt{3}}{9} \approx 1,031909675 \dots$$

eşitliği geçerlidir (Hölzle, 1980).

Kanıt

$x \in (0, 1 - 3^{-1/2})$ olsun. Bu durumda

$$H_3(x) \leq H'_3(x) = 1 + \sqrt{3}Q_{31}(x) \leq 1 + \sqrt{3}x_{31} \leq 1,000036$$

eşitsizliği geçerlidir.

$x \in (1 - 3^{-1/2}, 3^{-1/2})$ olması durumunda ise $H_3(x) \leq 1$ olur.

Son olarak $m = 1, 2, 3$ için $x \in I_{3m}^{(2)}$ olsun. Bu durumda

$$H_3(x) = 1 - P[Y_{4x} = x] + \sum_{k=0}^{m-1} p_{4k}(x)$$

olacaktır. $k \leq m - 1$ için $I_{3m}^{(2)}$ de p_{4k} azalan olduğundan

$$\sup\{H_3(x): x \in I_{3m}^{(2)}\} = 1 + \sum_{k=0}^{m-1} p_{4k}\left(\theta\left(\frac{m-1}{3}\right) + 3^{-1/2}\right)$$

eşitliği sağlanır. $m = 1, 2, 3$ için sağ tarafın hesaplanmasıyla

$$\begin{aligned} \sup\{H_3(x): x \in (3^{-1/2}, 1)\} &= 1 + p_{40}(3^{-1/2}) \\ &= 1 + (1 - 3^{-1/2})^4 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

2.6 Alkamade' nin MKZ Operatörüne İlişkin Çalışmaları

Bu kesimde Alkamade tarafından yapılan $M_n(e_2, x)$ e ait bazı hesaplar ayrıntılı olarak verilecektir.

2.6.3 kesimde $M_n(e_2, x)$; bir hipergeometrik yakınsak kuvvet serisi yardımıyla açık olarak belirlenecektir. Bu ifade (2.82) nin sağ tarafını sağlayan türevleri içeren bir diferansiyel denklemin çözümüdür. Bu diferansiyel denklem Teorem 2.6.1.1 de belirlenmiştir. 2.6.2 kesimde $(M_n(e_2, x)) - x^2$ için bilinen hesapların bir kısmının $M_n(e_2, x)$ nin sağladığı açık ifadeden (2.89) elde edildiği gösterilmiştir. 2.6.4 kesimde Sikkema (1970b) tarafından verilen

$[0,1]$ üzerindeki $(M_n(e_2, x)) - x^2$ nin sağ normunun hesabı yapılacaktır. Bu kanıt iki farklı tanım için yapılmıştır. Teorem 2.6.4.1 de verilen yeni tahmin Lemma 2.6.4.1 den daha iyi ve daha kullanışlıdır. Bu yeni yöntem MKZ operatörlerinde bilinen bazı teoremleri geliştirmek için kullanılacaktır (Sikkema, 1970b).

Tanım 2.6.1

$D[0,1]; [0,1)$ üzerinde tanımlanan gerçel fonksiyonlar kümesi olsun. $A \geq 0$ ve $a \geq 0$ sabitleri f ye bağlı olan sabitler olmak üzere her $t \in [0,1)$ için

$$|f(t)| \leq A(1 - t)^{-a}$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda $D[0,1)$ üzerinde M_n MKZ operatörleri

$$M_n(f, x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right) \quad (x \in [0,1); n \in \mathbb{N}) \quad (2.82)$$

$$M_n(f, 1) = f(1) \quad (2.83)$$

şeklinde tanımlanır (Alkemade, 1984).

Burada $f(1)$ var ve $f, 1'$ de soldan sürekli iken

$$\lim_{x \uparrow 1} (M_n f)(x) = f(1) \quad (n \in \mathbb{N})$$

eşitliğinin geçerli olması ile $M_n(f, 1)$ tanımlıdır (Alkemade, 1984).

Lemma 2.6.1

$|f(t)| \leq A(1 - t)^{-a}$ koşulunu sağlayan her f fonksiyonu için $D[0,1)$ üzerinde (2.82) ile verilen MKZ operatörleri doğrusal ve pozitifdir (Alkemade, 1984).

Kanıt

i) Gerçekten $M_n(f, x)$ in doğrusallığı için her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,1]$ için;

$$M_n(\alpha f + \beta g, x) = (1 - x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{k}{n+k}\right) + \beta g\left(\frac{k}{n+k}\right) \right) \binom{n+k}{k} x^k$$

$$\begin{aligned}
&= (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\
&+ (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\
&= \alpha (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\
&+ \beta (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{k}{n+k}\right) \binom{n+k}{k} x^k \\
&= \alpha M_n(f, x) + \beta M_n(g, x)
\end{aligned}$$

olup $M_n(f, x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_n(f, x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$$M_n(f, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right) (x \in [0,1]; n \in \mathbb{N})$$

olduğundan $x \in [0,1]$ için

$$(1-x)^{n+1} \geq 0, \binom{n+k}{k} \geq 0$$

ve

$$f \geq 0 \text{ olduğundan } f\left(\frac{k}{n+k}\right) \geq 0$$

bulunur ki bu da $M_n(f, x)$ operatörünün pozitif olması demektir.

2.6.1 Diferansiyel Denklem Çözümü Olarak MKZ Operatörü

Teorem 2.6.1.1

$t \in [0,1]$ olmak üzere

$$g(t) = \frac{t}{1-t} \tag{2.84}$$

olsun.

Her $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0,1)$ ve $f \in D[0,1)$ için (2.82) ile tanımlı $(M_n(f, x))$ operatör dizileri olmak üzere,

$$x(1-x) \frac{d}{dx}(M_n(f, x)) = -(n+1)x(M_n(f, x)) + n(1-x)(M_n(gf, x)) \quad (2.85)$$

diferansiyel denklemini sağlar (Alkemade, 1984).

Kanıt

$n \in \mathbb{N}$ olsun. $f \in D[0,1)$ için (2.82) nin sağ tarafındaki kuvvet serileri $[0,1)$ 'de yakınsaktır. Dolayısıyla bu serinin $[0,1)$ üzerinde türetilmesi mümkündür. Böylece

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(M_n(f, x)) &= -(n+1)(1-x)^n \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right) \\ &\quad + (1-x)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^{k-1} f\left(\frac{k}{n+k}\right) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Bu denklemin her iki tarafı $x(1-x)$ ile çarpılırsa (2.84) ten elde edilen

$$g\left(\frac{k}{k+n}\right) = \frac{k}{n}$$

eşitliğinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} x(1-x) \frac{d}{dx}(M_n(f, x)) &= -(n+1)x(1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k f\left(\frac{k}{n+k}\right) \\ &\quad + n(1-x)^{n+2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^k g\left(\frac{k}{n+k}\right) f\left(\frac{k}{n+k}\right) \end{aligned}$$

ifadesi bulunur. Son eşitlikte (2.82) eşitliğinin kullanılmasıyla teorem kanıtlanmış olur.

Uyarı 2.6.1.1

(2.85) denklemi $(M_n(f, x))$ için bir diferensiyel denklemden çok fonksiyonel bir diferensiyel denklemdir.

Teorem 2.6.1.1 kullanılarak aşağıdaki Lemma 2.6.1.1 kolayca ifade edilebilir.

Lemma 2.6.1.1

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1)$ için $M_n(e_2, x)$; $y(0) = 0$ koşulunu sağlayan

$$x(1-x)y'(x) + (n+x)y(x) = nx^2 + x \quad (2.86)$$

şeklindeki diferansiyel denklemin bir çözümüdür (Alkemade, 1984).

Kanıt

$n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1)$ olsun. (2.82) den açıktır ki $M_n(e_2, 0) = 0$ dır. (2.85) te

$$f := e_1 - e_2$$

olarak yerine yazılırsa

$$x(1-x) \frac{d}{dx} (M_n(e_1 - e_2), x) = -(n+1)x(M_n(e_1 - e_2), x) + n(1-x)M_n(e_2, x)$$

eşitliği elde edilir.

M_n operatörlerinin doğrusallığı ve $M_n(e_0, x)$ ile $M_n(e_1, x)$ in eşitleri kullanılarak $M_n(e_2, x)$ nin (2.86) eşitliğini sağladığı kolayca görülür. Böylece Lemma 2.6.1.1 kanıtlanmış olur.

2.6.2 Hipergeometrik Seriler Yardımıyla $(M_n e_2)(x)$ in Hesabı

$M_n(e_2, x)$ nin açık halinin hesaplanması için öncelikle aşağıdaki gösterimler verilecektir.

$k \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$(y)_0 = 1,$$

$$(y)_k = \prod_{i=0}^{k-1} (y+i)$$

olsun. Ayrıca $a, b, c \in \mathbb{R}$ ve $c \neq 0, -1, -2, \dots$, olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!},$$

şeklinde tanımlı hipergeometrik serilerin bazı özellikleri gereklidir.

Bu seri $|x| < 1$ için yakınsak olup ve $c - a - b > 0$ iken $x = 1$ için de yakınsaktır (Whittaker and Watson, 1978).

Burada aşağıdaki yakınsak serinin toplamı ${}_2F_1(a, b; c; x)$ fonksiyonu ile gösterilecektir.

Tanım 2.6.2.1

$|x| < 1$ için hipergeometrik seriler

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{x^k}{k!} \quad (2.87)$$

ve $c - a - b > 0$ için

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad (2.88)$$

şeklinde tanımlanır (Whittaker and Watson, 1978).

Teorem 2.6.2.1

Her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0,1)$ için

$$M_n(e_2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)^2}{n+1} {}_2F_1(1, 2; n+2; x) \quad (2.89)$$

eşitliği geçerlidir (Burada $x = 1$ ve $n \geq 2$ olduğunda da (2.89) eşitliği sağlanır) (Alkamade, 1984).

Kanıt

$n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1)$ olsun. Bu durumda (2.86) da

$$y(x) = x^2 + x(1-x)^2 z(x)$$

ifadesinin yerine yazılmasıyla $z, x \in [0,1)$ için

$$x(1-x)z'(x) + (n+1-2x)z(x) = 1 \quad (2.90)$$

diferansiyel denklemini sağlar. (2.90) da bu denklemin özel bir çözümü olan z_p fonksiyonu

$$z(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

fonksiyonunun yerine yazılmasıyla bulunur. Bu $z_p(x)$

$$\begin{aligned} z_p(x) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2)_k}{(n+2)_k} x^k \\ &= \frac{1}{n+1} {}_2F_1(1,2; n+2; x). \end{aligned}$$

şekilde tanımlıdır. Ayrıca $(0,1)$ de z_h (2.90) homojen denkleminin genel çözümünü göstermek üzere bu çözüm

$$z_h(x) = Cx^{-n-1}(1-x)^{n-1} \quad (C \in \mathbb{R})$$

şeklinde tanımlıdır. Bu nedenle $(0,1)$ de $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere (2.86) nın genel çözümü

$$y(x) = x^2 + \frac{x(1-x)^2}{n+1} {}_2F_1(1,2; n+2; x) + Cx^{-n}(1-x)^{n+1}$$

şeklindedir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $M_n(e_2, x)$ bu çözümlerden birine eşittir.

Aşağıdaki Lemma 2.6.2.1 teoremlere hazırlık niteliğindedir.

Lemma 2.6.2.1

Her $n \geq 2$, $x \in [0,1]$ ve her $m \in \mathbb{N}$ için

$${}_2F_1(1,2; n+2; x) \leq \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(2)_k}{(n+2)_k} x^k + \frac{(m+1)! x^m}{(n-1)(n+2)_{m-1}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Kanıt

$n \geq 2, x \in [0,1)$ olmak üzere (2.87) yardımıyla bu lemmanın kanıtı için

$$\phi_m(x) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(2)_k}{(n+2)_k} x^k$$

gösterimi kullanılacaktır. $\phi_m(x)$ için

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \frac{(2)_m}{(n+2)_m} x^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(m+2)_{k-m}}{(n+2+m)_{k-m}} x^{k-m} \\ &= \frac{(m+1)!}{(n+2)_m} x^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(m+2)_k}{(n+2+m)_k} x^k \\ &= \frac{(m+1)!}{(n+2)_m} x^m {}_2F_1(1, m+2; n+m+2; x) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Dolayısıyla $n \geq 2$ için

$$\phi_m(x) \leq \frac{(m+1)!}{(n+2)_m} x^m {}_2F_1(1, m+2; n+m+2; 1),$$

eşitsizliği doğru olur. Bu ifade (2.88) ile birlikte düşünülerek

$$\phi_m(x) \leq \frac{(m+1)!}{(n+2)_m} x^m \frac{n+m+1}{n-1} = \frac{(m+1)! x^m}{(n-1)(n+2)_{m-1}}$$

eşitsizliğine ulaşılır

Böylece Lemma 2.6.2.1 kanıtlanmış olur.

2.6.3 MKZ Operatörlerinin İkinci Momenti İçin Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde $M_n(e_2, x)$ için geçerli olan (2.89) eşitliği kullanılarak hipergeometrik serilerin terimleri için bilinen bazı eşitsizlikleri türetmek amacıyla $M_n(e_2, x) - x^2$ ikinci momenti kullanılır. Burada ilk olarak $M_n(e_2, 1) = 1$ eşitliği gösterilecektir.

Önerme 2.6.3.1

(2.82) ile verilen operatör için $M_n(e_2, x) = 1$ dir (Alkemade, 1984).

Kanıt

(2.87) eşitliği kullanılarak her $x \in [0,1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için ${}_2F_1(1,2; n+2; x)$ bir geometrik seri yardımıyla

$${}_2F_1(1,2; n+2; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2)_k}{(n+2)_k} x^k \quad (2.91)$$

olarak yazılabilir. Böylece

$${}_2F_1(1,2; n+2; x) \leq \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

eşitsizliği ve Teorem 2.6.2.1 den $x \in [0,1)$ için

$$0 \leq M_n(e_2, x) - x^2 \leq \frac{x(1-x)}{n+1} \quad (2.92)$$

eşitsizliği elde edilir. $x = 1$ için (2.83) ve (2.92) birlikte düşünülerek $M_n(e_2, 1) = 1$ bulunur.

Müller (1967) de de bu sonuç kanıtlanmıştır (Müller, 1967).

Uyarı 2.6.3.1

(2.91) de verilen serinin sadece ilk iki terimi dikkate alınarak ikinci moment için bir alt sınır da elde edilebilir (Becker and Nessel, 1978).

Gerçekten $n \geq 2$ ve $x \in [0,1)$ için Lemma 2.6.2.1, $m = 1$ ve (2.89) birlikte uygulanırsa

$$\frac{x(1-x)^2}{n+1} \left(1 + \frac{2x}{n+2}\right) \leq M_n(e_2, x) - x^2 \leq \frac{x(1-x)^2}{n+1} \left(1 + \frac{2x}{n-1}\right), \quad (2.93)$$

eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.6.3.1

Her $x \in [0,1]$ ve $n \geq 2$ için

$$\left(1 + \frac{2x}{n+2}\right) \frac{x(1-x)^2}{n+1} \leq \varphi_n(x) \leq \left(1 + \frac{2x}{n-1}\right) \frac{x(1-x)^2}{n+1} \quad (2.94)$$

eşitsizliği geçerlidir (Becker and Nessel, 1978).

Kanıt

$\varphi_n(x)$ in tanımı nedeniyle $x = 0,1$ için (2.86) ifadesi sıfırlanır. $x \in (0,1)$, $n \geq 2$ ve $i = 0,1$ için $M_n(t^i, x) = x^i$ eşitliği kullanılarak

$$\varphi_n(x) := M_n((t-x)^2, x) = M_n(t^2, x) - x^2 = x(1-x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_{k,n-1}(x)}{n+k+1}$$

ikinci moment olmak üzere

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_n(x)}{x(1-x)} - \frac{1-x}{n+1} &= \frac{\varphi_n(x)}{x(1-x)} - \frac{1}{n+1} M_{n-1}(1-t; x) \\ &= \frac{2(1-x)^n}{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k \frac{k}{(n+k-1)(n+k+1)} \\ &= \frac{2(1-x)^n}{(n+1)(n-1)} \sum_{k=1}^{\infty} \binom{n+k-2}{k} x^k \frac{k}{n+k-2} \left[1 - \frac{3}{n+k+1}\right]. \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\frac{n-1}{n+2} = 1 - \frac{3}{n+2} \leq 1 - \frac{3}{n+k+1} < 1 \quad (k \geq 1)$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla, her zamanki gibi yakınsama hızını belirleyen $\varphi_n(x)$ ikinci momenti; gerçekte $\frac{\varphi(x)}{n+1}$ gibi davranır.

Önerme 2.6.3.2

$$\varphi(x) := x(1-x)^2$$

olmak üzere

$$\left(1 + \frac{2x}{n+2}\right) \frac{x(1-x)^2}{n+1} \leq \varphi_n(x) \leq \left(1 + \frac{2x}{n-1}\right) \frac{x(1-x)^2}{n+1}$$

ifadesi özel olarak $n \geq 3$ için

$$\frac{\varphi(x)}{n+1} \leq \varphi_n(x) \leq \frac{2\varphi(x)}{n+1}$$

eşitsizliğine dönüşür (Becker and Nessel, 1978).

Lemma 2.6.3.2

$m = 2$ için

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{6x^3(1-x)^2}{(n-1)(n+1)(n+2)}, \quad (2.95)$$

eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ve $n \rightarrow \infty$ iken

$$S_n(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

olmak üzere

$$M_n(e_2, x) - x^2 = \frac{x(1-x)^2}{n} + \frac{x(1-x)^2(2x-1)}{n^2} + S_n(x)$$

eşitliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Kanıt

Lemma 2.6.2.1 ve (2.93) deki alt sınır kullanılırsa

$$M_n(e_2, x) - x^2 = \frac{x(1-x)^2}{n+1} + \frac{2x^2(1-x)^2}{(n+1)(n+2)} + R_n(x) \quad (2.96)$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle $n \rightarrow \infty$ iken (2.96) eşitliği

$$S_n(x) = O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad (2.97)$$

olarak tanımlı $S_n(x)$ yardımıyla

$$M_n(e_2, x) - x^2 = \frac{x(1-x)^2}{n} + \frac{x(1-x)^2(2x-1)}{n^2} + S_n(x) \quad (2.98)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $n \geq 2$ için

$$|S_n(x)| \leq \frac{5x(1-x)^2}{n^3} < \frac{1}{n^3} \quad (2.99)$$

eşitsizliği sağlanır.

Uyarı 2.6.3.2

(2.98) ile birlikte $S_n(x)$ için (2.97) nin asimptotik hesabı Sikkema (1970b) de yapılmıştır. Ancak $S_n(x)$ için (2.99) hesabı Sikkema' da olmayan yeni bir eşitsizliktir (Sikkema, 1970b), (Alkameda, 1984).

2.6.4 M_n - Operatörleri İle İlgili Bazı Önemli Eşitsizlikler

Bu bölümde MKZ operatörleri ile ilgili bazı yaklaşım teoremlerinin geliştirilmesini sağlayan Sikkema (1970b) tarafından kanıtlanan Lemma 2.6.4.1 ve Alkameda' nın aşağıdaki şekilde kanıtladığı Teorem 2.6.4.1 verilecektir (Sikkema, 1970b), (Alkameda, 1984).

$x \in [0,1], n \in \mathbb{N}$ olmak üzere kısıklık olması bakımından M_n operatörlerinin ikinci momenti bu kesimde

$$F_n(x) := M_n(e_2, x) - x^2 \quad (2.100)$$

şeklinde gösterilecektir.

Lemma 2.6.4.1

F_n (2.100) deki şekilde tanımlı olsun. Bu durumda

- i) $\|F_1\| \leq 0,1113$,
 - ii) $n \geq 2$ için $\|F_n\| \leq (4/27n)(1 - ((n^2 - 5)/4(n^2 - 1)^2))$
- eşitsizlikleri geçerlidir (Sikkema, 1970b).

Teorem 2.6.4.1

(2.100) de tanımlanan F_n için

i) $\|F_1\| = 0,0999032$ (alabileceği en son sayıyı gösterir)

ii) $\|F_n\| \leq 4/(27n + 9)$ ($n \geq 2$),

iii) $\|F_n\| = (4/27n) - (4/81n^2) + O(n^{-3})(n \rightarrow \infty)$.

ifadeleri geçerlidir (Alkemade, 1984).

Kanıt

$F_n(0) = F_n(1) = 0$ ve $(0,1)$ aralığında $F_n(x) > 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_0 \in (0,1)$ olan bazı noktalarda $F_n(x)$ maksimum değerini alır.

$$y(x) = x^2 + F_n(x)$$

eşitliği $x(1-x)y'(x) + (n+x)y(x) = nx^2 + x$ ($x \in [0,1)$) de yerine yazılırsa, $F_n(x)$ fonksiyonu

$$x(1-x)F_n'(x) + (n+x)F_n(x) = x(1-x)^2 \quad (2.101)$$

eşitliğini sağlar. $F_n'(x_0) = 0$ için

$$(n+x_0)F_n(x_0) = x_0(1-x_0)^2,$$

eşitliği geçerli olacağından $x_0 \in (0,1)$ için Teorem 2.6.2.1 deki ${}_2F_1(1,2; n+2; x_0)$;

$${}_2F_1(1,2; n+2; x_0) = \frac{n+1}{n+x_0} \quad (2.102)$$

şeklinde olacaktır. Burada $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(x)$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) := \frac{n+1}{n+x} \quad (2.103)$$

şeklinde tanımlansın. Burada (2.102) eşitliğini sağlayan bir tek $x_0 \in (0,1)$ vardır.

i) Öncelikle $n = 1$ olsun.

(2.102) den x_0 sayısı

$${}_2F_1(1,2;3;x) = \frac{2}{x+1} \quad (2.104)$$

denklemini sağlar. (2.91) kullanılarak $x \in (0,1)$ için

$$\begin{aligned} {}_2F_1(1,2;3;x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k+2} x^k \\ &= 2x^{-2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{k+2} \\ &= 2x^{-2} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{x} - x \right\} \\ &= -2x^{-2} \{ \ln(1-x) + x \} \end{aligned} \quad (2.105)$$

eşitliği geçerli olur. (2.104) ve (2.105) in birlikte düşünülmesiyle $x_0 \in (0,1)$ sayısı

$$-\frac{1}{x} \ln(1-x) - 1 = \frac{x}{1+x}$$

denkleminin çözümüdür. $\ln x$ için bir tablo kullanılarak bu eşitlikten $x_1 < x_0 < x_2$ olacak şekilde $x_1 = 4176 \cdot 10^{-4}$ ve $x_2 = 4177 \cdot 10^{-4}$ bulunabilir. (2.101) denklemi F_1' fonksiyonunun $[0, x]$ aralığında monoton azalan olmasından

$$F_1'(x) = (1-x) \left\{ 1 - \frac{1}{2}(x+1) {}_2F_1(1,2;3;x) \right\} \quad (2.106)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $x_1 < x < x_0$ için $F_1'(x) > 0$ olduğundan

$$F_1(x_1) < F_1(x_0) < F_1(x_1) + F_1'(x_1)(x_2 - x_1)$$

eşitsizliği doğrudur. Bu formülde x_1 ve x_2 değerleri yerine yazılarak (2.100), Teorem 2.6.2.1 deki (2.89), (2.105), (2.106) eşitlikleri birlikte kullanılırsa

$$999032 \cdot 10^{-7} < F_1(x_0) < 9990325 \cdot 10^{-8}$$

şeklindeki eşitsizlik elde edilir. Böylece Teorem 2.6.4.1 i) kanıtlanmış olur.

ii) İkinci durum için $n \geq 2$ olsun. Lemma 2.6.2.1 ve $m = 2$ uygulanarak

$${}_2F_1(1,2; n+2; x) \leq 1 + \frac{2x}{n+2} + \frac{6x^2}{(n-1)(n+2)}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $n \geq 3$ için (2.103) ten aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir.

$${}_2F_1\left(1,2; n+2; \frac{1}{3}\right) \leq \frac{(2/3)n}{n^2+n-2} \leq 1 + \frac{(2/3)n}{n^2+\frac{1}{3}n} = 1 + \frac{2/3}{n+\frac{1}{3}} = f_n\left(\frac{1}{3}\right) \quad (2.107)$$

(2.103) tanımını ${}_2F_1(1,2; n+2; x)$ nin monoton artan, $f_n(x)$ in ise $[0,1)$ de monoton azalan olması kullanılarak (2.107) den $n \geq 3$ için

$${}_2F_1(1,2; n+2; x_0) \leq f_n\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{n+1}{n+1/3}$$

eşitsizliği geçerli olacaktır. Böylece $n \geq 3$ için (2.100) ve Teorem 2.6.2.1 deki (2.89) dan

$$\begin{aligned} \|F_n\| = F_n x_0 &= \frac{1}{n+1} x_0 (1-x_0)^2 {}_2F_1(1,2; n+2; x_0) \\ &\leq \frac{1}{n+1} \max_{x \in [0,1]} ((1-x)^2) \frac{n+1}{n+1/3} \\ &= \frac{4}{27n+9} \end{aligned} \quad (2.108)$$

eşitsizliği bulunur. Bu da Teorem 2.6.4.1 için ikinci durumun kanıtıdır.

Ancak $n = 2$ için (2.107) deki ikinci eşitsizlik geçerli değildir. Bununla birlikte Lemma 2.6.2.1 $m = 3$ ve $n = 2$ durumu birlikte düşünülürse

$${}_2F_1\left(1,2; 4; \frac{1}{3}\right) \leq 1 + \frac{2/3}{4} + \frac{2/3}{20} + \frac{24/27}{20} < \frac{5}{4},$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $f_2\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{7} > \frac{5}{4}$ olarak alınırsa, (2.108) $n = 2$ içinde geçerlidir.

Son olarak Teorem 2.6.4.1 in iii) bölümü gösterilerek kanıt tamamlanacaktır.

iii) (2.102) denkleminin $n \rightarrow \infty$ için asimptotik çözümü

$$x_0 = \frac{1}{3} + \frac{4}{27n} + O(n^{-2}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

şeklindedir. Teorem 2.6.2.1 deki (2.89) da x_0 in yerine yazılması ve (2.91) in kullanımıyla

$$\|F_n\| = \frac{4}{27n} - \frac{4}{81n^2} + O(n^{-3}) \quad (n \rightarrow \infty)$$

eşitliği elde edilir. Bu da teoremin iii) kısmıdır. Dolayısıyla kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 2.6.4.1

i) Teorem 2.6.4.1 ii) bölümünde verilen $\|F_n\|$ in üst sınırı $n \rightarrow \infty$ için asimptotik genişlemesi
iii) bölümünde verilen asimptotik $O(n^{-3})$ ifadesine karşılık gelir. Bunun anlamı $n \rightarrow \infty$ iken Teorem 2.6.4.1 in ii) bölümündeki eşitsizlik $O(n^{-3})$ kadar olan bir eşitliktir.

ii) Teorem 2.6.4.1 i) bölümünün Lemma 2.6.4.1 in ilgili kısmına göre gerçekten bir genişleme sağladığı açıktır. Ayrıca Teorem 2.6.4.1 in ii) kısmı da Lemma 2.6.4.1 in ilgili kısmını iyileştirmiş oldu. Bunu göstermek için aşağıdaki eşitsizliği kanıtlamak yeterlidir.

$$\text{iii)} \quad \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 5}{4n(n^2 - 1)^2} > \frac{1}{n + 1/3} \quad (n \geq 2) \quad (2.109)$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Gerçekten $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} - \frac{n^2 - 5}{4n(n^2 - 1)^2} &> \frac{1}{n} - \frac{1}{4n(n^2 - 1)^2} \\ &\geq \frac{1}{n} - \frac{1}{4n(2n - 1)} \\ &> \frac{1}{n} - \frac{1}{4n((3/4)n + (1/4))} \\ &= \frac{1}{n + 1/3} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.6.2.1 ve 2.6.4.1 MKZ operatörleri ile ilgili literatürdeki bazı teoremleri geliştirmek için kullanılacaktır. Teorem 2.6.4.3 Shisha and Mond (1968) un verdiği Teorem 2.6.4.2 nin özel bir durumu olarak verilecektir (Shisha and Mond, 1968).

Teorem 2.6.4.2

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ olsun. $L_n e_i = e_i$ ($i = 0,1$) yi sağlayan bir doğrusal pozitif bir operatörler dizisi olsun. Bir $\delta > 0$ için $\omega(f; \delta)[0,1]$ üzerindeki süreklilik modülü olmak üzere

$$|(L_n(f, x) - f(x))| \leq \{1 + \delta^{-2}(L_n(e_2, x) - x^2)\}\omega(f; \delta) \quad (2.110)$$

eşitsizliği sağlanır (Shisha and Mond, 1968).

Teorem 2.6.2.1 ve 2.6.4.2 nin bir sonucu olarak aşağıdaki teoremden noktasal olarak hesaplanan δ sayısı, $\delta := (n + 1)^{-1/2}$ şeklindedir.

Teorem 2.6.4.3

$f \in C[0,1]$, $x \in [0,1]$ ve $n \geq 2$ olmak üzere (1.1) ile tanımlı M_n için

$$|M_n(f, x) - f(x)| \leq \left\{1 + x(1 - x)^2 {}_2F_1(1, 2; n + 2; x)\right\}\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n + 1}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Kanıt

Teorem 2.6.4.2 nin MKZ operatörlerine uygulanması, (2.110) da $\delta = (n + 1)^{-1/2}$ alınması ve Teorem 2.6.4.1 ii) nin kullanımı ile hemen yapılabilir.

Teorem 2.6.4.4

$f \in C[0,1]$ ve $n \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$\|M_n(f, x) - f(x)\| \leq \left\{1 + \frac{4n}{27n + 9}\right\}\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Bu eşitsizlik (2.109) eşitliği dikkate alındığında Lemma 2.6.4.1 ve Lupaş ve Müller tarafından verilen Uyarı 2.2.4 ten daha kesin bir sonuçtur.

Sonuç 2.6.1

M_n operatörler dizisi $n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(K)$ fonksiyonu için

$$\|M_n(f, x) - f(x)\| \leq \frac{31}{27} \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Kanıt

(2.83) ve

$$\sup_{\substack{n=1,2,\dots \\ x \in [0,1]}} n[M_n(e_2, x) - e_2(x)] = \frac{4}{27}$$

den

$$\begin{aligned} M_n \Omega_2 &= M_n e_2 - 2e_1 M_n e_1 + e_2 M_n e_0 \\ &= M_n e_2 - e_2 \end{aligned}$$

eşitliği vardır buradan

$$\|M_n \Omega_2\| \leq \frac{4}{27n}$$

eşitsizliği geçerli olacaktır.

