



T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR $(LCS)_n$ – MANİFOLDUNUN KONTAK PSEUDO-SLANT
ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMİT ÇELİK

HAZİRAN

ÜMİT ÇELİK

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HAZİRAN 2023

**BİR $(LCS)_n$ – MANİFOLDUNUN KONTAK PSEUDO-SLANT
ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE**

Ümit ÇELİK

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Süleyman DİRİK

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HAZİRAN 2023

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Ümit ÇELİK tarafından hazırlanan “Bir $(LCS)_n$ – Manifoldunun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Süleyman DİRİK

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Tuğba MERT

Matematik Anabilim Dalı, Cumhuriyet Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 21/06/2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Ümit ÇELİK

21/06/2023

BİR $(LCS)_n$ -MANİFOLDUNUN KONTAK PSEUDO-SLANT
 ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE
 (Yüksek Lisans Tezi)

Ümit ÇELİK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
 FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2023

ÖZET

Yüksek lisans tezi olarak oluşturulan bu çalışma beş bölüm içermektedir. İlk kısımda, literatür özetine yer verilmiş olup, konunun güncelliği ve tez konusuyla ilgili yapılan araştırmalardan bahsedilmiştir. İkinci bölümde, temel tanımlar ve teoremler açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, Lorentzian Consircular Structure manifoldlarla ilgili tanımlar, teoremler ve sonuçlar sunulmuştur. Dördüncü kısımda, $(LCS)_n$ manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldlarının bölünmesiyle ilgili distribüsyonlar, integrallenebilirlik ve geodeziklik gibi geometrik özellikler tanımlanmıştır. Aynı zamanda, $(LCS)_n$ manifoldunun kontak pseudo-slant çarpımı üzerine bazı sonuçlar elde edilmiştir. Son olarak, beşinci bölümde, ortaya çıkan sonuçlar ve öneriler tartışılmıştır.

Sayfa Adedi	: 53
Anahtar Kelimeler	: Hemen hemen kontak metrik manifold, Kontak metrik manifold, Slant aç, Slant altmanifold, Proper Pseudo-slant altmanifold ve Pseudo-slant altmanifold.
Danışman	: Doç. Dr. Süleyman DİRİK

ON THE GEOMETRY OF CONTACT PSEUDO-SLANT SUBMANIFOLDS IN AN
 $(LCS)_n$ -MANIFOLD

(M. Sc. Thesis)

Ümit ÇELİK

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2023

ABSTRACT

This study, which was created as a master's thesis, includes five chapters. In the first part, a summary of the literature is given, the topicality of the subject and the researches on the thesis subject are mentioned. In the second part, basic definitions and theorems are explained. In the third chapter, definitions, theorems and results related to Lorentzian Consircular Structure manifolds are presented. In the fourth part, geometric properties such as distributions, integrability and geodesicity related to the division of the contact pseudo-slant submanifolds of the $(LCS)_n$ manifold are defined. Also, some results are obtained on the contact pseudo-slant product of the $(LCS)_n$ manifold. Finally, in the fifth chapter, the resulting results and recommendations are discussed.

Number of pages : 53

Keywords : Almost contact metric manifold, Contact metric manifold, Slant angle, Slant submanifold, Proper-pseudo-slant submanifold and Pseudo-slant submanifold.

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Süleyman DİRİK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmamın danışmanlığını üstlenerek bana bu tezi hazırlama imkânını sağlayan, çalışma ve araştırmalarımın her aşamasında beni yönlendiren, öneri, bilgi ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen, çok değerli hocam ve ayrıca tez danışmanım Doç. Dr. Süleyman DİRİK'e en derin minnettarlıklarımı sunar ve içtenlikle teşekkür ederim. Ayrıca, çalışmalarımın kaynaklarından faydalandığım literatüre tez konum ile ilgili çok sayıda çalışma kazandıran çok değerli danışman hocam ile Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN ve Doç. Dr. Ümit YILDIRIM hocalarıma şükranlarımı sunarım. Tez savunmama iştirak ederek değerli görüş ve önerilerini sunan Doç. Dr. Tuğba MERT'e ve beraber çalışmalarımızı yürüttüğüm sınıf arkadaşım Vezir ÇETİN ile sabırları için, aile fertlerim eşim ve çocuklarıma içtenlikle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1. Manifoldlar	5
2.2. Altmanifoldlar.....	20
3. LORENTZIAN CONCIRCULAR STRUCTURE MANİFOLDLAR	26
3.1. Lorentzian Conircular Structure Manifoldlar	26
4. $(LCS)_n$ MANİFOLDUNUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARI .	35
4.1. Bir $(LCS)_n$ -Manifoldunun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları	35
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	49
KAYNAKLAR	50
ÖZGEÇMİŞ	53

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\tilde{\nabla}$	Levi-Civita konneksiyonu
$\tilde{\nabla}_X$	X e göre kovaryant türev operatörü
$\chi(\tilde{M})$	Vektör alanlarının cümlesi
$T_{\tilde{M}}(p)$	p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$T_{\tilde{M}}^*(p)$	p noktasındaki kotanjant vektörlerinin cümlesi
M	Altmanifold
λ	Sabit
$f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$	Her mertebede diferansiyellenebilir fonksiyon
TM	M altmanifoldunun tanjant demeti
$T^\perp M$	M altmanifoldunun bütün normal vektörlerinin demeti
D	Distribüsyon
D_θ	θ açılı slant distribüsyon
$D^\perp$	Anti-invaryant distribüsyon
(U, φ)	Harita
$\{U_\alpha\}$	$\tilde{M}$ nin açık örtüsü
$\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$	Atlas (Koordinat komşuluğu)
V_p	p noktasındaki tanjant vektör
$\chi(M)$	Vektör alanlarının cümlesi
V	Reel sayılar cisminde tanımlı vektör uzayı
V^*	V nin dual uzayı

$C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$	$\tilde{M}$ Üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
$[\]$	Lie operatörü
$X(f)$	f fonksiyonunun X e göre türevi
f^*	f fonksiyonunun türev dönüşümü
$\tilde{M}$	Diferansiyellenebilir manifoldlar
T	Torsiyon tensörü
$\tilde{R}$	Riemann eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
S	(2,0) tipinde Ricci tensörü
ρ	Skaler eğrilik fonksiyonu
$K(\pi)$	π düzleminin kesit eğriliği
h	İkinci temel form
∇h	Üçüncü temel form
H	Ortalama eğrilik vektörü
A	Şekil operatörü
J	Kompleks yapı
φ	Tensör alanı
ξ	Vektör alanı
η	1-form (ξ nin duali)
g	Riemann metriği
(φ, ξ, η)	Hemen hemen kontak yapı
(φ, ξ, η, g)	Hemen hemen kontak metrik yapı
$\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$	$(2n + 1)$ -boyutlu, hemen hemen kontak metrik manifold
$\otimes$	Tensör çarpımı

$\oplus$	Direkt toplam
Φ	Temel 2-form
TX	$X \in \chi(M)$ için altmanifoldun teğet bileşeni
NX	$X \in \chi(M)$ için altmanifoldun normal bileşeni
tV	$V \in \chi^\perp(M)$ için altmanifoldun teğet bileşeni
nV	$V \in \chi^\perp(M)$ için altmanifoldun normal bileşeni
$\tilde{R}$	$\tilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü
R	M nin Riemann eğrilik tensörü
θ_D	D distribüsyonunun slant açısı
ω_1	Anti-invaryant distribüsyon üzerindeki projeksiyon
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi

Kısaltmalar

Açıklama

A.Ü.

Amasya Üniversitesi

1. GİRİŞ

Geometri ile ilgili bilinen ilk bilgiler Mezopotamya medeniyetleri'ne aittir. Mezopotamya uygarlığından yapıların günümüze yetişmemesinin bir nedeni Mısırlıların yapılarını taştan meydana getirirken Mezopotamya uygarlıklarının çamurdan yapılma briket kullanmalarındır. Ancak Mezopotamya uygarlığının ulaştığı matematik seviyesini gösteren daha çok materyale sahibiz. Bunun nedeni ise Mezopotamyalıların geometri ve matematik üzerine eserlerini kilden tabletler üzerine not etmeleridir. Örneğin antik-Yunan'dan çok daha önceleri Mezopotamya uygarlıklarının Pisagor bağıntısını bildiklerini bu tabletlerden öğrenebiliyoruz.

Gerek eski Mısır uygarlığı ve gerek eski Mezopotamya uygarlıklarının geometrisi daha çok pratik gereklerden ortaya çıkmış ve bunun ötesine geçememişti. Bu nedenle bugün anladığımız anlamda geometri biliminin başlangıcı antik Yunan'a dayandırılmaktadır. Bu geometri eski Mısır ve Mezopotamya uygarlıklarının geometrisiyle karşılaştırıldığında görülmektedir ki bu geometri daha pür ve daha az işleme dayanır. İlk geometrik çalışmaların Mısır ve Mezopotamya'da yapıldığı düşünülmektedir. Bu antik uygarlıklar, özellikle tapınak ve piramit gibi yapıları inşa ederken geometriyi kullanmışlardır. Örneğin, piramitlerin yapısında dik açılarının kullanımı ve üçgen formlarının sıklıkla kullanımı dikkat çekicidir.

Geometri, Yunan matematiği açısından da büyük bir öneme sahiptir. Antik Yunanlılar, özellikle Öklid'in "Elementler" adlı kitabıyla geometri alanında önemli bir ilerleme kaydettiler. Bu kitap, bugün bile matematiksel düşüncenin temel taşlarından biri olarak kabul edilmektedir. Antik Yunan matematikçileri ayrıca, şekillerin hacmini ve alanını hesaplamak için farklı yöntemler geliştirdiler.

Orta Çağ'da, Arap matematikçileri, geometrinin gelişimine katkıda bulundular. Özellikle, Al-Khwarizmi'nin "Kitab al-Jabr ve'l-Muqabala" adlı kitabı, cebir ve geometri arasındaki bağlantıyı kurduğu için büyük bir önem taşımaktadır.

Modern geometri, 17. yüzyılda Fransız matematikçi René Descartes tarafından geliştirilen analitik geometri ile başlamıştır. Analitik geometri, geometrik nesneleri cebirsel ifadelerle temsil etmeyi mümkün kıldı. Bu da, geometri ve cebir arasındaki ayrımı ortadan kaldırdı ve matematiğin daha geniş bir alanını oluşturan cebirsel geometriyi ortaya çıkardı.

Son yüzyılda, geometrinin önemi büyük ölçüde artmıştır. Matematiksel analiz, teorik fizik, bilgisayar grafikleri ve tasarım gibi alanlarda geometri önemli bir rol oynamaktadır. Ayrıca, topoloji, diferansiyel geometri ve sayısal geometri gibi yeni alt disiplinler geliştirilmiştir.

Diferansiyel geometri, matematikte, uzayların eğrilerini ve yüzeylerini tanımlamak için kullanılan bir alandır. Manifoldlar teorisi ise, uzayların topolojik yapılarını ve özelliklerini inceler. Manifoldlar, matematiksel nesnelerdir ve herhangi bir yerel olarak Öklid uzayına benzerler, ancak global olarak bu özellikleri göstermeyebilirler. Örneğin, dünya yüzeyi gibi bir iki boyutlu manifold, yerel olarak bir düzlem gibi görünebilir, ancak global olarak farklı topolojik olarak farklıdır.

Diferansiyel geometri, manifoldların eğriliği ve diğer geometrik özelliklerini inceler. Bu alanda, uzayın eğriliği, büyüklüğü, uzunluğu, açısı, kıvrımları gibi geometrik özellikler, matematiksel tekniklerle ölçülür. Özellikle, eğri ve yüzeylerin matematiksel tanımlamaları, fonksiyonlar, vektörler ve tensörler kullanılarak yapılır. Diferansiyel geometri, bu özelliklerin daha geniş bir matematiksel ve fiziksel bağlama yerleştirilmesine de yardımcı olur.

Manifoldlar teorisi, manifoldların topolojik özelliklerini ve bunların altında yatan matematiksel yapıları inceler. Topoloji, nesnelerin uzayda nasıl yerleştirildiği ve şekillerinin değiştirilip değiştirilemeyeceği gibi özelliklerle ilgilenir. Manifoldlar teorisi, manifoldların topolojik olarak eşdeğer olup olmadığını belirlemek için matematiksel araçlar kullanır. Bu teori, geometrik ve fiziksel problemlerin çözümü için matematiksel çerçeve sağlar.

Diferansiyel geometri ve manifoldlar teorisi, matematiksel fizik, matematiksel analiz, topoloji, cebir ve geometrinin birçok alt disipliniyle ilişkilidir. Özellikle, genel görelilik gibi alanlarda uzay ve zamanın matematiksel tanımlanması için önemlidirler.

Lorentzian concircular structure manifoldlar, matematiksel olarak tanımlanmış bir tür manifolddur. Bu manifoldlarda, her bir noktanın yakınında, bir Lorentzian metriği ve bir concircular yapı tanımlanabilir. Lorentzian metrik, özel görelilik teorisinde önemli bir rol oynayan bir matematiksel nesnedir. Bu metrik, uzay ve zamanın birleşik yapısını tanımlar ve genel görelilik teorisinde Einstein denklemlerinin çözümü için gereklidir. Concircular yapı ise, manifolddaki her bir noktanın yakınında, bir tanjant uzayı vardır ve bu tanjant

uzayında, bir concircular yapı tanımlanabilir. Bu yapı, her bir noktada, bir açının belirlenebileceği bir özelliktir. Lorentzian concircular structure manifoldlar, matematiksel fizikte kullanılan birçok konuya uygulanabilir. Örneğin, özel görelilik teorisindeki Lorentzian metrikleri ve eğriliği tanımlamak için kullanılabilirler. Ayrıca, bu yapılar, elektromanyetizma, kuantum mekaniği, kozmoloji ve diğer fiziksel teorilerde de kullanılır. Lorentzian concircular structure manifoldlar, matematiksel analiz, diferansiyel geometri ve cebir gibi matematik dallarında çalışan araştırmacılar tarafından incelenir. Bu alanlarda, bu manifoldlara özgü matematiksel özellikler, özellikle Lorentzian metrik ve concircular yapılar, matematiksel yapıların anlaşılmasına ve uygulanmasına yardımcı olur.

Chen, 1990 yılında invariant ve anti-invariant manifoldların genelleştirilmiş olan slant altmanifoldların geometrisi üzerine araştırmalar yapmaya başlamıştır. Chen, hemen hemen Hermityen manifoldların slant altmanifold kavramını ortaya atmıştır (Chen, 1990a; Chen, 1990b). Daha sonra, Lotta hemen hemen kontak metrik manifoldların slant altmanifoldlarını tanımladı (Lotta, 1996). Cabrerizo ve arkadaşları, bir Sasakian manifoldunun slant altmanifoldlarını inceleyerek birçok sonuca ulaşmışlardır (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 1999; Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 2000).

Papaghuic 2009 yılında semi-slant altmanifoldlar ve almost hermityen manifoldlarda çalışmalar yaptı ve birbirinden ilginç sonuçlar elde etti (Papaghuic, 1994). Cabrerizo ve arkadaşları Sasakian manifoldlarının ve K-kontağının slant altmanifoldlarını araştırıp karakterize ederek birkaç örnek literatüre kazandırdı. Cabrerizo ve arkadaşları bir hemen-hemen kontak metrik manifoldda bi-slant altmanifold tanımlayıp inceleyerek pseudo-slant altmanifold kavramını verdi (Cabrerizo ve arkadaşları, 1999; Cabrerizo ve arkadaşları, 2000). Khan ve arkadaşları pseudo-slant altmanifoldları araştırdılar (Khan ve Khan, 2007). Daha sonra, De ve arkadaşları bir Sasakian manifoldunun Pseudo-slant altmanifoldlarını inceledi ve karakterize etti (De, ve Sarkar, 2004). 2013 yılında M. Atçeken $(LCS)_n$ manifoldlarının kontak pseudo-slant altmanifoldları üzerine çalışmalar yapmaya başlamıştır (Atçeken ve Hui, 2013). S. Dirik doktora çalışması olan “*Pseudo-Slant Altmanifoldların Geometrisi Üzerine*” ile bu alandaki literatüre ciddi manada katkı sağlamıştır. Son zamanlarda S. Dirik, M. Atçeken ve Ü. Yıldırım farklı manifoldlarda slant ve pseudo-slant altmanifoldları ile ilgili çok sayıda çalışmaları bulunmaktadır (Atçeken ve Dirik, 2014; Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2017; Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018; Dirik ve Yıldırım, 2022; Dirik ve Çelik, 2022).

Shaikh yakın zamanda Lorentzian concircular structure manifoldları $(LCS)_n$ -manifoldlar kavramını tanıttı (Shaikh, 2003; Shaikh ve Bahishya, 2005; Shaikh, Kim ve Hui 2011). Mihai ve Chen, Matsumoto tarafından ortaya atılan Lorentzian para Sasakian manifoldları kavramını genelleştiren bir örnek kurdu (Matsumoto ve Mihai, 1988; Mihai ve Chen, 2009). Ardından, Shaikh ve Baishya $(LCS)_n$ -manifoldlarının genel görelilik kuramı ve kozmolojide nasıl kullanılabileceğini incelediler (Shaikh ve Bahishya, 2005). Ayrıca, $(LCS)_n$ - manifoldlar Shaikh, Kim ve Hui tarafından incelenmiştir (Shaikh, Kim ve Hui, 2011).

Bu bilgiler ışığında, $(\tilde{M}, g)$ lorentzian manifoldu ile birlikte birim time-like vektör alanı ξ , η 1-form, φ (1,1)-tipinde tensör alanı olmak üzere $(\tilde{M}, g)$ ye Lorentzian concircular structure manifold adı verilir. Yukarıdaki çalışmalar doğrultusunda, bu tezde $(LCS)_n$ - manifoldlarının kontak pseudo-slant alt manifoldlarının diferansiyel geometrisi çalışılmıştır. $(LCS)_n$ -manifoldunun alt manifoldlarının kontak pseudo slant altmanifold olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilerek bir $(LCS)_n$ - manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldların tanımından elde edilen distribüsyonların integrallenebilirliği için gerekli ve yeterli koşullar araştırılmıştır. Son olarak, distribüsyonların geodeziklik kavramları tanımlanarak, $(LCS)_n$ - manifoldunun kontak pseudo-slant çarpımı incelenerek bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ek olarak, kontak pseudo-slant çarpımı, D_θ - total geodezik, $D^\perp$ - total geodezik ile mixed –total geodezik kavramları tanımlanmıştır. Daha sonra tezimizi, hemen hemen kontak metrik yapıya sahip $\mathbb{R}^{11}$ 'de dört boyutlu kontak pseudo-slant altmanifold örneği vererek destekliyoruz.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Manifolddar

Bu bölümde, ilk olarak koordinat komşuluğu kavramı sunulacak ve ardından topolojik manifold tanımı yapılacaktır. Akabinde manifold üzerindeki diferansiyellenebilir atlasın tanımı yapıldıktan sonra, r . mertebeden diferansiyellenebilir manifold kavramı anlatılacak ve manifold üzerinde diferansiyellenebilir yapılar tanımlanacaktır. Manifolddar üzerinde tensör, Lie braket, diferansiyel form, vektör alanı, kovaryant türev, türev dönüşümü ve diğer kavramlar sunulacaktır.

2.1.1. Tanım Bir Hausdorff uzayı X ve $U \subset X$ açık kümesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\varphi: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

homeomorfizmi X üzerinde *harita* ya da *n -boyutlu koordinat sistemi* denir. U açık cümlesine ise, *koordinat bölgesi* ya da *φ haritasının koordinat komşuluğu* adı verilir. Bu harita (U, φ) ile gösterilir. Şayet, $x \in U$ ise

$$\varphi(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

şeklindedir. Buradaki $x_1, x_2, \dots, x_n$ reel sayılarına ise φ haritası üzerinde x noktasının *koordinatları* adı verilir (Aslım, 1988; Şahin, 2012).

2.1.2. Tanım $\tilde{M}$ boş olmayan bir cümle olsun. $\tilde{M}$ nin herbir noktasının E^n e ya da E^n nin bir U açık alt cümlesine homeomorf olacak şekilde bir koordinat komşuluğu varsa, $\tilde{M}$ manifolduna *n -boyutlu topolojik manifold* adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.3. Tanım $\mathbb{R}^n$ uzayına ait bir U açık cümlesi üzerinde tanımlanan reel değere sahip bir fonksiyon f olsun. Şayet f fonksiyonunun k . mertebeden kısmi türevi var ve $k \leq r$ olmak koşulu ile sürekli ise f fonksiyonuna *r . mertebeden diferansiyellenebilirdir* adı verilir. $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile sembolize edilir. Şayet $\forall r \in \mathbb{Z}^+$ için $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ oluyorsa f fonksiyonu

diferansiyellenebilir denir. Bu fonksiyon $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile sembolize edilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.4. Tanım $\tilde{M}$ bir topolojik manifold olmak üzere $\tilde{M}$ nın açık bir örtüsü $\{U_\alpha\}$ ile tanımlansın. U_α açık cümlesinin α indisinin cümlesi A olmak koşuluyla $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılabilir. Eğer E^n içindeki her U_α , bir homeomorfizm φ_α ile homeomorf ise, o zaman $(\varphi_\alpha, U_\alpha)$ haritalarının $\{(\varphi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koleksiyonu bir koordinat komşuluğu sistemi (*atlas*) olarak adlandırılır.

2.1.5. Tanım n - boyutlu bir topolojik manifold $\tilde{M}$ olmak üzere, $S = \{U_\alpha, \psi_\alpha\}_\alpha$ de $\tilde{M}$ manifoldunun bir atlası olsun. $r \geq 1$ koşulu için, şayet S atlasının $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olması durumunda $\forall \alpha, \beta \in A$ için

$$\varphi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\varphi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

özelliklerine sahipse S ye C^r -sınıfındadır denir. Bu durumda, her biri ikişer ikişer bir homeomorfizmanın bileşkesi olan fonksiyonlar olan $\varphi_{\beta\alpha}$ ve $\varphi_{\alpha\beta}$ de birer homeomorfizmadır. Söz konusu $\varphi_{\alpha\beta}$ ile $\varphi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^r -sınıfından diferansiyellenebilirse S atlasına C^r -Sınıfından diferansiyellenebilirdir adı verilir.

$\tilde{M}$ üzerindeki bir C^r -sınıfı atlası S , C^r -sınıfından bir *diferansiyellenebilir yapı* olarak tanımlanır.

$\tilde{M}$ bir manifold olsun ve bu manifoldda r . mertebeden diferansiyellenebilir bir atlas var ise, $\tilde{M}$ 'ya r . mertebeden *diferansiyellenebilir manifold* adı verilir (Hacısalıhoğlu, 1980).

2.1.6. Tanım $\tilde{M}$ ile $\tilde{N}$ iki manifold ve $\varphi : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$, diferansiyellenebilir dönüşümünün tersi mevcut ve bu dönüşümün tersi de diferansiyellenebilirse, φ dönüşümüne *diffeomorfizma*

denir. Eğer $\tilde{M}$ dan $\tilde{N}$ ya bir diffeomorfizma mevcutsa, $\tilde{M}$ ile $\tilde{N}$ manifoldları *diffeomorftirler* denir.

2.1.1. Not Manifoldlar üzerinde önemli bir kavram da tanjant vektörleridir. Manifold, temel olarak bir topolojik uzaydır ve bu uzay üzerinde diferansiyel yapı tanımlayarak diferansiyel teknikler kullanmak mümkündür.

2.1.7. Tanım $\tilde{M}$ topolojik bir manifold ve $p \in \tilde{M}$ olsun. $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasının bir komşuluğu U olmak koşuluyla

$$C^\infty(U, \mathbb{R}) = \{f \mid f : U \xrightarrow{\text{dif-bilir}} \mathbb{R}\}$$

kümesini ele alalım, bu kümede $f, g \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ sabitleri için

i) Lineerlik

$$V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g)$$

ii) Leibnitz

$$V_p(f \cdot g) = V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g)$$

şartlarını karşılayan V_p fonksiyonu, $\tilde{M}$ manifoldunun p -noktasındaki *tanjant vektörü* olarak adlandırılır.

$\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörlerinin kümesi $T_{\tilde{M}}(p)$ ile gösterilir.

Buna göre,

$$T_{\tilde{M}}(p) = \{V_p \mid V_p : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{lineer, Leibniz}} \mathbb{R}\}$$

dir. Bu cümlede iç işlem

$$\oplus : T_{\tilde{M}}(p) \times T_{\tilde{M}}(p) \rightarrow T_{\tilde{M}}(p)$$

$$(V_p, W_p) \rightarrow V_p \oplus W_p : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ve $f \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$(V_p + W_p)[f] = V_p[f] + W_p[f]$$

olarak tanımlanır. Bu şekilde $(T_{\tilde{M}}(p), \oplus)$ ikilisi abel grup olur. Bu cümledeki dış işlem ise

$$\odot : \mathbb{R} \times T_{\tilde{M}}(p) \rightarrow T_{\tilde{M}}(p)$$

$$(\lambda, V_p) \rightarrow \lambda \odot V_p: C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ve $f \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$(\lambda \odot V_p)[f] = \lambda V_p[f]$$

olarak tanımlanır. $(T_{\tilde{M}}(p))$ reel sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzaydır ve bu uzay $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki *tanjant uzayı* olarak adlandırılır (Hacısalihoglu, 1980).