Bu son eşitsizlik $\|L_n f - f\| \leq \inf_{m=1,2,\dots} \{1 + \delta^{-2m} \|L_n(\Omega_{2m}, x)\|\} \omega(f, \delta)$ e eklenir ve $m = 1$ ve $\delta = n^{-1/2}$ alınırsa kanıt tamamlanmış olur. Çünkü Teorem 2.6.4.1 de bahsedilen $\|M_n(e_2, x) - e_2(x)\|$ kullanılarak hesap yapılmıştır. Teorem 2.6.4.1 ii) kullanılarak MKZ operatörleri üzerinde birkaç teorem geliştirilebilir.

Bu tahmin Popoviciu' nun Bernstein polinomları hakkındaki teoremine benzemektedir (Lorentz, 1953).

Teorem 2.6.4.6 için gerekli olan aşağıdaki teorem hatırlatılacaktır.

Teorem 2.6.4.5

Her $n \in \mathbb{N}$ için $L_n: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ve $i = 0,1$ için $L_n e_i = e_i$ i sağlayan doğrusal pozitif operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer $[0,1]$ de sürekli bir f' varsa bir $\delta > 0$ için

$$\|L_n(f, x) - f(x)\| \leq (1 + \delta^{-1}) \|L_n(e_2, x) - e_2(x)\| \omega(f'; \delta)$$

eşitsizliği sağlanır (Lupaş and Müller, 1970).

Bu teoremde $\delta = n^{-1/2}$ alınır ve M_n operatörlerine Teorem 2.6.4.1 uygulanırsa aşağıdaki Lorentz tipi teorem kanıtsız olarak aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 2.6.4.6

$f' \in C[0,1]$ olmak üzere $n \geq 2$ için

$$\|M_n(f, x) - f(x)\| \leq \left\{1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{n}{3n+1}}\right\} \frac{2}{3\sqrt{3n+1}} \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

Uyarı 2.6.4.2

Teorem 2.6.4.6 da verilen eşitsizlik Lupaş ve Müller tarafından kanıtlanan

$$\|M_n(f, x) - f(x)\| \leq \left\{1 + \frac{2}{3\sqrt{3}}\right\} \frac{2}{3\sqrt{3n}} \omega\left(f'; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliğinden daha iyi bir sonuç verir (Alkemade, 1984).

Teorem 2.6.4.1 in bu son uygulaması Singh (1982) in kanıtladığı bir teoremin de sonucudur (Singh, 1982). Bu uygulama Müller (1968) de teoremin f'' nin süreklilik modülü terimlerini içeren $\|(M_n(f, x))' - f(x)'\|$ nin bir hesabını verir (Müller, 1968). Singh kanıtında Lemma 2.6.4.1 de belirtilen Sikkema' nın hesabını kullanır. Singh' in kanıtında Teorem 2.6.4.1 in i) ve ii) bölümleri kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.6.4.7

$f'' \in C[0,1]$ ve $d_2 = 1,149$ (alabileceği en son sayıyı göstereyin). Bu durumda

$$d_n = \frac{2}{3\sqrt{3n-2}} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{n-1}{3n-2}} + \frac{\sqrt{n-1}}{n} \right\} + \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n-1}}{2n^2} \quad (n \geq 3)$$

olmak üzere

$$\|(M_n(f, x))' - f'(x)\| \leq d_n w\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) + \frac{\|f''\|}{n} \quad (n \geq 2),$$

eşitsizliği geçerlidir (Alkemade, 1984).

2.7 Rempulski ve Tomczak' ın MKZ Operatörü ile İlgili Çalışmaları

$M_n(f, x)$ (2.1) de Cheney ve Sahrma tarafından tanımlanan MKZ operatörünü göstereyin.

$M_n(f)$ ' nin yaklaşım özellikleri Meyer-König and Zeller (1960), Becker and Nessel (1978), DeVore (1989), Gupta (2002) gibi birçok makalede incelenmiştir (Meyer-König and Zeller, 1960), (Becker and Nessel, 1978), (DeVore, 1989), (Gupta, 2002). Ayrıca Chen (1986), Guo (1989), Gupta (2002) gibi birçok makalede $M_n(f)$ operatörlerinin bazı modifikasyonları tanıtılmış ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir (Chen, 1986), (Guo, 1989), (Gupta, 2002). Becker and Nessel (1978), DeVore (1989), Gupta (2002) nin çalışmalarından $f \in C(I)$ ise $n \in \mathbb{N}$ için $M_n(f) \in C(I)$ ve $\|M_n(f)\| \leq \|f\|$ olduğu biliniyor (Becker and Nessel, 1978), (DeVore, 1989), (Gupta, 2002). Ayrıca A , n ve x üzerinde bağımsız uygun bir pozitif sabit ve $\omega_2(f; \cdot)$, f nin ikinci süreklilik modülü olmak üzere

$$\|M_n(f; \cdot) - f(\cdot)\| \leq A \omega_2\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.111)$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu ise her $f \in C(I)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(f; \cdot) - f(\cdot)\| = 0 \quad (2.112)$$

olması anlamına gelir. Ayrıca $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $f \in C^{r+2}(I) = \{f \in C(I): f^{(r+2)} \in C(I)\}$ için

$$\|M_n(f; \cdot) - f(\cdot)\| = O\left(\frac{1}{n}\right) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.113)$$

eşitliğine ulaşılır ve bu tahmin iyileştirilemez.

Rempulska ve Tomczak $M_n(f)$ operatörlerinin belirli bir modifikasyonu için (2.111) ve (2.113) hata hesaplarını her $r \geq 2$ ve $f \in C^r(I)$ için iyileştirmişlerdir.

Rempulska ve Tomczak tarafından 2006 da aşağıda verilen modifiye edilmiş MKZ operatörleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır.

Tanım 2.7.1

$C^r(I)$ uzayı; $f \in C(I)$ fonksiyonlarının türevleri olan $f^{(r)} \in C(I)$ fonksiyonlarının bir uzayı olsun. Her $f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için modifiye edilmiş MKZ operatörleri

$$M_{n,r}(f, x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) \sum_{s=0}^r \frac{f^{(s)}\left(\frac{k}{n+k}\right)}{s!} \left(x - \frac{k}{n+k}\right)^s & \text{eğer } 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ f(1) & \text{eğer } x = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.114)$$

şeklinde tanımlanmıştır (Rempulska and Tomczak, 2006).

Lemma 2.7.1

(2.114) ile verilen $M_{n,r}(f, x)$ MKZ operatörleri doğrusal ve pozitifdir.

Kanıt

i) $x = 1$ durumu açık olduğundan $M_{n,r}(f, x)$ in doğrusallığı için $0 < x < 1$ olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,1]$ için $f, g \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} M_{n,r}(\alpha f + \beta g; x) &= \binom{n+k}{n} x^k (1-x)^{n+1} \sum_{s=0}^r \left(\alpha f^{(s)}\left(\frac{k}{n+k}\right) + \beta g^{(s)}\left(\frac{k}{n+k}\right) \right) \frac{\left(x - \frac{k}{n+k}\right)^s}{s!} \\ &= \binom{n+k}{n} x^k (1-x)^{n+1} \sum_{s=0}^r \alpha f^{(s)}\left(\frac{k}{n+k}\right) \frac{\left(x - \frac{k}{n+k}\right)^s}{s!} \\ &\quad + \binom{n+k}{n} x^k (1-x)^{n+1} \sum_{s=0}^r \beta g^{(s)}\left(\frac{k}{n+k}\right) \frac{\left(x - \frac{k}{n+k}\right)^s}{s!} \end{aligned}$$

$$= \alpha \binom{n+k}{n} x^k (1-x)^{n+1} \sum_{s=0}^r f^{(s)} \left(\frac{k}{n+k} \right) \frac{\left(x - \frac{k}{n+k} \right)^s}{s!}$$

$$+ \beta \binom{n+k}{n} x^k (1-x)^{n+1} \sum_{s=0}^r g^{(s)} \left(\frac{k}{n+k} \right) \frac{\left(x - \frac{k}{n+k} \right)^s}{s!}$$

$$= \alpha L_{n,q}(f; x) + \beta L_{n,q}(g; x)$$

olup $M_{n,r}(f, x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_{n,r}(f, x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

Her $f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_{n,r}(f; x) = \binom{n+k}{n} x^k (1-x)^{n+1} \sum_{s=0}^r \frac{f^{(s)} \left(\frac{k}{n+k} \right)}{s!} \left(x - \frac{k}{n+k} \right)^s$$

olduğundan $x \in [0,1]$ için

$$(1-x)^{n+1} \geq 0, \binom{n+k}{n} > 0, \left(x - \frac{k}{n+k} \right)^s > 0$$

ve

$$f \geq 0 \text{ ve } \frac{k}{n+k} > 0 \text{ olduğundan } f^{(s)} \left(\frac{k}{n+k} \right) \geq 0$$

bulunur ki bu da $M_{n,r}(f, x)$ operatörünün pozitif olması demektir.

Uyarı 2.7.1

Açıktır ki her $f \in C(I)$, $x \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $r = 0$ olmak üzere

$$M_{n,0}(f, x) = M_n(f, x)$$

eşitliği geçerlidir. Üstelik (1.1) ve (2.114) ten $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$M_{n,r}(1, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) = 1 \tag{2.115}$$

eşitliği yazılabilir.

Lemma 2.7.2

Her $q \in \mathbb{N}$ için $A_1(q) > 0$ sabiti vardır öyleki her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0,1]$ için

$$M_n((t-x)^{2q}; x) \leq A_1(q)n^{-q}$$

eşitsizliği sağlanır (Guo, 1989).

Aşağıdaki lemmada $n, r \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M_{n,r}$ operatörler dizisinin $C^r(I)$ uzayından $C(I)$ ya bir operatör olduğu gösterilecektir.

Lemma 2.7.3

$n \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ sabit sayılar olsun. Her $f \in C^r(I)$ için $M_{n,r}(f, x) \in C(I)$ dir. Yani $M_{n,r}(f, x)$, $C^r(I)$ uzayından $C(I)$ ya tanımlı bir operatördür.

Ayrıca bir $A_2(r) > 0$ sabiti vardır öyleki her $f \in C^r(I)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_{n,r}(f, \cdot)\| \leq A_2(r) \sum_{j=0}^r \|f^{(j)}\|, \quad (2.116)$$

eşitsizliği sağlanır (Rempulska and Tomczak, 2006).

Kanıt

$f \in C^r(I)$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ ve $j, q = 0, 1, \dots, r$ için $((\xi_{nk})^q f^{(j)}(\xi_{nk}))$ dizisi, $k \rightarrow \infty$ iken $f^{(j)}(1)^-$ e yakınsar. Ayrıca $(p_{nk}(x))$ dizisinin $n \in \mathbb{N}$ ve $x \rightarrow 1^-$ iken yakınsamasının düzgün olduğu kolayca doğrulanabilir. Bu sayede her $j, q = 0, 1, \dots, r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) (\xi_{nk})^q f^{(j)}(\xi_{nk}) = f^{(j)}(1)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan (2.114) kullanılarak

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} M_{n,r}(f, x) = \sum_{j=0}^r \frac{1}{j!} \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} (-1)^q \times \lim_{x \rightarrow 1^-} x^{j-q} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) f^{(j)}(\xi_{nk}) \xi_{nk}^q$$

$$= \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(1)}{j!} \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k.$$

eşitliği bulunur. Sağdaki toplam için

$$\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} (-1)^k = \begin{cases} 1, & j = 0 \text{ ise} \\ 0, & j \geq 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.117)$$

eşitliği geçerli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} M_{n,r}(f, x) = f(1)$$

eşitliği elde edilir.

Böylece (2.114) yardımıyla $M_{n,r}(f, x)$ nin $x = 1$ de sürekli olduğu gösterilmiş olur. $M_{n,r}(f, x)$ nin $x \in [0,1)$ ' deki sürekliliği $[0,1)$ ' de kuvvet serilerinin toplamının yakınsaklık özelliğinden açıktır.

Buradan (2.114) ve (1.1) özellikleri kullanılarak, $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için tümevarım kullanılarak;

$$M_{n,r}(f, x) = \sum_{j=0}^r \frac{(-1)^j}{j!} M_n((t-x)^j f^{(j)}(t), x)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca (1.1), (2.114) ve $C[0,1]$ deki norm tanımı, Hölder eşitsizliği ve Lemma 2.7.2 den, her $x \in I$, $n \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq j \leq r$ için

$$\begin{aligned} |M_n((t-x)^j f^{(j)}(t), x)| &\leq \|f^{(j)}\| M_n(|t-x|^j, x) \\ &\leq \|f^{(j)}\| (M_n(t-x)^{2j}, x)^{1/2} (M_n(1, x))^{1/2} \\ &\leq A_1(j) \|f^{(j)}\| n^{-j/2}, \end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_{n,r}(f, \cdot)\| \leq \sum_{j=0}^r \frac{1}{j!} \|M_n((t-\cdot)^j f^{(j)}(t), \cdot)\| \leq A_2(r) \sum_{j=0}^r \|f^{(j)}\|$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Tanım 2.7.2

$f \in C^r(I)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f^{(r)}; \cdot)$ ile gösterilen f^r nin süreklilik modülü

$$\omega(f^{(r)}; t) := \sup\{|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| : x, y \in I, |x - y| \leq t\}, \quad t \in I \quad (2.118)$$

eşitliği ile tanımlanmıştır (Timan, 1963).

Teorem 2.7.1

Her $r \in \mathbb{N}_0$ için $A_3(r)$ sadece r ' ye bağlı olan pozitif bir sabit olmak üzere her $f \in C^r(I)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f^{(r)}; \cdot)$, $f^{(r)}$ nin süreklilik modülü olsun.

$$\|M_{n,r}(f, x) - f(x)\| \leq A_3(r)n^{-\frac{r}{2}}\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (2.119)$$

eşitsizliği geçerlidir (Rempulska and Tomczak, 2006).

Kanıt

(2.111) den $r = 0$ için (2.119) eşitsizliği açıktır.

$r \in \mathbb{N}$ olsun. Kirov (1992) un çalışmasında yapılarına benzer şekilde $t \in I$ noktasında $f \in C^r(I)$ için aşağıdaki modifiye edilmiş Taylor formülü kullanılacaktır (Kirov, 1992). Her $x \in I$ için

$$f(x) = \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j + \frac{(x-t)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-u)^{r-1} [f^{(r)}(t+u(x-t)) - f^{(r)}(t)] du,$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\xi_{nk} = \frac{k}{n+k}$ olmak üzere $t = \xi_{nk}$ seçilerek

$$M_n(1, x) = 1 \text{ ve } M_n(t-x, x) = 0$$

eşitlikleri uygulanırsa, yukarıdaki Taylor formülü ve (2.114) den

$$I_r(x, \xi_{nk}) = \int_0^1 (1-u)^{r-1} [f^{(r)}(\xi_{nk} + u(x - \xi_{nk})) - f^{(r)}(\xi_{nk})] du$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (p_{nk}(x)f(x) = M_{n,r}(f; x) + \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) \frac{(x - \xi_{nk})^r}{(r-1)!} I_r(x, \xi_{nk}) \quad (2.120)$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 2.7.2 de verilen fonksiyonun süreklilik modülü tanımı ve özellikleri kullanılarak her $0 \leq u \leq 1, 0 \leq x < 1$ ve $k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}$ için

$$|f^{(r)}(\xi_{nk} + u(x - \xi_{nk})) - f^{(r)}(\xi_{nk})| \leq \omega(f^{(r)}; u|x - \xi_{nk}|) \quad (2.121)$$

$$\leq \omega(f^{(r)}; |x - \xi_{nk}|)$$

$$\leq (\sqrt{n}|x - \xi_{nk}| + 1)\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.120) eşitliğinden her $0 \leq x < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için bu son eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned} |f(x) - M_{n,r}(f, x)| &\leq \frac{1}{r!} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) |x - \xi_{nk}|^r (\sqrt{n}|x - \xi_{nk}| + 1) \\ &\leq \frac{1}{r!} \omega\left(f^{(r)}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) (\sqrt{n}M_n|t - x|^{r+1}; x) + M_n(|t - x|^r, x) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Hölder eşitsizliği, Lemma 2.7.2 ve $M_n(1, x) = 1$ ve $M_n(t - x, x) = 0$ eşitlikleri kullanılarak her $x \in I, n, q \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} M_n(|t - x|^q; x) &\leq (M_n((t - x)^{2q}; x))^{1/2} (M_n(1; x))^{1/2} \\ &\leq A_1(q)n^{-q/2} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Dolayısıyla (2.121) kullanılarak $0 \leq x < 1, n \in \mathbb{N}$ için

$$|f(x) - M_{n,r}(f; x)| \leq A_4(r)\omega(f^{(r)}; n^{-1/2})(\sqrt{n}n^{-(r+1)/2} + n^{-r/2})$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlik kullanılarak $x = 1$ alınırsa

$$\|M_{n,r}(f, \cdot) - f(\cdot)\| \leq A_3(r)n^{-\frac{r}{2}}\omega\left(f^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 2.7.1

$f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{r}{2}} \|M_{n,r}(f; \cdot) - f(\cdot)\| = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 2.7.2

$f \in C^r(I)$, $r \in \mathbb{N}_0$ ve sabit $0 < \alpha \leq 1$ sayısı için $f^{(r)} \in \text{Lip } \alpha$ olsun (yani $t \in (0,1]$ için $\omega(f^{(r)}; t) = O(t^\alpha)$ olsun). Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_{n,r}(f; \cdot) - f(\cdot)\| = O(n^{-(r+\alpha)/2})$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 2.7.3

Teorem 2.7.1, Sonuç 2.7.1 ve Sonuç 2.7.2; $r \geq 2$ olmak üzere $M_{n,r}(f)$ operatörlerinin $f \in C^r(I)$ fonksiyonuna yaklaşım derecesinin $M_n(f)$ için geçerli olan (2.111) ve (2.113) den daha iyi olduğunu gösterir.

Uyarı 2.7.2

Abel (1995), Alkemade (1984), Becker (1978), DeVore (1972), Ditzian (1987) ve Meyer-König and Zeller (1960) den aşağıdaki uyarıdaki eşitsizlik geçerlidir (Abel, 1995), (Alkemade, 1984), (Becker, 1978), (DeVore, 1972), (Ditzian, 1987), (Meyer-König and Zeller., 1960), (Rempulska and Skorupka, 2007).

Uyarı 2.7.3

Her $f \in C(I)$ fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_n(f, x) - f(x)\| \leq \frac{37 - 16\sqrt{3}}{9} \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (2.122)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Aşağıdaki uyarıda klasik MKZ operatör dizisinin yaklaşım hızı ile türevler yardımıyla elde edilen modifiye MKZ operatör dizisinin yaklaşım hızı karşılaştırması yorumlanmıştır.

Uyarı 2.7.4

(2.122) ve (2.119) dan $r \geq 2$ ise (2.114) ile verilen $M_{n;r}(f, x)$ operatörleri $f \in C^r(I)$ için (1.1) de tanımlanan $M_n(f, x)$ operatörlerinden daha iyi yaklaşım özelliklerine sahiptir (Rempulka and Skorupka, 2007)

2.8 Rempulka ve Skorupka' nın Ağırlıklı Uzaylarda MKZ Operatörüne İlişkin Çalışmaları

MKZ operatörlerinin bir diğer genellemesi Rempulka ve Skorupka tarafından 2007 yılında tanımlanmıştır.

Tanım 2.8.1

$r \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}_0 = [0, \infty)$ ve $w_0(x) := 1, r \geq 1$ için $w_r(x) := (1 + x^r)^{-1}$ olsun. $f: \mathbb{R}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ve $w_r f$ in $\mathbb{R}_0$ üzerinde sınırlı ve düzgün sürekli olduğu normu

$$\|f\|_r := \sup_{x \in \mathbb{R}_0} w_r(x) |f(x)| \quad (2.123)$$

olan fonksiyonların kümesi C_r olsun.

$r \in \mathbb{N}_0$ için $w_r \in C_0$ ve $r \in \mathbb{N}$ için $1/w_r \in C_r$ $0 \leq r < s$ olsun. Her $f \in C_r$ için $C_r \subset C_s$ ve $\|f\|_s \leq \|f\|_r$ eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca $x \in \mathbb{R}_0$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$(w_r(x))^2 \leq w_{2r}(x), \quad (w_r(x))^{-2} \leq \frac{4}{w_{2r}(x)}$$

eşitsizlikleri doğrudur (Rempulka and Skorupka, 2007).

Tanım 2.8.2

Her $f \in C_r$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için $1 \leq b_n < b_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ özelliklerini sağlayan (b_n) dizisi yardımıyla $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b_n)$ için genelleştirilmiş MKZ operatörü,

$$M_n^*(f, b_n; x) = \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \quad (2.124)$$

şeklinde tanımlanır (Rempulska and Skorupka, 2007).

Lemma 2.8.1

(2.124) ile verilen MKZ operatörleri doğrusal ve pozitifdir.

Kanıt

i) Gerçekten $M_n^*(f, b_n, x)$ in doğrusallığı; her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_r$ için;

$$\begin{aligned} M_n^*(\alpha f + \beta g, b_n, x) &= \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) + \beta g\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} \beta g\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= \alpha \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + \beta \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} g\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= \alpha M_n^*(f, b_n, x) + \beta M_n^*(g, b_n, x) \end{aligned}$$

olup $M_n^*(f, b_n, x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_n^*(f, b_n, x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$n \in \mathbb{N}, x \in [0, b_n)$ için $1 \leq b_n < b_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere

$$M_n^*(f, b_n, x) = \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \binom{n+k}{k} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

eşitliği geçerli olduğundan $x \in [0, b_n)$ için

$$\left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{n+1} \geq 0 \text{ ve } \binom{n+k}{k} \geq 0$$

eşitsizlikleri yardımıyla

$$f\left(\frac{k}{n+k} b_n\right) \geq 0$$

eşitsizliğini de kullanarak $M_n^*(f, b_n, x)$ operatörünün pozitif olduğu elde edilir.

Tanım 2.8.3

$r \in \mathbb{N}$ sabit bir sayı $k = 0, 1, \dots, r$ olmak üzere $f^{(k)} \in C_{r-k}$ için $f \in C_r$ olan r -kez diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^r \equiv C^r(\mathbb{R}_0)$ ile belirlidir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Bu fonksiyonlar için norm yine (2.123) eşitliğiyle belirlenecektir.

Tanım 2.8.4

$r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. b_n Tanım 2.8.2 deki koşulları sağlayan bir dizi olsun.

$$p_{nk}(x) := \binom{n+k}{k} x^k (1-x)^{n+1}, k \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N} \quad (2.125)$$

ve

$$F_r(t, x) := \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j \quad (2.126)$$

olmak üzere her $f \in C^r$ için genelleştirilmiş bir MKZ operatörü

$$M_{n,r}^*(f, b_n; x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) F_r \left(\frac{kb_n}{n+k}, x \right), & 0 \leq x < b_n \\ f(x), & x \geq b_n \end{cases} \quad (2.127)$$

şeklinde tanımlanır (Rempulska and Skorupka, 2007)

(1.1),(2.125),(2.129) ve (2.124),(2.127) formüllerinden aşağıdaki (2.128) eşitliği kolayca yazılabilir.

$$M_n^*(e_r, b_n; x) := \begin{cases} b_n^r M_n(e_r; x/b_n), & 0 \leq x < b_n \\ x^r, & x \geq b_n \end{cases} \quad (2.128)$$

Uyarı 2.8.1

$r \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $e_r(x) = x^r$ ve (2.128) ile verilen fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

i) (2.118) eşitliği kullanılarak

$$M_n^*(e_0, b_n; x) = 1, \quad M_n^*(e_1, b_n; x) = x \quad (2.129)$$

eşitliği elde edilir.

ii) (2.126) ile (2.127) kullanılarak ise $x \in \mathbb{R}_0, n \in \mathbb{N}$ için

$$M_{n,r}^*(e_0, b_n; x) = 1$$

eşitliği elde edilir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Aşağıdaki kesimde $K_i = K_i(\alpha, \beta)$ gösterimi ile sadece α ve β parametrelerine bağlı olan uygun pozitif sabitler belirtilecektir.

Aşağıdaki lemmada $M_n^*(f, b_n)$ ve $M_{n,r}^*(f, b_n)$ fonksiyonlarının $\mathbb{R}_0$ üzerinde sürekliliği kanıtlanacaktır.

Lemma 2.8.2

$r \in \mathbb{N}_0$, (b_n) yukarıdaki koşulları sağlayan bir dizi ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in C^r$ için $M_n^*(f, b_n)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_0$ da sürekli. Ayrıca $r \geq 1$ ve $f \in C^r$ ise $M_{n,r}^*(f, b_n)$ fonksiyonu da $\mathbb{R}_0$ da sürekli (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

$M_{n,r}^*$ ve M_n^* için kanıt benzer olduğundan sadece ilk operatör dikkate alınacaktır.

$n, r \in \mathbb{N}$ ve $f \in C^r$ olsun. $M_{n,r}^*(f, b_n)$ nin (b_n, ∞) aralığında sürekliliği (2.127) den açıktır. Ayrıca, $0 \leq j \leq r$ için $f^{(j)}$, türevleri $[0, b_n]$ aralığında sürekli. Dolayısıyla sıfırdan büyük bir sabit $K_2(r, b_n)$ vardır, öyle ki $x \in [0, b_n]$ ve $0 \leq j \leq r$ için $|f^{(j)}(x)| \leq K_2(r, b_n)$ eşitsizliği sağlanır.

$x \in [0, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ için $|kb_n/(n+k) - x| \leq b_n$ olduğundan (2.126) dan

$$\begin{aligned} \left| F_r \left(\frac{kb_n}{n+k}, x \right) \right| &\leq \sum_{j=0}^r \left| f^{(j)} \left(\frac{kb_n}{n+k} \right) \right| \left| x - \frac{kb_n}{n+k} \right|^j \\ &\leq K_2(r, b_n) \sum_{j=0}^r b_n^j \equiv K_3(r, b_n), \quad 0 \leq x < b_n \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece her $[0, a] \subset [0, b_n]$ aralığında (2.125) yardımıyla elde edilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) F_r \left(\frac{kb_n}{n+k}, x \right)$$

serisinin düzgün yakınsaklığı geçerlidir. Buradan $M_{n,r}^*(f, b_n)$ nin tanımı da dikkate alınarak $[0, b_n]$ aralığında $M_{n,r}^*(f, b_n)$ nin sürekli olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi de $M_{n,r}^*(f, b_n)$ nin $x = b_n$ noktasında sürekliliği kanıtlanmalıdır.

(2.127) ve (2.126) ifadelerinden

$$M_{n,r}^*(f, b_n; b_n) = f(b_n) \tag{2.130}$$

ve $x \in [0, b_n)$ için

$$M_{n;r}^*(f, b_n; x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) \sum_{j=0}^r \frac{1}{j!} \left(x - \frac{kb_n}{n+k}\right)^j f^{(j)}\left(\frac{kb_n}{n+k}\right) \quad (2.131)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) f\left(\frac{kb_n}{n+k}\right) + \sum_{j=1}^r \frac{1}{j!} \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} x^{j-q} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) \left(\frac{-kb_n}{n+k}\right)^q f^{(j)}\left(\frac{kb_n}{n+k}\right)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $0 \leq j \leq r$ ve $0 \leq q \leq j$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{-kb_n}{n+k}\right)^q f^{(j)}\left(\frac{kb_n}{n+k}\right) = (-b_n)^q f^{(j)}(b_n) \quad (2.132)$$

eşitliği de geçerlidir.

(2.125) ten $x \in (0, b_n)$ $n \in \mathbb{N}$ ve $k \in \mathbb{N}_0$ için $p_{nk}(x/b_n) > 0$ olacağından sabit n, k için

$$\lim_{x \rightarrow b_n^-} p_{nk}(x/b_n) = 0$$

ve $x \in [0, b_n)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) = 1$$

eşitlikleri elde edilir.

Bununla birlikte (2.130)-(2.132) den

$$\lim_{x \rightarrow b_n^-} M_{n;r}^*(f, b_n; x) = f(b_n) + \sum_{j=1}^r \frac{f^{(j)}(b_n)}{j!} \sum_{q=0}^j \binom{j}{q} b_n^{j-q} (-b_n)^q = f(b_n)$$

eşitlikleri elde edilir ki (2.127) den $x = b_n$ noktasında $M_{n;r}^*$ süreklidir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 2.8.3

$r \in \mathbb{N}$, (b_n) dizisi için fazladan $s_b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{n}$ olsun. Bu durumda $x \in [0, b_n)$ ve $n > 2r$ için

$$w_r(x) M_n^*((t-x)^{2r}, b_n; x) \leq K_4(r, s_b) \left(\frac{b_n}{n}\right)^r \quad (2.133)$$

olacak şekilde sıfırdan büyük $K_4(r, s_b)$ sabiti vardır.

Bununla birlikte $x \geq b_n, r \in \mathbb{N}$ için

$$M_n^*((t-x)^{2r}, b_n; x) = 0 \quad (2.134)$$

eşitliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

(2.134) eşitliği (2.124) ve (2.129) ifadelerinden açıktır.

$x \in [0, b_n)$ ve $n > 2r$ ise (2.128),(2.115),(2.119) ve $s_b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{n}$ den

$$\begin{aligned} w_r(x)M_n^*((t-x)^{2r}, b_n; x) &= w_r(x)b_n^{2r}M_n\left(\left(t - \frac{x}{b_n}\right)^{2r}; \frac{x}{b_n}\right) \\ &\leq K(r) \frac{b_n^{2r} \lambda_n^{2r}(x/b_n)}{n^r(1+x^r)} \\ &= K(r) \frac{b_n^{2r}}{n^r(1+x^r)} \left(\sqrt{\frac{x}{b_n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{2r} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right)^{2r} \\ &\leq K(r) \frac{b_n^{2r} 2^{2r}}{n^r(1+x^r)} \left(\left(\frac{x}{b_n}\right)^r + \frac{1}{n^r}\right) \\ &\leq K(r) 4^r \left(\frac{b_n}{n}\right)^r (1 + s_b^r) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur. Böylece (2.133) eşitsizliğinin kanıtı tamamlanır.

Lemma 2.8.4

Her $r \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_n^*(1/w_r, b_n)\|_r \leq K_5(r, s_b) \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.135)$$

olacak şekilde sıfırdan büyük $K_5(r, s_b)$ sabiti vardır.

Üstelik her $f \in C_r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_n^*(f, b_n)\|_r \leq K_5(r, s_b) \|f\|_r \quad (2.136)$$

eşitsizliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

Her $n \in \mathbb{N}, r = 0,1$ için (2.123),(2.129) ifadeleri ve Lemma 2.8.2 den

$$\|M_n^*(1/w_r, b_n)\|_r \leq 1 \quad (2.137)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$r \geq 2$ ve $e_r(x) = x^r$ ise, yine (2.123),(2.129) ve Lemma 2.8.2 den

$$\|M_n^*(1/w_r, b_n)\|_r \leq 1 + \|M_n^*(e_r, b_n)\|_r \quad (2.138)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca (2.128) den $x \geq b_n, n \in \mathbb{N}$ için

$$w_r(x)M_n^*(e_r, b_n; x) < 1$$

eşitsizliği yazılabilir.