2.1.8. Tanım $f: E^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\vec{V}_p \in T_{E^n}(p)$ olsun. Buna göre $\vec{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak şartıyla

$$\vec{V}_p[f] = \frac{d}{dt} (f(P_1 + t(Q_1 - P_1)), \dots, f(P_n + t(Q_n - P_n)))_{t=0}$$

reel sayısına f fonksiyonunun $\vec{V}_p$ vektörü yönündeki türevi adı verilir (Hacısalihoglu, 1980).

2.1.9. Tanım Reel sayılar cismi üzerindeki r adet vektör uzayı $V_1, V_2, V_3, \dots, V_r$ şeklinde verilsin.

$$f: V_1 \times V_2 \times V_3, \dots, V_r \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \leq i \leq r$ ve $u_i, v_i \in V_i$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, \dots, v_r) \\ = af(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, \dots, v_r) + bf(v_1, \dots, v_{i-1}, u_i, \dots, v_r) \end{aligned}$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna r -lineer fonksiyon adı verilir (Hacısalihoglu, 1983).

2.1.10. Tanım $\tilde{M}$, n -boyutlu diferansiyellenebilir bir manifold olsun. $p \in \tilde{M}$ noktasında bulunan tanjant uzayı $T_{\tilde{M}}(p)$ olsun. $T_{\tilde{M}}(p)$ 'nin dual uzayı, $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki *kotanjant uzayı* olarak adlandırılır. $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki kotanjant uzayı ise $T_{\tilde{M}}^*(p)$ ile gösterilir. Bu durumda

$$T_{\tilde{M}}^*(p) = \{\omega \mid \omega : T_{\tilde{M}}(p) \xrightarrow{\text{lineer}} \mathbb{R}\}$$

olur. $T_{\tilde{M}}^*(p)$ kotanjant uzayının herbir elemanı ise $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki *kotanjant vektörleri* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

2.1.11. Tanım Reel sayıların cismi üzerindeki bir vektör uzayı V olsun. V^* ise V vektör uzayının dual uzayı olarak tanımlansın

$$L(V^r, V^{s*}; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V^r \times V^{s*} \xrightarrow{r+s\text{-lineer}} \mathbb{R}\}$$

vektör uzayındaki iç ve dış işlemler sırası ile

$$(f \oplus g)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) + g(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s) = \lambda f(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots, \beta_s)$$

olarak tanımlanır. Bu uzay, r . mertebeden kovaryant ve s . mertebeden kontravaryant tensör uzay olarak adlandırılır. Bu uzayın öğelerine ise (r, s) -tipinde bir tensör adı verilir (Boothby, 1986).

2.1.2. Not Manifoldlar üzerinde tanjant vektörleri kullanarak vektör alanları tanımlanabilir. $\tilde{M}$ bir manifold olsun ve $T_{\tilde{M}}(p)$ bu manifoldun p noktasına karşılık gelen tanjant uzayı olsun. Her $p \in \tilde{M}$ noktasına karşılık gelen X diferansiyellenebilir dönüşümü, $T_{\tilde{M}}(p)$ uzayında bir tanjant vektörü üretir ve bu dönüşüme vektör alanı adını veririz. Bu şekilde vektör alanları aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

2.1.12. Tanım $\tilde{M}$ diferansiyellenebilir manifold olsun. $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bulunan diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ olmak üzere, $\forall f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ ile $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$X : C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$$

dönüşümü aşağıdaki

$$i) X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

$$ii) X(fg) = X(f)g + fX(g)$$

özellikleri sağlıyor ise X vektörüne $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki bir *vektör alanı* adı verilir. $\tilde{M}$ 'daki vektör alanları $\chi(\tilde{M})$ simgesiyle gösterilir (Boothby, 1986).

2.1.13. Tanım Diferansiyellenebilir bir manifold olan $\tilde{M}$ 'daki vektör alanları cümlesi $\chi(\tilde{M})$ olmak üzere $X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$[,] : \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$

$$(X, Y) \rightarrow [X, Y]$$

dönüşümü

$$i) \quad 2\text{-lineer, } \forall a, b \in \mathbb{R} \text{ ve } X, Y, Z \in \chi(\tilde{M}) \text{ için}$$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$ii) \quad \text{Anti-simetrik yani her } X, Y \in \chi(\tilde{M}) \text{ için}$$

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

$$iii) \quad \forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M}) \text{ için}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$$

koşullarını sağlıyor ise $[,]$ ye $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde *Lie operatörü* adı verilir (Boothby, 1986).

$\tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold olsun. $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı $\chi(\tilde{M})$ vektör alanı olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} [,] : \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) &\rightarrow \chi(\tilde{M}) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

dönüşümü her $f \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[X, Y]f = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad (2.1.1)$$

olarak tanımlanır. $[,], \chi(\tilde{M})$ üzerindeki bir Lie operatörüdür. Eşitlikteki $X(f)$ ise f 'nin X vektör alanının yöne göre türevi olarak ifade edilir.

$\tilde{M}$ diferansiyellenebilir manifold olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ fonksiyonları ile birlikte $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie operatörü

- i) $[X, Y](f + g) = [X, Y](f) + [X, Y](g)$
- ii) $[X, Y](\lambda f) = \lambda[X, Y](f)$
- iii) $[X, Y](fg) = g[X, Y](f) + f[X, Y](g)$

özelliklerini sağlar (Yano ve Kon, 1984).

2.1.1. Teorem $\tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ ile $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$[fX, gY] = (fg)[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X \quad (2.1.2)$$

dir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.14. Tanım $\tilde{M}$ ile $\tilde{N}$ manifoldları sırası ile m ile n boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olsun. $f: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ olarak tanımlanan fonksiyon p noktası üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olmak koşuluyla

$$f_*: T_{\tilde{M}}(p) \rightarrow T_{\tilde{N}}(f(p))$$

$$V_p \rightarrow f_*|_p(V_p) = (\vec{V}_p[f_1]|_{f(p)}, \dots, \vec{V}_p[f_n]|_{f(p)})$$

ile tanımlanan f_* dönüşümü f fonksiyonunun *türev dönüşümü* olarak adlandırılır. Şayet $g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$, $f(p)$ nin komşuluğu altında diferansiyellenebilir bir fonksiyonsa

$$(f_*(V_p))g = V_p(g \circ f)$$

şeklinde verilir (Yano ve Kon, 1984).

2.1.2. Teorem $\tilde{M}$ ve $\tilde{N}$ manifoldları diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $f: \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu koşulda f_* türev dönüşümü lineer ve $\tilde{M}$ üzerinde seçilen eğriden bağımsız olur (Yano ve Kon, 1984).

2.1.15. Tanım $\tilde{M}$, diferansiyellenebilir bir manifold olarak tanımlansın. $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ ve $\tilde{M}$ dan $\mathbb{R}$ ye olan C^∞ fonksiyonlarının cümlesi ise $C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ ile $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$g: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$$

dönüşümü

i) Simetrik, yani

$$g(Y, X) = g(X, Y),$$

ii) Pozitif tanımlılık

$$X \neq 0 \text{ için } g(X, X) > 0 \text{ ve } g(X, X) = 0 \Leftrightarrow X = 0,$$

iii) Bilineer;

$$g(aX + bY, Z) = ag(X, Z) + bg(Y, Z),$$

şartlarını sağlıyor ise g ye $\tilde{M}$ üzerinde $(2, 0)$ -mertebeli *metrik tensör* ya da *Riemann metriği* denir. $(\tilde{M}, g)$ çifti ise *Riemann manifoldu* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

2.1.16. Tanım $\tilde{M}$, bir diferansiyellenebilir manifold olsun ve $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde bulunan C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(\tilde{M})$ olmak üzere

$$\tilde{\nabla}: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \xrightarrow{2-linear} \chi(\tilde{M})$$

$$(X, Y) \rightarrow \tilde{\nabla}(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y$$

dönüşümü $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ ile $f, g \in C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için

$$i) \quad \tilde{\nabla}_X(Y + Z) = \tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z$$

$$ii) \quad \tilde{\nabla}_{fX+gY}Z = f\tilde{\nabla}_X Z + g\tilde{\nabla}_Y Z$$

$$iii) \quad \tilde{\nabla}_X(fY) = f\tilde{\nabla}_X Y + X(f)Y$$

özelliklerini sağlıyor ise $\tilde{\nabla}$ ya $\tilde{M}$ üzerindeki bir *afin konneksiyon* denir. $\tilde{\nabla}_X$ ise X 'e göre *kovaryant türev operatörü* olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1979).

2.1.17. Tanım $\tilde{M}$ manifoldu n -boyutlu ve $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki konneksiyon $\tilde{\nabla}$ olmak üzere

$$T: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$

$$(X, Y) \rightarrow T(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y]$$

olarak tanımlanmış vektör değerli tensöre $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı olan $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun *torsiyon tensörü* adı verilir. Basitçe görülebilir ki torsiyon tensörü antisimetriktir.

2.1.18. Tanım $(\tilde{M}, g)$ Riemann manifoldu olsun. $\tilde{\nabla}$ ise $\tilde{M}$ üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olmak üzere $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu

$$i) \quad \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X, Y] \text{ (Sıfır torsiyon özelliği olan konneksiyon)}$$

$$ii) \quad Xg(Y, Z) = g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) \text{ (Metrik ile bağdaşma özelliği olan konneksiyon)}$$

koşullarını sağlıyor ise, $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki *Sıfır torsiyonlu konneksiyon* (Riemann konneksiyonu) ya da *Levi-Civita konneksiyonu* adı verilir (Yano ve Kon, 1979).

$(\tilde{M}, g)$ n -boyutlu bir Riemann manifoldu olmak üzere $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde tanımlı Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\begin{aligned} 2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ile ifade edilen eşitliğe *Kozsul formülü* denir.

2.1.19. Tanım $(\tilde{M}, g)$ Riemann manifoldu olmak üzere $X \in \chi(\tilde{M})$ için L_X , keyfi (r, s) -tipindeki bir tensör alanını yine (r, s) -tipindeki bir tensör alanına götürür ise L_X operatörü X vektör alanına göre *Lie türev operatörü* olarak tanımlanır.

$$\begin{aligned} (L_X \phi)(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s) &= X_1 \phi(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s) \\ &\quad - \phi(L_X X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_s) - \phi(X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, L_X Y_s) \end{aligned}$$

şeklinde gösterilir. Özel olarak $Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$L_X Y = [X, Y]$$

biçiminde tanımlıdır. Ayrıca $f \in C(\tilde{M}, \mathbb{R})$ için $L_X f = X(f)$ dir. $\forall Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ olmak üzere g -Riemann metrik tensörünün X - vektör alanına göre Lie türevi ise

$$\begin{aligned} (L_X g)(Y, Z) &= L_X g(Y, Z) - g(L_X Y, Z) - g(Y, L_X Z) \\ &= X(g(Y, Z)) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) - g(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad + g(\nabla_Y X, Z) - g(Y, \nabla_X Z) + g(Y, \nabla_Z X) \\ &= g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. $L_X g = 0$ olması durumunda X vektör alanı *Killing vektör alanı* olarak tanımlanır (Chen, 1973).