$x \in [0, b_n)$ ve $n > 2r$ için basit hesaplamalar ile Hölder eşitsizliği, (2.129), Tanım 2.8.1 ve Lemma 2.8.3 kullanılarak

$$\begin{aligned} w_r(x)M_n^*(e_r, b_n; x) &\leq 2^r w_r(x)[M_n^*(|t-x|^r, b_n; x) + x^r M_n^*(e_0, b_n; x)] \\ &\leq 2^r \left[1 + (w_{2r}(x)M_n^*((t-x)^{2r}, b_n; x))^{1/2} \right] \\ &\leq 2^r \left[1 + \left(K_4(r, s_b) \left(\frac{b_n}{n} \right)^r \right)^{1/2} \right] \\ &\leq 2^r [1 + (K_4(r, s_b)s_b^r)^{1/2}] \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$1 \leq n \leq 2r$ ve $x \in [0, b_n)$ için (2.124),(2.128) ve (2.129) kullanılarak

$$M_n^*(e_r, b_n; x) = b_n^r \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) \left(\frac{k}{n+k} \right)^r$$

$$\begin{aligned}
&= b_n^r \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x/b_n) \\
&= b_n^r M_n^*(e_0, b_n; x) = b_n^r \leq b_{2r}^r
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$w_r(x) M_n^*(e_r, b_n; x) \leq b_{2r}^r$$

eşitsizliği geçerli olur.

Yukarıdaki durumlar birlikte düşünülerek (2.137) ve (2.138) den (2.135) elde edilmiş olur.

Diğer taraftan her $f \in C_r$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için (2.124) ve (2.123) ten

$$\|M_n^*(f, b_n)\|_r \leq \|f\|_r \|M_n^*(1/w_r, b_n)\|_r \quad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği elde edilir. Son olarak (2.135) kullanılarak (2.136) elde edilmiş olur.

Not 2.8.1

(2.124) eşitliğiyle verilen $M_n^*(f, b_n)$ in tanımı, Lemma 2.8.2 ve (2.136) eşitsizliğinden M_n^* her sabit $r \in \mathbb{N}_0$ için C_r den C_r uzayına giden doğrusal pozitif bir operatördür.

Lemma 2.8.5

$r, (b_n)$ ve s_b , Lemma 2.8.3 ün koşullarını sağlasın. Bu durumda her $f \in C_r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_n^*(f, b_n)\|_r \leq K_6(r, s_b) \left(\|f\|_r + \|f^{(r)}\|_0 \right) \quad (2.139)$$

olacak şekilde sıfırdan büyük bir $K_6(r, s_b)$ sabiti vardır (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

(2.127), (2.123) ve Lemma 2.8.2 den $f \in C_r$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $x \geq b_n$ olmak üzere

$$w_r(x) |M_{n,r}^*(f, b_n; x)| \leq \|f\|_r \quad (2.140)$$

eşitsizliği geçerlidir.

$t \in [0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabit olsun. $r \in \mathbb{N}$ ve $f \in C_r$ için

$$I_r(t, x) := \frac{(x-t)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-u)^{r-1} [f^{(r)}(t+u(x-t)) - f^{(r)}(t)] du \quad (2.141)$$

olmak üzere $x \in [0, b_n)$ için

$$f(x) = \sum_{j=0}^r \frac{f^{(j)}(t)}{j!} (x-t)^j + I_r(t, x) \quad (2.142)$$

Taylor formülü yazılabilir.

(2.142), (2.141), (2.127) ve (2.126) dan $x \in [0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_{n,r}^*(f, b_n; x) = M_n^*(f(x) - I_r(t, x), b_n; x) = f(x) - M_n^*(I_r(t, x), b_n; x)$$

eşitliği elde edilir.

Ayrıca $f \in C_r$ için (2.141) den $t, x \in [0, b_n)$ için

$$\begin{aligned} |I_r(t, x)| &\leq \frac{|t-x|^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-u)^{r-1} |f^{(r)}(t+u(x-t)) - f^{(r)}(t)| du \\ &\leq \frac{2}{(r-1)!} \|f^{(r)}\|_0 |t-x|^r \int_0^1 (1-u)^{r-1} du \\ &\leq \frac{2^{r+1}}{r!} \|f^{(r)}\|_0 (t^r + x^r) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan ve (2.135) de kullanılarak $x \in [0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$w_r(x) |M_{n,r}^*(f, b_n; x)| \leq \|f\|_r + w_r(x) M_n^*(|I_r(t, x)|, b_n; x) \quad (2.143)$$

$$\begin{aligned} &\leq \|f\|_r + \frac{2^{r+1}}{r!} \|f^{(r)}\|_0 (w_r(x) M_n^*(e_r, b_n; x) + 1) \\ &\leq \|f\|_r + \frac{2^{r+1}}{r!} (\|M_n^*(1/w_r, b_n)\|_r + 1) \\ &\leq \|f\|_r K_7(r, s_b) \|f^{(r)}\|_0 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (2.140) ve (2.143) den (2.139) eşitsizliği gösterilmiş olur.

Not 2.8.2

(2.126),(2.127) ve (2.139) ifadeleri ile Lemma 2.8.2 den $M_{n,r}^*$, C_r den C_r uzayına giden doğrusal bir operatördür.

Aşağıdaki teoremlerde yukarıdaki lemmalar uygulanılarak, $f \in C_r$ ve $f \in C^r$ fonksiyonlarının sırasıyla M_n^* ve $M_{n,r}^*$ operatörlerinin yaklaşım derecesi hesaplanacaktır.

Burada $f \in C_r$, $r \in \mathbb{N}_0$ ve $\Delta_r f(x) = f(x+h) - f(x)$ olmak üzere

$$\omega(f; C_r; t) := \sup_{0 \leq h \leq t} \|\Delta_h f(\cdot)\|_r, \quad t \geq 0 \quad (2.144)$$

ile tanımlı süreklilik modülü tanımı kullanılacaktır (Becker, 1978), (DeVore, 1972).

Ayrıca $f \in C_r$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için f_h Stieklov fonksiyonu

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t) dt \quad x \in \mathbb{R}_0, h > 0 \quad (2.145)$$

kullanılacaktır.

Uyarı 2.8.2

Her $f \in C_r$, $f_h \in C_r$ ve her $h > 0$ için

$$\|f - f_h\|_r \leq \omega(f; C_r; t) \quad (2.146)$$

$$\|f_h'\|_r \leq h^{-1} \omega(f; C_r; t) \quad (2.147)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Teorem 2.8.1

$r \in \mathbb{N}_0$ ve (b_n) dizisi için $s_b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{n}$ sabit olsun. $f' \in C_r$ türevine sahip her $f \in C_r$ için $x \in (0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_n(x) := \sqrt{\frac{xb_n}{n}} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) \quad (2.148)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$w_r(x)|M_n^*(f, b_n; x)| \leq K_8(r, s_b)\|f'\|_r \delta_n(x) \quad (2.149)$$

eşitsizliğini sağlayan sıfırdan büyük bir $K_8(r, s_b)$ sabiti vardır.

Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}_0 \setminus (0, b_n)$ için

$$M_n^*(f, b_n; x) - f(x) = 0 \quad (2.150)$$

eşitliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

(2.150), (2.124) ifadesinden açıktır. $f, f' \in C_r$ olsun. Bu durumda $t, x \in (0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$f(t) - f(x) = \int_x^t f'(u) du$$

eşitliği doğrudur. (2.124) ve (2.129) kullanılarak

$$M_n^*(f(t), b_n; x) - f(x) = M_n^*\left(\int_x^t f'(u) du, b_n; x\right)$$

eşitliği ve (2.123) den

$$\left| \int_x^t f'(u) du \right| \leq \|f'\|_r \left| \int_x^t \frac{du}{w_r(u)} \right| \leq \|f'\|_r \left(\frac{1}{w_r(t)} + \frac{1}{w_r(x)} \right) |t - x|$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıdakilerden ve (2.129), Tanım 2.8.1 ve (2.135) den

$$w_r(x)|M_n^*(f, b_n; x) - f(x)| \leq \|f'\|_r \left[w_r(x) M_n^*\left(\frac{|t-x|}{w_r(t)}, b_n; x\right) + M_n^*(|t-x|, b_n; x) \right] \quad (2.151)$$

$$\leq \|f'\|_r \left[2(w_{2r}(x) M_n^*(1/w_{2r}(t), b_n; x))^{1/2} + 1 \right] (M_n^*((t-x)^2, b_n; x))^{1/2}$$

$$\leq K_9(r, s_b) \|f'\|_r (M_n^*((t-x)^2, b_n; x))^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir. M_n MKZ operatörleri için $x \in I, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$M_n((t-x)^2; x) = \frac{x(1-x)^2}{n} + O(n^{-2})$$

eşitliği Abel (1995), Alkemade (1984), Becker (1978), DeVore (1972) den bilinmektedir (Abel, 1995), (Alkemade, 1984), (Becker, 1978), (DeVore, 1972).

Bu hesap ve (2.128) ile (2.148) den her $x \in (0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} M_n^*((t-x)^2, b_n; x) &= b_n^2 M_n((t-x/b_n)^2; x/b_n) \\ &= b_n^2 [x/(nb_n)(1-x/b_n)^2 + O(n^{-2})] \\ &= \delta_n^2(x) + O((b_n/n)^2) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece (2.149) eşitsizliği gösterilmiş olur.

Teorem 2.8.2

$r, (b_n)$ dizisi ve $s_b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{n}$ Teorem 2.8.1 in şartlarını sağlasın. Bu durumda $f \in C_r$, $x \in (0, b_n)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$\omega(f; C_r)$ ve δ_n sırasıyla (2.144) ve (2.148) ile tanımlanan ifadeler $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in \mathbb{R}_0 \setminus (0, b_n)$ (2.150) eşitliğini sağlayan sayılar olmak üzere

$$w_r(x) |M_n^*(f, b_n; x) - f(x)| \leq K_{10}(r, s_b) \omega(f; C_r; \delta_n(x)) \quad (2.152)$$

olacak şekilde sıfırdan büyük bir $K_{10}(r, s_b)$ sabiti vardır (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

(2.152), Teorem 2.8.1 in kanıtına benzer şekilde kanıtlanır. $r \in \mathbb{N}_0$, $f \in C_r$, $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in (0, b_n)$ olsun. Steiklov fonksiyonu $f_h \in C_r$, $h > 0$ ve (2.124) kullanılarak

$$M_n^*(f, b_n; x) - f(x) = M_n^*(f - f_h, b_n; x) + (M_n^*(f_h, b_n; x) - f(x)) + f_h(x) - f(x)$$

eşitliği yazılır. (2.136) ve (2.146) dan

$$w_r(x) |M_n^*(f - f_h, b_n; x)| \leq K_5(r, s_b) \|f - f_h\|_r$$

$$\leq K_5(r, s_b)\omega(f; C_r; h)$$

eşitsizliği geçerlidir. Teorem 2.8.1, (2.147) ve (2.148) kullanılarak

$$w_r(x)|M_n^*(f_h, b_n; x) - f_h(x)| \leq K_8(r, s_b)\|f'\|_r \delta_n(x)$$

$$\leq K_8(r, s_b)\omega(f; C_r; h)h^{-1}\delta_n(x)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece yukarıdaki eşitsizlikler ve (2.146) dan $h = \delta_n(x)$ olmak üzere

$$w_r(x)|M_n^*(f, b_n; x) - f(x)| \leq K_{10}(r, s_b)\omega(f; C_r; h)\{1 + h^{-1}\delta_n(x)\}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (2.152) gösterilmiş olur.

Teorem 2.8.3

(b_n) dizisi ve $s_b := \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{b_n}{n}$ Teorem 2.8.1 in şartlarını sağlamak üzere $r \in \mathbb{N}$ olsun. $f \in C^r$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\|M_{n,r}^*(f, b_n) - f\|_r \leq K_{11}(r, s_b) \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \omega\left(f^{(r)}; C_0; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \quad (2.153)$$

olacak şekilde sıfırdan büyük bir $K_{11}(r, s_b)$ sabiti vardır.

Ayrıca $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [b_n, \infty)$ için

$$M_{n,r}^*(f, b_n; x) - f(x) = 0 \quad (2.154)$$

eşitliği doğrudur (Rempulska and Skorupka, 2007).

Kanıt

Eşitlik (2.154), (2.127) den kolayca elde edilir.

$x \in [0, b_n)$ olsun. Lemma 2.8.5 in kanıtına benzer şekilde $f \in C^r$ için (2.142) deki Taylor formülü yardımıyla (2.124), (2.127), (2.126) ve (2.142) ile (2.141) den

$$f(x) - M_{n,r}^*(f, b_n; x) = M_n^*(I_r(t, x), b_n; x)$$

eşitliği elde edilir. (2.144) ile $f \in C^r$ ve $\omega(f^{(r)}; C_0)$ özelliklerinden her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, b_n)$ için

$$\begin{aligned} |I_r(t, x)| &\leq \frac{|x-t|^r}{(r-1)!} \int_0^1 (1-u)^{r-1} \omega(f^{(r)}; C_0; u|x-t|) du \\ &\leq \frac{|x-t|^r}{r!} \omega(f^{(r)}; C_0; |x-t|) \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{n}{b_n}} |t-x|^{r+1} + |t-x|^r \right) \omega\left(f^{(r)}; C_0; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Sonuç olarak

$$|M_{n,r}^*(f, b_n; x) - f(x)| \leq \omega\left(f^{(r)}; C_0; \sqrt{\frac{b_n}{n}}\right) \times \left(\sqrt{\frac{n}{b_n}} M_n^*(|t-x|^{r+1}; b_n; x) + M_n^*(|t-x|^r; b_n; x) \right) \quad (2.155)$$

eşitsizliği geçerlidir. Hölder eşitsizliği, Lemma 2.8.3 ve Tanım 2.8.1 kullanılarak,

$$\begin{aligned} w_r(x) M_n^*(|t-x|^{r+1}; b_n; x) &\leq (w_{2r}(x) M_n^*((t-x)^{2r+2}; b_n; x))^{1/2} \\ &\leq \left[K_4(r, s_b) \frac{1+x^{r+1}}{1+x^{2r}} \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r+1} \right]^{1/2} \\ &\leq K_{12}(r, s_b) \left(\frac{b_n}{n}\right)^{(r+1)/2} \end{aligned} \quad (2.156)$$

ve benzer şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, b_n)$ için

$$w_r(x) M_n^*(|t-x|^r; b_n; x) \leq K_{13}(r, s_b) \left(\frac{b_n}{n}\right)^{r/2} \quad (2.157)$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi, (2.155)-(2.157), (2.123) ve (2.154) ten (2.153) gösterilmiş olur.

Teorem 2.8.2 ve Teorem 2.8.3 ten aşağıdaki sonuçlar verilebilir.

Sonuç 2.8.1

Yukarıdaki koşulları sağlayan (b_n) dizisi $r \in \mathbb{N}_0$ ve $f \in C_r$ için her $x \in \mathbb{R}_0$ noktasında

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_n^*(f, b_n; x) = f(x)$$

eşitliği geçerlidir. Bu yakınsama $x_1 \geq 0$ olmak üzere her $[x_1, x_2]$ aralığında düzgündür (Rempulska and Skorupka, 2007).

Sonuç 2.8.2

Yukarıdaki koşulları sağlayan (b_n) dizisi $r \in \mathbb{N}$ ve her $f \in C^r$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{b_n} \right)^{r/2} \|M_{n;r}^*(f, b_n) - f\|_r = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Benzer şekilde her $x \in \mathbb{R}_0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{b_n} \right)^{r/2} (M_{n;r}^*(f, b_n; x) - f(x)) = 0$$

eşitliği yazılabilir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Aşağıdaki uyarı M_n^* ve $M_{n;r}^*$ operatörlerinin yaklaşım hızlarının karşılaştırmasını vermektedir.

Uyarı 2.8.3

Teoremler 2.8.1-2.8.3 M_n^* operatörlerinin $f \in C_r$ fonksiyonlarına ve $M_{n;r}^*$ operatör dizilerinin $f \in C^r$ fonksiyonlarına yaklaşım derecesinin $(b_n/n)_1^\infty$ dizisinin sifıra yakınsama hızına bağlı olduğunu gösterir.

Örneğin, sabit bir $0 < \alpha < 1$ için $b_n = n^\alpha$ ise, (2.153) ten $r, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C^r$ için

$$\|M_{n;r}^*(f, b_n) - f\|_r \leq K_{13}(r) n^{(\alpha-1)r/2} \omega(f^{(r)}; C_0; n^{(\alpha-1)/2})$$

eşitsizliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2007).

Aynı zamanda Teorem 2.8.2 ve Teorem 2.8.3, $r \geq 2$ olduğunda $M_{n;r}^*$ operatörlerinin r -kez diferensiyellenebilen fonksiyonlar için M_n^* operatörlerinden daha iyi yaklaşım özelliklerine sahip olduklarını da gösterir.





3.BÖLÜM

İKİ DEĞİŞKENLİ MKZ OPERATÖRLERİ

Bu bölümde Rempulska ve Skorupka tarafından 2006 da verilen iki değişkenli diferansiyellenebilir fonksiyonlar uzayında genelleştirilmiş MKZ operatörlerini tanıtarak onlar için yaklaşım teoremleri verilecektir. İki değişkenli klasik MKZ operatörlerine göre bu operatörlerin daha iyi yaklaşım özellikleri olduğu gösterilecektir. İlk olarak iki değişkenli MKZ operatörleri ve onların yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1 Operatörün Genel Özellikleri

Tanım 3.1.1

$I^2 := \{(x, y): x, y \in I\}$ ve $C(I^2)$ uzayı tüm gerçel değerli I^2 de sürekli olan iki değişkenli fonksiyonların uzayı olsun. Bu uzayda norm

$$\|f\| := \max_{(x,y) \in I^2} |f(x, y)| \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 3.1.2

$f \in C(I^2)$ için süreklilik modülü $s, t \in I$ için

$$\omega(f; s, t) := \sup\{|f(u, v) - f(x, y)|: (u, v), (x, y) \in I^2, |u - x| \leq s, |v - y| \leq t\} \quad (3.2)$$

şeklinde kullanılacaktır (Timan, 1960).

Lemma 3.1.1

(3.2) eşitliği ile verilen süreklilik modülü için aşağıdaki özellikler geçerlidir (Timan, 1960).

i) $f \in C(I^2)$ için $\omega(f; s, t)$ nin s ve t ye göre azalmayan fonksiyondur.

ii) $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ sabitler olmak üzere $(\lambda_1 s), (\lambda_2 t) \in I$ için

$$\begin{aligned}
\omega(f; \lambda_1 s, \lambda_2 t) &\leq \omega(f; \lambda_1 s, 0) + \omega(f; 0, \lambda_2 t) \\
&\leq (\lambda_1 + 1)\omega(f; s, 0) + (\lambda_2 + 1)\omega(f; 0, t) \\
&\leq (\lambda_1 + \lambda_2 + 2)\omega(f; s, t)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

iii) Her $f \in C(I^2)$ için

$$\lim_{s,t \rightarrow 0^+} \omega(f; s, t) = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Tanım 3.1.3

$r \in \mathbb{N}_0$ olsun. $0 \leq i \leq m \leq r$ olmak üzere $f_{x^{m-i}y^i}^{(m)} \in C(I^2)$ kısmi türevlerine sahip olan tüm $f \in (I^2)$ lerin kümesi $C^r(I^2)$ olarak tanımlanır. Açıkça $C^0(I^2) = C(I^2)$ dir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Meyer-König ve Zeller tarafından tanıtılan (1.1) ve Rempulska ve Tomczak tarafından tanımlanan (2.114) formüllerindeki M_n ve $M_{n,r}$ operatörlerinin $C^r(I^2)$ uzayında iki değişkenli benzerleri tanıtılacaktır.

Tanım 3.1.4

$j \in \mathbb{N}_0, m, n \in \mathbb{N}$ ve

$$p_{mj}(x) = \binom{m+j}{j} x^j (1-x)^{m+1}$$

olsun. $f \in C(I^2)$, $\alpha \in \mathbb{N}, \beta \in \mathbb{N}_0$ için

$$\xi_{\alpha\beta} := \frac{\beta}{\alpha + \beta} \tag{3.3}$$

eşitliği yardımıyla iki değişkenli MKZ operatörü

$$M_{m,n}(f; x, y) := \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{mj}(x) p_{nk}(y) f(\xi_{mj}, \xi_{nk}), & 0 \leq x, y < 1 \text{ ise} \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) f(\xi_{mj}, 1), & 0 \leq x < 1, y = 1 \text{ ise} \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) f(1, \xi_{nk}), & x = 1, 0 \leq y < 1 \text{ ise} \\ f(1, 1), & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.4)$$

eşitliğiyle tanımlanır (Rempulska and Skorupka, 2006).

Lemma 3.1.2

(3.4) ile verilen operatörler dizisi doğrusal ve pozitifdir.

Kanıt

Burada $k, j \in \mathbb{N}_0, n, m \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{j}{j+m} \leq A, 0 \leq \frac{k}{k+n} \leq B; \quad A, B \in (0, 1)$$

$$\binom{n+k}{k} \geq 0, \quad \binom{j+m}{j} \geq 0$$

olmak üzere

$$M_{m,n}(f; x, y) = (1-x)^{n+1} (1-y)^{m+1} \binom{n+k}{k} \binom{j+m}{j} x^j y^k \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right)$$

olarak tekrar düzenlenirse

i) Gerçekten $M_{m,n}(f; x, y)$ operatörünün doğrusallığı için $(0 < a < 1)$ olsun, her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C(I^2)$ ve $k, j \in \mathbb{N}_0, n, m \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} M_{m,n}(\alpha f(t) + \beta g(t); x, y) &= (1-x)^{n+1} (1-y)^{m+1} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \right. \\ &\quad \left. + \beta g\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \right) \binom{n+k}{k} \binom{j+m}{j} x^j y^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1-x)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \binom{j+m}{j} x^j \\
&+ (1-y)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \binom{n+k}{k} y^k \\
&= \alpha (1-x)^{m+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \binom{j+m}{j} x^j \\
&+ \beta (1-y)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} g\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \binom{n+k}{k} y^k \\
&= \alpha M_{m,n}(f; x, y) + \beta M_{m,n}(g; x, y)
\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olup $M_{m,n}(f; x, y)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_{m,n}(f; x, y)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

Her $x, y \in [0, a]$; $0 < a < 1$ ve $k, l \in \mathbb{N}_0$, $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$(1-x)^{m+1} \geq 0, \quad (1-y)^{n+1} \geq 0$$

ve;

$$\binom{j+m}{j} x^m \geq 0, \quad \binom{n+k}{k} y^n \geq 0$$

eşitsizlikleri doğru olup

$$f \geq 0 \text{ olduğundan } f\left(\frac{j}{j+m}, \frac{k}{k+n}\right) \geq 0$$

bulunur ki bu da $M_{m,n}(f; x, y)$ operatörünün pozitif olması demektir.

Uyarı 3.1.1

(3.4), (3.3) ve (1.1) den aşağıdaki iki eşitlik elde edilir.

$$M_{m,n}(f(t, z); x, 1) = M_m(f_1(t); x), \quad (x \in I \text{ için}) \quad (3.5)$$

$$M_{m,n}(f(t, z); 1, y) = M_n(f_2(z); y), \quad (y \in I \text{ için}) \quad (3.6)$$

burada her $f \in C(I^2)$ için

$$f_1(x) := f(x, 1) \text{ ve } f_2(y) := f(1, y) \quad (x, y \in I \text{ için}) \quad (3.7)$$

olarak tanımlıdır.

Gösterim 3.1.1

Bu kesimde $K_i(r), i \in \mathbb{N}$ yalnızca r parametresine bağlı olan uygun pozitif sabitleri gösterecektir.

Şimdi yaklaşım teoremleri için gerekli olan bazı yardımcı lemmalar verilecektir.

Lemma 3.1.3

$m, n \in \mathbb{N}$ sabit sayılar olsun. Bu durumda her $f \in C(I^2)$ için

$$\lim_{x, y \rightarrow 1^-} M_{m,n}(f; x, y) = f(1, 1) \quad (3.8)$$

eşitliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Kanıt

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(I^2)$ olsun. (3.4), (3.1), (2.125) ve (2.115) ten $M_{m,n}(f; x, y);$

$D = \{(x, y): 0 \leq x, y < 1\}$ bölgesi üzerinde sürekli fonksiyondur ve

$$|M_{m,n}(f; x, y)| \leq \|f\| \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) = \|f\|$$

eşitsizliğini sağlar. Açıkça her $x, y \in D$ için

$$M_{m,n}(f; x, y) - f(1, 1) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{mj}(x) p_{nk}(y) (f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(1, 1)) \quad (3.9)$$

eşitliği geçerli olacaktır. (3.3) ten

$$\lim_{j,k \rightarrow \infty} (f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(1,1)) = 0 \quad (3.10)$$

eşitliği yazılabilir. (3.1) ile verilen norm tanımı kullanılarak $\varepsilon > 0$ seçimiyle $j, k \in \mathbb{N}_0$ için

$$|f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(1,1)| \leq 2\|f\| \quad (3.11)$$

eşitsizliği geçerlidir. (3.10) dan $j_0 = j_0(\varepsilon)$ ve $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayıları vardır öyle ki $j > j_0$ ve $k > k_0$ için

$$|f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(1,1)| < \varepsilon \quad (3.12)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca (3.9) dan

$$\begin{aligned} |M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \left(\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{k=0}^{k_0} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=0}^{k_0} + \sum_{j=0}^{j_0} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \right) p_{mj}(x) p_{nk}(y) \\ &\quad \times |f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(1,1)| \\ &:= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \sum_4, \quad (x, y) \in D \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İlk olarak dördüncü toplam için (3.12) ve (2.115) kullanılarak her $(x, y) \in D$ için

$$\sum_4 < \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) = \varepsilon$$

eşitsizliği yazılabilir. (2.125) ten $k \in \mathbb{N}_0$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} p_{nk}(x) = 0 \quad (3.13)$$

eşitliği geçerli olacaktır.

İlk toplam için (3.11) ve (3.13) uygulanırsa $x, y \rightarrow 1^-$ iken

$$\sum_1 \leq 2\|f\| \sum_{j=0}^{j_0} p_{mj}(x) \sum_{k=0}^{k_0} p_{nk}(y) = o(1)$$

eşitsizliği bulunur.

Benzer olarak ikinci toplam için (3.11),(3.13) ve (2.115) kullanılarak $x \rightarrow 1^-$ ve $0 \leq y < 1$ için

$$\sum_2 \leq 2\|f\| \sum_{j=0}^{j_0} p_{mj}(x) \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) = 2\|f\| \sum_{j=0}^{j_0} p_{mj}(x) = o(1)$$

eşitsizliği doğrudur.

Son olarak üçüncü toplam için $y \rightarrow 1^-$ ve $0 \leq x < 1$ iken

$$\sum_3 \leq 2\|f\| \sum_{k=0}^{k_0} p_{nk}(y) = o(1)$$

eşitsizliği geçerli olacaktır.

Yukarıdaki ifadeler birleştirilerek $x \rightarrow 1^-$ ve $y \rightarrow 1^-$ iken

$$M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y) = o(1)$$

eşitliği bulunur. Bu ise (3.8) eşitliğini verir. Böylece Lemma 3.1.3 ün kanıtı tamamlanmış olur.

Lemma 3.1.3 ün kanıtı ile aynı şekilde kanıtlanabileceğinden aşağıdaki Lemma 3.1.4 kanıtsız olarak verilecektir.

Lemma 3.1.4

$m, n \in \mathbb{N}$ ve $f \in C(I^2)$ olsun. Bu durumda her $0 \leq x < 1$ için

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) (f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(\xi_{mj}, 1)) = 0$$

ve her $0 \leq y < 1$ için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) (f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(1, \xi_{nk})) = 0$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca $f(1,1)$ için

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) f(\xi_{mj}, 1) = f(1,1)$$

$$\lim_{y \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) f(1, \xi_{nk}) = f(1,1)$$

eşitlikleri doğrudur (Rempulska and Skorupka, 2006).

3.2 Yaklaşım Teoremleri

Her $f \in C(I^2)$ için $M_{m,n}(f; x, y) \in C(I^2)$ olması anlamına gelen aşağıdaki Lemma 3.2.1, (3.4)-(3.7), Lemma 3.1.3 ve Lemma 3.1.4 uygulanarak kolayca kanıtlanabilir.

Lemma 3.2.1

$m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.4) ile tanımlanan $M_{m,n}$ MKZ operatörü $C(I^2)$ den $C(I^2)$ e tanımlı doğrusal pozitif bir operatördür. Üstelik her $f \in C(I^2)$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_{m,n}(f)\| \leq \|f\|$$

eşitsizliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Aşağıda Abel (1995) ve Becker and Nessel (1978) de kanıtlanan Teorem 3.2.1 in kanıtı için gerekli olan Lemma 3.2.2 verilecektir (Abel, 1995), (Becker and Nessel, 1978).

Lemma 3.2.2

Her $x \in I$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n(1; x) = 1, \quad M_n(t; x) = x,$$

$$M_n(t^2; x) = \begin{cases} x^2 + x \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) \left(\frac{k+1}{n+k+1} - \frac{k}{n+k} \right), & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ 1, & x = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir. Ayrıca

$$M_n((t-x)^2, x) = M_n(t^2, x) - 2xM_n(t, x) + x^2 = M_n(t^2, x) - x^2$$

eşitlikleri ile

$$= \begin{cases} x \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(x) \frac{n}{(n+k+1)(n+k)} & \text{eğer } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{eğer } x = 1 \end{cases}$$

$$\leq \frac{1}{n} \quad x \in I, n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

eşitsizliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Abel (1995) ve Hölzle (1980) de verilen sonuçlardan aşağıdaki Lemma 3.2.3 verilebilir (Abel, 1995), (Hölzle, 1980).

Lemma 3.2.3

Her $s, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in I$ için

$$M_n((t-x)^{2s}; x) \leq K_2(s)n^{-s}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K_2(s) > 0$ sabiti vardır. Ayrıca $x \in I, n \in \mathbb{N}$ için

$$M_n(|t-x|^s; x) \leq (K_2(s)n^{-s})^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği de geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Tanım 3.2.1

$n, r \in \mathbb{N}$ sabit sayılar olsun. $f \in C(I^2)$ fonksiyonlarının n .dereceden MKZ modifikasyonu

$$\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) := \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nj}(x) p_{nk}(y) \sum_{s=0}^r \frac{d^s f(\xi_{nj}, \xi_{nk})}{s!}, & 0 \leq x, y < 1 \text{ ise} \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_{nj}(x) \sum_{s=0}^r \frac{d^s f_1(\xi_{nj})}{s!}, & 0 \leq x < 1, y = 1 \text{ ise} \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) \sum_{s=0}^r \frac{d^s f_2(\xi_{nk})}{s!}, & x = 1, 0 \leq y < 1 \text{ ise} \\ f(1,1), & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.14)$$

formülü ile tanımlanır. Burada ξ_{nj} , (3.3) eşitliği, f_1 ve f_2 ise (3.7) eşitliği ile belirli olmak üzere $d^s f(x_0, y_0)$, $d^s f_1(x_0)$ ve $d^s f_2(y_0)$ in s -inci diferansiyelleri

$$d^s f(x_0, y_0) := \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} f_{x^{s-i}y^i}^{(s)}(x_0, y_0) (x - x_0)^{s-i} (y - y_0)^i \quad (3.15)$$

$$d^s f_1(x_0) := f_1^{(s)}(x_0) (x - x_0)^s, d^s f_2(y_0) = f_2^{(s)}(y_0) (y - y_0)^s \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlıdır. (3.7)-(3.16), (3.3) ve (2.114) ten

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{n,r}(f; x, 1) &:= M_{n,r}(f_1, x), \\ \tilde{M}_{n,r}(f; 1, y) &:= M_{n,r}(f_2, y) \end{aligned} \quad (3.17)$$

eşitlikleri yazılabilir.

Benzer şekilde (2.115) ten tüm $x, y \in I, n \in \mathbb{N}$ ve $r \in \mathbb{N}_0$ için

$$\tilde{M}_{n,r}(1; x, y) = 1 \quad (3.18)$$

eşitliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Lemma 3.1.3 ün kanıtına benzer şekilde (3.3)-(3.7) kullanılarak, (3.14) ile tanımlanan $\tilde{M}_{n,r}$ operatörlerinin aşağıdaki özellikleri türetilir.

Lemma 3.2.4

$n, r \in \mathbb{N}$ olsun. $\tilde{M}_{n,r}$, $C^r(I^2)$ uzayından $C(I^2)$ ya doğrusal bir operatördür. Ayrıca her $f \in C^r(I^2)$ için

$$\|\tilde{M}_{n,r}(f; \cdot, \cdot)\| \leq K_3(r) \sum_{s=0}^r \sum_{i=0}^s \|f_{x^{s-i}y^i}^{(s)}\| \quad (3.19)$$

olacak şekilde bir $K_3(r) > 0$ sabiti vardır (Rempulska and Skorupka, 2006).

Kanıt

İlk iddia tanımdan kolayca elde edilebileceğinden yalnızca (3.19) eşitsizliği gösterilecektir.

(3.3) kullanılarak $x, y \in I$, $j, k \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ için

$$|x - \xi_{nj}| \leq 1, \quad |y - \xi_{nk}| \leq 1$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Bu eşitsizlikler ile (3.15) ve (3.1)-(3.14) arasındakiler kullanılarak her $0 \leq x, y < 1$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |\tilde{M}_{n,r}(f; x, y)| &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nj}(x) p_{nk}(y) \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \|f_{x^{s-i}y^i}^{(s)}\| \\ &\leq \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \|f_{x^{s-i}y^i}^{(s)}\| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Benzer şekilde (3.16) dan her $0 \leq x, y < 1$ ve $n, r \in \mathbb{N}$ için

$$|\tilde{M}_{n,r}(f; x, 1)| \leq \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \|f_1^{(s)}(\cdot)\| \leq \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \|f_{x^s}^{(s)}\|$$

$$|\tilde{M}_{n,r}(f; 1, y)| \leq \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \|f_2^{(s)}(\cdot)\| \leq \sum_{s=0}^r \frac{1}{s!} \|f_{y^s}^{(s)}\|$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Yukarıdaki eşitsizlikleri uygulayarak (3.14) yardımıyla (3.26) eşitsizliği kolayca elde edilmiş olur.

Şimdi $M_{m,n}(f; x, y)$ nin yaklaşım hızı ile ilgili teorem verilecektir.

Teorem 3.2.1

$f \in C(I^2)$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda $\omega(f; \cdot, \cdot)$ (3.2) ile tanımlanan f nin süreklilik modülü olmak üzere

$$\|M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)\| \leq 4\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.20)$$

eşitsizliği geçerlidir (Rempulska and Skorupka, 2006).

Kanıt

(3.4) ve (2.115) ten her $f \in C(I^2)$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{mj}(x) p_{nk}(y) (f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(x, y)), & 0 \leq x, y < 1 \text{ ise} \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_{mj}(x) (f(\xi_{mj}, 1) - f(x, 1)), & 0 \leq x < 1, y = 1 \text{ ise} \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) (f(1, \xi_{nk}) - f(1, y)), & x = 1, 0 \leq y < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.21)$$

eşitliği geçerlidir.

$0 \leq x, y < 1$ için (3.3) ve (3.2) de tanımlanan süreklilik modülünün özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} |f(\xi_{mj}, \xi_{nk}) - f(x, y)| &\leq \omega(f; |\xi_{mj} - x|, |\xi_{nk} - y|) \\ &\leq (\sqrt{m}|\xi_{mj} - x| + \sqrt{n}|\xi_{nk} - y| + 2)\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (3.21), (2.115) ve (1.1) yardımıyla

$$|M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| \leq \omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \{\sqrt{m}M_m(|t - x|; x) + \sqrt{n}M_n(|z - y|; y) + 2\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Hölder eşitsizliği ve Lemma 3.2.2 kullanılarak

$$M_m(|t - x|; x) \leq \{M_m((t - x)^2; x)\}^{\frac{1}{2}} \{M_m(1; x)\}^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{m}},$$

eşitsizliği bulunur. Benzer şekilde her $0 \leq x, y < 1$ için

$$M_n(|z - y|; y) \leq \frac{1}{\sqrt{n}},$$

eşitsizliği de geçerlidir.

Yukarıdakilerden her $0 \leq x, y < 1$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$|M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)| \leq 4\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.22)$$

eşitsizliği geçerlidir. Buradan her $0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1$ ve $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$|M_{m,n}(f; x, 1) - f(x, 1)| \leq 4\omega\left(f; \frac{1}{\sqrt{m}}, 0\right) \quad (3.23)$$

ve

$$|M_{m,n}(f; 1, y) - f(1, y)| \leq 4\omega\left(f; 0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.24)$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Böylece (3.21), (3.24) ve (3.1) kullanılarak $\omega(f; \cdot, \cdot)$ özellikleri yardımıyla (3.20) eşitsizliği gösterilmiş olur.

Teorem 3.2.1 den aşağıdaki sonuç geçerlidir.

Sonuç 3.2.1

Her $f \in C(I^2)$ için

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|M_{m,n}(f; x, y) - f(x, y)\| = 0$$

eşitliği geçerlidir.

Sonuç 3.2.2

Her $f \in C^1(I^2)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_{n,n}(f; x, y) - f(x, y)\| \leq 4(\|f'_x\| + \|f'_y\|)n^{-\frac{1}{2}} \quad (3.25)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Kanıt

Gerçekten (3.20), (3.2) ve $\omega(f; \cdot, \cdot)$ özellikleri kullanılarak her $f \in C(I^2)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|M_{n,n}(f; x, y) - f(x, y)\| \leq 4 \left(\omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}, 0 \right) + \omega \left(f; 0, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

eşitsizliği doğrudur.

Burada her $f \in C^1(I^2)$ için

$$\begin{aligned} \omega \left(f; \frac{1}{\sqrt{n}}, 0 \right) &= \sup \left\{ |f(u, y) - f(x, y)| : (u, y), (x, y) \in I^2, |u - x| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} \\ &\leq \|f'_x\| n^{-1/2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olup bu ifadeye denk olarak

$$\omega \left(f; 0, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \leq \|f'_y\| n^{-1/2}$$

eşitsizliği yazılabilir. Yukarıdaki ifadeler birlikte düşünülerek (3.25) eşitsizliğine ulaşılmış olur.

Şimdi her $f \in C^r(I^2)$ ve $\tilde{M}_{n,r}(f)$ için (2.119) un bir denk ifadesi kanıtlanacaktır.

Teorem 3.2.2

$r \in \mathbb{N}$ sabit bir sayı olsun. Her $f \in C^r(I^2)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\omega(f_{x^r-y^i}^{(r)}; \cdot, \cdot)$ (3.2) ile tanımlanan süreklilik modülü olmak üzere operatör için

$$\|\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) - f(x, y)\| \leq K_4(r) n^{-\frac{r}{2}} \sum_{i=0}^r \omega(f_{x^{r-i}y^i}; \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}) \quad (3.26)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $K_4(r) > 0$ sabiti vardır (Rempulska and Skorupka, 2006).

Kanıt

(3.14),(3.17),(3.18) ve (2.115) formülleri birlikte kullanılarak $f_1(x)$ ve $f_2(y)$ (3.7) deki şekilde tanımlı olmak üzere her $f \in C^r(I^2)$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) - f(x, y) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nj}(x) p_{nk}(y) \left(\sum_{s=0}^r \frac{d^s f(\xi_{nj}, \xi_{nk})}{s!} - f(x, y) \right), & 0 \leq x, y < 1 \text{ ise} \\ \sum_{j=0}^{\infty} p_{nj}(x) \left(\sum_{s=0}^r \frac{d^s f_1(\xi_{nj})}{s!} - f_1(x) \right), & 0 \leq x < 1, y = 1 \text{ ise} \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_{nk}(y) \left(\sum_{s=0}^r \frac{d^s f_2(\xi_{nk})}{s!} - f_2(y) \right), & x = 1, 0 \leq y < 1 \text{ ise} \\ 0, & x = y = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.27)$$

eşitliği geçerlidir.

Durumlar ayrı ayrı incelenecektir.

i) $0 \leq x, y < 1$ olsun. Her $f \in C^r(I^2)$ için sabit bir $(x_0, y_0) \in I^2$ noktasında aşağıdaki Taylor formülü uygulanırsa $(x, y) \in I^2$ olmak üzere

$$f(x, y) = \sum_{s=0}^r \frac{d^s f(x_0, y_0)}{s!} + \frac{1}{(r-1)!} \times \int_0^1 (1-t)^{r-1} (d^r f(\tilde{x}, \tilde{y}) - d^r f(x_0, y_0)) dt \quad (3.28)$$

eşitliği geçerli olur.

$$\Delta x := x - x_0 \text{ ve } \Delta y := y - y_0$$

şeklinde tanımlı olsun.

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)) \text{ ve } 0 \leq t \leq 1 \text{ olmak üzere}$$

$d^s f(x_0, y_0)$, $d^r f(\tilde{x}, \tilde{y})$ diferansiyelleri için $(x_0, y_0) = (\xi_{nj}, \xi_{nk})$ eşitliği kullanılarak (3.27),(3.28) den

$$A_{j,k;r}(f; x, y) := \int_0^1 (1-t)^{r-1} \left| d^r f(\xi_{nj} + t(x - \xi_{nj}), \xi_{nk} + t(y - \xi_{nk})) - d^r f(\xi_{nj}, \xi_{nk}) \right| dt$$

eşitliği yardımıyla

$$|\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) - f(x, y)| \leq \frac{1}{(r-1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} p_{nj}(x) p_{nk}(y) A_{j,k;r}(f; x, y) \quad (3.29)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.15) ve (3.2) den süreklilik modülü özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} A_{j,k;r}(f; x, y) &\leq \int_0^1 (1-t)^{r-1} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \times \omega\left(f_{x^{r-i}y^i}^{(r)}; t|x - \xi_{nj}|, t|y - \xi_{nk}|\right) |x - \xi_{nj}|^{r-i} |y - \xi_{nk}|^i dt \\ &\leq \frac{1}{r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \omega\left(f_{x^{r-i}y^i}^{(r)}; |x - \xi_{nj}|, |y - \xi_{nk}|\right) |x - \xi_{nj}|^{r-i} |y - \xi_{nk}|^i \\ &\leq \frac{1}{r} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \omega\left(f_{x^{r-i}y^i}^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad \times (\sqrt{n}|x - \xi_{nj}| + \sqrt{n}|y - \xi_{nk}| + 2) |x - \xi_{nj}|^{r-i} |y - \xi_{nk}|^i \end{aligned} \quad (3.30)$$

eşitsizlikleri bulunur. Burada

(3.30), (3.29), (3.4) ve (3.1) dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) - f(x, y)| &\leq \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \omega\left(f_{x^{r-i}y^i}^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &\quad \times \{\sqrt{n}M_n(|t - x|^{r+1-i}; x)M_n(|z - y|^i; y) + \sqrt{n}M_n(|t - x|^{r-i}; x)M_n(|z - y|^{i+1}; y) \\ &\quad + 2M_n(|t - x|^{r-i}; x)M_n(|z - y|^i; y)\} \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Son eşitsizlik Lemma 3.2.3 ile birlikte düşünülerek her $0 \leq x, y < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$|\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) - f(x, y)| \leq K_5(r) n^{-\frac{r}{2}} \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} \omega\left(f_{x^{r-i}y^i}^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (3.31)$$

eşitliği elde edilir.

ii) İkinci olarak $0 \leq x < 1$, $y = 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. (3.16)-(3.18), (2.114) ve (2.119) dan

$$\begin{aligned} |\tilde{M}_{n,r}(f; x, 1) - f(x, 1)| &= |M_{n,r}(f_1, x) - f_1(x)| \\ &\leq K_1(r)n^{-\frac{r}{2}} \omega\left(f_1^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

ifadesi yazılabilir. Bu ifadeye benzer şekilde her $0 \leq y < 1$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} |M_{n,r}(f; 1, y) - f(1, y)| &= |M_{n,r}(f_2, y) - f_2(y)| \\ &\leq K_1(r)n^{-\frac{r}{2}} \omega\left(f_2^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

eşitsizliği doğrudur. (3.7) den

$$f_1^{(r)}(x) = f_{x^r}^{(r)}(x, 1) \text{ ve } f_2^{(r)}(y) = f_{y^r}^{(r)}(1, y)$$

eşitlikleri yazılabilir.

(1.12) ve (3.2) kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega\left(f_1^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \omega\left(f_{x^r}^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}, 0\right) \leq \omega\left(f_{x^r}^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad (3.34)$$

$$\omega\left(f_2^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \omega\left(f_{y^r}^{(r)}; 0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \omega\left(f_{y^r}^{(r)}; \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right). \quad (3.35)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Böylece (3.31)-(3.35) ve (3.27) ile (3.1) kullanılarak (3.26) daki istenen eşitsizlik elde edilmiş olur.

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.1 den aşağıdaki önemli uyarı verilebilir.

Uyarı 3.2.1

Her $f \in C^r(I^2)$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{r}{2}} \|\tilde{M}_{n,r}(f; x, y) - f(x, y)\| = 0$$

eşitliği sağlanır.

Dolayısıyla $r \geq 2$ ve her $f \in C^r(I^2)$ için (3.14) ile tanımlanan $\tilde{M}_{n,r}(f; x, y)$ MKZ operatörleri; (3.4) ile verilen $M_{m,n}(f; x, y)$ klasik MKZ operatörlerinden daha iyi bir yaklaşım sağlar.



4.BÖLÜM

TEK DEĞİŞKENLİ q -MKZ OPERATÖRLERİ

Bu bölümde Trif (2000), Doğru and Duman (2006), Erençin vd. (2012), Mahmudov and Sabancıgil (2012) ve Şimşek (2019) tarafından yapılan q -MKZ genelleştirmeleri ve yaklaşım özellikleri verilecektir (Trif, 2000), (Doğru and Duman, 2006), (Erençin vd., 2012), (Mahmudov and Sabancıgil, 2012), (Şimşek, 2019).

4.1 q -MKZ Operatörlerine İlişkin Trif' in Yaptığı Çalışmalar

Bu kesimde q -MKZ operatörlerinin Trif (2000) tarafından verilen tanımı ve bu q -genelleştirmenin özellikleri incelenecektir (Trif, 2000).

Tanım 4.1.1

$x \in [0,1]$ olmak üzere $n \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1]$ olsun. Bu durumda her $f \in C[0,1]$ için q -MKZ operatörü;

$$P_{n,q}(x) = \prod_{j=0}^n (1 - q^j x)$$

olmak üzere

$$M_{n,q}(f, x) := \begin{cases} P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k, & 0 \leq x < 1 \text{ ise} \\ f(1), & x = 1 \text{ ise} \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlıdır (Trif, 2000).

Önerme 4.1.1

(4.1) ile verilen $M_{n,q}(f; x)$ operatörü doğrusal ve pozitif bir operatördür.

Kanıt

i) Gerçekten $M_{n,q}(f; x)$ operatörünün doğrusallığı için

Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0,1]$ için;

$$\begin{aligned}
 M_{n,q}(\alpha f(t) + \beta g(t); x) &= \prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) + \beta g\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
 &= \prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k + \prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \sum_{k=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
 &= \alpha \prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k + \beta \prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
 &= \alpha M_{n,q}(f; x) + \beta M_{n,q}(g; x)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olup $M_{n,q}(f; x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_{n,q}(f; x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$$M_{n,q}(f; x) = \prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \quad 0 \leq x < 1$$

olduğundan her $x \in [0,1)$ ve $0 < q \leq 1$ için

$$\prod_{j=0}^n (1 - xq^j) \geq 0$$

ve;

$$\begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \geq 0$$

eşitsizlikleri doğru olup

$$\text{kabulden } f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q}\right) \geq 0$$

olduğundan $M_{n,q}(f; x)$ operatörü pozitifdir.

Lemma 4.1.1

$i = 0, 1, 2$ olmak üzere $e_i(x) = x^i$ olsun. Her $n \geq 3$ doğal sayısı ve $x \in [0, 1]$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir (Trif, 2000).

$$\text{i) } M_{n,q}(e_0, x) = 1 \quad (4.2)$$

$$\text{ii) } M_{n,q}(e_1, x) = x \quad (4.3)$$

$$\text{iii) } 0 \leq R_{n,q}(x) \leq \frac{[2]_q q^{n-1}}{[n-1]_q [n-2]_q} x(1-x)(1-qx)(1-q^n x) \quad (4.4)$$

olmak üzere

$$M_{n,q}(e_2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)(1-q^n x)}{[n-1]_q} - R_{n,q}(x), \quad (4.5)$$

Kanıt

i) $0 \leq x < 1$ için

$$\frac{1}{\prod_{j=0}^n (1 - q^j x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^k \quad (4.6)$$

eşitliğinden (4.2) kolayca elde edilir.

ii) (4.6) eşitliğinde

$$\frac{[k]}{[n+k]} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

eşitliği dikkate alınırsa (4.3) eşitliğine de kolayca ulaşılır.

iii) Her $n \geq 3$ doğal sayısı ve her $x \in [0, 1]$ için (4.7) ifadesi $M_{n,q}(e_2, x)$ de yerine yazılırsa

$$M_{n,q}(e_2, x) = P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]}{[n+k]} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k$$

$$= xP_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k+1]}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^k$$

eşitliği elde edilir. Bunun yanında (4.6) eşitliği kullanılarak

$$e_2(x) = xP_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k$$

eşitliği yazılabilir. Sonuç olarak

$$M_{n,q}(e_2, x) - x^2 = \frac{xP_{n,q}(x)}{[n+1]} + xP_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{[k+1]}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \right) x^k$$

eşitliği geçerli olur. Kolayca elde edilen

$$\frac{[k+1]}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} = \frac{q^k}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix}$$

şeklindeki özellik kullanılarak

$$\begin{aligned} M_{n,q}(e_2, x) &= x^2 + xP_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \\ &= x^2 + \frac{xP_{n,q}(x)}{[n-1]} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \frac{[n+k-1]}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix} x^k \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Burada

$$\frac{[n+k-1]}{[n+k+1]} = 1 - \frac{[2]q^{n+k-1}}{[n+k+1]}$$

özellliği yardımıyla;

$$\begin{aligned} M_{n,q}(e_2, x) &= x^2 + \frac{xP_{n,q}(x)}{[n-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix} (qx)^k \\ &\quad - \frac{[2]q^{n-1}xP_{n,q}(x)}{[n-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2x)^k \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

(4.6) eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix} (qx)^k = \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-2} (1 - q^j qx)} = \frac{(1-x)(1-q^n x)}{P_{n,q}(x)}$$

eşitlikleri geçerli olduğundan

$$\begin{aligned} 0 \leq R_{n,q}(x) &\leq \frac{[2]q^{n-1}xP_{n,q}(x)}{[n-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+1]} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2x)^k \\ &\leq \frac{[2]q^{n-1}xP_{n,q}(x)}{[n-1]} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k-2]} \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k \end{bmatrix} (q^2x)^k \\ &= \frac{[2]q^{n-1}xP_{n,q}(x)}{[n-1][n-2]} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k-3 \\ k \end{bmatrix} (q^2x)^k \\ &= \frac{[2]q^{n-1}xP_{n,q}(x)}{[n-1][n-2]} \frac{1}{\prod_{j=0}^{n-3} (1 - q^j q^2 x)} \\ &= \frac{[2]q^{n-1}}{[n-1][n-2]} x(1-x)(1-qx)(1-q^n x) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$M_{n,q}(e_2, x) = x^2 + \frac{x(1-x)(1-q^n x)}{[n-1]} - R_{n,q}(x)$$

eşitliği elde edilir. Böylece (4.5) in kanıtı tamamlanmış olur.

(4.4) ten her $x \in [0,1]$ için $n \rightarrow \infty$ iken $R_{n,q}(x) \rightarrow 0$ yakınsar. Diğer taraftan $0 < q < 1$ için $n \rightarrow \infty$ iken $[n-1] \rightarrow \frac{1}{1-q}$ yakınsaması geçerli olduğundan

$$M_{n,q}(e_2, x) \rightarrow x^2 + x(1-x)(1-q)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $M_{n,q}(e_2, x)$, e_2 ye yakınsamaz.

Bununla birlikte $|M_{n,q}(e_2, x) - (e_2, x)|$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

Lemma 4.1.2

$M_{n,q}$, q -MKZ operatörü ve her $n \geq 3$ için

$$|M_{n,q}(e_2, x) - (e_2, x)| \leq \frac{3}{2[n]}$$

eşitsizliği sağlanır (Trif, 2000).

Kanıt

$$\begin{aligned} |M_{n,q}(e_2, x) - (e_2, x)| &\leq \frac{x(1-x)(1-q^n x)}{[n-1]} + \frac{[2]q^{n-1}x(1-x)(1-qx)(1-q^n x)}{[n-1][n-2]} \\ &\leq \frac{1}{4[n-1]} + \frac{[2]}{4[n-1]} \\ &= \frac{2+q}{4[n]} \cdot \frac{[n]}{[n-1]} \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ve

$$\frac{[n]}{[n-1]} = \frac{1-q^n x}{1-q^{n-1}} \leq 1+q$$

eşitsizliğinden

$$|M_{n,q}(e_2, x) - (e_2, x)| \leq \frac{(2+q)(1+q)}{4[n]} \leq \frac{3}{2[n]} \quad (4.8)$$

eşitsizliği her $n \geq 3$ ve her $x \in [0,1]$ için geçerlidir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 4.1.1

Phillips (1997) deki yöntemle benzer düşünceyle q -MKZ operatörler dizisini yakınsak yapan bir (q_n) dizisi aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde seçilebilir (Phillips, 1997).

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 - \frac{1}{n} \leq q_n < 1 \quad (4.9)$$

ve böylece $1 \leq r \leq n - 1$ için

$$1 - \frac{r}{n} \leq q_n^r < 1$$

olur. Böylece

$$[n] \geq n - \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.1.1

$$1 - \frac{1}{n} \leq q_n < 1 \quad (4.10)$$

eşitsizliğini sağlayan bir q_n dizisi ve her $f \in C[0,1]$ için $M_{n,q_n}(f, x)$ operatörler dizisi $[0,1]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsar (Trif, 2000).

Kanıt

Lemma 4.1.1 i) ve ii) den

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_{n,q_n}(1, x) - 1\|_{C[0,1]} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_{n,q_n}(t, x) - x\|_{C[0,1]} = 0$$

olduğu açıktır. $\|M_{n,q}(e_2, x) - (e_2, x)\|$ farkı için q_n dizisinin tanımı ve (4.9) eşitsizliğinin (4.8) de yerine yazılmasıyla

$$\|M_{n,q}(e_2, x) - (e_2, x)\| \leq \frac{3}{n+1}$$

eşitsizliği her $n \geq 3$ için elde edilmiş olur. Dolayısıyla $[0,1]$ üzerinde $M_{n,q}e_2$, e_2 ye düzgün yakınsar. Bu da Teorem 4.1.1 in kanıtını tamamlar.

Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 ün kanıtları Lupaş and Müller (1970) deki Uyarı 2.3 ve Uyarı 2.5 e benzer olduğundan bu iki teoremin kanıtlarına değinilmeyecektir. Süreklilik modülü yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir (Lupaş and Müller, 1970).

Teorem 4.1.2

Her $n \geq 3$ ve her $f \in C[0,1]$ için $\omega(f, \delta)$, (1.12) de tanımlanan süreklilik modülü olmak üzere

$$\|M_{n,q}(f, x) - f(x)\| \leq \frac{5}{2} \omega(f, \frac{1}{\sqrt{[n]}})$$

eşitsizliği geçerlidir (Trif, 2000).

(4.8) eşitsizliği kullanılarak $M_{n,q}$ operatörleri için Lorentz tipi bir teorem aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.1.3

$C^{(p)}(K)$ uzayı p -kez diferansiyellenebilir fonksiyonların doğrusal bir alt uzayı olsun. Her $f \in C^1[0,1]$ ve her $n \geq 3$ için

$$\|M_{n,q}(f, x) - f(x)\| \leq \frac{3 + \sqrt{6}}{2\sqrt{[n]}} \omega(f', \frac{1}{\sqrt{[n]}})$$

eşitsizliği geçerlidir (Trif, 2000).

Teorem 4.1.4

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve $x \in [0,1]$ olsun. Bu durumda $M_{n,q}(f, x)$ artmayandır (Trif, 2000).

Kanıt

$x = 1$ için kanıt açık olduğundan $x \in [0,1)$ alınsın. Her $n \geq 1$ için

$$\frac{M_{n,q}(f, x) - M_{n+1,q}(f, x)}{P_{n,q}(x)} = q^{n+1}x \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k+1]}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} x^k$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k+1]}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^k$$

eşitliği geçerlidir.

$$\begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} = q^{n+1} \begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}$$

reqürans formülü ikinci toplamda kullanılarak

$$\frac{M_{n,q}(f, x) - M_{n+1,q}(f, x)}{P_{n,q}(x)} = x \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} x^k \left\{ q^{n+1} \frac{[n+k+1]}{[n+1]} f\left(\frac{[k]}{[n+k+1]}\right) \right.$$

$$- q^{n+1} \frac{[n+k+1]}{[n+1]} f\left(\frac{[k+1]}{[n+k+2]}\right) - \frac{[n+k+1]}{[n+1]} f\left(\frac{[k+1]}{[n+k+2]}\right)$$

$$\left. + \frac{[n+k+1]}{[n+1]} f\left(\frac{[k+1]}{[n+k+1]}\right) \right\}$$

eşitliği elde edilir. Basit bir hesapla gösterilebilir ki

$$\frac{q^{n+2k+1}}{[n+k+1][n+k+2]} \left[\frac{[k]}{[n+k+1]}, \frac{[k+1]}{[n+k+2]}, \frac{[k+1]}{[n+k+1]}; f \right] \geq 0$$

eşitsizliği f konveks olduğundan doğrudur. Dolayısıyla

$$M_{n,q}(f, x) \geq M_{n+1,q}(f, x)$$

eşitsizliği bulunmuş olur. Böylece $M_{n,q}(f, x)$ nun artmayanlığı gösterilmiş olur.

4.2 q -MKZ Operatörüne İlişkin Doğru-Duman'ın Yaptığı Çalışmalar

Tanım 4.2.1

$a \in (0,1), x \in [0, a]$ ve $f \in C[0, a]$ olsun. $q \in (0,1]$ için Doğru and Duman (2006) tarafından q -MKZ tipli operatör

$$u_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s)$$

olmak üzere

$$M_n(f; q; x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \quad (4.11)$$

şeklinde tanımlıdır (Doğru and Duman, 2006).

Bu operatörde $q = 1$ alındığında her $x \in [0,1)$ için

$$M_n(f, x) = (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{k+n}\right) \binom{n+k}{k} x^k$$

şeklinde tanımlı klasik MKZ operatörlerine dönüşür.

Önerme 4.2.1

$M_n(f; q; x)$ operatörü doğrusal ve pozitif bir operatördür.

Kanıt

i) Gerçekten $M_n(f; q; x)$ operatörünün doğrusallığı için

$0 < a < 1$ olsun. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C[0, a]$ için;

$$\begin{aligned} M_n(\alpha f(t) + \beta g(t); q; x) &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) + \beta g\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k + u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= \alpha u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k + \beta u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= \alpha M_n(f; q; x) + \beta M_n(g; q; x) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olup $M_n(f; q; x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_n(f; q; x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$$u_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \geq 0$$

olmak üzere

$$M_n(f; q; x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

olduğundan her $x \in [0, a]$; $0 < a < 1$ ve $0 < q \leq 1$ için

$$\begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \geq 0 \text{ ve } f\left(\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}\right) \geq 0$$

eşitsizlikleri doğru olup $M_n(f; q; x)$ operatörü pozitifdir.

Önerme 4.2.2 yi kanıtlamak için ihtiyaç duyulan özellikleri içeren birkaç lemma verilecektir.

Lemma 4.2.1

$q \in (0,1]$ olsun. Bu durumda

$$\text{i) } q[k-1]_q = [k]_q - 1 \tag{4.12}$$

$$\text{ii) } [k+n-1]_q \leq [k+n]_q \tag{4.13}$$

$$\text{iii) } [n]_q \leq [k+n]_q \tag{4.14}$$

özellikleri geçerlidir (Canatan, 2008).

Kanıt

$$[k]_q = \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

şeklinde tanımlı olduğundan

$$\begin{aligned}
[k]_q - 1 &= \frac{1 - q^k}{1 - q} - 1 \\
&= \frac{1 - q^k - 1 + q}{1 - q} \\
&= \frac{q - q^k}{1 - q} \\
&= \frac{q(1 - q^{k-1})}{1 - q} \\
&= q[k - 1]_q
\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan açıkça (4.12) eşitliği geçerlidir.

ii) Yine q -tamsayı tanımından

$$[k + n - 1]_q = \frac{1 - q^{k+n-1}}{1 - q}$$

eşitliği geçerli olup, her $q \in (0,1]$ için

$$\frac{1 - q^{k+n-1}}{1 - q} \leq \frac{1 - q^{k+n}}{1 - q} = [k + n]_q$$

eşitsizliği doğru olacaktır. Dolayısıyla;

$$[k + n - 1]_q \leq [k + n]_q$$

eşitsizliği bulunmuş olur.

iii) Benzer şekilde

$$[n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \frac{1 - q^{n+k}}{1 - q} = [n + k]_q$$

eşitsizliği geçerli olup açıkça

$$[n]_q \leq [n + k]_q$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.2.2

Her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

eşitliği sağlanır (Canatan, 2008).