2.1.20. Tanım $(\tilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu olmak üzere, $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde verilmiş olan her bir difarensiyel r -forma bir diferansiyel $(r+1)$ -formu karşılık getiren diferansiyel operatöre "*dış türev operatörü*" adı verilir ve bu operatör d ile gösterilir

Şayet ω bir r -formsa, $X_0, X_1, \dots, X_r \in \chi(\tilde{M})$ için

$$d\omega(X_0, X_1, \dots, X_r) = \frac{1}{r+1} \left\{ \sum_{i=1}^r (-1)^i X_i(\omega(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_r)) \right. \\ \left. + \frac{1}{r+1} \sum_{i,j=0}^r (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_r) \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak 1-form ile 2-form için d operatörü $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$2d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) \quad (2.1.4)$$

ve

$$3d\phi(X, Y, Z) = X(\phi(Y, Z)) + Y(\phi(Z, X)) + Z(\phi(X, Y)) \\ - \phi([X, Y], Z) - \phi([Y, Z], X) - \phi([Z, X], Y) \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

2.1.21. Tanım $(\tilde{M}, g)$ Riemann manifold olmak üzere $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ve $\forall X, Y, Z \in \chi(\tilde{M})$ için

$$\tilde{R}: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M}) \\ (X, Y, Z) \rightarrow \tilde{R}(X, Y)Z$$

olmak üzere

$$\tilde{R}(X, Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \quad (2.1.6)$$

olarak ifade edilen $\tilde{R}$ fonksiyonu $\tilde{M}$ manifoldu üzerinde $(3, 1)$ -tipindeki tensör alanıdır. Bu tensöre $\tilde{M}$ manifoldunun *Riemann eğrilik tensörü* adı verilir. Ayrıca $\forall X, Y, Z, W \in \chi(\tilde{M})$ için $\tilde{K}(X, Y, Z, W) = g(\tilde{R}(X, Y)Z, W)$ biçiminde tanımlı olan $\tilde{K}$ tensörüne ise *Riemann Christoffel eğrilik tensörü* denir. Manifold'un Riemann eğrilik tensörü sıfır ise *flat manifold* olarak adlandırılır. Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ üzerindeki konneksiyon $\tilde{\nabla}$ için $\tilde{\nabla} \tilde{R} = 0$ ise, $\tilde{M}$ 'ya *lokal simetrik manifold* adı verilir. $\forall X, Y, Z, W \in \chi(\tilde{M})$ için, Riemann eğrilik tensörü olan $\tilde{R}$

- i) $\tilde{R}(X, Y)Z = -\tilde{R}(Y, X)Z$
- ii) $g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = -g(\tilde{R}(X, Y)W, Z)$
- iii) $\tilde{R}(X, Y)Z + \tilde{R}(Y, Z)X + \tilde{R}(Z, X)Y = 0$ (I. Bianchi özdeşliği)
- iv) $g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = g(\tilde{R}(Z, W)X, Y)$

özelliklerine sahiptir (O'Neill, 1983).

2.1.22. Tanım n -boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, lokal ortonormal vektör alanları $\chi(\tilde{M})$ nın bazı olsun.

$$Q: \chi(\tilde{M}) \rightarrow \chi(\tilde{M})$$

$$X_i \mapsto Q(X) = QX = \sum_{i=1}^n \tilde{R}(X, e_i)e_i \quad (2.1.7)$$

ile tanımlı Q operatörü $\tilde{M}$ manifoldunun *Ricci operatörü* olarak adlandırılır (O'Neill, 1983).

n - boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ nin Riemann eğrilik tensörü $\tilde{R}$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ cümlesi $\chi(\tilde{M})$ nın ortonormal vektör alanları olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$S: \chi(\tilde{M}) \times \chi(\tilde{M}) \rightarrow C^\infty(\tilde{M}, \mathbb{R})$$

$$(X, Y) \mapsto S(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(\tilde{R}(Y, e_i)e_i, X) \quad (2.1.8)$$

şeklinde tanımlanan $(2, 0)$ - tipinde tensöre $\tilde{M}$ nin *Ricci tensörü* denir. Ricci tensörünün simetrik olduğu kolayca görülebilir. $\tilde{M}$ nin Ricci operatörü Q ile ifade edilir. Bu operatör,

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (2.1.9)$$

şeklinde tanımlanır (Yano ve Kon, 1984).

n -boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları olmak üzere

$$\rho = \sum_{i=1}^n S(e_i, e_i) \quad (2.1.10)$$

değeri, $\tilde{M}$ manifoldunun *skaler eğrilik fonksiyonu* olarak adlandırılır (Yano ve Kon, 1984).

Diğer yandan bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ nin X doğrultusunda Ricci eğriliği

$$k(X) = \frac{S(X, X)}{g(X, X)} \quad (2.1.11)$$

ile tanımlanır.

n -boyutlu Riemann manifold $(\tilde{M}, g)$ olmak koşuluyla, $\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$S(X, Y) = \lambda g(X, Y) \quad (2.1.12)$$

olacak şekilde $\tilde{M}$ üzerinde bir λ fonksiyonu var ise, $\tilde{M}$ manifoldunun Ricci tensörü S , metrik tensörü g 'nin bir katıysa $\tilde{M}$ ya *Einstein manifoldu* denir. (2.1.12) eşitliğinde $X = Y = e_i$ ve $1 \leq i \leq n$ ortonormal bazı seçilmesi halinde $\lambda = \frac{\rho}{n}$ olduğu görülür.

n - boyutlu Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ ve Ricci tensörü S olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(\tilde{M})$ için

$$S(X, Y) = ag(X, Y) + b\eta(X)\eta(Y) \quad (2.1.13)$$

eşitliği sağlanıyor ise $\tilde{M}$ manifolduna η -Einstein manifoldu denir. Eşitlikte ki a ile b , $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki fonksiyonlar ve η 'da 1-formdur (Yano ve Kon, 1979).

2.1.23. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, g)$ olsun. $T_{\tilde{M}}(p)$ tanjant uzayının iki boyutlu alt uzayı Π olmak üzere $X, Y \in \Pi$ tanjant vektörleri için

$$g(X, Y)g(Y, Y) - g(X, Y)^2 \neq 0$$

olmak üzere

$$K(X \wedge Y) = \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \quad (2.1.14)$$

ile tanımlanan $K(X \wedge Y)$ 'ye Π düzleminin kesit eğriliği adı verilir. $K(\Pi)$ ile sembolize edilir. Eşitlikten görüldüğü gibi kesit eğriliği olan $T_{\tilde{M}}(p)$ tanjant uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı Π 'den seçilmiş olan bazlardan bağımsızdır (Sular, 2009).

$\forall p \in \tilde{M}$ olmak üzere $X_p, Y_p \in T_{\tilde{M}}(p)$ için $K(X_p, Y_p)$ sabitse $\tilde{M}$ manifolduna reel uzay form ya da c -sabit kesit eğrilikli uzay adı verilir. $\tilde{M}$ uzay formu n -boyutlu olmak üzere $\tilde{M}^n(c)$ ile gösterilir. Bu durumda Riemann manifoldu olan $\tilde{M}$ reel uzay form ise $\tilde{M}$ manifoldunun $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörü c -sabit kesit eğrilikli olmak koşuluyla $\forall X, Y, Z, W \in \chi(\tilde{M})$ için

$$g(\tilde{R}(X, Y)Z, W) = c\{g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W)\} \quad (2.1.15)$$

şeklindedir. Eğer;

$c = 0$ ise $\tilde{M}(c) \cong E^n$ Öklid uzayı

$c = \frac{1}{r^2}$ ise $\tilde{M}(c) \cong S^n(r)$ küresi

$c = -\frac{1}{r^2}$ ise $\tilde{M}(c) \cong H^n(r)$ Hiperbolik uzay olur.

Bu durumda, sabit eğriliğe sahip bir Riemann manifoldunun eğriliği pozitifse eliptik olarak adlandırılır, negatifse hiperbolik olarak adlandırılır ve sıfırsa düzlemsel (flat) veya lokal

öklidyen manifold olarak adlandırılır. Bu nedenle, Riemann eğrilik tensörü sıfır olan manifoldlar flat manifoldlardır.



2.2. Altmanifoldlar

Bu bölümde, yüzeyler teorisinin daha genel bir hali olan Riemann manifoldunun alt manifoldları ele alınmaktadır. Altmanifold üzerinde indirgenen metrik tensör ile indirgenmiş konneksiyonun Levi-Civita konneksiyonu olduğu durumlar incelenirken, Weingarten temel tensörü ve ikinci temel form özellikleri ile Riemann manifoldu ile alt manifoldunun eğrilikleri arasındaki ilişkiler de açıklanmaktadır. Ayrıca, total umbilik, pseudo-umbilik, total geodezik ve minimal altmanifoldlar da tanımlanacaktır.

2.2.1. Tanım M ve $\tilde{M}$ manifoldları sırası ile m ve n boyutlu Riemann manifoldları olsun.

$$f: M \rightarrow \tilde{M}$$

diferansiyellenebilir dönüşümü için, $\text{boy}(f_*(T_M(p))) = q$ olmak üzere f 'nin $p \in M$ noktasında rankı q olup, $\text{rank}_p(f) = q$ ile gösterilmektedir.

Şayet $\text{boy}(M) = \text{rank}(f)$ olursa f ye daldırma (*immersiyon*) adı verilir. $f(M)$ ise $\tilde{M}$ manifoldunun gömülmüş (*immersed*) altmanifoldu olarak adlandırılır.

Eğer f bire-bir bir immersiyonsa, f 'ye gömme (*imbeding*) denir. $f(M)$ 'ye ise $\tilde{M}$ nın altmanifoldu veya gömülen altmanifoldu adı verilir (Chen, 1973).

2.2.2. Tanım (M, g) ile $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldları sırasıyla m ve n boyutlu olsun. $f: M \rightarrow \tilde{M}$ immersiyon olmak koşuluyla $\forall X, Y \in T_M(p)$ için

$$\tilde{g}(f_*X, f_*Y) = g(X, Y)$$

ise f ye metrik koruyan immersiyon (*izometrik immersiyon*) denir (Chen, 1973).

2.2.3. Tanım $\tilde{M}$, m -boyutlu bir manifold ve $\tilde{M}$ manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı $T_{\tilde{M}}(p)$ olsun. $\tilde{M}$ üzerindeki bir r -boyutlu D distribüsyonu, $\tilde{M}$ manifoldunun her bir p noktasını r -boyutlu altuzaya götüren bir dönüşümdür. Yani

$$D: \tilde{M} \rightarrow T_{\tilde{M}}(p)$$

$$p \rightarrow D_p \subset T_{\tilde{M}}(p)$$

ile tanımlanan D dönüşümüne *distribüsyon* adı verilmektedir. $\forall X \in \chi(\tilde{M})$ ve $p \in \tilde{M}$ olmak üzere $X_p \in D_p$ olduğunda X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. $\forall p$ noktası için D 'de r adet diferansiyellenebilir, lineer bağımsız vektör bulunuyorsa D distribüsyonuna *diferansiyellenebilir bir distribüsyon* adı verilir (Duggal ve Bejancu, 1996)

2.2.4. Tanım $\tilde{M}$ manifoldu bir C^∞ -manifold ve M üzerindeki q -boyutlu bir C^∞ -distribüsyonu D olsun. $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu M olmak üzere M altmanifoldunun her p noktasında, M 'nin tanjant uzayıyla D_p aynı ise, M altmanifolduna D distribüsyonunun *integral manifoldu* adı verilir.

Bu durumda

$$f: M \rightarrow \tilde{M}$$

bir gömme (imbedding) olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

olur. Bu durumda D distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan farklı bir integral manifoldu yok ise M manifolduna D distribüsyonunun *maksimal integral manifoldu* adı verilir.

$\tilde{M}$ diferansiyellenebilir bir manifold olsun. M , $\tilde{M}$ 'nin bir altmanifoldu olmak üzere $\forall p \in M$ için D distribüsyonunun p noktasını içeren maksimal integral manifoldu var ise D distribüsyonuna *integrallenebilirdir* denir (Duggal ve Bejancu, 1996).

$\tilde{M}$ bir manifold olmak üzere ve $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ manifoldu üzerindeki lineer konneksiyon olsun. $X, Y \in \Gamma(D)$ için $\tilde{\nabla}_X Y \in \Gamma(D)$ oluyorsa D distribüsyonu *paraleldir* denir.

n -boyutlu bir Riemann manifoldu olan $\tilde{M}$ üzerindeki distribüsyon D olsun. $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ oluyor ise D distribüsyonu *involutive distribüsyon* olarak adlandırılır. Ayrıca,

M altmanifoldu üzerindeki bir distribüsyonun integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli koşul, D distribüsyonun involutive olmasıdır (Duggal ve Bejancu, 1996).

2.2.5. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ve $M, \tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere $\forall p \in M$ için

$$T^\perp M = \{V_p \in T_{\tilde{M}}(p) : \tilde{g}(X_p, V_p) = 0, \quad \forall X_p \in T_M(p)\}$$

olarak tanımlı altuzaya $\tilde{M}$ nin *normal uzayı* adı verilir. M nin normal vektörü V_p olmak üzere V_p nin birim vektör olarak tanımlanması durumunda, V_p vektörüne M altmanifoldunun *birim normal vektörü* adı verilir. M altmanifoldunun bütün normal vektörlerini içermekte olan $T^\perp M$ uzayına ise M altmanifoldunun *normal demeti* denir.

2.2.1. Not $M, \tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M nin tanjant demeti TM ve $T^\perp M$ ise M nin tüm normal vektörlerinin vektör demetini temsil etsin. Bu durumda, $\tilde{M}$ nin tanjant demeti

$$T\tilde{M} = TM \oplus T^\perp M$$

şeklinde yazılabilir.