Kanıt

Tanımdan

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{[n+k]_q!}{[k]_q! [n]_q!} \\ &= \frac{[n+k+1]_q! [n+1]_q}{[n+k+1]_q! [n+1]_q! [k]_q!} \\ &= \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q \end{aligned} \quad (4.15)$$

eşitliği elde edilir .

Lemma 4.2.3

Her $n, k \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1]$ için

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q$$

eşitliği geçerlidir (Canatan, 2008).

Kanıt

$n, k \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix}_q = \frac{[n+k]_q!}{[k-1]_q! [n+1]_q!}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{[n+k+1]_q! [k]_q}{[n+k+1]_q [n+1]_q! [k]_q!} \\
&= \frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q
\end{aligned} \tag{4.16}$$

eşitliği kolayca elde edilir.

Aşağıdaki önermede q -MKZ operatörlerinin düzgün yakınsaklığı için gerekli olan test fonksiyonları ile ilgili önemli özellikler verilecektir.

Önerme 4.2.2

$a \in (0,1)$ ve $x \in [0, a]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < q \leq 1$ için;

i) $M_n(1; q; x) = 1$

ii) $M_n(t; q; x) = q^n x$

iii) $(q^{2n} - 1)x^2 \leq M_n(t^2; q; x) - x^2 \leq (q^{2n+1} - 1)x^2 + \frac{q^{2n}x}{[n]_q}$

özellikleri geçerlidir (Doğru and Duman, 2006).

Kanıt

i) Her $|x| < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} N+k-1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k = \frac{1}{(1-x) \dots (1-xq^{N-1})};$$

eşitliği bilinmektedir (Andrews vd., 1999). Bu eşitlikte N yerine $n+1$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k &= \frac{1}{(1-x) \dots (1-xq^n)} \\
&= \frac{1}{\prod_{s=0}^n (1-xq^s)}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
M_n(1; q; x) &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \frac{1}{\prod_{s=0}^n (1 - xq^s)} \\
&= 1
\end{aligned}$$

olduğundan istenen eşitlik elde edilmiş olur.

ii) Operatörün tanımından; q -faktöriyel özelliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
M_n(t; q; x) &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^n [k]_q}{[k+n]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^n [k]_q}{[k+n]_q} \frac{[k+n]_q!}{[k]_q! [n]_q!} x^k \\
&= u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} q^n \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= x u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} q^n \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^{k-1} \\
&= q^n x u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= q^n x
\end{aligned}$$

eşitliği elde edildiğinden istenen kanıtlanmış olur.

iii) q -binom katsayı tanımı, Lemma 4.2.1 ve q -tamsayı özellikleri kullanılarak

$$M_n(t^2; q; x) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{2n} [k]_q^2}{[k+n]_q^2} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

$$\begin{aligned}
&= u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2n} [k]_q^2 [k+n]_q!}{[k+n]_q^2 [k]_q! [n]_q!} x^k \\
&= u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2n} ([k]_q - 1 + 1) [k+n-1]_q!}{[k+n]_q [k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= q^{2n} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q - 1}{[k+n]_q} \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k + q^{2n} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k+n]_q} \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= q^{2n} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q[k-1]_q}{[k+n]_q} \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k + q^{2n} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k+n]_q} \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= q^{2n+1} u_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k+n-1]_q}{[k+n]_q} \frac{[k+n-2]_q!}{[k-2]_q! [n]_q!} x^k + q^{2n} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[k+n]_q} \frac{[k+n-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&\leq q^{2n+1} x^2 u_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \left[\begin{matrix} k+n-2 \\ k-2 \end{matrix} \right]_q x^{k-2} + q^{2n} x u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \left[\begin{matrix} k+n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_q x^{k-1} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
M_n(t^2; q; x) &\leq q^{2n+1} x^2 u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} k+n \\ k \end{matrix} \right]_q x^k + q^{2n} x u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n]_q} \left[\begin{matrix} k+n \\ k \end{matrix} \right]_q x^k \\
&= q^{2n+1} x^2 + q^{2n} x \frac{1}{[n]_q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla her iki taraftan x^2 çıkartılarak

$$M_n(t^2; q; x) - x^2 \leq (q^{2n+1} - 1)x^2 + \frac{q^{2n}}{[n]_q} x \quad (4.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Bunun yanında (4.17) eşitliği kullanılarak $M_n(t^2; q; x)$ için

$$M_n(t^2; q; x) = q^{2n+1} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} q \frac{[k+n+1]_q}{[k+n+2]_q} \left[\begin{matrix} k+n \\ k \end{matrix} \right]_q x^{k+2}$$

$$+q^{2n}u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k+n+1]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} \quad (4.19)$$

eşitliği geçerli olup, Lemma 4.2.1 de k yerine $k+n+2$ alınırsa;

$$q[k+n+1]_q = [k+n+2]_q - 1$$

eşitliği elde edilir. (4.19) da bu son eşitlik yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} M_n(t^2; q; x) &= q^{2n}u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k+n+2]_q - 1}{[k+n+2]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+2} \\ &\quad + q^{2n}u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k+n+1]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^{k+1} \\ &= q^{2n}x^2u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k - q^{2n}x^2u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k+n+2]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad + q^{2n}xu_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k+n+1]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Son eşitliğin ikinci kısmına Lemma 4.2.1 eşitsizliği uygulanırsa her $a \in (0,1)$ ve $x \in [0, a]$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} M_n(t^2; q; x) &\geq q^{2n}x^2 - q^{2n}x^2u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k+n+1]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad + q^{2n}x^2u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k+n+1]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k = q^{2n}x^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece;

$$q^{2n}x^2 \leq M_n(e_2(t); q; x) \leq q^{2n+1}x^2 + \frac{q^{2n}x}{[n]_q}$$

eşitsizliği doğru olup kanıt tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremle uygun koşullar altında $M_n(f; q_n; x)$ operatörler dizisinin $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı kanıtlanmıştır.

Teorem 4.2.1

(q_n) dizisi için $0 < q_n \leq 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]_q} = 0$ koşulları sağlansın. Bu durumda $M_n(f; q_n; x)$, q -MKZ operatörü $a \in (0,1)$ için $[0, a]$ aralığında sürekli ve tüm $\mathbb{R}$ de sınırlı olan f fonksiyonuna düzgün yakınsar (Doğru and Duman, 2006).

Kanıt

Korovkin tipli teoreminin koşullarının geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

Her $x \in [0, a]$ için $0 < q \leq 1$ olmak üzere

i) $M_n(1; q; x) = 1$

ii) $M_n(t; q; x) = q^n x$

iii) $(q^{2n} - 1)x^2 \leq M_n(t^2; q; x) - x^2 \leq (q^{2n+1} - 1)x^2 + \frac{q^{2n}x}{[n]_q}$

ifadelerinde $q = (q_n)$ olarak alınırsa (q_n) dizisi için

$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]_q} = 0$ koşulları sağlandığından

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(1; q; x) - 1\| = 0$

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t; q_n; x) - x\| = 0$

iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n(t^2; q_n; x) - x^2\| = 0$

yakınsamaları sağlanır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Örnek 4.2.1

$q_n = e^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ seçilirse $0 < q_n \leq 1$ olup $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]_q} = 0$ koşulları sağlanır (Doğru and Duman, 2006), (Canatan, 2008).

Öncelikle $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n$ limiti bulunmalıdır.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \right]^n = e e^{-1} = 1$$

olur. q -tamsayı tanımı ve $r \geq 1$ ve $r < n$ için geçerli olan

$$e^{\frac{r}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^r \geq e^{\frac{r}{n}} \left(1 - \frac{r}{n}\right)$$

eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} [n]_{q_n} &= 1 + q_n + q_n^2 + \cdots + q_n^{n-1} \\ &\geq e^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + e^{\frac{1}{n}} \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \\ &= 1 + e^{\frac{1}{n}} \frac{n-1}{2} \end{aligned} \tag{4.20}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$0 < \frac{1}{[n]_q} \leq \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{n}} \frac{n-1}{2}}$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla $n \rightarrow \infty$ için limit alındığında $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{[n]_q} = 0$ olduğu gösterilmiş olur.

Aşağıdaki teoremda (4.11) ile tanımlı q -MKZ operatörlerinin yaklaşım hızı (1.12) de tanımlanan süreklilik modülü kullanılarak hesaplanacaktır.

Teorem 4.2.2

Her $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < q_n \leq 1$ için $a \in (0,1)$ olsun.

Her $f \in C[0, a]$ için

$$\delta_n = \sqrt{(1 - q_n^n)^2 a^2 \frac{a q_n^{2n}}{[n]_q}} \tag{4.21}$$

olmak üzere

$$\|M_n(f; q_n; x) - f\|_{C[0,a]} \leq 2\omega(f; \delta_n) \tag{4.22}$$

eşitsizliği sağlanır (Doğru and Duman, 2006), (Canatan, 2008).

Kanıt

$f \in C[0, a]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. $M_n(f; q_n; x)$ q -MKZ operatörünün doğrusallığı ve pozitifliği kullanılarak;

$$|M_n(f; q_n; x) - f(x)| \leq M_n(|f(t) - f(x)|; q_n; x)$$

eşitsizliği yazılabilir. Süreklilik modülünün özellikleri ve operatörün monotonluğundan,

$$|M_n(f; q_n; x) - f(x)| \leq M_n\left(\omega(f; \delta) \left(\frac{|t - x|}{\delta} + 1\right); q_n; x\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Operatör doğrusal olduğundan,

$$|M_n(f; q_n; x) - f(x)| \leq \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} M_n(|t - x|; q_n; x) + \omega(f; \delta) M_n(1; q_n; x) \quad (4.23)$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned} M_n(|t - x|; q_n; x) &= u_{n, q_n}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{q_n^n[k]_q}{[k+n]_q} - x \right| \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{q_n^n[k]_q}{[k+n]_q} - x \right| u_{n, q_n}(x) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{q_n^n[k]_q}{[k+n]_q} - x \right| \left(u_{n, q_n}(x) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \right)^{\frac{1}{2}} \left(u_{n, q_n}(x) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Son eşitliğe Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} M_n(|t - x|; q_n; x) &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q_n^n[k]_q}{[k+n]_q} - x \right)^2 u_{n, q_n}(x) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_{n, q_n}(x) \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= [M_n((t - x)^2; q_n; x)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik (4.23) ile birlikte düşünülürse;

$$\begin{aligned}
|M_n(f; q_n; x) - f(x)| &\leq \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} [\varphi_{n,2}(x)]^{\frac{1}{2}} + \omega(f; \delta) \\
&\leq \frac{\omega(f; \delta)}{\delta} \left[x^2(q_n^n - 1)^2 + \frac{q_n^{2n}x}{[n]_q} \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(f; \delta) \\
&\leq \omega(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \left[x^2(q_n^n - 1)^2 + \frac{q_n^{2n}x}{[n]_q} \right]^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Norma geçilerek

$$\|M_n(f; q_n; x) - f\|_{C[0,a]} \leq \omega(f; \delta) \left\{ \frac{1}{\delta} \left[a^2(q_n^n - 1)^2 + \frac{q_n^{2n}a}{[n]_q} \right]^{\frac{1}{2}} + 1 \right\}$$

eşitsizliği yazılabileceğinden $\delta = \delta_n = \sqrt{(1 - q_n^n)^2 a^2 + \frac{a q_n^{2n}}{[n]_q}}$ seçimiyle aranan

$$\|M_n(f; q_n; x) - f(x)\|_{C[0,a]} \leq 2\omega(f; \delta_n)$$

eşitsizliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.3

q -MKZ operatörünün ilk üç merkezi momenti;

i) $\varphi_{n,0}(x) = 1$

ii) $\varphi_{n,1}(x) = x(q^n - 1)$

iii) $\varphi_{n,2}(x) \leq x^2(q^n - 1)^2 + \frac{q^{2n}x}{[n]_q}$

şeklinde olur (Doğru and Duman, 2006), (Canatan, 2008) .

Kanıt

i) Açıkça ilk merkezi momenti

$$\varphi_{n,0}(x) = M_n((t - x)^0; q; x) = M_n(1; q; x) = 1$$

olacaktır.

ii) Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,1}(x) &= M_n(t - x; q; x) \\
&= M_n(t; q; x) - M_n(x; q; x) \\
&= M_n(t; q; x) - xM_n(1; q; x) \\
&= q^n x - x \\
&= x(q^n - 1)
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabileceğinden ii) eşitliği sağlanır.

iii) Son olarak

$$\begin{aligned}
\varphi_{n,2}(x) &= M_n((t - x)^2; q; x) \\
&= M_n(t^2; q; x) - 2xM_n(t; q; x) + x^2M_n(1; q; x)
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olacağından

$$\varphi_{n,2}(x) \leq q^{2n+1}x^2 + \frac{q^{2n}x}{[n]_q} - 2xq^n x + x^2 = x^2(q^{2n+1} - 2q^n + 1) + \frac{q^{2n}x}{[n]_q}$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece

$$\varphi_{n,2}(x) \leq x^2(q^n - 1)^2 + \frac{q^{2n}x}{[n]_q}$$

eşitsizliği doğru olup, aranan eşitsizlik gösterilmiş olur.

Aşağıda Doğru ve Duman tarafından verilen q -MKZ operatörlerinin artımayanlığı ve $v = 1, 2$ olmak üzere

$$e_v(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^v$$

fonksiyonları için sağladığı eşitlikler gibi bazı özelliklerden bahsedilecektir.

Tanım 4.2.2

$\alpha, \beta \in [0,1]$ ve $\alpha + \beta = 1$ olsun. Bu durumda

$$f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) \leq 0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlara konvektir denir (Pecaric vd., 1992).

Lemma 4.2.4

$$\alpha := \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} \quad \text{ve} \quad \beta := \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \quad (4.24)$$

olsun. Bu durumda

$$\frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} = \alpha \frac{[k]_q}{[n+k]_q} + \beta \frac{[k-1]_q}{[n+k]_q}$$

eşitlikleri sağlanır (Doğru and Gupta, 2006).

Kanıt

q -tamsayı tanımından

$$\begin{aligned} [n+1]_q + q^{n+1}[k]_q &= \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \frac{1-q^k}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+k+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+n+1}}{1-q} \\ &= [n+k+1]_q \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Buradan

$$[n+1]_q + q^{n+1}[k]_q = [n+k+1]_q$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte k yerine $k-1$ yazılırsa

$$[n+1]_q + q^{n+1}[k-1]_q = [n+k]_q$$

eşitliği her iki tarafın $\frac{[k]_q}{[n+k]_q[n+k+1]_q}$ ifadesi ile çarpılmasıyla

$$\frac{[n+1]_q[k]_q}{[n+k]_q[n+k+1]_q} + \frac{q^{n+1}[k-1]_q[k]_q}{[n+k]_q[n+k+1]_q} = \frac{[n+k]_q[k]_q}{[n+k]_q[n+k+1]_q}$$

eşitliği bulunur. Son olarak (4.24) kullanılırsa

$$\frac{[k]_q}{[n+k+1]_q} = \alpha \frac{[k]_q}{[n+k]_q} + \beta \frac{[k-1]_q}{[n+k]_q}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 4.2.4

$0 < q \leq 1$ ve $x \in [0, a]$ olmak üzere eğer, $f: [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^+$ bir konveks ve artan bir fonksiyon ise $(M_n(f; q_n; x))_{n \geq 1}$ operatörü de n indisine göre artmayandır (Doğru and Gupta, 2006).

Kanıt

$M_n(f; q; x) - M_{n+1}(f; q; x) \geq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} M_n(f; q; x) - M_{n+1}(f; q; x) &= \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad - \prod_{s=0}^{n+1} (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &= \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\ &\quad - \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k (1 - xq^{n+1}) \\ &= \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& + \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{n+1} x^{k+1} \\
& = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& - \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& + \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{n+1} x^k \\
& = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{q^n[0]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 + \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& - \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[0]_q}{[n+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+1 \\ 0 \end{bmatrix}_q x^0 \\
& - \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& + \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{n+1} x^k \\
& = \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& - \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
& + \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix}_q q^{n+1} x^k
\end{aligned} \tag{4.25}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Lemma 4.2.2 ve Lemma 4.2.3 te verilen eşitlikler bu son eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
M_n(f; q; x) - M_{n+1}(f; q; x) &= \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^n[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&- \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&+ \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k
\end{aligned} \tag{4.26}$$

eşitliği bulunur. f artan fonksiyon olduğundan;

$$\begin{aligned}
M_n(f; q; x) - M_{n+1}(f; q; x) &\geq \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&- \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&+ \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} f\left(\frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k
\end{aligned} \tag{4.27}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$\alpha := \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q}, \quad \beta := \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}, \quad x = \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k]_q}, \quad y = \frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q}$$

olarak seçilirse;

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta &= \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} + \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \\
&= \frac{[n+1]_q + q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1-q^{n+1}}{1-q} + \frac{q^{n+1}(1-q^k)}{1-q}}{[n+k+1]_q} \\
&= \frac{\frac{1-q^{k+n+1}}{1-q}}{[n+k+1]_q} \\
&= \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+1]_q} = 1
\end{aligned}$$

olduğundan;

$$\begin{aligned}
\alpha x + \beta y &= \frac{[n+1]_q}{[n+k+1]_q} \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k]_q} + \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \frac{q^{n+1}[k-1]_q}{[n+k]_q} \\
&= \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \frac{1}{[n+k]_q} \{[n+1]_q + q^{n+1}[k-1]_q\} \\
&= \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \frac{1}{[n+k]_q} \left\{ \frac{1-q^{n+1}}{1-q} + q^{n+1} \frac{1-q^{k-1}}{1-q} \right\} \\
&= \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \frac{1}{[n+k]_q} \frac{1-q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+k}}{1-q} \\
&= \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q} \frac{1}{[n+k]_q} [n+k]_q \\
&= \frac{q^{n+1}[k]_q}{[n+k+1]_q}
\end{aligned}$$

eşitliği doğru olup bu son eşitlik (4.27) ye uygulanırsa;

$$\begin{aligned}
M_n(f; q; x) - M_{n+1}(f; q; x) &\geq \prod_{s=0}^n (1-xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} \{\alpha f(x) + \beta f(y)\} \left[\begin{matrix} n+k+1 \\ k \end{matrix} \right]_q x^k \\
&\quad - \prod_{s=0}^n (1-xq^s) \sum_{k=1}^{\infty} f(\alpha x + \beta y) \left[\begin{matrix} n+k+1 \\ k \end{matrix} \right]_q x^k
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğru olur f konveks olduğundan

$$\alpha f(x) + \beta f(y) - f(\alpha x + \beta y) \geq 0$$

eşitsizliği doğrudur.

$$\prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \geq 0$$

ve

$$\left[\begin{matrix} n+k+1 \\ k \end{matrix} \right]_q x^k \geq 0$$

olduğu da göz önüne alınırsa;

$$M_n(f; q; x) - M_{n+1}(f; q; x) \geq 0$$

bulunur ve böylece kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.5

Her $n, k \in \mathbb{N}$ ve $q \in (0,1]$ için

$$\frac{\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}}{1 - \frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}} = \frac{q^n[k]_q}{[n]_q} \quad (4.28)$$

eşitliği geçerlidir (Canatan, 2008).

Kanıt

Basit bir hesapla q -tamsayı tanımından

$$\begin{aligned} \frac{\frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}}{1 - \frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q}} &= \frac{q^n[k]_q}{[k+n]_q} \frac{[k+n]_q}{[k+n]_q - q^n[k]_q} \\ &= \frac{q^n[k]_q}{\frac{1-q^{k+n}}{1-q} - q^n \frac{1-q^k}{1-q}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^n [k]_q}{\frac{1-q^{k+n}-q^{n+q^{k+n}}}{1-q}} \\
&= \frac{q^n [k]_q}{[n]_q}
\end{aligned}$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Aşağıdaki lemmalarda $v = 1, 2$ olmak üzere

$$e_v(x) = \left(\frac{x}{1-x} \right)^v$$

fonksiyonunun (4.11) eşitliği ile verilen q -MKZ operatöründe kullanılması ile elde edilen eşitlikler verilecektir.

Lemma 4.2.6

$a \in (0, 1)$ ve $q \in (0, 1]$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, a]$ için;

$$M_n \left(\left(\frac{t}{1-t} \right); q; x \right) = \frac{[n+1]_q}{[n]_q} \frac{xq^n}{1-xq^{n+1}}$$

eşitliği geçerlidir (Canatan, 2008).

Kanıt

(4.28) kullanılarak kolayca

$$\begin{aligned}
M_n \left(\left(\frac{t}{1-t} \right); q; x \right) &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{q^n}{[n]_q} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} [k]_q \frac{[k+n]_q!}{[k]_q! [n]_q!} x^k \\
&= \frac{q^n}{[n]_q} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^n}{[n]_q} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k+n+1]_q!}{[k]_q! [n]_q!} x^{k+1} \\
&= \frac{[n+1]_q q^n x}{[n]_q} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{[n+1]_q q^n x}{[n]_q} \prod_{s=0}^n (1-xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{[n+1]_q q^n x}{[n]_q (1-xq^{n+1})} \prod_{s=0}^{n+1} (1-xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= \frac{[n+1]_q q^n x}{[n]_q (1-xq^{n+1})}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise aranan eşitliktir.

Lemma 4.2.7

$a \in (0,1)$ ve $q \in (0,1]$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ ve $x \in [0, a]$ için

$$\begin{aligned}
M_n \left(\left(\frac{t}{1-t} \right)^2 ; q ; x \right) &= \frac{[n+2]_q [n+1]_q}{[n]_q^2} q^{2n+1} \frac{x^2}{(1-xq^{n+2})(1-xq^{n+1})} \\
&+ \frac{[n+1]_q}{[n]_q^2} q^{2n} \frac{x}{(1-xq^{n+1})}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Canatan, 2008).

Kanıt

Tanımdan

$$M_n \left(\left(\frac{t}{1-t} \right)^2 ; q ; x \right) = u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\frac{q^n [k]_q}{[k+n]_q}}{1 - \frac{q^n [k]_q}{[k+n]_q}} \right)^2 \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k$$

eşitliği doğru olup (4.28) eşitliği yardımıyla;

$$\begin{aligned}
M_n \left(\left(\frac{t}{1-t} \right)^2 ; q; x \right) &= u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \right)^2 \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{2n} [k]_q^2}{[n]_q^2} \frac{[k+n]_q!}{[k]_q! [n]_q!} x^k \\
&= \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} [k]_q \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} ([k]_q - 1) \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Burada Lemma 4.2.1 den $[k]_q - 1$ yerine uygun ifade yazılarak

$$\begin{aligned}
M_n \left(\left(\frac{t}{1-t} \right)^2 ; q; x \right) &= \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} q[k-1]_q \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&\quad + \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= \frac{q^{2n+1}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k-2]_q! [n]_q!} x^k + \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k+n]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} x^k \\
&= \frac{q^{2n+1}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k+n+2]_q!}{[k]_q! [n]_q!} x^{k+2} + \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} u_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k+n+1]_q!}{[k]_q! [n]_q!} x^{k+1} \\
&= \frac{q^{2n+1}}{[n]_q^2} [n+2]_q [n+1]_q x^2 \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+2 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&\quad + \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} [n+1]_q x \prod_{s=0}^n (1 - xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^{2n+1}}{[n]_q^2} \frac{[n+2]_q [n+1]_q x^2}{(1-xq^{n+2})(1-xq^{n+1})} \prod_{s=0}^{n+2} (1-xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+2 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&+ \frac{q^{2n}}{[n]_q^2} \frac{[n+1]_q x}{(1-xq^{n+1})} \prod_{s=0}^{n+1} (1-xq^s) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n+1 \\ k \end{bmatrix}_q x^k \\
&= q^{2n+1} \frac{[n+2]_q [n+1]_q}{[n]_q^2} \frac{x^2}{(1-xq^{n+2})(1-xq^{n+1})} + q^{2n} \frac{[n+1]_q}{[n]_q^2} \frac{x}{(1-xq^{n+1})}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

4.3 Erençin, İnce ve Olgun Tarafından Verilen q -MKZ Operatörleri

Bu bölümde Rempulska ve Tomczak tarafından verilen Tanım 2.7.1 deki operatörünün ağırlıklı uzaylardaki q genellemesi verilecektir.

Tanım 4.3.1

$q \in (0,1)$, (b_n) artan ve sınırsız pozitif bir sayı dizisi, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ olsun $\rho = 1 + x^2$ olmak üzere, $n \in \mathbb{N}$, ve $x \in [0, b_n)$ için $P_{n,q}(x) = \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right)$ olmak üzere MKZ operatörünün q genellemesi her $f \in C_\rho[0, \infty)$ için

$$M_{n,q}(f, x) = P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \quad (4.29)$$

şeklindedir (Erençin vd., 2012).

Lemma 4.3.1

(4.29) ile verilen $M_{n,q}(f; x)$ MKZ operatörleri doğrusal ve pozitifdir.

Kanıt

i) Önce $M_{n,q}(f; x)$ in doğrusallığı gösterilsin. Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C_\rho[0, \infty)$ için;

$$M_{n,q}(\alpha f + \beta g; x) = \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) + \beta g\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= \alpha \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ \beta \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} g\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= \alpha M_{n,q}(f; x) + \beta M_{n,q}(g; x)
\end{aligned}$$

olup $M_{n,q}(f; x)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_{n,q}(f; x)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$n \in \mathbb{N}$, $x \in [0, b_n)$ için

$1 \leq b_n < b_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0$ olmak üzere

$$M_{n,q}(f; x) = \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k$$

olduğundan $x \in [0, b_n)$ için

$$\left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \geq 0 \text{ ve } \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \geq 0$$

ve

$$f\left(\frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n\right) \geq 0$$

olduğundan da $M_{n,q}(f; x)$ operatörü pozitifdir.

Lemma 4.3.2

$n \in \mathbb{N}, q \in (0,1)$ ve $x \in [0, b_n)$ olsun. Bu durumda Tanım 2.7.1 ile verilen operatörün q genellemesi olan (4.29) operatörü için

i) $M_{n,q}(1; x) = 1$

ii) $M_{n,q}(t; x) = x$

iii) $x^2 \leq M_{n,q}(t^2; x) \leq qx^2 + \frac{b_n}{[n]_q} x$

ifadeleri geçerlidir (Erençin vd., 2012).

Kanıt

(1.39) da n yerine $n + 1$ ve x yerine $\frac{x}{b_n}$ alınırsa kolayca

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x, q)_{n+1}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \\ &= \frac{1}{P_{n,q}(x)} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} M_{n,q}(1, x) &= P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k \\ &= P_{n,q}(x) \frac{1}{P_{n,q}(x)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

ii) $M_{n,q}(t; x)$ için ise

$$M_{n,q}(t, x) = P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n} \right)^k$$

$$\begin{aligned}
&= P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} b_n \frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right) \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \\
&= x P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t; x) &= x P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[n+k]_q!}{[k]_q! [n]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= x P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= x P_{n,q}(x) \frac{1}{P_{n,q}(x)} \\
&= x
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

iii) Son olarak

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^2; x) &= P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]_q^2}{[n+k]_q^2} b_n^2 \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q} b_n^2 \frac{[n+k-1]_q!}{[k-1]_q! [n]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

ve $[k]_q = q[k-1]_q + 1$ eşitliğinden

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^2, x) &= q P_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{b_n^2}{[n+k]_q} \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \left(\frac{x}{b_n}\right)^2 \\
&\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_n^2}{[n+k]_q} \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1} \left(\frac{x}{b_n}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= qx^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q!} \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-2} \\
&+ b_n x P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q} \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^{k-1}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olacaktır. Böylece

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^2, x) &= qx^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+2]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ b_n x P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+1]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned} \tag{4.30}$$

eşitliği yazılabilir. Burada

$$[n+k+1]_q < [n+k+2]_q$$

ve

$$[n]_q < [n+k+1]_q$$

eşitsizlikleri dikkate alınarak

$$\frac{[n+k+1]_q}{[n+k+2]_q} < 1$$

ve

$$\frac{1}{[n+k+1]_q} < \frac{1}{[n]_q}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

Bu eşitsizlikleri (4.30) da kullanarak

$$M_{n,q}(t^2, x) \leq qx^2 + \frac{b_n}{[n]_q} x \tag{4.31}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Benzer şekilde (4.30) yardımıyla

$$[n+k+1]_q = \frac{[n+k+2]_q - 1}{q}$$

eşitliği ve

$$[n+k+1]_q < [n+k+2]_q$$

eşitsizliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^2, x) &\geq qx^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+2]_q - 1}{q[n+k+2]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + b_n x P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+2]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= x^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + b_n x P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+2]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned} \quad (4.32)$$

eşitsizliği bulunur. Dolayısıyla

$$M_{n,q}(t^2, x) \geq x^2 \quad (4.33)$$

eşitliği bulunur. Böylece (4.31) ve (4.33) eşitsizliklerinden

$$x^2 \leq M_{n,q}(t^2, x) \leq qx^2 + \frac{b_n}{[n]_q} x$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 4.3.3

$q \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}_0$ ve $x \in [0, b_n)$ olsun. (4.29) ile tanımlı $M_{n,q}(f, x)$ operatörü için

$$M_{n,q_n}((t-x)^4, x) \leq (q_n^6 - 6q_n - 7)x^4$$

$$+ \left((1 + [2]_{q_n} + [3]_{q_n})q_n^3 - 4(1 + [2]_{q_n}) + 6 \right) \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x^3$$

$$+[(1 + [2]_{q_n} + [2]_{q_n}^2)q_n] \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} x^2 + \frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3} x \quad (4.34)$$

eşitsizliği sağlanır (Erençin vd., 2012), (Adıgüzel, 2012).

Kanıt

Doğrusallıktan

$$\begin{aligned} M_{n,q}((t-x)^4, x) &= M_{n,q}(t^4, x) - 4xM_{n,q}(t^3, x) + 6x^2M_{n,q}(t^2, x) \\ &\quad - 4x^3M_{n,q}(t, x) + x^4M_{n,q}(1, x) \end{aligned} \quad (4.35)$$

eşitliği yazılabilir.

Öncelikle hazırlık olarak $M_{n,q}(t^3, x)$ ve $M_{n,q}(t^4, x)$ hesaplanacaktır.

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^3, x) &= P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]_q^3}{[n+k]_q^3} b_n^3 \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q^2}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned} \quad (4.36)$$

olduğundan bu eşitlikte (1.40) özelliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^3, x) &= P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q q[k-1]_q}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= qP_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(q[k-1]_q + 1)}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^3, x) &= qP_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ qP_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned} \tag{4.37}$$

eşitliği bulunur. Burada

(1.41) eşitliği son eşitlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^3, x) &= q^3 P_{n,q}(x) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-3]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ q(q+2)P_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki toplamın ilk kısmında ve son kısmında k yerine $k+3$, ikinci kısmında k yerine $k+2$ alınırsa

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^3, x) &= q^3 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+2]_q [n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^3 \\
&+ q(q+2)P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+2]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^2 \\
&+ P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+1]_q^2} b_n^3 \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \left(\frac{x}{b_n}\right)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

eşitliği bulunur. (4.38) eşitliğinin sağ tarafındaki toplamın birinci kısmında

$$[n+k+2]_q = \frac{[n+k+3]_q - 1}{q}$$

eşitliği, ikinci kısımda

$$\frac{1}{[n+k+2]_q^2} > \frac{1}{[n+k+3]_q^2}$$

eşitsizliği ve son olarak üçüncü kısımda

$$\frac{1}{[n+k+1]_q^2} > \frac{1}{[n+k+3]_q^2}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^3, x) &\geq q^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 \\ &\quad - q^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 \\ &\quad + q^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \\ &\quad + 2q P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \\ &\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x b_n^2 \end{aligned} \quad (4.39)$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu eşitsizliğin son kısmında $x^2 b_n > x^3$ eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^3, x) &\geq q^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 \\ &\quad + 2q P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \end{aligned}$$

$$+P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x b_n^2 \quad (4.40)$$

eşitsizliği bulunur. (4.40) eşitsizliğinin birinci ve ikinci toplam ifadesinde

$$[n+k+1]_q = \frac{[n+k+3]_q - q - 1}{q^2}$$

eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^3, x) &\geq P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 - (1+q)P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 \\ &\quad + \frac{2}{q} P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \\ &\quad - 2 \frac{(1+q)}{q} P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \\ &\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x b_n^2 \end{aligned} \quad (4.41)$$

eşitsizliği doğru olur. Bu eşitsizlikte gerekli düzenleme yapılarak Lemma 4.3.2 i) yardımıyla

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^3, x) &\geq x^3 - (1+q)P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3 \\ &\quad - 2P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \\ &\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x b_n^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur. Burada $x b_n^2 > x^2 b_n$ eşitsizliği dikkate alınarak

$$M_{n,q}(t^3, x) \geq x^3 - (1+q)P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^3$$

$$-P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q^2} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \quad (4.42)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafına son toplamda

$$x^2 b_n > x^3 \text{ ve } \frac{1}{[n+k+3]_q^2} < \frac{1}{[n+k+3]_q}$$

eşitsizlikleri uygulanırsa

$$M_{n,q}(t^3, x) \geq x^3 - (2+q)P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+3]_q} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k x^2 b_n \quad (4.43)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\frac{1}{[n+k+3]_q} < \frac{1}{[n]_q}$$

eşitsizliği kullanılarak Lemma 4.3.2 i) kullanılarak

$$M_{n,q}(t^3, x) \geq x^3 - (2+q)x^2 \frac{b_n}{[n]_q} \quad (4.44)$$

eşitsizliği bulunur. Benzer yöntemle

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^4, x) &= P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]_q^4}{[n+k]_q^4} b_n^4 \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &= P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q^3}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned}$$

eşitliği geçerli olup (2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} M_{n,q}(t^4, x) &= qP_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]_q^2}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\ &\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q^2}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned} \quad (4.45)$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci toplamda (1.41) ve (4.45) in sağ tarafındaki ikinci toplamda (1.40) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^4, x) &= q^3 P_{n,q}(x) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-3]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&\quad + q(q+2) P_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[k]_q}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned} \tag{4.46}$$

eşitliği elde edilir.

Bu eşitliğin sağ tarafındaki birinci toplamında (1.42), ikinci toplamda (1.41) ve üçüncü toplamda da (1.40) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^4, x) &= q^6 P_{n,q}(x) \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-4]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&\quad + (q^5 + 2q^4 + 3q^3) P_{n,q}(x) \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-3]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&\quad + (q^3 + 3q^2 + 3q) P_{n,q}(x) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-2]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&\quad + P_{n,q}(x) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[n+k]_q^3} b_n^4 \frac{[n+k-1]_q!}{[n]_q! [k-1]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned} \tag{4.47}$$

eşitliği yazılabilir. Burada sağ taraftaki toplamın birinci kısımda k yerine $k+4$,

ikinci kısımda k yerine $k+3$,

üçüncü kısımda k yerine $k+2$

ve dördüncü kısımda k yerine $k+1$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
M_{n,q}(t^4, x) &= q^6 x^4 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+3]_q [n+k+2]_q [n+k+1]_q}{[n+k+4]_q^3} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ (q^5 + 2q^4 + 3q^3) x^3 b_n P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+2]_q [n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^3} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ (q^3 + 3q^2 + 3q) x^2 b_n^2 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[n+k+1]_q}{[n+k+2]_q^3} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&+ x b_n^3 P_{n,q}(x) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[n+k+1]_q^3} \frac{[n+k]_q!}{[n]_q! [k]_q!} \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan

$$\frac{[n+k+3]_q [n+k+2]_q [n+k+1]_q}{[n+k+4]_q^3} < 1,$$

$$\frac{[n+k+2]_q [n+k+1]_q}{[n+k+3]_q^3} < \frac{1}{[n]_q},$$

$$\frac{[n+k+1]_q}{[n+k+2]_q^3} < \frac{1}{[n]_q^2}$$

$$\frac{1}{[n+k+1]_q^3} < \frac{1}{[n]_q^3}$$

eşitsizlikleri dikkate alınarak,

$$M_{n,q}(t^4, x) \leq q^6 x^4 + x^3 \frac{b_n}{[n]_q} (q^5 + 2q^4 + 3q^3) + x^2 \frac{b_n^2}{[n]_q^2} (q^3 + 3q^2 + 3q) + x \frac{b_n^3}{[n]_q^3} \quad (4.48)$$

eşitsizliği elde edilir. Lemma 4.3.2, (4.44) ve (4.48) ifadeleri ile (4.35) birlikte düşünülerek,

$$M_{n,q}((t^4 - x), x) \leq (q^6 + 6q - 7)x^4$$

$$+ [(1 + 1 + q + 1 + q + q^2)q^3 - 4(2 + q) + 6]x^3 \frac{b_n}{[n]_q}$$

$$\begin{aligned}
& +[(1 + 1 + q + 1 + 2q + q^2)q]x^2 \frac{b_n^2}{[n]_q^2} + x \frac{b_n^3}{[n]_q^3} \\
& = (q^6 + 6q - 7)x^4 \\
& +[(1 + [2]_q + [3]_q)q^3 - 4(1 + [2]_q) + 6]x^3 \frac{b_n}{[n]_q} \\
& +[(1 + [2]_q + [2]_q^2)q]x^2 \frac{b_n^2}{[n]_q^2} + x \frac{b_n^3}{[n]_q^3}
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır.

Burada $0 < q < 1$ olacak şekilde bir q için $\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q = \frac{1}{1-q}$ olduğundan q yerine $M_{n,q}$ operatörlerinin yakınsaklığını garanti edecek $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir (q_n) dizisi seçilmelidir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
M_{n,q_n}((t-x)^4; x) & \leq (q_n^6 + 6q_n - 7)x^4 \\
& +[(1 + [2]_{q_n} + [3]_{q_n})q_n^3 - 4(1 + [2]_{q_n}) + 6] \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x^3 \\
& +[(1 + [2]_{q_n} + [2]_{q_n}^2)q_n] \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} x^2 + \frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3} x
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 4.3.4

Her $n \in \mathbb{N}$ için (q_n) , $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ olmak üzere $\rho(x) = 1 + x^2$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $(M_{n,q_n}), C_\rho[0, \infty)$ uzayından $B_\rho[0, \infty)$ uzayına tanımlı doğrusal pozitif bir operatör dizisidir (Erençin vd., 2012).

Kanıt

Operatörün doğrusallığından

$$M_{n,q_n}(\rho, x) = M_{n,q_n}(1 + t^2, x) = M_{n,q_n}(1, x) + M_{n,q_n}(t^2, x) \text{ eşitliği sağlanır.}$$

Lemma 4.3.2 i) ve iii) durumları dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{M_{n, q_n}(\rho, x)}{1 + x^2} &= \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{M_{n, q_n}(1, x) + M_{n, q_n}(t^2, x)}{1 + x^2} \\
&\leq \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{1 + q_n x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x}{1 + x^2} \\
&= 1 + q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için

$q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} < M$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $M > 0$ sabiti vardır. Buradan

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{M_{n, q_n}(\rho, x)}{1 + x^2} = \|M_{n, q_n}(\rho, x)\|_{\rho} < 1 + M$$

eşitsizliği sağlanır. $M_{\rho} = 1 + M$ olarak alınırsa Lemma 1.1.4 ten kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 4.3.1

$q_n = \frac{n}{n+1}$ ve $b_n = \sqrt{n}$ dizileri Lemma 4.3.4 ün şartlarını sağlayan dizilerdir (Erençin vd., 2012).

Teorem 4.3.1

Her $n \in \mathbb{N}$ için (q_n) , $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olan bir dizi olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ eşitliği sağlanıyorsa bu durumda her $f \in C_{\rho}^0[0, \infty)$ fonksiyonu için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n, q_n}(f, x) - f(x)|}{1 + x^2} = 0$$

eşitliği sağlanır (Erençin vd., 2012).

Kanıt

Her $n \in \mathbb{N}$ için Lemma 1.1.4 ten $M_{n,q_n}: C_\rho[0, \infty) \rightarrow B_\rho[0, \infty)$ şeklinde tanımlıdır. Kanıt için öncelikle bir yardımcı operatör

$$A_n(f; x) := \begin{cases} M_{n,q_n}(f, x), & x \in [0, b_n) \\ f(x), & x \geq b_n \end{cases}$$

A_n operatörü şeklinde tanımlansın. Teorem 1.1.5 ve Sonuç 1.1.1 gereği her $v = 0, 1, 2$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(t^v, x) - x^v|}{1 + x^2} = 0,$$

eşitliğin gösterilmesi yeterlidir. Lemma 4.3.2 den $v = 0, 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(t^v, x) - x^v|}{1 + x^2} = 0,$$

eşitliği ve $v = 2$ için

$$\begin{aligned} \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(t^2, x) - x^2|}{1 + x^2} &\leq \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{\left| q_n x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x - x^2 \right|}{1 + x^2} \\ &= \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{\left| (q_n - 1)x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}} x \right|}{1 + x^2} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olduğundan

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(t^2, x) - x^2|}{1 + x^2} \leq 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $q_n \in (0, 1)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ eşitlikleri geçerli olduğundan son eşitsizlikten açıkça

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(t^2, x) - x^2|}{1 + x^2} = 0$$

bulunur. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Aşağıda verilen Teorem 4.3.2 de M_{n,q_n} operatörünün $C_\rho[0, \infty)$ uzayındaki yaklaşımının derecesi, süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

Teorem 4.3.2

Her $n \in \mathbb{N}$ için (q_n) dizisi $q_n \in (0,1)$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olacak şekilde tanımlı ve $\omega(f; \delta)$,

Tanım 1.1.15 ile belirli süreklilik modülü olsun. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ ve her

$f \in C_\rho^0[0, \infty)$ için $\delta_{n,q_n} = \sqrt{1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}}$ olmak üzere,

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(f, x) - f(x)|}{1 + x^2} \leq 2\omega(f; \delta_{n,q_n})$$

eşitsizliği sağlanır (Erençin vd., 2012).

Kanıt

M_{n,q_n} operatörünün doğrusallığı ve monotonluğu kullanılarak Önerme 1.1.1 yardımıyla

$$|M_{n,q_n}(f, x) - f(x)| \leq M_{n,q_n}(|f(t) - f(x)|, x) \quad (4.49)$$

eşitsizliği geçerli olur. Bu durumda ağırlıklı süreklilik modülü özelliklerinden, Lemma 4.3.2

i) ve M_{n,q_n} operatörünün doğrusallığından

$$\begin{aligned} |M_{n,q_n}(f, x) - f(x)| &\leq M_{n,q_n}\left(\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right)\omega(f, \delta); x\right) \\ &= M_{n,q_n}(\omega(f, \delta); x) + M_{n,q_n}\left(\frac{|t - x|}{\delta}\omega(f, \delta), x\right) \\ &= \omega(f, \delta)\left(1 + \frac{1}{\delta}M_{n,q_n}(|t - x|, x)\right) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada $M_{n,q_n}(|t - x|, x)$ ifadesi için Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılırsa, Lemma 4.3.2 i) dikkate alınarak

$$|M_{n,q_n}(f, x) - f(x)| \leq \omega(f, \delta) \left(1 + \frac{1}{\delta} \sqrt{M_{n,q_n}((t-x)^2, x)}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $M_{n,q_n}((t-x)^2, x)$ ifadesi açılarak Lemma 4.3.2 yardımıyla,

$$\begin{aligned} M_{n,q_n}((t-x)^2, x) &= [M_{n,q_n}(t^2, x) - x^2] - 2x[M_{n,q_n}(t, x) - x] \\ &= [M_{n,q_n}(t^2, x) - x^2] \\ &\leq (1 - q_n)x^2 + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}x \end{aligned}$$

eşitsizliği bulunur. Böylece

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{M_{n,q_n}((t-x)^2; x)}{(1+x^2)^2} \leq 1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}$$

eşitsizliği geçerli olacaktır. Burada $\delta := \delta_{n,q_n} = \sqrt{1 - q_n + \frac{b_n}{[n]_{q_n}}}$ seçimiyle istenen,

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(f; x) - f(x)|}{1+x^2} \leq 2\omega(f, \delta_{n,q_n})$$

eşitsizliği gösterilmiş olur. Bu ise kanıtı tamamlar.

Bundan sonraki Teorem 4.3.3 te M_{n,q_n} operatörünün $C_{\rho^3}[0, \infty)$ uzayındaki yaklaşımının derecesi, ağırlıklı süreklilik modülü yardımıyla hesaplanacaktır.

Teorem 4.3.3

Her $n \in \mathbb{N}$ için (q_n) dizisi $0 < q_n < 1$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ şekilde tanımlı, $\Omega(f; \delta)$, Tanım 1.1.16

ile verilen ağırlıklı süreklilik modülü ve M, n den bağımsız pozitif bir sabit olsun.

$$\begin{aligned} K_{n,q_n} := \max \left\{ q^6 + 6q - 7, \quad [(1 + [2]_{q_n} + [3]_{q_n})q_n^3 - 4(1 + [2]_{q_n}) + 6] \frac{b_n}{[n]_{q_n}}, \right. \\ \left. [(1 + [2]_{q_n} + [2]_{q_n}^2)q_n]x^2 \frac{b_n^2}{[n]_{q_n}^2} + \frac{b_n^3}{[n]_{q_n}^3} \right\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{[n]_{q_n}} = 0$ olmak üzere her $f \in C_\rho^0[0, \infty)$ için,

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n, q_n}(f; x) - f(x)|}{(1 + x^2)^3} \leq M\Omega(f; K_{n, q_n}^{1/4})$$

eşitsizliği sağlanır (Erençin vd., 2012), (Adıgüzel, 2012).

Kanıt

$M_{n, q_n}(f, x)$ operatörü doğrusal olduğundan, Önerme 1.1.1 ve ağırlıklı süreklilik modülü özelliklerinden

$$\begin{aligned} |M_{n, q_n}(f; x) - f(x)| &\leq 2(1 + \delta^2)(1 + x^2)\Omega(f; \delta) \\ &\quad \times M_{n, q_n}\left(\left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right)(1 + (t - x)^2), x\right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer taraftan

$$S(x) := \left(1 + \frac{|t - x|}{\delta}\right)(1 + (t - x)^2)$$

olarak tanımlanırsa, bu durumda aşağıdaki iki durum söz konusudur.

i) $|t - x| \leq \delta_n$ ise $\frac{|t - x|}{\delta_n} \leq 1$ eşitsizliği geçerli olup $S(x) \leq 2(1 + \delta_n^2)$ eşitsizliği sağlanır.

ii) $|t - x| \geq \delta_n$ ise $\frac{|t - x|}{\delta_n} \geq 1$ dir. Böylece $1 \leq \frac{|t - x|}{\delta_n} \leq \frac{(t - x)^2}{\delta_n^2}$ eşitsizliği yazılabilir.

i) ve ii) birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} S(x) &\leq \left(\frac{(t - x)^2}{\delta_n^2} + \frac{(t - x)^2}{\delta_n^2}\right) \left(\frac{(t - x)^2}{\delta_n^2} + (t - x)^2\right) \\ &= 2 \frac{(t - x)^2}{\delta_n^2} \left(\frac{(t - x)^2 + \delta_n^2(t - x)^2}{\delta_n^2}\right) \\ &= 2 \frac{(t - x)^4}{\delta_n^4} (1 + \delta_n^2) \end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Dolayısıyla

$$S(x) \leq \begin{cases} 2(1 + \delta_n^2) & , |t - x| \leq \delta_n \\ 2(1 + \delta_n^2) \frac{(t - x)^4}{\delta_n^4} & , |t - x| \geq \delta_n \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Her $x \in [0, b_n)$ ve $t \in [0, \infty)$ için

$$S(x) \leq 2(1 + \delta_n^2) \left\{ 1 + \frac{(t - x)^4}{\delta_n^4} \right\} \quad (4.51)$$

eşitsizliği geçerli olacağından (4.51) eşitsizliği (4.50) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} |M_{n,q_n}(f, x) - f(x)| &\leq 4(1 + \delta_n^2)^2 \Omega(f; \delta)(1 + x^2) \left[1 + \frac{1}{\delta^4} M_{n,q_n}((t - x)^4, x) \right] \\ &\leq 16\Omega(f; \delta)(1 + x^2) \left[1 + \frac{1}{\delta^4} M_{n,q_n}((t - x)^4, x) \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

eşitsizliği bulunur. (4.52) eşitsizliğine Lemma 4.3.3 uygulanırsa

$$|M_{n,q_n}(f, x) - f(x)| \leq 16\Omega(f; \delta)(1 + x^2) \left[1 + \frac{1}{\delta^4} K_{n,q_n}(x^4 + x^3 + x^2 + x) \right]$$

bulunur. Burada $\delta = K_{n,q_n}^{1/4}$ seçilirse bu durumda;

$$|M_{n,q_n}(f, x) - f(x)| \leq 16\Omega(f; K_{n,q_n}^{1/4})(1 + x^2)[1 + (x^4 + x^3 + x^2 + x)]$$

eşitsizliği geçerli olup her iki taraf $(1 + x^2)^3$ ne bölünür ve supremum alınırsa,

$$\sup_{x \in [0, b_n)} \frac{|M_{n,q_n}(f, x) - f(x)|}{(1 + x^2)^3} \leq M\Omega(f; K_{n,q_n}^{1/4})$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece ise kanıt tamamlanmış olur.

Aşağıdaki teoremden (4.29) ile tanımlı $M_{n,q}$ operatörleri için q -türev yardımıyla bir fonksiyonel diferensiyel denklem verilecektir.

Teorem 4.3.4

Her $x \in [0, b_n)$ ve $f \in C_\rho^0[0, \infty)$ için $0 < q_n < 1$ olmak üzere $g_n(t) := \frac{q_n t}{b_n - q_n t}$ şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için (4.29) da verilen M_{n,q_n} operatörü

$$\frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) D_q M_{n,q}(f, x) - \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) M_{n,q}(f g_n, x) + \frac{q^n [n+1]_q}{[n]_q b_n} x M_{n,q}(f, x) = 0$$

diferensiyel denklemini sağlar (Erençin vd., 2012), (Adıgüzel, 2012).

Kanıt

q -türev tanımı kullanılarak $M_{n,q}(f, x)$ operatörüne q -türev uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) D_q M_{n,q}(f; x) &= \frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) \left[\frac{M_{n,q}(f; x) - M_{n,q}(f; qx)}{(1-q)x} \right] \\ &= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) M_{n,q}(f; x) \\ &\quad - \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) \prod_{s=0}^n \left(1 - q^{s+1} \frac{x}{b_n}\right) \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) \prod_{s=0}^n \left(1 - q^{s+1} \frac{x}{b_n}\right) &= \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) \prod_{s=0}^n \left(1 - q^s \frac{x}{b_n}\right) \\ &= \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \end{aligned}$$

eşitlikleri dikkate alınarak

$$\frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) D_q M_{n,q}(f, x) = \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) M_{n,q}(f, x)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q q^k \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned} \tag{4.53}$$

şeklinde gösterilebilir. Burada q -tamsayı tanımı gereği

$$q^k = (q-1)[k]_q + 1$$

eşitliği (4.53) te yerine yazılırsa eşitlik

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) D_q M_{n,q}(f; x) &= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) M_{n,q}(f; x) \\
&+ \frac{q^n}{[n]_q} \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q [k]_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&- \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece ortak parantez yardımıyla

$$\begin{aligned}
\frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) D_q M_{n,q}(f, x) &= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \left[\left(1 - \frac{x}{b_n}\right) - \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) \right] M_{n,q}(f, x) \\
&+ \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \\
&\times \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{q^n}{(1-q)[n]_q} \frac{x}{b_n} (q^{n+1} - 1) M_{n,q}(f, x) \\
&+ \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k \\
&= -\frac{q^n [n+1]_q}{[n]_q b_n} x M_{n,q}(f, x) + \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) P_{n,k}(x) \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) \frac{q^n [k]_q}{[n]_q} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q \left(\frac{x}{b_n}\right)^k
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$g_n\left(\frac{[k]_q}{[k+n]_q} b_n\right) := \frac{q^n [k]_q}{[n]_q}$$

şeklinde tanımlı olup istenen kolayca elde edilmiş olur. Dolayısıyla operatör;

$$\frac{q^n}{[n]_q} x \left(1 - \frac{x}{b_n}\right) D_q M_{n,q}(f, x) + \frac{q^n [n+1]_q}{[n]_q b_n} x M_{n,q}(f, x) - \left(1 - q^{n+1} \frac{x}{b_n}\right) M_{n,q}(f g_n, x) = 0$$

şeklindeki diferansiyel denklemi sağlar.

4.4 Mahmudov ve Sabancıgil Tarafından Verilen q -MKZ Operatörleri

Gösterimler 4.4.1

Operatörleri tanıtmadan önce, q hesabının bazı temel gösterimlerinden bahsedilecektir.

$q > 0$ olsun. Bu durumda

$$(1-z)_q^n := \prod_{j=0}^{n-1} (1 - q^j z), \quad (1-z)_q^\infty := \prod_{j=0}^{\infty} (1 - q^j z),$$

$$m_{n,k}(q; x) := \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} (x/(1-x))^k}{\prod_{j=0}^{n+k} (1 + q^j (x/(1-x)))},$$

$$m_{\infty,k}(q; x) := r_{\infty,k}(q; x) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} (x/(1-x))^k}{(1-q)^k [k]! \prod_{j=0}^{\infty} (1 + q^j x/(1-x))}.$$

standart gösterimleri kullanılır.

Lupaş (1987) in çalışmasına benzer olarak Mahmudov ve Sabancıgil aşağıdaki q -MKZ operatörünü tanımlamışlardır (Lupaş, 1987).

Tanım 4.4.1

$M_{n,q}: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ e olmak üzere q -MKZ operatörü

$$M_{n,q}(f; x) := \begin{cases} (1-x)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k}{\prod_{j=0}^{n+k} (1-x+q^j x)}, & 0 \leq x < 1 \\ f(1), & x = 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Ayrıca $x \in [0, 1)$ için

$$u := \frac{x}{1-x}, \quad u \in [0, \infty)$$

değişken değişimi yapılarak $x \in [0, 1)$ için $m_{n,k}(q; x)$, $m_{\infty,k}(q; x)$ ifadeleri

$$m_{n,k}(q; x) = \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} =: b_{n,k}(q; u),$$

$$m_{\infty,k}(q; x) = \frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}} u^k}{(1-q)^k [k]! (1+u)_q^{\infty}} =: b_{\infty,k}(q; u)$$

şeklinde gösterilir.

Açıkça

$$b_{n,k}(q; u) = m_{n,k}\left(q; \frac{u}{1+u}\right)$$

olmak üzere

$$M_{n,q}(f; x) = M_{n,q}\left(f; \frac{u}{1+u}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) b_{n,k}(q; u)$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 4.4.2

$f \in C[0, 1], t > 0$ için, süreklilik modülü $\omega(f; t)$ ve f nin ikinci süreklilik modülü $\omega_2(f; t)$

$$\omega(f; t) = \sup_{|x-y| \leq t} |f(x) - f(y)|,$$

$$\omega_2(f; t) = \max_{0 \leq h \leq t} \max_{0 \leq x \leq 1-2h} |f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)|$$

şeklinde tanımlıdır (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Lemma 4.4.1

q -MKZ operatörü için aşağıdaki ifadeler doğrudur (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

$$i) M_{n,q}(1; x) = 1, \quad M_{n,q}(t; x) = x, \quad (4.54)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 \leq M_{n,q}(t^2; x) - x^2 &\leq \frac{1}{[n+1]}x + \frac{q^2x^2}{1-x+qx} - x^2 \\ &\leq \frac{1}{[n+1]}x - \frac{x^2(1-x)(1-q)}{1-x+qx}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$$ii) M_{\infty,q}(t^2; x) = (1-q)x + \frac{q^2x^2}{1-x+qx} \quad (4.56)$$

eşitliği sağlanır.

Kanıt

İlk olarak $M_{n,q}(1; x) = \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(q; x) = 1$ eşitliği gösterilecektir.

Gerçekten $g_n(u) = 1/(1 + u)_q^{n+1}$ olarak alınırsa q -Taylor formülü ile

$$\begin{aligned}
 1 = g_n(0) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k q^{k(k-1)/2}}{[k]!} D_q^{(k)} g_n(u) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^k q^{k(k-1)/2}}{[k]!} \frac{(-1)^k [n+1] \dots [n+k]}{(1+u)_q^{n+k+1}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} [n+k] \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{[k]! (1+u)_q^{n+k+1}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; u) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(q; x)
 \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Yukarıdakini kullanarak (4.54) ün ikinci eşitliği

$$\begin{aligned}
 M_{n,q}(t; x) = M_{n,q}\left(t; \frac{u}{1+u}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]}{[n+k]} [n+k] \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} \\
 &= \frac{u}{1+u} \sum_{k=1}^{\infty} [n+k-1] \frac{q^{(k-1)(k-2)/2} (qu)^{k-1}}{(1+qu)_q^{n+k}} \\
 &= \frac{u}{1+u} \sum_{k=0}^{\infty} b_{n,k}(q; qu) = \frac{u}{1+u} = x
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de $M_{n,q}(t^2; x) - x^2$ nin hesabı yapılacaktır. İlk olarak $M_{n,q}(t^2; x)$ için bir üst sınır hesaplanacaktır.

$$M_{n,q}(t^2; x)$$

$$= M_{n,q}\left(t^2; \frac{u}{1+u}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]^2}{[n+k]^2} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]}{[n+k]} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{[n+k]} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

$$+ \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[k]-1}{[n+k]} \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k-1 \end{bmatrix} \frac{[n+k-2]!}{[k-1]! [n]!} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

$$=: I_1 + I_2$$

elde edilir. I_1 için

$$I_1 \leq \frac{1}{[n+1]} \frac{u}{1+u} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} (qu)^k}{(1+qu)_q^{n+k+1}}$$

$$= \frac{1}{[n+1]} \frac{u}{1+u} = \frac{x}{[n+1]}$$

eşitsizliği geçerlidir. I_2 için ise

$$I_2 = q \sum_{k=2}^{\infty} \frac{[n+k-1]}{[n+k]} \frac{[n+k-2]!}{[k-2]! [n]!} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

$$= q \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{[n+k] - q^{n+k-1}}{[n+k]} \right) \begin{bmatrix} n+k-2 \\ k-2 \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

$$\leq q \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} q^{2k+1} u^{k+2}}{(1+u)_q^{n+k+3}}$$

$$\begin{aligned}
&= q \frac{qu^2}{(1+u)(1+qu)} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} (q^2 u)^k}{(1+q^2 u)_q^{n+k+1}} \\
&= \frac{q^2 u^2}{(1+u)(1+qu)} = \frac{q^2 x^2}{1-x+qx}
\end{aligned}$$

eşitsizliği doğrudur. Böylece

$$M_{n,q}(t^2; x) = I_1 + I_2 \leq \frac{x}{[n+1]} + \frac{q^2 x^2}{1-x+qx}$$

eşitsizliği bulunur.

DeVore and Lorentz (1993) ten

“ $C[0,1]$ üzerinde doğrusal pozitif bir L operatörü doğrusal fonksiyonlar üretirse, o zaman herhangi bir konveks fonksiyon f ve herhangi bir $x \in [0,1]$ için $L(f; x) \geq f(x)$ eşitsizliği sağlanır.”

önermesinin geçerli olduğu biliniyor (DeVore and Lorentz, 1993), (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Bu nedenle $M_{n,q}(t^2; x) - x^2 \geq 0$ olur.