2.2.6. Tanım Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ olmak üzere $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu M olarak tanımlansın. $\tilde{\nabla}$ ile ∇ konneksiyonları sırasıyla $\tilde{M}$ ile M manifoldları üzerinde Riemann konneksiyonları olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$h: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi^\perp(M)$$

$$(X, Y) \rightarrow h(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

olarak tanımlanan h simetrik bi lineer form, M altmanifoldunun *ikinci temel formu* olarak adlandırılır. $h = 0$ olması durumunda M altmanifolduna *total geodezik altmanifold* denir.

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \quad (2.2.1)$$

ile tanımlı eşitlik *Gauss formülü* olarak adlandırılır. Eşitlikteki $h(X, Y)$ ve $\nabla_X Y$, $\tilde{\nabla}_X Y$ nin sırası ile normal ve teğet bileşenleri olarak adlandırılır. M nin ikinci temel formu olan h in kovaryant türevi olarak ifade edilen ∇h ise $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^\perp h(Y, Z) - h((\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z)) \quad (2.2.2)$$

olarak tanımlanır. h ikinci temel formunun kovaryant türevi olan ∇h 'a ise M altmanifoldunun *üçüncü temel formu* denir (Chen, 1973).

n -boyutlu bir altmanifold olan M , $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M altmanifoldu üzerindeki $p \in M$ için $T_M(p)$ 'nin lokal ortonormal bazı ise $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olma şartıyla M altmanifoldunun ikinci temel formu olan h in normu ise

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^n g(h(e_i, e_j), h(e_i, e_j)) \quad (2.2.3)$$

şeklinde ifade edilir.

2.2.7. Tanım n -boyutlu bir altmanifold olan M , $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu h olsun. M altmanifoldu üzerinde $p \in M$ için $T_M(p)$ 'nin lokal ortonormal bazı $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ olsun.

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h(e_i, e_i) \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlanan vektöre M altmanifoldunun *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir. Şayet $H = 0$ olması durumunda M altmanifoldu *minimal altmanifold* olarak adlandırılır (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.8. Tanım n -boyutlu bir altmanifold olan M , $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun ikinci temel formu h ile M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü ise H olmak üzere $\forall X, Y \in \chi(M)$ koşuluyla

$$h(X, Y) = g(X, Y)H \quad (2.2.5)$$

oluyorsa M altmanifoldu $\tilde{M}$ manifoldunun *total umbilik altmanifoldu* olarak adlandırılır. Eğer

$$g(h(X, Y), H) = \lambda g(X, Y), \quad \lambda \in C(M, R) \quad (2.2.6)$$

koşulu sağlanıyorsa M altmanifolduna $\tilde{M}$ manifoldunun *pseudo-umbilik altmanifoldu* adı verilir. Görüleceği üzere her total umbilik altmanifold ayrıca pseudo-umbilik altmanifold olur. Ancak bu koşulun tersi doğru değildir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.9. Tanım Bir Riemann manifoldu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ve M ise $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun normal demetindeki konneksiyonu $\nabla^\perp$ olmak koşuluyla $\forall X \in \chi(M)$ ile $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$A: \chi^\perp(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(V, X) \rightarrow A(V, X) = A_V X = \nabla_X^\perp V - \tilde{\nabla}_X V$$

olarak tanımlanan bilineer dönüşüme M altmanifoldunun *şekil operatörü* adı verilir (Chen, 1973).

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^\perp V \quad (2.2.7)$$

eşitliğine ise *Weingarten formülü* adı verilir. M altmanifoldunun bu durumdaki şekil operatörü olan A_V nin kovaryant türevi ise

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X A_V Y - A_{\nabla_X^\perp V} Y - A_V \nabla_X Y \quad (2.2.8)$$

şeklinde tanımlanır (Chen, 1973; Chen, 1990).

$\forall Y \in \chi(M)$ ile $V \in \chi^\perp(M)$ için $g(Y, V) = 0$ eşitliğinin $X \in \chi(M)$ 'ye göre kovaryant türevinin alınması durumunda

$$Xg(Y, V) = g(\tilde{\nabla}_X Y, V) + g(Y, \tilde{\nabla}_X V) = 0 \quad (2.2.9)$$

olur. Burada Weingarten ve Gauss formülleri kullanılır ise

$$g(\nabla_X Y, V) + g(h(X, Y), V) - g(Y, A_V X) + g(Y, \nabla_X^\perp V) = 0$$

olur. Burada gerekli sadeleştirme işlemleri yapılırsa

$$g(A_V Y, X) = g(h(X, Y), V) \quad (2.2.10)$$

olacağı görülür. Bu son eşitlik M altmanifoldunun şekil operatörü A_V ile ikinci temel formu h arasındaki bağıntıyı verir (Chen, 1973).

3. LORENTZIAN CONCIRCULAR STRUCTURE MANİFOLDLAR

Bu bölümde Lorentzian Consircular Structure manifoldlar tanıtılarak bazı temel özellikler verilmiştir.

3.1. Lorentzian Consircular Structure Manifoldlar

Bu bölümde $(LCS)_n$ - manifoldları ve bunların alt manifoldları için temel formüller ve tanımlar verilmiştir.

$\tilde{M}$ n -boyutlu Lorentzian manifoldu verilsin. Bir lorentzian metrik $g(0,2)$ tipinde bir tensördür öyleki her $x \in \tilde{M}$ için

$$g_x: T_x \tilde{M} \times T_x \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$$

non-dejenere metriktir. Burada metriğin işareti $(-, +, \dots, +)$ şeklindedir. Sıfırdan farklı bir $p \in T_x \tilde{M}$ vektörü için

$g_x(p, p) < 0$ ise	time like
$g_x(p, p) = 0$ ise	null
$g_x(p, p) > 0$ ise	space like

olarak ifade edilir (Bishop ve O'Neil, 1969).

$(\tilde{M}, g)$ bir lorentzian manifoldu verilsin. Eğer $(1, 1)$ - tipinde ki tensör alanı olan $A, \forall Y \in \chi(M)$ için

$$g(Y, K) = A(Y) \tag{3.1.1}$$

olarak tanımlanıyorsa K 'ya concircular vektör denir (Yano, 1940).

A 'nın kovaryant türevi, her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\tilde{\nabla}_Y A)X = \alpha \{g(X, Y) + \omega(X)A(Y)\} \tag{3.1.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $\alpha \neq 0$ ve ω kapalı bir 1-formdur.

Bir n -boyutlu $\tilde{M}$ Lorentzian manifoldunda, time-like consircular vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olmak üzere

$$g(\xi, \xi) = -1 \quad (3.1.3)$$

dir. η 1-form olmak üzere

$$g(X, \xi) = \eta(X) \quad (3.1.4)$$

eşitliği vardır. Aynı zamanda η nin kovaryant türevi her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\tilde{\nabla}_X \eta)Y = \alpha \{g(X, Y) + \eta(Y) \eta(X)\}, (\alpha \neq 0) \quad (3.1.5)$$

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \alpha \{X + \eta(X) \xi\} (\alpha \neq 0) \quad (3.1.6)$$

şeklinde dir. Burada, g lorentzian metrik $\alpha \neq 0$ bir skaler fonksiyondur. α nın X 'e göre kovaryant türevi

$$\tilde{\nabla}_X \alpha = X(\alpha) = d\alpha(X) = \rho \eta(X) \quad (3.1.7)$$

Burada $\rho = -(\xi\alpha)$ şeklinde tanımlı skaler fonksiyondur. Ayrıca

$$\varphi X = \frac{1}{\alpha} \tilde{\nabla}_X \xi \quad (3.1.8)$$

şeklinde tanımlıdır. (3.1.6) ve (3.1.8)'den aşağıdaki denklemler sağlanır

$$\varphi X = X + \eta(X) \xi \quad (3.1.9)$$

$$g(\varphi X, Y) = g(X, \varphi Y) \quad (3.1.10)$$

Burada $\varphi(1, 1)$ -tipinde simetrik tensördür. Aynı zamanda φ ye manifoldun yapı tensörü adı verilir.

$(\tilde{M}, g)$ lorentzian manifoldu ile birlikte birim time-like vektör alanı ξ , η 1-form, φ (1,1)-tipinde tensör alanı olmak üzere $(\tilde{M}, g)$ ye *Lorentzian concircular structure manifold* adı verilir ve $(LCS)_n$ – manifold olarak gösterilir (Shaikh, 2003). Bir $(LCS)_n$ – manifoldunda özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa manifold *Lorentzian para-Sasakian* olarak adlandırılır (Matsumoto ve Mihai, 1988).

Bir $(LCS)_n$ – manifoldunda ($n > 2$) için aşağıdaki durumlar söz konusudur. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\varphi\xi = 0, \eta(\xi) = -1, \eta(\varphi Y) = 0, g(\varphi Y, \varphi X) = g(Y, X) + \eta(Y)\eta(X) \quad (3.1.11)$$

$$\varphi^2 X = X + \eta(X)\xi \quad (3.1.12)$$

ve

$$S(Y, \xi) = (n - 1)(\alpha^2 - \rho)\eta(Y) \quad (3.1.13)$$

$$R(X, Y)\xi = (\alpha^2 - \rho)[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (3.1.14)$$

$$R(\xi, Y)Z = (\alpha^2 - \rho)[g(Y, Z)\xi - \eta(Z)Y] \quad (3.1.15)$$

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = \alpha \{g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + 2\eta(Y)\eta(X)\xi\} \quad (3.1.16)$$

$$(X\rho) = d\rho(X) = \beta\eta(X), \quad (3.1.17)$$

$$R(X, Y)Z = \varphi R(X, Y)Z + (\alpha^2 - \rho)\{g(Y, Z)\eta(X) - g(X, Z)\eta(Y)\}\xi \quad (3.1.18)$$

$M, \tilde{M}$ $(LCS)_n$ – manifoldunun bir altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ ile $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$\tilde{\nabla}_Y X = \nabla_Y X + h(Y, X) \quad (3.1.19)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_Y V = -A_Y V + \nabla_Y^\perp V \quad (3.1.20)$$

Formüllerine sırasıyla Gauss ve Weingarten formülleri denir. Burada ∇ ve $\nabla^\perp$ konveksiyonları sırasıyla TM ve $T^\perp M$ üzerinde tanımlıdır. Aynı zamanda h ve A_Y sırasıyla temel 2-form ve Weingarten (şekil operatörü) temel tensörüdür. Şayet $h = 0$ ise M

altmanifoldu total geodezik altmanifold olarak adlandırılır. Şekil operatörü A_V ve ikinci temel form h arasındaki bağıntı

$$g(A_V Y, X) = g(h(Y, X), V) \quad (3.1.21)$$

şeklindedir.

M 'nin ortalama eğrilik vektörü H şu şekilde verilsin

$$H = \frac{tr(h)}{r}$$

burada r , M 'nin boyutudur. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için M total umbilik olduğundan dolayı

$$h(X, Y) = g(X, Y)H$$

yazılır.

- $h(X, Y) = 0$ ise manifoldun total umbilik altmanifoldu total geodezik olur.
- $H = 0$ ise, altmanifoldun minimal olduğu söylenir.

$M, \tilde{M} (LCS)_n$ – manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$\varphi X = TX + NX \quad (3.1.22)$$

dir. Eşitlikteki TX ve NX sırası ile φX in teğet ile normal parçalarıdır. Aynı zamanda $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$\varphi V = tV + nV \quad (3.1.23)$$

dir. Burada tV ile nV sırası ile φV nin teğet ile normal parçalarıdır. (3.1.12), (3.1.22) ve (3.1.23) denklemleri kullanılır ise altmanifoldda indirgenmiş tensörler arasındaki bağıntı,

$$T^2 + tN = I + \eta \otimes \xi, \quad NT + nN = 0 \quad (3.1.24)$$

ve

$$n^2 = I - Nt, Tt + tn = 0 \quad (3.1.25)$$

şeklindedir. Ayrıca, altmanifoldta indirgenen T, N, t ve n tensör alanlarının kovaryant türevleri

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y \quad (3.1.26)$$

$$(\nabla_X N)Y = \nabla_X^\perp NY - N\nabla_X Y \quad (3.1.27)$$

$$(\nabla_X t)V = \nabla_X tV - t\nabla_X^\perp V \quad (3.1.28)$$

ve

$$(\nabla_X n)V = \nabla_X^\perp nV - n\nabla_X^\perp V \quad (3.1.29)$$

şeklinde verilir. Ayrıca φ nin kovaryant türevi $\tilde{\nabla}\varphi, \forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = \tilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \tilde{\nabla}_X Y \quad (3.1.30)$$

şeklinde yazılır. Yine $\forall X, Y \in \chi(M)$ ve $V, W \in \chi^\perp(M)$ için

$$g(TX, Y) = g(X, TY)$$

$$g(U, nW) = g(nU, W)$$

eşitlikleri T ve n 'nin simetrik tensör alanları olduğunu gösterir. Ayrıca $V \in \chi^\perp(M)$ ve $Y \in \chi(M)$ için

$$g(NY, V) = g(Y, tV) \quad (3.1.31)$$

şeklinde bir eşitlik vardır.