Son olarak (4.56) eşitliği için

$$\begin{aligned}
&M_{\infty,q}(t^2; x) \\
&= M_{\infty,q}\left(t^2; \frac{u}{1+u}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1-q^k)^2 b_{\infty,k}(q; u) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1-q)^2 [k]^2 \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1-q)^k [k]! (1+u)_q^{\infty}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k](q[k-1]+1) q^{k(k-1)/2} u^k}{(1-q)^{k-2} [k]! (1+u)_q^{\infty}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1-q}{(1+u)_q^\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1-q)^{k-1} [k-1]!} + \frac{q}{(1+u)_q^\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1-q)^{k-2} [k-2]!} \\
&= (1-q) \frac{u}{1+u} \sum_{k=0}^{\infty} b_{\infty,k}(q; qu) + \frac{q^2 u^2}{(1+u)(1+qu)} \sum_{k=0}^{\infty} b_{\infty,k}(q; q^2 u) \\
&= (1-q) \frac{u}{1+u} + \frac{q^2 u^2}{(1+u)(1+qu)} \\
&= (1-q)x + \frac{q^2 u^2}{1-x+qx}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Lemma 4.2.2

$0 < q < 1$, $k \geq 0, n \geq 1$ olsun. Herhangi bir $x \in [0,1)$ için

$$|m_{n,k}(q; x) - m_{\infty,k}(q; x)| \leq \frac{x}{1-x} \frac{q^{n+k+1}}{1-q} m_{n,k}(q; x) + \frac{q^{n+1}}{1-q} m_{\infty,k}(q; x)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Kanıt

Basit hesaplamalarla

$$\begin{aligned}
&|m_{n,k}(q; x) - m_{\infty,k}(q; x)| = |b_{n,k}(q; u) - b_{\infty,k}(q; u)| \\
&= \left| \begin{aligned} &\left[\begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right] \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^j u}{1+q^j u} \prod_{j=0}^n \left(1 - \frac{q^{k+j} u}{1+q^{k+j} u} \right) \\ &- \frac{1}{(1-q)^k [k]!} \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^j u}{1+q^j u} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{q^{k+j} u}{1+q^{k+j} u} \right) \end{aligned} \right| \\
&= \left| \begin{aligned} &\left[\begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right] \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^j u}{1+q^j u} \left(\prod_{j=0}^n \left(1 - \frac{q^{k+j} u}{1+q^{k+j} u} \right) - \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{q^{k+j} u}{1+q^{k+j} u} \right) \right) \end{aligned} \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \prod_{j=0}^{k-1} \frac{q^j u}{1 + q^j u} \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{q^{k+j} u}{1 + q^{k+j} u} \right) \left(\begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} - \frac{1}{(1-q)^k [k]!} \right) \right| \\
& \leq b_{n,k}(q; u) \left| 1 - \prod_{j=n+k+1}^{\infty} \left(1 - \frac{q^j u}{1 + q^j u} \right) \right| + b_{\infty,k}(q; u) \left| \prod_{j=n+1}^{n+k} (1 - q^j) - 1 \right| \quad (4.57)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. (4.57) de

$$1 - \prod_{j=1}^k (1 - a_j) \leq \sum_{j=1}^k a_j, \quad (a_1, a_2, \dots, a_k \in (0,1), \quad k = 1, 2, \dots, \infty),$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|b_{n,k}(q; u) - b_{\infty,k}(q; u)| & \leq b_{n,k}(q; u) \sum_{j=n+k+1}^{\infty} \frac{q^j u}{1 + q^j u} + b_{\infty,k}(q; u) \sum_{j=n+1}^{n+k} q^j \\
& \leq b_{n,k}(q; u) \frac{u q^{n+k+1}}{1 - q} + b_{\infty,k}(q; u) \frac{q^{n+1}}{1 - q}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Lemma 4.4.3

$m_{n,k}(q; x)$ ve $m_{\infty,k}(q; x)$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{n,k}(q; x) \leq 1 - x + q^n x, \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{\infty,k}(q; x) = 1 - x$$

ifadeleri geçerlidir (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Kanıt

(4.54) kullanılarak,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{n,k}(q; x) = \sum_{k=0}^{\infty} (q^{n+k} - 1) \frac{q^k - 1}{q^{n+k} - 1} m_{n,k}(q; x) + \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(q; x)$$

$$\leq (q^n - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[k]}{[n+k]} m_{n,k}(q; x) + \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(q; x)$$

$$= (q^n - 1)M_{n,q}(t; x) + 1 = 1 - x + q^n x$$

eşitsizliği elde edilir.

İkinci eşitlikte benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.4.1

$f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda $(M_{n,q}(f; x))_{n \geq 1}$ dizisi her $q > 0$ ve $x \in [0, 1]$ için n e göre artmayandır (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Kanıt

$M_{n,q}(f; x) - M_{n+1,q}(f; x)$ farkı için kolayca

$$\begin{aligned} M_{n,q}(f; x) - M_{n+1,q}(f; x) &= M_{n,q}\left(f; \frac{u}{1+u}\right) - M_{n+1,q}\left(f; \frac{u}{1+u}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k+1]}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} \left(1 - \frac{q^{n+k+1} u}{1+q^{n+k+1} u}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{[k]}{[n+k+1]}\right) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} \\ &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} q^{n+1} f\left(\frac{[k-1]}{[n+k]}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k-1 \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{[n+1]}{[n+k+1]} f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) + q^{n+1} \frac{[k]}{[n+k+1]} f\left(\frac{[k-1]}{[n+k]}\right) - f\left(\frac{[k]}{[n+k+1]}\right) \right) \\ &\quad \times \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilebilir.

$$\alpha = \frac{[n+1]}{[n+k+1]}, \beta = q^{n+1} \frac{[k]}{[n+k+1]}, \alpha + \beta = 1,$$

$$x_1 = \frac{[k]}{[n+k]}, x_2 = \frac{[k-1]}{[n+k]}$$

seçimleriyle

$$M_{n,q}(f; x) - M_{n+1,q}(f; x)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) - f(\alpha x_1 + \beta x_2)) \begin{bmatrix} n+k+1 \\ k \end{bmatrix} \frac{q^{k(k-1)/2} u^k}{(1+u)_q^{n+k+1}}$$

eşitliği yazılabilir. f nin konveksliğinden, $(M_{n,q}(f; x))_{n \geq 1}$ dizisinin n e göre artmayan olduğunu söylenebilir.

Yeni q -MKZ operatörleri $M_{n,q}$ tanımından $q > 0$ için doğrusal pozitif operatörlerdir. $M_{n,q}(t^r; x)$, $(r = 0,1,2)$ momentleri pozitif operatörler için yaklaşım teorisinde özel önem taşımaktadır. $r = 0,1,2$ için $M_{n,q}(t^r; x)$ formüllerine dayanarak aşağıdaki yaklaşım teoremi verilebilir.

Teorem 4.4.2

$0 < q_n < 1$ olsun. $(M_{n,q_n}(f))_{n \geq 1}$ dizisi için $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$ olsun. Bu durumda $(M_{n,q}(f; x))_{n \geq 1}$ dizisi her $f \in C[0,1]$ için $[0,1]$ üzerinde f ye düzgün yakınsar (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Kanıt

$M_{n,q_n}(f; x)$, pozitif doğrusal operatörler olduğundan, Korovkin teoremi gereği $x \in [0,1]$ ve $m = 0,1,2$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_{n,q_n}(t^m; x) - x^m\| = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul herhangi bir $f \in C[0,1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_{n,q_n}(f; x) - (f; x)\| = 0$ olmasıdır. $m = 0,1$ için bu, (4.54) ten herhangi bir (q_n) dizisi için geçerlidir.

$q_n \rightarrow 1$ olsun. Herhangi bir sabit pozitif tamsayı k için, $n \geq k$ olduğunda $[n]_{q_n} \geq [k]_{q_n}$ eşitsizliği geçerlidir.

Bu nedenle, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf [n]_{q_n} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} [k]_{q_n} = k$ olur.

k isteğe bağlı seçildiğinden $[n]_{q_n} \rightarrow \infty$ dır. Dolayısıyla, $x \in [0,1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x}{[n+1]_{q_n}} \right\| = 0$ olur.

Aynı zamanda, $q_n \geq 1/2$ ve her $x \in [0,1]$ için,

$$0 \geq -\frac{x^2(1-x)(1-q_n)}{1-x+q_n} \geq -\frac{1}{4} \frac{1-q_n}{1-x+q_n} \geq -\frac{1}{4} \frac{1-q_n}{1-x/2} \geq -\frac{1}{2} (1-q_n)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu nedenle $x \in [0,1]$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x}{[n+1]_{q_n}} - \frac{x^2(1-x)(1-q_n)}{1-x+q_n} \right\| = 0$$

olur. (4.55) ten $x \in [0,1]$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_{n,q_n}(t^2; x) - x^2\| = 0$ sonucuna ulaşılır.

Teorem 4.4.2 de, eğer $0 < q < 1$ sabitlenirse, $(M_{n,q_n}(f))_{n \geq 1}$ bazı sürekli fonksiyonlara yaklaşım yapmayabilir. Şimdi sabit $0 < q < 1$ için yeni q -MKZ operatörlerinin yaklaşım özellikleri verilecektir. Aşağıda verilen yeni limit q -MKZ operatörleri, $M_{\infty,q}(f)$, Ostrovska (2006) tarafından tanıtılan q -Lupaş limit operatörleri $R_{\infty,q}(f)$ ile benzerdir (Ostrovska, 2006).

$$M_{\infty,q}(f; x) := \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} f(1-q^k) m_{\infty,k}(q; x), & x \in [0,1) \\ f(1), & x = 1 \end{cases}$$

Teorem 4.4.3

$0 < q < 1$ ve $f \in C[0,1]$ olsun.

$$C_q = \max\{5, 2 + 3q/(1-q)\}$$

olmak üzere

$$\|M_{n,q}(f) - M_{\infty,q}(f)\| \leq C_q \omega(f; q^n) \quad (4.58)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Her α ve $0 < \alpha \leq 1$ için, Lipschitz sınıfı $\text{Lip } \alpha := \{f \in C[0, 1]: \omega(f; t) \ll t^\alpha\}$ ya ait olan $f_\alpha(x)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\|M_{n,q}(f) - M_{\infty,q}(f)\| \gg q^{\alpha n}$$

eşitliği geçerlidir (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Kanıt

$$\Delta(x) := M_{n,q}(f; x) - M_{\infty,q}(f; x)$$

olsun. $M_{n,q}(f; x)$ ve $M_{\infty,q}(f; x)$ uç nokta enterpolasyon özelliğine sahip olduğundan, $\Delta(0) = \Delta(1) = 0$ dır. Tüm $x \in (0,1)$ için Δ ,

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) - f(1 - q^k) \right] m_{n,k}(q; x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} [f(1 - q^k) - f(1)] (m_{n,k}(q; x) - m_{\infty,k}(q; x)) \\ &:= I_1 + I_2 \end{aligned}$$

biçimde yeniden yazılabilir. İlk olarak I_1 hesabı ile başlanacaktır.

$$\frac{[k]}{[n+k]} - (1 - q^k) = \frac{1 - q^k}{1 - q^{n+k}} - (1 - q^k) = q^{n+k} \frac{1 - q^k}{1 - q^{n+k}} \leq q^{n+k} \leq q^n$$

olduğundan

$$|I_1| \leq \omega(f; q^n) \sum_{k=0}^{\infty} m_{n,k}(q; x) = \omega(f; q^n) \quad (4.59)$$

eşitsizliği bulunur.

I_2 nin hesabı için süreklilik modülünün

$$\omega(f; \lambda t) \leq (1 + \lambda)\omega(f; t), \quad \lambda > 0$$

özelliği ve Lemma 4.2.2 kullanılarak

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega(f; q^k) |m_{n,k}(q; x) - m_{\infty,k}(q; x)| \\ &\leq \omega(f; q^n) \sum_{k=0}^{\infty} (1 + q^{k-n}) |m_{n,k}(q; x) - m_{\infty,k}(q; x)| \\ &\leq 2\omega(f; q^n) + \omega(f; q^n) \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{\infty} q^k |m_{n,k}(q; x) - m_{\infty,k}(q; x)| \\ &\leq 2\omega(f; q^n) + \omega(f; q^n) \frac{1}{q^n} \sum_{k=0}^{\infty} q^k \left(\frac{x}{1-x} \frac{q^{n+k+1}}{1-q} m_{n,k}(q; x) + \frac{q^{n+1}}{1-q} m_{\infty,k}(q; x) \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$q^n x / (1 - x) \leq 1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 2\omega(f; q^n) + \omega(f; q^n) \frac{1}{q^n} \left(\frac{q^{n+1}x}{(1-q)(1-x)} \sum_{k=0}^{\infty} q^{2k} m_{n,k}(q; x) + \frac{q^{n+1}}{1-q} \sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{\infty,k}(q; x) \right) \\ &\leq 2\omega(f; q^n) + \omega(f; q^n) \frac{1}{q^n} \left(\frac{q^{n+1}x}{(1-q)(1-x)} \sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{n,k}(q; x) + \frac{q^{n+1}}{1-q} (1-x) \right) \\ &\leq 2\omega(f; q^n) + \omega(f; q^n) \frac{1}{q^n} \left(\frac{q^{n+1}x}{(1-q)(1-x)} (1-x + q^n x) + \frac{q^{n+1}}{1-q} (1-x) \right) \\ &= 2\omega(f; q^n) + \omega(f; q^n) \frac{1}{q^n} \left(\frac{q^{n+1}x}{1-q} + \frac{q^{n+1}x}{1-q} \frac{q^n x}{1-x} + \frac{q^{n+1}(1-x)}{1-q} \right) \tag{4.60} \\ &\leq \omega(f; q^n) \left(2 + \frac{3q}{1-q} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (4.59) ve (4.60) tan, $0 < x \leq 1/(1 + q^n)$ için istenen sonuç bulunur.

Şimdi $x \in (1/(1 + q^n), 1)$, yani $1 - x < q^n/(1 + q^n) < q^n$ alınsın.

$$\left| \frac{[k]}{[n+k]} - 1 \right| = \left| \frac{1 - q^k}{1 - q^{n+k}} - 1 \right| = q^k \frac{1 - q^n}{1 - q^{n+k}} \leq q^k$$

ve

$$\omega(f; \lambda t) \leq (1 + \lambda) \omega(f; t), \quad \lambda > 0$$

eşitsizlikleri doğru olduğundan

$$\begin{aligned} |\Delta(x)| &= |M_{n,q}(f; x) - M_{\infty,q}(f; x)| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} \left(f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) - f(1) \right) m_{n,k}(q; x) - \sum_{k=0}^{\infty} \left(f(1 - q^k) - f(1) \right) m_{\infty,k}(q; x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left| f\left(\frac{[k]}{[n+k]}\right) - f(1) \right| m_{n,k}(q; x) + \sum_{k=0}^{\infty} |f(1 - q^k) - f(1)| m_{\infty,k}(q; x) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece

$$\begin{aligned} |\Delta(x)| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega(f; q^k) m_{n,k}(q; x) + \sum_{k=0}^{\infty} \omega(f; q^k) m_{\infty,k}(q; x) \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \omega(f; q^n) \left(1 + \frac{q^k}{q^n} \right) m_{n,k}(q; x) + \sum_{k=0}^{\infty} \omega(f; q^n) \left(1 + \frac{q^k}{q^n} \right) m_{\infty,k}(q; x) \\ &= 2\omega(f; q^n) + \frac{\omega(f; q^n)}{q^n} \sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{n,k}(q; x) + \frac{\omega(f; q^n)}{q^n} \sum_{k=0}^{\infty} q^k m_{\infty,k}(q; x) \\ &\leq 2\omega(f; q^n) + \frac{\omega(f; q^n)}{q^n} (1 - x + q^n x) + \frac{\omega(f; q^n)}{q^n} (1 - x) \\ &\leq 2\omega(f; q^n) + \frac{\omega(f; q^n)}{q^n} (q^n + q^n x) + \frac{\omega(f; q^n)}{q^n} q^n \\ &\leq 5\omega(f; q^n) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son olarak (4.58) için $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} 0, & \leq x \leq 1 - q \\ (x - (1 - q))^\alpha, & 1 - q \leq x \leq 1 - q + \frac{q - q^2}{2} \\ -\left[\frac{q(1 - q)}{2}\right]^{\alpha-1} (x - 1 + q^2), & 1 - q + \frac{q - q^2}{2} \leq x \leq 1 - q^2 \\ 0, & 1 - q^2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

eşitliği yazılabilir. f_α nin yukarıdaki gibi tanımlanan sürekli bir fonksiyondur. Bu durumda

$$\omega(f_\alpha; t) \leq C t^\alpha \text{ ve}$$

$$\|M_{n,q}(f_\alpha; x) - M_{\infty,q}(f_\alpha; x)\| = \left(\frac{q^{n+1}(1 - q)}{1 - q^{n+1}}\right)^\alpha \|m_{n,1}(q; \cdot)\| \asymp q^{\alpha n} \|m_{n,1}(q; \cdot)\| \asymp q^{\alpha n}$$

ifadesi elde edilir. Böylece kanıt tamamlanmış olur.

Uyarı 4.4.1

Teorem 4.4.3 ün klasik Bernstein polinomları için Popoviciu Teoreminin kanıtına benzer bir şekilde elde edilemeyeceği vurgulanmalıdır. İlgili sonsuz çarpım nedeniyle farklı hesap teknikleri gerekmektedir. Bu çalışmadaki kanıt Heping (2007) deki q -MKZ operatörleri için yapılan kanıttan daha zordur, çünkü MKZ operatörlerinin yeni q -analoğu $x = 1$ noktasında tekil yapıya sahiptir ve yeni bir yöntem ihtiyacı duymaktadır (Heping, 2007).

Teorem 4.4.4

$0 < q < 1$ olsun. C mutlak bir sabit olmak üzere,

$$\|M_{n,q}(f) - M_{\infty,q}(f)\| \leq C \omega_2(f; \sqrt{q^n}) \quad (4.61)$$

ve

$$\sup_{0 < q \leq 1} \|M_{n,q}(f) - M_{\infty,q}(f)\| \leq C \omega_2(f; n^{-1/2}) \quad (4.62)$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Kanıt

Yeni q -MKZ operatörlerinin Heping (2005) Teorem 2 deki (A) ve (B) koşullarını sağladığı açıktır (Heping, 2005). Gerçekten;

$$(A) M_{n,q}(1; x) = M_{\infty,q}(1; x), M_{n,q}(t; x) = M_{\infty,q}(t; x)$$

ve $n \rightarrow \infty$ için

$$0 \leq \lambda_n(x) = M_{n,q}(t^2; x) - M_{\infty,q}(t^2; x) = M_{n,q}((t-x)^2; x) - M_{\infty,q}((t-x)^2; x)$$

$$\leq \frac{1}{[n+1]}x + \frac{q^2x^2}{1-x+qx} - (1-q)x - \frac{q^2x^2}{1-x+qx} = \frac{q^{n+1}}{[n+1]}x \rightarrow 0$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(B) $(M_{n,q_n}(f))_{n \geq 1}$ dizisi herhangi bir konveks fonksiyon f ve her $x \in [0,1]$ için artmayandır. (Teorem 4.4.1 e bakınız.)

Diğer taraftan Teorem 4.4.3 ten $q \in (0,1)$ ve $n \rightarrow \infty$ için

$$M_{n,q}(f; x) \rightarrow M_{\infty,q}(f; x) \text{ (noktasal)}$$

yakınsaması geçerlidir. Böylece

$$|M_{n,q}(f; x) - M_{\infty,q}(f; x)| \leq C\omega_2\left(f; \sqrt{M_{n,q}(t^2; x) - M_{\infty,q}(t^2; x)}\right)$$

$$\leq C\omega_2\left(f; \sqrt{q^{n+1}}\right)$$

$$\leq C\omega_2(f; \sqrt{q^n})$$

eşitsizliği yazılabilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \sup_{0 < q < 1} |M_{n,q}(t^2; x) - M_{\infty,q}(t^2; x)| &\leq \sup_{0 < q < 1} \frac{q^{n+1}(1-q)}{1-q^{n+1}} = \sup_{0 < q < 1} \frac{q^{n+1}}{[n+1]} = \sup_{0 < q < 1} \frac{q}{[n+1]_{1/q}} \\ &= \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

olur.

$$|M_{n,1}(t^2; x) - x^2| \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

eşitsizliğinden (4.62) elde edilir.

Hatırlatma 4.4.1

q -Bernstein polinomları ve q -MKZ operatörleri için Teorem 4.4.3 ve Teorem 4.4.4 e benzer sonuçlar sırasıyla Wang (2007) ve Heping (2007) de elde edildi (Wang, 2007) ve (Heping, 2007).

Burada $f(x) = x^2$ olduğunda, $q \in (0,1)$ için,

$$\|M_{n,q}(f) - M_{\infty,q}(f)\| = q^n = \omega_2(f; \sqrt{q^n})$$

olduğuna dikkat edilmelidir. Dolayısıyla (4.61) deki $\sqrt{q^n}$ dizisi, $n \rightarrow \infty$ iken azalarak daha hızlı sıfıra yaklaşan başka herhangi bir diziyle değiştirilemez ve bu hesap daha keskindir. Bununla birlikte, (4.61), Lipschitz sınıfı $\text{Lip } \alpha (\alpha \in (0,1])$ fonksiyonlar için diğerlerinden daha kesin değildir. Bu Teorem 4.4.3 ile birleştirildiğinde, $0 < q < 1$ durumunda süreklilik modülünün, yeni q -MKZ operatörleri için yakınsama hızını tanımlamak için ikinci süreklilik modülünden daha uygun olduğu gösterilmiştir. Bu $q = 1$ durumundan farklıdır (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

Açıklama 4.4.1

(4.61) deki C sabiti mutlak bir sabittir ve q ya bağımlı değildir, bununla birlikte (4.58) deki sabit C_q , q ya bağlıdır ve $q \uparrow 1$ iken $+\infty$ a yaklaşır. Bu nedenle, (4.61), (4.58) den elde edilemez (Mahmudov and Sabancıgil, 2012).

4.5 Şimşek' in Üretici Fonksiyonlar Yardımıyla Elde Ettiği q -MKZ Operatörü

Bu kesimde q -MKZ operatörünü tanımlamadan önce Şimşek (2019) tarafından verilen üretici fonksiyonlar dizisinin elde edilmesine dair bir yöntem verilecektir (Şimşek, 2019).

Tanım 4.5.1

$A > 0$, $q > 0$ ve $I_A = [0, A]$ olsun. $I_A \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $(\varphi_{n,q})$ gerçel değerli fonksiyonlar dizisi için aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) Her $x \in I_A$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi_{n,q}(x, 0) \neq 0$ ve $\varphi_{n,q}(x, 1) = 1$ dir.

ii) Her $k \in \mathbb{N}_0$ için $\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x,u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0}$ var ve x değişkenine göre süreklidir.

iii) Her $k \in \mathbb{N}_0$ ve $x, u \geq 0$ için $\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \geq 0$ eşitliği sağlanır.

Yukarıda özellikleri verilen bu $(\varphi_{n,q})$ dizisine üretici fonksiyonlar dizisidir.

Bu koşullar yardımıyla $(\varphi_{n,q})$ üretici fonksiyonunun, yakınsaklık yarıçapının 1 den küçük olmaması koşulu altında $u = 0$ noktasındaki q -Taylor formülü

$$\varphi_{n,q}(u, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} u^k \quad (4.63)$$

şeklinde olur. Yukarıdaki i) ve ii) özellikleri kullanılarak (4.63) eşitliğinden

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} = 1$$

bulunur.

Artık $(\varphi_{n,q})$ üretici fonksiyonlar dizisi yardımıyla aşağıda verilen genel q -operatörler dizisi tanımlanabilir.

Tanım 4.5.2

f, I_A da tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyonların elemanı olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $q > 0$ için $(\varphi_{n,q})$ yukarıda tanımlı üretici fonksiyonlar dizisi ve $\alpha_{n,k,q}$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere

$$\mathcal{L}_{n,q}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{[k]_q!} \frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} f\left(\frac{[k]_q}{\alpha_{n,k,q}}\right) \quad (4.64)$$

şeklinde tanımlıdır.

$\mathcal{L}_{n,q}, I_A$ da tanımlı gerçel değerli sınırlı fonksiyon uzayları arasında tanımlı doğrusal ve pozitif bir operatördür (Şimşek, 2019).

Lemma 4.5.1

$\mathcal{L}_{n,q}$ operatörüne ait ilk üç moment aşağıdaki şekilde belirlidir.

$$i) \mathcal{L}_{n,q}(e_{0,i}, x) = 1$$

$$ii) \mathcal{L}_{n,q}(e_{1,i}, x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}} \frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u} \Big|_{u=1} \quad (4.65)$$

$$iii) \mathcal{L}_{n,q}(e_{2,i}, x) = \frac{1}{\alpha_{n,q}^2} \left\{ \frac{\partial_q^2 \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^2} + \frac{\partial_q \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u} \right\} \Big|_{u=1} \quad (4.66)$$

Tanım 4.5.3 (Genel Operatörden q -MKZ Operatörünün Elde Edilişi)

$n \in \mathbb{N}$, $q \in [0,1)$ ve $x \in [0,1)$ olsun.

$$\varphi_{n,q}(x, u) := \frac{(1 \ominus x)_q^{n+1}}{(1 \ominus ux)_q^{n+1}}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlar dizisi yardımıyla her $k \in \mathbb{N}$ için q -türev kullanılarak

$$\frac{\partial_q^k \varphi_{n,q}(x, u)}{\partial_q u^k} \Big|_{u=0} = [n+1]_q [n+2]_q \dots [n+k]_q x^k (1 \ominus x)_q^{n+1} \quad (4.67)$$

eşitliği yazılabilir. Bu fonksiyonlar dizisi üretici fonksiyon tanımındaki i) - iii) koşullarını sağlar. $\alpha_{n,k,q} = q^{-n} [k+n]_q$ eşitliği ve (4.67) eşitliği de göz önüne alınırsa (4.64) ile tanımlı $\mathcal{L}_{n,q}$ operatöründe yerine yazılarak gerçel değerli $[0,1]$ üzerinde tanımlı her f fonksiyonu için $\mathcal{L}_{n,q}$ operatör dizisi

$$M_{n,q}(f, x) = (1 \ominus x)_q^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} k+n \\ k \end{bmatrix}_q x^k f\left(\frac{[k]_q}{q^{-n}[k+n]_q}\right)$$

q -MKZ operatörüne dönüşür (Şimşek, 2019).

Lemma 4.5.2

$\mathcal{L}_{n,q}$ operatörünün momentleri yardımıyla q -MKZ operatörünün momentleri

$$i) M_{n,q}(e_{0,0}, x) = 1$$

$$ii) M_{n,q}(e_{1,0}, x) = \frac{[n+1]_q}{[n]_q} \frac{xq^n}{(1-xq^{n+1})}$$

$$\text{iii) } M_{n,q}(e_{2,0}, x) = \frac{[n+1]_q[n+2]_q}{[n]_q^2} \frac{x^2 q^{2n+1}}{(1-xq^{n+1})(1-xq^{n+2})} + \frac{[n+1]_q}{[n]_q^2} \frac{x^2 q^{2n}}{(1-xq^{n+1})}$$

eşitlikleri ile belirlidir (Şimşek, 2019).





5.BÖLÜM

İKİ DEĞİŞKENLİ q -MEYER-KÖNİG VE ZELLER OPERATÖRLERİ

Bu bölümde Doğru and Duman (2006) tarafından verilen q -MKZ Operatörlerinin Doğru and Gupta (2006) tarafından tanımlanan iki değişkenli bir genellemesi verilerek, bu operatörlerin yaklaşım özellikleri incelenecektir (Doğru and Duman, 2006), (Doğru and Gupta, 2006).

5.1 İki Değişkenli q -MKZ Operatörlerinin Genel Yapısı

Aşağıda verilen iki değişkenli q -MKZ operatörlerinin genelleştirmesi Barbosu (2000) nun yöntemiyle oluşturulmuştur (Barbosu, 2000).

Tanım 5.1.1

$I^2 := [0, A] \times [0, A]$ olsun. Her $f \in C(I^2)$ ve $q_1, q_2 \in (0, 1]$ için q -MKZ operatörünün iki değişkenli hali

$$u_{n_1, q_1}(x) = \prod_{s_1=0}^{n_1} (1 - q_1^{s_1} x); \quad u_{n_2, q_2}(y) = \prod_{s_2=0}^{n_2} (1 - q_2^{s_2} y)$$

olmak üzere

$$M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = u_{n_1, q_1}(x) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right)$$

$$\begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \times \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanır (Doğru and Gupta, 2006).

Lemma 5.1.1

(5.1) ile verilen operatörler dizisi doğrusal ve pozitifdir.

Kanıt

i) Gerçekten $M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y)$ operatörünün doğrusallığı için her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $f, g \in C(I^2)$ olsun.

$$\begin{aligned}
 M_{n_1, n_2}(\alpha f(t) + \beta g(t); q_1, q_2, x, y) &= u_{n_1, q_1}(x) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\alpha f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \beta g\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \right) \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \times \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} \\
 &= u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \alpha f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \\
 &\quad + u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \beta g\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\
 &= \alpha u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \\
 &\quad + \beta u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} g\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\
 &= \alpha M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) + \beta M_{n_1, n_2}(g; q_1, q_2, x, y)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerli olup $M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y)$ doğrusal bir operatördür.

ii) $M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y)$ pozitifdir. Gerçekten $f \geq 0$ olsun.

$$u_{n_1, q_1}(x) = \prod_{s_1=0}^{n_1} (1 - q_1^{s_1} x); \quad u_{n_2, q_2}(y) = \prod_{s_2=0}^{n_2} (1 - q_2^{s_2} y)$$

olduğundan

$$M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = u_{n_1, q_1}(x) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right)$$

$$\begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \times \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2}$$

olduğundan her $x, y \in [0, A]$; ve $0 < q \leq 1$ için

$$\prod_{s_1=0}^{n_1} (1 - q_1^{s_1} x) \geq 0, \quad \prod_{s_2=0}^{n_2} (1 - q_2^{s_2} y) \geq 0$$

ve;

$$\begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \geq 0$$

eşitsizlikleri doğru olup kabulden

$$f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \geq 0$$

olduğundan $M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y)$ operatörü pozitiftir.

Burada $q_1 = q_2 = 1$ alınırse klasik MKZ operatörlerinin Stancu (1972) tipli genelleştirmesi elde edilir (Stancu, 1972).

Şimdi, teoremlerin kanıtı için hazırlık niteliğinde olan eşitlikler aşağıdaki Lemma ile verilecektir.

Lemma 5.1.2

(5.1) ile tanımlı iki değişkenli q -MKZ operatörleri için

$$M_{n_1}^x(f; q_1, x, y) = u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, y\right) \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \quad (5.2)$$

ve

$$M_{n_2}^y(f; q_2, x, y) = u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(x, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \quad (5.3)$$

şeklinde gösterilmek üzere

$$i) M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(f; q_2, x, y) \right),$$

$$ii) M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) = M_{n_2}^y \left(M_{n_1}^x(f; q_1, x, y) \right)$$

eşitlikleri geçerlidir (Doğru and Gupta, 2006).

Kanıt

ii) nin kanıtı i) ye benzer olduğundan yalnızca i) özelliği kanıtlanacaktır.

Açıkça

$$i) M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(f; q_2, x, y) \right) = M_{n_1}^x \left(u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(x, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \right)$$

eşitliği geçerli olup, burada $M_{n_1}^x$ in doğrusallığından

$$M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(f; q_2, x, y) \right) = u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^x \left(f\left(x, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right); q_1, x, y \right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \quad (5.4)$$

eşitliği elde edilir. (5.2) ve bu son eşitlikten

$$\begin{aligned} M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(f; q_2, x, y) \right) &= u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \\ &\times \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\ &= u_{n_1, q_1}(x) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} f\left(\frac{q_1^{n_1}[k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}}, \frac{q_2^{n_2}[k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}}\right) \\ &\times \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} x^{k_1} y^{k_2} = M_{n_1, n_2}(f; q_1, q_2, x, y) \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu da aranan eşitliktir.

Şimdi (5.1) ile tanımlı iki değişkenli q -MKZ operatörlerinin yaklaşımı Volkov (1957) tarafından verilen iki değişkenli fonksiyonlar için Korovkin tipli teorem yardımıyla incelenecektir (Volkov, 1957). Teoreme hazırlık olarak aşağıdaki lemma verilecektir.