Her $Y \in \chi(M)$ için

$\varphi X = TX + NX$ ifadesinde Eğer $T = 0$ olursa M altmanifolduna anti-invaryant altmanifold denir. Şayet $N = 0$ olursa M altmanifolduna invaryant altmanifold adı verilir.

(3.1.16), (3.1.22), (3.1.23) ve (3.1.30) denklemleri ile birlikte Gauss ve weingarten formülleri kullanılırsa altmanifolda indirgenen kovaryant türevleri, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T)Y = A_{NY}X + th(X, Y) + \alpha \{g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + 2\eta(X)\eta(Y)\xi\} \quad (3.1.32)$$

$$(\nabla_X N)Y = nh(X, Y) - h(X, TY) \quad (3.1.33)$$

olur. benzer olarak $V \in \chi^\perp(M)$ ve $X \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X t)V = A_{nV}X - TA_VX \quad (3.1.34)$$

$$(\nabla_X n)V = -h(tV, X) - NA_VX \quad (3.1.35)$$

dir. Sırasıyla $\nabla T = 0$, $\nabla N = 0$, $\nabla t = 0$ ve $\nabla n = 0$ ise M alt manifoldundaki T, N, t ve n tensörlerinin paralel olduğu söylenir.

Ayrıca ξ , M 'ye teğet vektörü olduğundan $\varphi X = \frac{1}{\alpha} \tilde{\nabla}_X \varphi$, (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21) ve (3.1.22) kullanılarak $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$\nabla_X \xi = \alpha TX, \quad h(X, \xi) = \alpha NX, \quad A_V \xi = \alpha tV \quad (3.1.36)$$

(3.1.24), (3.1.32) ve (3.1.33) denklemlerinden $X, \xi \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T)\xi = -\alpha \{-tNX + X + \eta(X)\xi\} \quad (3.1.37)$$

ve

$$(\nabla_X N)\xi = -\alpha NTX \quad (3.1.38)$$

Benzer şekilde $V \in \chi^\perp(M)$ ile $\xi \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_\xi t)V = 2\alpha tnV \quad (3.1.39)$$

ve

$$(\nabla_\xi n)V = -2\alpha NtV \quad (3.1.40)$$

şeklindedir. Q' nun kovaryant türevi ∇Q olmak üzere denklemde $Q = T^2$ yazarsak her $X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y \quad (3.1.41)$$

denklemini elde edilir.

A. Lotta, kontak geometride slant altmanifoldları aşağıdaki gibi tanıtmıştır (Lotta, 1996).

3.1.1. Tanım M altmanifoldu hemen hemen kontak bir metrik manifold olan $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ 'nin bir alt manifoldu olsun. M içindeki bir x noktası için, ξ vektörü ile lineer bağımlı olmayan, sıfırdan farklı bir vektör X olmak üzere φX ve $T_x(M)$ arasında kalan açı slant açı olarak adlandırılır ve bu açığı $\theta(X)$ ile gösterelim. $\forall x \in M$ noktası ile $\forall X \in T_x(M) - \{\xi\}$ için $\theta(X)$ ile ifade edilen slant açı sabit ise M altmanifolduna $(\tilde{M}, \varphi, \xi, \eta, g)$ 'nin kontak slant alt manifoldu adı verilir. Bunun yanı sıra $\theta(X) \in (0, \frac{\pi}{2})$ aralığında yer alır (Cabrerizo ve arkadaşları, 2000).

Bu bağlamda hemen hemen kontak bir metrik manifoldun

- i) Anti-invariant altmanifoldu $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açısına sahip kontak slant altmanifolddur.
- ii) İnvaryant altmanifolduysa $\theta = 0$ slant açısına sahip kontak slant altmanifolddur.

Slant bir altmanifold ne anti-invariant nede invaryant altmanifoldsa proper kontak slant altmanifold olur.

Hemen hemen kontak bir metrik manifoldun slant altmanifoldları için aşağıdaki teorem iyi bilinmelidir (Lotta, 1996).

3.1.1. Teorem $\tilde{M}, (LCS)_n$ -manifoldunun, ξ ye teğet olan altmanifoldu M olmak üzere. Bu durumda M altmanifoldunun slant altmanifold olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$T^2 = \lambda(I + \eta \otimes \xi) \quad (3.1.42)$$

olacak biçimde bir $\lambda \in [0,1]$ sabitinin mevcut olmasıdır. M altmanifoldunun slant açısı olan θ ise $\lambda = \cos^2 \theta$ dır (Lotta, 1996).

İspat M altmanifoldu slant altmanifold olmak üzere. Bu durumda $\forall X \in \chi(M)$ için TX ile φX arasında bulunan açı θ ise

$$\cos \theta = \frac{g(\varphi X, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} = \frac{\|TX\|}{\|\varphi X\|} \quad (3.1.43)$$

T 'nin simetrik olduğunu dikkate alarak, g bir Riemann metriği olduğundan, $T^2 = \lambda(I + \eta \otimes \xi)$ olur. $\lambda = \cos^2 \theta$ alırsak, θ sabit olduğu için λ 'nın da sabit olduğu sonucunu elde ederiz.

$$\begin{aligned} g(T^2 X, X) &= g(TX, TX) = \cos^2 \theta g(\varphi X, \varphi X) = \cos^2 \theta g(\varphi^2 X, X) \\ &= \cos^2 \theta g(X + \eta(X) \xi, X) \end{aligned}$$

Tersine, şimdi (3.1.42) denkleminin geçerli olduğunu varsayıyoruz. Daha sonra (3.1.12) ve (3.1.22)'den

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{g(\varphi X, TX)}{\|\varphi X\| \|TX\|} = \frac{g(T^2 X, X)}{\|\varphi X\| \|TX\|} \\ &= \lambda \frac{g(X, X) + \eta^2(X)}{\|\varphi X\| \|TX\|} = \lambda \frac{g(\varphi X, \varphi X)}{\|\varphi X\| \|TX\|} = \lambda \frac{\|\varphi X\|}{\|TX\|} \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla $\lambda = \cos^2 \theta$ sonucuna varırız. O halde λ sabit olduğundan dolayı θ 'da sabit, M altmanifolduda slant altmanifold olur.

3.1.1. Sonuç $\tilde{M}$ bir $(LCS)_n$ -manifoldun θ slant açısıya sahip altmanifoldu M olmak üzere. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(TX, TY) = \cos^2 \theta \{g(X, Y) + \eta(X) \eta(Y)\} \quad (3.1.44)$$

ve

$$g(NX, NY) = \sin^2 \theta \{g(X, Y) + \eta(X) \eta(Y)\} \quad (3.1.45)$$

olur.



4. $(LCS)_n$ MANİFOLDUNUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARI

Bu kısımda $(LCS)_n$ manifoldlarının kontak pseudo-slant alt manifoldlarının geodeziklik durumları incelenecektir.

4.1. Bir $(LCS)_n$ -Manifoldunun Kontak Pseudo-Slant Alt Manifoldlarının Geodeziklik Durumları

Bu kısımda, bir $(LCS)_n$ -manifoldunda, bir altmanifoldun kontak pseudo-slant alt manifold olabilmesi için gerek ve yeter koşullar verilmiş olup $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ $(LCS)_n$ manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldunun integrallenebilirlik durumları araştırılmıştır. $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ $(LCS)_n$ manifoldunun total umbilik bir kontak pseudo-slant olması halinde bazı sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca, D_θ -total geodezik, $D^\perp$ -total geodezik ile mixed-total geodezik kavramları verildikten sonra kontak pseudo slant çarpım kavramının tanımı yapılmıştır. Akabinde hemen hemen kontak metrik yapısı ile $\mathbb{R}^{11}$ de 4-boyutlu bir kontak pseudo-slant altmanifold örneğine yer verilmiştir.

4.1.1. Tanım Bir $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ $(LCS)_n$ manifoldunun altmanifoldu M olsun. Bu durumda

- i) $D^\perp$ distribüsyonu total reel (anti-invaryant) distribüsyon, yani $\varphi(D^\perp) \subseteq T^\perp M$,
- ii) D_θ distribüsyonu, θ slant açısına sahip slant distribüsyon,
- iii) $TM = D^\perp \oplus D_\theta, \xi \in \Gamma(D_\theta)$.

şartlarını sağlayacak iki ortogonal D_θ ve $D^\perp$ distribüsyonları var ise M altmanifolduna $\tilde{M}$ manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu denir (Khan ve Khan, 2007).

d_1 ve d_2 sırasıyla $D^\perp$ ve D_θ nın boyutları olsun.

- i) $d_2 = 0$ ise M altmanifoldu anti-invaryant altmanifolddur.
- ii) $d_1 = 0$ ve $\theta = 0$ ise M altmanifoldu bir invaryant altmanifolddur.

iii) $d_1 = 0$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ise, M altmanifoldu bir proper kontak slant altmanifolddur.

iv) $\theta = \frac{\pi}{2}$, ise M altmanifoldu anti-invaryant altmanifolddur.

v) $d_2 d_1 \neq 0$ ve $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, bu durumda M altmanifoldu bir proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

$D^\perp$ ve D_θ üzerindeki izdüşümler sırasıyla ϖ_1 ve ϖ_2 ile gösterirsek, o zaman her $X \in \chi(M)$ için,

$$X = \varpi_1 X + \varpi_2 X + \eta(X)\xi$$

dir.

Eğer $\mu, \varphi(TM)$ nin $T^\perp M$ deki ortogonal tümleyeni ise $\tilde{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, $(LCS)_n$ manifoldunun bir kontak pseudo-slant altmanifoldu M nin $T^\perp M$ normal uzayı,

$$T^\perp M = \varphi(D^\perp) \oplus N(D_\theta) \oplus \mu, \quad \varphi(D^\perp) \perp N(D_\theta).$$

şeklinde yazılabilir.

4.1.1. Teorem $\tilde{M} (LCS)_n$ -manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olmak üzere, eğer t paralel ise o halde M altmanifoldu ya mixed geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur (Dirik ve Çelik, 2022).

İspat t tensörü paralelse N de paraleldir. $\forall X \in \Gamma(D_\theta)$ ile $Y \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\nabla N = 0$$

dir. (3.1.33) ve (3.1.34) denklemlerinden

$$nh(X, Y) - h(X, TY) = 0 \quad (4.1.1)$$

dir. yukarıdaki denklemde X yerine TX yazılırsa

$$nh(TX, Y) - h(TX, TY) = 0 \quad (4.1.2)$$

denklemini elde ederiz. $Y \in \Gamma(D^\perp)$ ve $TY = 0$ için

$$nh(TX, Y) = 0 \quad (4.1.3)$$

olur. O halde yukarıdaki denklemde X yerine TX alınırsa

$$nh(T^2X, Y) = -n \cos^2 \theta h(X, Y) = 0 \quad (4.1.4)$$

şekline dönüşür.

Son denklemde $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise bu durum M 'nin anti-invariant olduğunu gösterir. $h = 0$ olduğunda ise M mixed geozedik olur.

4.1.2. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ - manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda T 'nin kovaryant türevi simetriktir (Dirik ve Çelik, 2022).

İspat $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için (3.1.32) denkleminde

$$\begin{aligned} g((\nabla_X T)Y, Z) &= g(A_{NY}X + th(X, Y) + \alpha \{g(X, Y)\xi + \eta(Y)X \\ &\quad + 2\eta(X)\eta(Y)\xi\}, Z) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

olur. Yukarıdaki denklemde (4.1.5) kullanarak

$$\begin{aligned} g((\nabla_X T)Y, Z) &= g(h(X, Z), NY) + g(th(X, Y), Z) \\ &\quad + \alpha \{g(X, Y)\eta(Z) + \eta(Y)g(X, Z) + 2\eta(X)\eta(Y)\eta(Z)\} \\ &= g(th(X, Z), Y) + g(h(X, Y), NZ) \\ &\quad + \alpha \{g(\eta(Z)X + g(X, Z)\xi + 2\eta(X)\eta(Z)\xi, Y)\} \\ &= g(A_{NZ}X + th(X, Z) + \alpha\{g(X, Z)\xi + \eta(Z)X\} \\ &\quad + 2\eta(X)\eta(Z)\xi, Y) \\ &= g((\nabla_X T)Z, Y) \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu durumda T tensörünün kovaryant türevinin simetrik olduğu sonucuna varılır.

4.1.3. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun proper pseudo slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda T tensörünün paralel olması için gerekli ve yeterli şartlardan biri de $\forall Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için A_V şekil operatörünün

$$A_{nV}TY = \cos^2\theta(A_V Y + \eta(Y)\xi) \quad (4.1.6)$$

şartını sağlamasıdır (Dirik ve Çelik, 2022).

İspat N paralelse $\forall X, Y \in \chi(M)$ için (3.1.33) denkleminde

$$nh(X, Y) - h(X, TY) = 0 \quad (4.1.7)$$

denklemini elde ederiz. Buradan da $Y = TY$ alınır

$$nh(X, TY) - h(X, T^2Y) = 0 \quad (4.1.8)$$

böylece

$$nh(X, TY) = \cos^2\theta h(X, Y + \eta(Y)\xi) \quad (4.1.9)$$

denklemini elde edilir. Her $V \in \chi^\perp(M)$ için

$$g(nh(X, TY), V) = \cos^2\theta g(h(X, Y + \eta(Y)\xi), V)$$

$$g(h(X, TY), nV) = \cos^2\theta g(A_V X, Y + \eta(Y)\xi)$$

$$g(A_{nV}TY, X) = \cos^2\theta g(A_V Y + \eta(Y)\xi, X)$$

denklemini sağlanmış olur. Bu denklemde

$$A_{nV}TY = \cos^2\theta(A_V Y + A_V\eta(Y)\xi). \quad (4.1.10)$$

denklemine eşdeğer olduğundan ispat tamamlanır.

4.1.4. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda n tensörünün paralel olması için gerekli ve yeterli koşullardan biri de $\forall U, V \in \chi^\perp(M)$ için M altmanifoldunun şekil operatörünün

$$A_U tV = -A_V tU$$

şartını sağlanmasıdır (Dirik ve Çelik, 2022).

İspat n tensörü paralel olsun. $\forall X \in \chi(M)$ ile $U, V \in \chi^\perp(M)$ için (4.1.35) denkleminde

$$\begin{aligned} g((\nabla_X n)V, U) &= g(-h(X, tV) - N A_V X, U) = 0 \\ &= -g(A_U tV, X) - g(A_V X, tU) = 0 \\ &= -g(A_U tV + A_V tU, X) = 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$A_U tV = -A_V tU$$

dir.

4.1.5. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için

$$\cos^2 \theta g([X, Y], Z) = g(TA_{NZ}X - A_{NZ}TX, Y)$$

dir (Dirik ve Çelik, 2022).

İspat $\forall X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ ile $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için (3.1.32) ve (3.1.33) denklemleri kullanılarak

$$+A_{NZ}X + th(X, Z) = (\nabla_X T)Z = -T\nabla_X Z$$

ve

$$(\nabla_X N)Z = nh(X, Z)$$

elde edilir. Ayrıca (3.1.27) ve (3.1.40) kullanılarak

$$\begin{aligned}
g([X, Y], Z) &= g(A_{NZ}X, TY) - g(A_{NZ}Y, TX) + g(\nabla_Y^\perp NZ, NX) - g(\nabla_X^\perp NZ, NY) \\
&= g(TA_{NZ}X, Y) - g(A_{NZ}TX, Y) + g((\nabla_Y N)Z + N\nabla_Y Z, NX) \\
&\quad - g((\nabla_X N)Z + N\nabla_X Z, NY) \\
&= g(TA_{NZ}X - A_{NZ}TX, Y) + g(\nabla_Y Z, NX) - g(N\nabla_X Z, NY) \\
&= g(TA_{NZ}X - A_{NZ}TX, Y) + \sin^2 \theta \{g(\nabla_X Y, Z) - g(\nabla_Y X, Z)\} \\
&= g(TA_{NZ}X - A_{NZ}TX, Y) + \sin^2 \theta \{g([X, Y], Z)\}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\cos^2 \theta g([X, Y], Z) = g(TA_{NZ}X - A_{NZ}TX, Y)$$

olur.

4.1.6. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun total umbilik altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki kavramlardan en az biri doğrudur (Dirik ve Çelik, 2022).

1- M proper altmanifolddur

2- $H \in \Gamma(\mu)$

3- $\dim(D^\perp) = 1$

İspat $\forall X \in \Gamma(D^\perp)$ için (3.1.6) eşitliğini kullanarak

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)X = \alpha g(X, X)\xi$$

elde ederiz. Burada (3.1.19), (3.1.20), (3.1.22) ve (3.1.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X NX - \varphi(\nabla_X X + h(X, X)) - \alpha g(X, X)\xi &= 0 \\
-A_{NX}X + \nabla_X^\perp NX - N\nabla_X X - th(X, X) - nh(X, X) - \alpha g(X, X)\xi &= 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Denklemin teğetsel bileşenleri alınırsa

$$A_{NX}X + th(X, X) + \alpha g(X, X)\xi = 0$$

yazılır. Böylece denklem $W \in \Gamma(D^\perp)$ ile çarpılırsa

$$g(A_{NX}X, W) + g(th(X, X), W) = 0$$

olur. M total umbilik altmanifold olduğundan

$$g(A_{NX}W, X) + (th(X, X), W) = 0$$

$$g(h(W, X), NX) - g(h(X, X), NW) = 0$$

$$g(W, X)g(H, NX) - g(X, X)g(H, NW) = 0$$

$$-g(X, X)g(tH, W) + g(X, X)g(tH, X) = 0$$

olur. Buradan da

$$g(tH, X)W - g(tH, W)X = 0$$

olur. Burada ya tH sıfırdır ya da X ile W lineer olarak bağımlı vektör alanlarıdır. Eğer $tH \neq 0$ ise $\dim(D^\perp) = 1$ olur. Şayet $tH = 0$ ise bu $H \in \Gamma(\mu)$ demektir. M , $(LCS)_n$ altmanifold olduğundan $D_\theta \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ dir. $d_1 d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq 0$ olduğundan M proper $(LCS)_n$ dir.

4.1.7. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda anti-invariant distribüsyonu $D^\perp$ nın integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli şartlardan biri

$$A_{ND^\perp} D^\perp = 0$$

olmasıdır. Burada A şekil operatörüdür (Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018).

İspat $\forall Y, Z \in \Gamma(D^\perp)$ için (3.1.16), (3.1.19), (3.1.20), (3.1.22) ve (3.1.23) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_Z \phi Y &= \phi \tilde{\nabla}_Z Y + \alpha \{g(Y, Z)\xi + \eta(Y)Z + 2\eta(Y)\eta(Z)\xi\} \\ -A_{NY}Z + \nabla_Z^\perp NY &= N\nabla_Z Y + T\nabla_Z Y + th(Z, Y) + nh(Z, Y) + \alpha g(Y, Z)\xi\end{aligned}$$

olur. denklemin teğet kısımlarından

$$-A_{NY}Z = T\nabla_Z Y + th(Y, Z) + \alpha g(Y, Z)\xi$$

denklemini elde ederiz. Böylece

$$T[Y, Z] = A_{NZ}Y - A_{NY}Z$$

sonucuna ulaşılmış olur. Buradan $\forall Y, Z \in \Gamma(D^\perp)$ için $T[Y, Z] = 0$ dır. Böylelikle teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.8. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda slant distribüsyon olan D_θ nın integrallenebilir olabilmesi için gerekli ve yeterli şartlardan biri $X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$\omega_1 \{ \nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY}X - th(X, Y) + \alpha \eta(Y)X \} = 0 \quad (4.1.11)$$

şartını sağlamasıdır (Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018).

İspat $\forall X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ için (3.1.32) kullanılarak ve teğetsel kısım dikkate alınarak,

$$\begin{aligned}T[X, Y] &= \nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY}X - th(X, Y) \\ &\quad + \alpha \{g(X, Y)\xi + \eta(X)Y + 2\eta(X)\eta(Y)\xi\}\end{aligned} \quad (4.1.12)$$

(4.1.11)'e ω_1 'i uygulayarak (4.1.10) elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

4.1.2. Tanım $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

- i) $\forall X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ için $h(X, Y) = 0$ olması halinde M altmanifoldu, D_θ -total geodezik altmanifolddur.

- ii) $\forall Y, W \in \Gamma(D^\perp)$ için $h(Y, W) = 0$ olması halinde M altmanifoldu, $D^\perp$ -total geodezik altmanifolddur.
- iii) $\forall W \in \Gamma(D_\theta)$ ve $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için $h(W, Z) = 0$ olması halinde M altmanifoldu, mixed total geodezik altmanifolddur.

4.1.9. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldu ya mixed-total geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur (Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018).

İspat $\forall X \in \Gamma(D_\theta)$, $Y \in \Gamma(D^\perp)$ ile $V \in \chi^\perp(M)$ için (3.1.13), (3.1.3), (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21), (3.1.22) ve (3.1.23) kullanarak,

$$\begin{aligned}
 g(A_V X, Y) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, V) = -g(\tilde{\nabla}_Y V, Y) \\
 &= -g(\phi \tilde{\nabla}_X V, \phi Y) = g((\tilde{\nabla}_X \phi)V - \tilde{\nabla}_X \phi V, \phi Y) \\
 &= g(\alpha \{g(X, V)\xi + \eta(V)X + 2\eta(V)\eta(X)\xi\}, NY) - g(\tilde{\nabla}_X \phi V, NY) \\
 &= -g(\tilde{\nabla}_X tV + \tilde{\nabla}_X nV, NY) \\
 &= -g(h(X, tV), NY) - g(\nabla_X^\perp nV, NY)
 \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada (3.1.31), (3.1.29) ve (3.1.35) kullanılır ise

$$\begin{aligned}
 g(A_V X, Y) &= -g(h(X, tV), NY) - g((\nabla_X n)V + n \nabla_X^\perp V, NY) \\
 &= -g(h(X, tV), NY) - g(-h(X, tV) - NA_V X, NY) \\
 &= g(NA_V X, NY) = g(tNA_V X, Y)
 \end{aligned}$$

şekline dönüşür. O halde denkleme (3.1.24) uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 g(A_V X, Y) &= g(A_V X + \eta(A_V X)\xi - T^2 A_V X, Y) \\
 &= g(A_V X, Y) - g(T^2 A_V X, Y)
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\cos^2 \theta g(A_V X + \eta(A_V X)\xi, Y) = \cos^2 \theta g(A_V X, Y) = 0.$$

şekline dönüşür. Böylece $\cos^2 \theta = 0$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur. Bu da bize M altmanifoldunun anti-invaryant olduğunu gösterir. Ayrıca yukarıdaki denkleme (3.1.21) uygulanırsa eşitlik

$$g(A_V Y, X) = g(h(Y, X), V),$$

şekline dönüşür. $g(h(Y, X), V) = 0$ ise $h(Y, X) = 0$ olur. Burdan da M altmanifoldunun mixed-total geodezik olduğunu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

4.1.10. Teorem $\tilde{M} (LCS)_n$ -manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldu ya $D^\perp$ - total geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur (Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018).

İspat $\forall Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ ile $V \in \chi^\perp(M)$ için (3.1.31), (3.1.24), (3.1.35) ve (3.1.42) kullanılır ise,

$$\begin{aligned} g(h(Z, W), V) &= -g(\tilde{\nabla}_W V, Z) = -g(\phi \tilde{\nabla}_W V, \phi Z) \\ &= g((\tilde{\nabla}_W \phi)V - \tilde{\nabla}_W \phi V, \phi Z) \\ &= g(\alpha \{g(W, V)\xi + \eta(V)W + 2\eta(V)\eta(W)\xi\}, NZ) - g(\tilde{\nabla}_W \phi V, NZ) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_W tV, NZ) - g(\tilde{\nabla}_W nV, NZ) \\ &= -g(h(W, tV), NZ) - g(\nabla_W^\perp nV, NZ), \end{aligned}$$

yazılır. Buradan (3.1.13), (3.1.3), (3.1.19), (3.1.20), (3.1.21), (3.1.22) ile (3.1.23) kullanılır ve akabinde gerekli düzenlemeler yapılır ise

$$\begin{aligned} g(h(Z, W), V) &= -g(h(W, tV), NZ) - g((\nabla_W n)V, NZ) \\ &= -g(h(W, tV), NZ) + g(h(tV, W) + NA_V W, NZ) \\ &= g(NA_V W, NZ) = g(tNA_V W, Z) \\ &= g(A_V W + \eta(A_V W)\xi - T^2 A_V W, Z) \\ &= g(A_V W, Z) - g(T^2 A_V W, Z), \end{aligned}$$

$$\cos^2 \theta g(A_V W + \eta(A_V W)\xi, Z) = \cos^2 \theta g(A_V W, Z) = 0$$

denklemini elde edilir. Eğer

Son bağıntıda, $\cos^2\theta = 0$ ise $\theta = \frac{\pi}{2}$ olur. Bu durum da M altmanifoldunun anti-invariant olduğunu gösterir. Şayet $g(h(Z, W), V) = 0$ ise $h(Z, W) = 0$ olduğundan M altmanifoldu $D^\perp$ -total geodezik altmanifold olur.