Lemma 5.1.3

$e_{ij}: I^2 \rightarrow I$ ve $e_{ij}(t, s) = t^i s^j$ olmak üzere (5.1) de tanımlanan operatör için aşağıdaki ifadeler geçerlidir (Doğru and Gupta, 2006), (Yıldız, 2009).

i) $M_{n_1, n_2}(e_{00}(t, s); q_1, q_2, x, y) = 1$

ii) $M_{n_1, n_2}(e_{10}(t, s); q_1, q_2, x, y) = q_1^{n_1} x$

iii) $M_{n_1, n_2}(e_{01}(t, s); q_1, q_2, x, y) = q_2^{n_2} y$

iv) $q_1^{2n_1} x^2 \leq M_{n_1, n_2}(e_{20}(t, s); q_1, q_2, x, y) \leq q_1^{2n_1+1} x^2 + \frac{q_1^{2n_1} x}{[n_1]_{q_1}}$

v) $q_2^{2n_2} y^2 \leq M_{n_1, n_2}(e_{02}(t, s); q_1, q_2, x, y) \leq q_2^{2n_2+1} y^2 + \frac{q_2^{2n_2} y}{[n_2]_{q_2}}$

Kanıt

i) $e_{00} = t^0 s^0 = 1$ olduğundan Lemma 5.1.2 i) kullanılarak

$$M_{n_1, n_2}(1; q_1, q_2, x, y) = M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \right) = M_{n_1}^x \left(u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \right)$$

eşitliği doğrudur. $M_{n_1}^x$ in doğrusallığından

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(1; q_1, q_2, x, y) &= u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\ &= M_{n_1}^x(1; q_1, x, y) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\ &= u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur tek değişkenli q -MKZ operatör özelliklerinden

$$M_{n_1, n_2}(1; q_1, q_2, x, y) = 1$$

bulunur.

ii) $e_{10} = t^1 s^0 = t$ den Lemma 5.1.2 ii) yardımıyla

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_2}^y \left(M_{n_1}^x(e_{10}; q_1, x, y) \right) \\ &= M_{n_2}^y \left(u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \right) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. $M_{n_2}^y$ in doğrusallığından

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) &= u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} M_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \\ &= M_{n_2}^y(1; q_2, x, y) u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \\ &= u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{n_1} [k_1]_{q_1}}{[n_1 + k_1]_{q_1}} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece

$$M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) = q_1^{n_1} x$$

eşitliği elde edilir.

iii) $e_{01} = t^0 s^1 = s$ için Lemma 5.1.2 i) uygulanarak

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(e_{01}; q_2, x, y) \right) \\ &= M_{n_1}^x \left(u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \right) \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. $M_{n_1}^x$ in doğrusallığından

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) &= u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\
&= M_{n_1}^x(1; q_1, x, y) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\
&= u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{n_2} [k_2]_{q_2}}{[n_2 + k_2]_{q_2}} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerli olup yine tek değişkenli q -MKZ operatör özelliklerinden

$$M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) = q_2^{n_2} y$$

eşitliği kolayca bulunur.

iv) $e_{20} = t^2 s^0 = t^2$ olsun. Lemma 5.1.2 ii) yardımıyla

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_2}^y \left(M_{n_1}^x(e_{20}; q_1, x, y) \right) \\
&= M_{n_2}^y \left(u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{2n_1} [k_1]_{q_1}^2}{[n_1 + k_1]_{q_1}^2} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $M_{n_2}^y$ nin doğrusallığından

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) &= u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} M_{n_2}^y(1; q_2, x, y) \frac{q_1^{2n_1} [k_1]_{q_1}^2}{[n_1 + k_1]_{q_1}^2} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \\
&= M_{n_2}^y(1; q_2, x, y) u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{2n_1} [k_1]_{q_1}^2}{[n_1 + k_1]_{q_1}^2} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} \\
&= u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \frac{q_1^{2n_1} [k_1]_{q_1}^2}{[n_1 + k_1]_{q_1}^2} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1}
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Dolayısıyla

$$q_1^{2n_1} x^2 \leq M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_1, q_2, x, y) \leq q_1^{2n_1+1} x^2 + \frac{q_1^{2n_1} x}{[n_1]_{q_1}}$$

eşitsizliği bulunur.

Son olarak

v) $e_{02} = t^0 s^2 = s^2$ için Lemma 5.1.2 i) den kolayca

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) &= M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(e_{02}; q_2, x, y) \right) \\ &= M_{n_1}^x \left(u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{2n_2} [k_2]_{q_2}^2}{[n_2 + k_2]_{q_2}^2} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \right) \end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. $M_{n_1}^x$ in doğrusallığı kullanılarak

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) &= u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^x(1; q_1, x, y) \frac{q_2^{2n_2} [k_2]_{q_2}^2}{[n_2 + k_2]_{q_2}^2} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\ &= M_{n_1}^x(1; q_1, x, y) u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{2n_2} [k_2]_{q_2}^2}{[n_2 + k_2]_{q_2}^2} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \\ &= u_{n_1, q_1}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_1} x^{k_1} u_{n_2, q_2}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \frac{q_2^{2n_2} [k_2]_{q_2}^2}{[n_2 + k_2]_{q_2}^2} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_2} y^{k_2} \end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. q -MKZ operatörünün özelliklerinden

$$q_2^{2n_2} y^2 \leq M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_1, q_2, x, y) \leq q_2^{2n_2+1} y^2 + \frac{q_2^{2n_2} y}{[n_2]_{q_2}}$$

eşitsizliğine ulaşılır ki bu da kanıtı tamamlar.

Teorem 5.1.1

$q_{1, n_1}, q_{2, n_2} \in (0, 1]$ olmak üzere (q_{1, n_1}) ve (q_{2, n_2}) dizileri,

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{1, n_1}^{n_1} = 1, \quad \lim_{n_1 \rightarrow \infty} \frac{1}{[n_1]_{q_{1, n_1}}} = 0, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{2, n_2}^{n_2} = 1, \quad \lim_{n_2 \rightarrow \infty} \frac{1}{[n_2]_{q_{2, n_2}}} = 0 \quad (5.5)$$

koşullarını sağlasın. Bu durumda her $f \in C(I^2)$ için $\left(M_{n_1, n_2}(f; q_{q_1, n_1}, q_{q_2, n_2}, x, y)\right)$ operatörler dizisi I^2 üzerinde $f(x, y)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar (Doğru and Gupta, 2006).

Kanıt

(5.1) ile tanımlı operatörün doğrusallığı ve Lemma 5.1.3 iv) ve v) gereği

$$\begin{aligned} q_{1, n_1}^{2n_1} x^2 + q_{2, n_2}^{2n_2} y^2 &\leq M_{n_1, n_2}(e_{20}; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) + M_{n_1, n_2}(e_{02}; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) \\ &\leq q_{1, n_1}^{2n_1+1} x^2 + q_{2, n_2}^{2n_2+1} y^2 + \frac{q_{1, n_1}^{2n_1} x}{[n_1]_{q_{1, n_1}}} + \frac{q_{2, n_2}^{2n_2} y}{[n_2]_{q_{2, n_2}}} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ için limite geçilir ve (5.5) kullanılırsa,

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|M_{n_1, n_2}(e_{20} + e_{02}; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) - x^2 + y^2\|_{C(I^2)} = 0$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Lemma 5.1.3 i)-iii) den $n_1, n_2 \rightarrow \infty$ için limit alınarak (5.5) uygulanırsa

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|M_{n_1, n_2}(e_{00}; q_1, q_2, x, y) - 1\|_{C(I^2)} = 0$$

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|M_{n_1, n_2}(e_{10}; q_1, q_2, x, y) - x\|_{C(I^2)} = 0$$

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|M_{n_1, n_2}(e_{01}; q_1, q_2, x, y) - y\|_{C(I^2)} = 0$$

eşitlikleri bulunur. Böylece Teorem 1.1.19 un hipotezleri sağlandığından teoremin kanıtı tamamlanmış olur.

Şimdi de Heping tipli Korovkin Teoremi ve Teorem 5.1.1 birlikte düşünülerek aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.1

$0 < q_{1, n_1}, q_{2, n_2} \leq 1$ olan (q_{1, n_1}) ve (q_{2, n_2}) dizileri için

$$\lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{1,n_1}^{n_1} = c_1 < 1, \lim_{n_1 \rightarrow \infty} q_{1,n_1} = 1, \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{2,n_2}^{n_2} = c_2 < 1, \lim_{n_2 \rightarrow \infty} q_{2,n_2} = 1$$

koşulları sağlansın. Bu durumda her $f \in C(I^2)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_{n_1, n_2}(f) - M_{\infty, \infty}(f)\|_{C(I^2)} = 0, \quad (n_1, n_2 \rightarrow \infty)$$

eşitliği geçerlidir (Doğru and Gupta, 2006).

5.2 İki Değişkenli q -MKZ Operatörlerinin Yaklaşım Hızı

Aşağıda (5.1) ile verilen operatörler dizisinin yaklaşım hızı süreklilik modülü yardımıyla araştırılacaktır.

Teorem 5.2.1

$q_{1,n_1}, q_{2,n_2} \in (0,1]$ olsun. (5.5) i sağlayan (q_{1,n_1}) ve (q_{2,n_2}) dizileri için

$$\delta_{1,n_1} = \left\{ (1 - q_{1,n_1}^{n_1})^2 A^2 + \frac{A q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} \right\}^{1/2}$$

ve

$$\delta_{2,n_2} = \left\{ (1 - q_{2,n_2}^{n_2})^2 A^2 + \frac{A q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}} \right\}^{1/2} \quad (5.6)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\|M_{n_1, n_2}(f; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y) - f(x, y)\|_{C(I^2)} \leq 4\omega(f; \delta_{1,n_1}, \delta_{2,n_2})$$

eşitsizliği sağlanır (Doğru and Gupta, 2006).

Kanıt

$(x, y) \in I^2$ için M_{n_1, n_2} nin doğrusallığı yardımıyla

$$|M_{n_1, n_2}(f; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y) - f(x, y)| = |M_{n_1, n_2}(f(t, s) - f(x, y); q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y)| \quad (5.7)$$

eşitliği geçerlidir. (5.7) ye Lemma 5.1.2 i) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& |M_{n_1, n_2}(f(t, s) - f(x, y); q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y)| = |M_{n_1}^x(M_{n_2}^y(f(t, s) - f(x, y); q_{2, n_2}, x, y))| \\
& = \left| M_{n_1}^x \left(u_{n_2, q_{2, n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \left\{ f \left(x, \frac{q_{2, n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2, n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2, n_2}}} \right) - f(x, y) \right\} \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2, n_2}} y^{k_2} \right) \right| \quad (5.8)
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğe $M_{n_1}^x$ in doğrusallığı, Lemma 5.1.2 ii) ve üçgen eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& |M_{n_1, n_2}(f(t, s) - f(x, y); q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y)| = \left| u_{n_2, q_{2, n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} M_{n_1}^x \left(\left(f \left(x, \frac{q_{2, n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2, n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2, n_2}}} \right) - f(x, y); q_{1, n_1}, x, y \right) \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2, n_2}} y^{k_2} \right) \right| \\
& = \left| u_{n_2, q_{2, n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} u_{n_1, q_{1, n_1}}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \left\{ f \left(\frac{q_{1, n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1, n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1, n_1}}}, \frac{q_{2, n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2, n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2, n_2}}} \right) - f(x, y) \right\} \right. \\
& \quad \left. \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1, n_1}} x^{k_1} \times \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2, n_2}} y^{k_2} \right| \\
& \leq u_{n_1, q_{1, n_1}}(x) u_{n_2, q_{2, n_2}}(y) \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| f \left(\frac{q_{1, n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1, n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1, n_1}}}, \frac{q_{2, n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2, n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2, n_2}}} \right) - f(x, y) \right| \\
& \quad \begin{bmatrix} n_1 + k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1, n_1}} \times \begin{bmatrix} n_2 + k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2, n_2}} x^{k_1} y^{k_2} \\
& = M_{n_1, n_2}(|f(t, s) - f(x, y)|; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) \quad (5.9)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Son ifadede (1.43), (5.2), (5.3) ile M_{n_1, n_2} nin doğrusallığı ve monotonluğu, son olarak Lemma 5.1.2 i), ii) birlikte uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& M_{n_1, n_2}(|f(t, s) - f(x, y)|; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) \leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} M_{n_1, n_2}(|t - x| |s - y|; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{\delta_1} M_{n_1, n_2}(|t - x|; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) + \frac{1}{\delta_2} M_{n_1, n_2}(|s - y|; q_{1, n_1}, q_{2, n_2}, x, y) + 1 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(|t-x||s-y|; q_{2,n_2}, x, y) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1} M_{n_2}^y \left(M_{n_1}^x(|t-x|; q_{1,n_1}, x, y) \right) + \frac{1}{\delta_2} M_{n_1}^x \left(M_{n_2}^y(|s-y|; q_{2,n_2}, x, y) \right) + 1 \right] \\
&= \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} M_{n_1}^x(u_{n_2, q_{2,n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} |t-x| \left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2,n_2}} y^{k_2}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_1} M_{n_2}^y \left(u_{n_1, q_{1,n_1}}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \left| \frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right| \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1,n_1}} x^{k_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_2} M_{n_1}^x \left(u_{n_2, q_{2,n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2,n_2}} y^{k_2} \right) + 1 \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerli olur. $M_{n_1}^x$ ve $M_{n_2}^y$ nin doğrusallığı ve (5.2) kullanılarak

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(|f(t, s) - f(x, y)|; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y) &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} u_{n_1, q_{1,n_1}}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \left| \frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right| \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1,n_1}} x^{k_1} \right. \\
&\quad \times u_{n_2, q_{2,n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2,n_2}} y^{k_2} \\
&\quad + \frac{1}{\delta_1} u_{n_1, q_{1,n_1}}(x) \sum_{k_1=0}^{\infty} \left| \frac{q_{1,n_1}^{n_1}[k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1+k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right| \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1,n_1}} x^{k_1} M_{n_2}^y(1; q_{2,n_2}, x, y) \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta_2} u_{n_2, q_{2,n_2}}(y) \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2}[k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2+k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2,n_2}} y^{k_2} \times M_{n_1}^x(1; q_{1,n_1}, x, y) + 1 \right] \quad (5.10)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizlikte

$$\begin{aligned}
P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) &:= u_{n_1, q_{1,n_1}}(x) \begin{bmatrix} n_1+k_1 \\ k_1 \end{bmatrix}_{q_{1,n_1}} x^{k_1} \\
P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) &:= u_{n_2, q_{2,n_2}}(y) \begin{bmatrix} n_2+k_2 \\ k_2 \end{bmatrix}_{q_{2,n_2}} y^{k_2} \quad (5.11)
\end{aligned}$$

tanımlamaları yapıp, $M_{n_1}^x(1; q_{1,n_1}, x, y) = 1$, $M_{n_2}^y(1; q_{2,n_2}, x, y) = 1$, ifadeleriyle (5.2), (5.3) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(|f(t, s) - f(x, y)|; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y) &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left| \frac{q_{1,n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right| P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right. \\
&\times \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) + \frac{1}{\delta_1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \left| \frac{q_{1,n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right| P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \\
&\left. + \frac{1}{\delta_2} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) + 1 \right] \quad (5.12)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\left| \frac{q_{1,n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right| P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) &= \left\{ \left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right)^2 P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right\}^{1/2} \left\{ P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right\}^{1/2} \\
\left| \frac{q_{2,n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right| P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) &= \left\{ \left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right)^2 P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) \right\}^{1/2} \left\{ P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) \right\}^{1/2}
\end{aligned}$$

ifadeleri dikkate alınıp (5.12) ye Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
M_{n_1, n_2}(|f(t, s) - f(x, y)|; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y) &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left\{ \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right)^2 P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right\}^{1/2} \right. \\
&\times \left\{ \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right)^2 P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) \right\}^{1/2} \\
&\times \left\{ \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) \right\}^{1/2} \\
&\left. + \frac{1}{\delta_1} \left\{ \sum_{k_1=0}^{\infty} \left(\frac{q_{1,n_1}^{n_1} [k_1]_{q_{1,n_1}}}{[n_1 + k_1]_{q_{1,n_1}}} - x \right)^2 P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k_1=0}^{\infty} P_{n_1, k_1, q_{1,n_1}}(x) \right\}^{1/2} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\delta_2} \left\{ \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{q_{2,n_2}^{n_2} [k_2]_{q_{2,n_2}}}{[n_2 + k_2]_{q_{2,n_2}}} - y \right)^2 P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k_2=0}^{\infty} P_{n_2, k_2, q_{2,n_2}}(y) \right\}^{1/2} + 1 \quad (5.13)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (5.13) te tek değişkenli q -MKZ operatörünün özellikleri ve

$$\begin{aligned} \varphi_{n_1,2}(x) &= M_{n_1}((t-x)^2; q_{1,n_1}, x) \leq (1 - q_{1,n_1})^2 x^2 + \frac{x q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} \\ \varphi_{n_2,2}(y) &= M_{n_2}((s-y)^2; q_{2,n_2}, y) \leq (1 - q_{2,n_2})^2 y^2 + \frac{y q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}} \end{aligned} \quad (5.14)$$

ifadeleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned} M_{n_1, n_2}(|f(t, s) - f(x, y)|; q_{1,n_1}, q_{2,n_2}, x, y) &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} \{M_{n_1}((t-x)^2; q_{1,n_1}, x)\}^{1/2} \right. \\ &\quad \{M_{n_2}((s-y)^2; q_{2,n_2}, y)\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_1} \{M_{n_1}((t-x)^2; q_{1,n_1}, x)\}^{1/2} \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_2} \{M_{n_2}((s-y)^2; q_{2,n_2}, y)\}^{1/2} + 1 \right] \\ &= \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} \{\varphi_{n_1,2}(x)\}^{1/2} \{\varphi_{n_2,2}(y)\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_1} \{\varphi_{n_1,2}(x)\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_2} \{\varphi_{n_2,2}(y)\}^{1/2} + 1 \right] \\ &\leq \omega(f; \delta_1, \delta_2) \left[\frac{1}{\delta_1 \delta_2} \left\{ (1 - q_{1,n_1})^2 x^2 + \frac{x q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} \right\}^{1/2} \left\{ (1 - q_{2,n_2})^2 y^2 + \frac{y q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}} \right\}^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\delta_1} \left\{ (1 - q_{1,n_1})^2 x^2 + \frac{x q_{1,n_1}^{2n_1}}{[n_1]_{q_{1,n_1}}} \right\}^{1/2} + \frac{1}{\delta_2} \left\{ (1 - q_{2,n_2})^2 y^2 + \frac{y q_{2,n_2}^{2n_2}}{[n_2]_{q_{2,n_2}}} \right\}^{1/2} + 1 \right] \end{aligned} \quad (5.15)$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Son olarak (5.7) ve (5.15) ifadeleri birlikte düşünülüp, $(x, y) \in I^2$ için maksimum alınarak δ_1 ve δ_2 sayıları (5.6) daki gibi seçilirse $\delta_1 = \delta_{1,n_1}$ ve $\delta_2 = \delta_{2,n_2}$ olacak şekilde

$$\|M_{n_1, n_2}(f(t, s); q_{1,n_1}, q_{2,n_2}) - f\|_{C(I^2)} \leq 4\omega(f; \delta_1, \delta_2)$$

eşitsizliğine ulaşılır. Böylece kanıt tamamlanmış olur.





6.BÖLÜM

SONUÇ VE ÖNERİLER

Tez bir ve iki değişkenli MKZ operatörleri ve q -modifikasyonunu içeren önemli bir çalışmadır. Tez hazırlanırken birçok yerli ve yabancı araştırmacının yaptığı çalışmalar incelenmiş ve yaklaşım durumları birbiriyle karşılaştırılabilinecek olanlar tercih edilmeye çalışılmıştır. Özellikle tek değişkenli MKZ operatörleri ve q -MKZ operatörleri için yapılan çalışmaların birçoğunun iki boyutlu durumlarının henüz çalışılmamış olduğunu ortaya koyması açısından tez oldukça yararlı bir çalışma olmuştur. Bu anlamda tezde yer vermediğimiz çalışmalar da dikkate alınarak bu operatöre ait modifikasyonların q analoğu ve pq analoğunun oldukça önemli bir çalışma konusu olabileceği düşüncesindeyiz.



KAYNAKLAR

- Abel U** (1995) The moments for the Meyer-König and Zeller operators. *J. Approx. Theory*, 82: 352-361.
- Adıgüzel H** (2012) Ağırlıklı Uzaylarda Bazı Lineer Pozitif Operatörler. *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara, 62 s.
- Alkemade J A H** (1984) The second moment for the Meyer-König and Zeller operators. *J. Approx. Theory*, 40: 261-273.
- Altomare F and Campiti M** (1994) *Korovkin-type Approximation Theory and its Applications*. de Gruyter Studies in Mathematics, 17. Walter de Gruyter, Berlin, New York, xii+627 s.
- Andrews G E, Askey R and Roy R** (1999) *Special Functions*. Cambridge University Press, Cambridge, 245 s.
- Barbosu D** (2000) Some generalized bivariate Bernstein operators. *Math. Notes (Miskole)*, 1: 3-10.
- Becker M and Nessel R J** (1978) A global approximation theorem for Meyer-König and Zeller operators. *Mathematische Zeitschrift*, 160: 195-206.
- Canatan R** (2008) q -Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Yaklaşım Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara, 42 s.
- Chen W** (1986) On the integral type Meyer-König and Zeller operators. *Approx. Theory and its Applic.*, 2 (3): 7-18.
- Cheney E W and Sharma A** (1964) Bernstein power series. *Canad. J. Math.* 16: 241-253.
- Cheney E W** (1966) *Introduction to Approximation Theory*. McGraw-Hill, New York.
- Chlodowsky I** (1937) Sur le Developpement Des Fonctions Definies Dans Un Intervalle Infini en Series De Polynomes de M. S. Bernstein. *Compositio. Math.*, 4: 380-393.
- DeVore R A** (1972) *The Approximation of Continuous Functions by Positive Linear Operators*. Lecture Notes in Mathematics, 293, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.
- DeVore R A and Lorentz G G** (1993) *Constructive Approximation*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 303, Springer, Berlin.
- Ditzian Z and Totik V** (1987) *Moduli of Smoothness*. Springer-Verlag, New York.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Doğru O and Duman O** (2006) Statistical Approximation of Meyer-König and Zeller Operators Based on q -integers. *Publ. Math. Debrecen*, 68 (1-2): 199-214.
- Doğru O and Gupta V** (2006) Korovkin-type Approximation Properties of Bivariate q -Meyer-König and Zeller Operators. *Colcolo*, 43: 51-63.
- Ereñcin A, Ince H G and Olgun A** (2012) A Class of Linear Positive Operators in Weighted Spaces. *Math. Slovaca*, 62 (1): 63-76.
- Freud G** (1959) *Sui Procedimenti Lineari D'Approssimazione*. Atti. Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nauk 26 (8): 641-643.
- Gadjiev A D** (1976) On P. P. Korovkin Type Theorems. *Mathem. Zametki*, 20 (5): 995-998.
- Goodman T N T, Oruç H and Phillips G M** (1999) Convexity and generalized Bernstein polynomials. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 42 (2): 179-190.
- Guo S** (1989) On the rate of convergence of integrated Meyer-König and Zeller operators for functions of bounded variation. *J. Approx. Theory.*, 56: 245-255.
- Gupta V** (2002) A note on Meyer-König and Zeller operators for functions of bounded variation. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, 18 (3): 99-102.
- Gupta V and Rassias M T** (2019) *Moments of Linear Positive Operators and Approximation*. Springer Briefs in Mathematics, Springer, Geneva.
- Hacısalıhoğlu H ve Hacıyev A** (1995) *Doğrusal Pozitif Operatör Dizilerinin Yakınsaklığı*. A.Ü.F.F. Döner Sermaye İşletmesi Yayınları, Ankara, 1-71.
- Heping W** (2005) Korovkin-type theorem and application. *J. Approx. Theory*, 132 (2): 258-264.
- Heping W** (2007) Properties of convergence for the q -Meyer-König and Zeller operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 335 (2): 1360-1373.
- Hölzle G E** (1977) *Quantitative Untersuchungen zur Approximation durch lineare positive Operatoren*. Dissertation, Stuttgart.
- Hölzle G E** (1980) On the degree of approximation of continuous functions by a class of sequences of linear positive operators. *Indag. Math.* 42: 171-181.
- İspir N** (2001) On modified Baskakov operators on weighted spaces. *Turk. J. Math.*, 26 (3): 355-365.
- Kirov G H** (1992) A generalization of the Bernstein polynomials. *Math. Balkanica*, 6 (2): 147-153.
- Korovkin P P** (1960) *Linear Operators and Approximation Theory*. Hindustan Publishing Corb. Delhi, India.
- Lorentz G G** (1953) *Bernstein Polynomials*, Toronto University, Toronto.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Lupaş A** (1987) A q -analogue of the Bernstein operator. *In Seminar on Numerical and Statistical Calculus*, University of Cluj-Napoca, 9: 85-92.
- Lupaş A and Müller M W** (1970) Approximation properties of the M_n -operators. *Aequationes Math.*, 5: 19-37.
- Mahmudov N and Sabancıgil P** (2012) A q -analogue of the Meyer-König and Zeller Operators. *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.* (2), 35 (1): 39-51.
- Mamedov R G** (1959) *Asymptotic Approximation of Differentiable Functions with Linear Positive Operators*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 128: 471-474.
- Meyer-König W and Zeller K** (1960) Bernsteinsche Potenzreihen. *Studia Math.*, 19: 89-94.
- Müller M W** (1967) *Die Folge der Gammaoperatoren*, Dissertation, Stuttgart.
- Müller M.** (1968) *Von Links Schräge Approximation durch Bernsteinche Potenzreihen*. Bul. Inst. Politehn. Iaşi 14 (18): 1-2, 89-92.
- Ostrowska S** (2006), On the Lupaş q -analogue of the Bernstein operator. *Rocky Mountain J. Math.* 36 (5): 1615-1629.
- Pecaric J E, Proschan F and Tong Y L** (1992) *Convex functions. Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press Inc., London, 467 pp.
- Phillips G M** (1997) Bernstein polynomials based on the q -integers. *Ann. Numer. Math.*, 4: 511-518.
- Phillips G M** (2003) *Interpolation and Approximation by Polynomials*. CMS Books Math., Springer-Verlag, New York, 87-88.
- Radu P** (2004) *Approximation Theory Using Positive Operators*. Birkhauser, Boston, 162-163.
- Rempulska L and Skorupka M** (2006) On modified Meyer-König and Zeller operators of functions of two variables. *Archivum Math.*, 42: 273–284.
- Rempulska L and Skorupka M** (2007) Approximation by generalized MKZ-operators in polynomial weighted spaces. *Anal. Theory Appl.*, 23: 64-75
- Rempulska L and Tomczak K** (2006) On certain modified Meyer-König and Zeller operators. *Turkish J. Math.*, 30 (2): 117-127.
- Rivlin T** (1969) *An Introduction to the Approximation of Functions*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachusetts.
- Rudin W** (1991) *Functional Analysis*. Kingsport Press, Inc. 6p, United States of America, 1-100.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Schurer F** (1965) On linear positive operators in approximation theory. *Doctoral thesis*, Uitgeverij Waltman, Delft.
- Shisha O and Mond B** (1968) The degree of convergence of sequences of linear positive operators. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, U.S.A., 60: 1196-1200.
- Sikkema P C** (1959) Über den Grad der Approximation mit Bernstein-Polynomen. *Num. Math.*, 1: 221-239.
- Sikkema P C** (1970a) On some linear positive operators. *Indag. Math.*, 32: 327-337.
- Sikkema P C** (1970b) On the asymptotic approximation with operators of Meyer-König and Zeller. *Indag. Math.*, 32: 428-440.
- Singh S P** (1982) An estimate on the M_n -operators. *Boll. Un. Mat. Ital. A 1* (6): 109-113.
- Stancu D D** (1972) A new class of uniform approximation polynomial operators in two and several variables. *Proceedings of the conference on constructive theory of functions*, Budapest, Akademiai Kiado, 443-445.
- Szasz O** (1950) Generalization of Bernstein's Polynomials to The Infinite Interval. *Journ. of Research of The Nat. Bureau of Stand*, 45: 239-245.
- Şimşek E** (2019) Yaklaşım Teorisinde q -pozitif Lineer Operatör Dizilerinin Genelleştirilmesi. *Doktora Tezi*, Mersin Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Mersin, 82 s.
- Terzioğlu T** (1998) *Fonksiyonel Analizin Yöntemleri*. Matematik Vakfı Yayın No:9, Ankara, 97-99.
- Thomas G B, Weir M D and Hass J, Giordano F R** (2005) *Thomas' Calculus 11th Edition*. Pearson Education – Addison-Wesley.
- Timan A F** (1960) *Theory of Approximation of Functions of Real Variable*. Moscow (Russian).
- Timan A F** (1963) *Theory of Approximation of Functions of Real Variable*. New York.
- Trif T** (2000) Meyer-König ve Zeller operators based on q -integers. *Rev. Anal. Numer. Theory Approx.*, 29: 221-229.
- Trif T** (2003) An elementary proof of the preservation of Lipschitz constants by the Meyer-König and Zeller operators. *JIPAM. J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 4 (5): 90.
- Volkov V I.** (1957) On the convergence of sequence of linear positive operators in the space of continuous functions of two variables. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.)*, 115: 17-19.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Yıldız E** (2009) İki Değişkenli q -Meyer-König ve Zeller Operatörlerinin Korovkin Tipi Yaklaşım Özellikleri. *Yüksek Lisans Tezi*, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Ankara, 82 s.
- Walk H** (1970) *Approximation unbeschränkter Funktionen durch lineare positive Operatoren*. Habilitationsschrift, Stuttgart.
- Walk H** (1980) Probabilistic methods in the approximation by linear positive operators. *Indagationes Mathematicae.*, 83 (4): 445-455.
- Wang H** (2007) Voronovskaya-type formulas and saturation of convergence for q -Bernstein polynomials for $0 < q < 1$. *J. Approx. Theory*, 145 (2): 182-195.
- Whittaker E T and Watson G N** (1927; reprint 1978) *A course of Modern Analysis*. Cambridge Univ. Press, London/New York.



ÖZGEÇMİŞ

Gürel BOZMA, 1983' te Zonguldak' ta doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Zonguldak' ta tamamladıktan sonra 2001 yılında başladığı Uludağ Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki üniversite öğrenimini 2005 yılında tamamlayarak mezun oldu. 2018 yılında ZBEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans programına kabul edildi ve halen bu programı sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Fatih Mahallesi Park Sokak Örnekevler B-1 Blok D:6 Kozlu/ZONGULDAK

Tel : 0(505)7949895

E-posta : gurrel@gmail.com