4.1.3. Tanım $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer M altmanifoldunun D_θ ve $D^\perp$ distribüsyonları M altmanifoldunda total geodezik iseler M altmanifolduna kontak pseudo-slant çarpım adı verilir.

4.1.11. Teorem $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M altmanifoldu bir kontak pseudo-slant çarpımdır (Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018).

İspat $\forall X, Y \in \Gamma(D_\theta)$ ile $Z \in \Gamma(D^\perp)$ için (3.1.3), (3.1.19), (3.1.20), (3.1.31), (3.1.33) ve (3.1.44) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 g(\nabla_X Y, Z) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, \varphi Z) = g(\tilde{\nabla}_X \varphi Y - (\tilde{\nabla}_X \varphi)Y, \varphi Z) \\
 &= g(\tilde{\nabla}_X \varphi Y, NZ) - g(\alpha\{g(X, Y)\xi + \eta(Y)X + 2\eta(Y)\eta(V)\xi\}, NZ) \\
 &= g(h(X, TY), NZ) + g(\nabla_X^\perp NY, NZ) \\
 &= g(h(X, TY), NZ) + g((\nabla_X N)Y + N \nabla_X Y, NZ) \\
 &= g(h(X, TY), NZ) + g(nh(X, Y), NZ) \\
 &\quad - g(h(X, TY), NZ) + g(N \nabla_X Y, NZ) \\
 &= g(N \nabla_X Y, NZ) = g(tN \nabla_X Y, Z) \\
 &= g(\nabla_X Y + \eta(\nabla_X Y)\xi - T^2 \nabla_X Y, Z)
 \end{aligned}$$

olur. Buda

$$g(T^2 \nabla_X Y, Z) = \cos^2\theta g(\nabla_X Y + \eta(\nabla_X Y)\xi, Z) = \cos^2\theta g(\nabla_X Y, Z) = 0 \quad (4.1.13)$$

olduğunu gösterir.

$\forall Z, W \in \Gamma(D^\perp)$ ile $X \in \Gamma(D_\theta)$ için

$$\begin{aligned}
g(\nabla_W Z, X) &= -g(\tilde{\nabla}_W X, Z) = -g(\varphi \tilde{\nabla}_W X, \varphi Z) \\
&= g((\tilde{\nabla}_W \varphi)X, \varphi Z) - g(\tilde{\nabla}_W \varphi X, \varphi Z) \\
&= g(\alpha \{g(W, X)\xi + \eta(X)W + 2\eta(X)\eta(W)\xi\}, NZ) - g(\tilde{\nabla}_W \varphi X, NZ) \\
&= -g(h(TX, W), NZ) - g(\nabla_W^\perp NX, NZ) \\
&= -g(h(TX, W), NZ) - g((\nabla_W N)X + N\nabla_W X, NZ) \\
&= -g(h(TX, W), NZ) - g(nh(X, W), NZ) \\
&\quad + g(h(W, TX), NZ) - g(N\nabla_W X, NZ) = -g(tN\nabla_W X, Z) \\
&= -g(\nabla_W X + \eta(\nabla_W X)\xi - T^2\nabla_W X, Z) \\
&= g(\nabla_W Z, X) - g(T^2\nabla_W X, Z)
\end{aligned}$$

yani,

$$\cos^2 \theta g(\nabla_W X + \eta(\nabla_W X)\xi, Z) = \cos^2 \theta g(\nabla_W X, Z) = -\cos^2 \theta g(\nabla_W Z, X) = 0 \quad (4.1.14)$$

elde edilmiş olur. Böylece (4.1.12) ile (4.1.13)'den teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek $M, \mathbb{R}^{11}$ 'de 4-boyutlu

$$X_t(u, v, w, t) = (v \cos u, w \cos u, v + w, -w \cos u, -v \cos u, v \sin u, w \sin u, v + w, w \sin u, v \sin u, t).$$

olarak tanımlanan altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun tanjant demeti

$$\begin{aligned}
e_1 &= -v \sin u \frac{\partial}{\partial x_1} - w \sin u \frac{\partial}{\partial x_2} + w \sin u \frac{\partial}{\partial x_4} + v \sin u \frac{\partial}{\partial x_5} \\
&\quad + v \cos u \frac{\partial}{\partial y_1} - w \cos u \frac{\partial}{\partial y_2} + w \cos u \frac{\partial}{\partial y_4} + v \cos u \frac{\partial}{\partial y_5} \\
e_2 &= \cos u \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos u \frac{\partial}{\partial x_5} + \sin u \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin u \frac{\partial}{\partial y_5} \\
e_3 &= \cos u \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} - \cos u \frac{\partial}{\partial x_4} + \sin u \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} + \sin u \frac{\partial}{\partial y_4}, e_4 = \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned}$$

yukarıda ki gibi verilmiş olan tanjant vektörleri tarafından oluşturulduğu kolayca görülür. $\mathbb{R}^{11}$ 'in koordinat sistemi şayet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, z)$ şeklinde seçilir ise, $\mathbb{R}^{11}$ 'in φ hemen hemen kontak yapısı

$$\varphi \left(\sum_{i=1}^5 \left\{ X_i \frac{\partial}{\partial X_i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right\} + Z \frac{\partial}{\partial z} \right) = \sum_{i=1}^5 \left(Y_i \frac{\partial}{\partial X_i} + X_i \frac{\partial}{\partial y_i} \right),$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta = d_z, \quad g = \eta \otimes \eta + \sum_{i=1}^5 (dx_i^2 + dy_i^2).$$

şeklinde tanımlanabilir. Bu durumda

$$U = \mu_i \frac{\partial}{\partial X_i} + v_i \frac{\partial}{\partial y_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \in T(\mathbb{R}^{11})$$

olmak üzere

$$\varphi U = \mu_i \varphi \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) + v_i \varphi \left(\frac{\partial}{\partial y_i} \right) + \lambda \varphi \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \mu_i \frac{\partial}{\partial y_i} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$g(\varphi U, \varphi U) = \mu_i^2 + v_i^2, g(U, U) = \mu_i^2 + v_i^2 - \lambda^2, \eta(U) = g(U, \xi) = \lambda, \eta(\xi) = -1 \text{ olur.}$$

Bu durumda

$$\varphi^2 U = \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} + v_i \frac{\partial}{\partial y_i} = U + \eta(U) \xi,$$

$$g(\varphi U, \varphi U) = g(U, U) \eta^2(U).$$

koşulları sağlanmış olur. Böylelikle (φ, ξ, η, g) , $\mathbb{R}^{11}$ 'in hemen hemen para kontak metrik yapısı olur. Yukarıdaki baz vektöre φ uygulanır ise

$$\begin{aligned} \varphi e_1 = & -v \sin u \frac{\partial}{\partial y_1} - w \sin u \frac{\partial}{\partial y_2} + w \sin u \frac{\partial}{\partial y_4} + v \sin u \frac{\partial}{\partial y_5} \\ & + v \cos u \frac{\partial}{\partial x_1} - w \cos u \frac{\partial}{\partial x_2} + w \cos u \frac{\partial}{\partial x_4} + v \cos u \frac{\partial}{\partial x_5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi e_2 &= \cos u \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_3} - \cos u \frac{\partial}{\partial y_5} + \sin u \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin u \frac{\partial}{\partial x_5} \\ \varphi e_3 &= \cos u \frac{\partial}{\partial y_2} + \frac{\partial}{\partial y_3} - \cos u \frac{\partial}{\partial y_4} + \sin u \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \sin u \frac{\partial}{\partial x_4}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan da gerekli işlemler yapılırsa

$$\cos \theta = \frac{g(\varphi e_2, e_2)}{\|\varphi e_2\| \|e_2\|} = \frac{g(\varphi e_3, e_3)}{\|\varphi e_3\| \|e_3\|} = \frac{g(\varphi e_3, e_2)}{\|\varphi e_3\| \|e_2\|} = \frac{g(\varphi e_2, e_3)}{\|\varphi e_2\| \|e_3\|} = \frac{1}{2}, \theta = 60^\circ$$

sonucuna ulaşırız. Bu sonuca göre $D_\theta = \text{span}\{e_2, e_3\}$ slant açığına sahip bir slant distribüsyon olduğu sonucunu çıkarabiliriz. $g(\varphi e_1, e_i) = 0, i = 2, 3, 4$ olduğundan, φe_1 M altmanifolduna diktir. Böylelikle $D^\perp = \text{span}\{e_1\}$ anti-invaryant (total reel) distribüsyondur. Böylece M altmanifoldu $\mathbb{R}^{11}$ 'de hemen hemen para kontak metrik yapısı ile 4 boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifold olur (Dirik, Atçeken ve Yıldırım, 2018).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

1) $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

a) $D^\perp$ nın integrallenebilmesi için gerekli ve yeterli koşullardan biride

$$A_{ND^\perp} D^\perp = 0$$

dır.

b) D_θ nın integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşullardan biri,

$$\omega_1 \{ \nabla_X TY - T \nabla_Y X - A_{NY} X - th(X, Y) + \alpha \eta(Y)X \} = 0$$

olmasıdır.

2) $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun total umbilik altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki kavramlardan en az biri doğrudur.

a) M proper altmanifolddur

b) $H \in \Gamma(\mu)$

c) $Dim(D^\perp) = 1$

3) $\tilde{M}$ $(LCS)_n$ -manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

a) M altmanifoldu mixed total geodezik altmanifold olur.

b) M altmanifoldu D_θ - total geodezik altmanifold olur.

c) M altmanifoldu $D^\perp$ - total geodezik altmanifold olur.

d) M altmanifoldu anti-invariant altmanifold olur.

e) M altmanifoldu kontak pseudo-slant çarpım olur.

Bu sonuçlar genişletilerek farklı manifoldlara uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- Aslım, G. (1988). *Genel Topoloji*. Ege Üniv. Fen Fakültesi Yayınları. No. 109, İzmir.
- Atçeken, M. and Hui, S. K. (2013). Slant and Kontak Pseudo-Slant Submanifolds in $(LCS)_n$ -manifolds. *Czechoslovak M.J.* 63(138), 177-190.
- Atçeken, M. and Dirik, S. (2014). On The Geometry of Kontak Pseudo - Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold. *Gulf Mathematical of Journal.* 2(2), (51-66).
- Bishop, R. L. and O'Neil, B. (1969). Manifolds of Negative Curvature. *Trans. Am. Math. Soc.* 145: 1–49.
- Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc. London.
- Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000). Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds. *Glasgow Math., J.* 42, 125-138.
- Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (1999). Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds, *Geometriae Dedicata.* 78, 183-199.
- Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds*, Pure ve Applied Mathematics. No. 22. *Marcel Dekker, Inc. New York.*
- Chen, B. (1990). *Geometry of Slant Submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, View at ZentralblattMath.
- Chen, B. (1990). Slant immersions. *Austral. Math. Soc.* 41, 135-147.
- De, U. C. and Sarkar, A. (2004). On Pseudo-Slant Submanifolds of Trans Sasakian Manifolds Slant Submanifolds. *Procedings of the Estonian A.S.* 60: 1–11.
- Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, U. (2017). Contact Pseudo-Slant Submanifold of a Normal Paracontact Metric Manifolds. *International Journal of Applied Mathemaatics and Statistics.* 56: 33–41.
- Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, U. (2018). On The Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds in An $(LCS)_n$ -Manifold. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics.* 2: 96–109.
- Dirik, S. and Yıldırım, U. (2022). Characterization of Contact Pseudo-Slant Submanifolds of a Para Kenmotsu Manifold. *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology.* 3:49-59.
- Dirik, S. and Çelik, Ü. (2022). On Contact Pseudo-Slant Submanifolds in $(LCS)_n$ - Manifolds. *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology.* 3(2),41-50.

- Duggal, K. L. and Bejancu, A. (1996). Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifold and Applications. *Kluwer, Dordrecht*.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1980). *Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş*. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.
- Hacısalıhoğlu, H. H. (1983). *Diferansiyel Geometri*. İnönü Üniversitesi Yayınları.
- Hui, S., Atçeken, M. and Pal, T. (2017). Warped Product Pseudo-Slant Submanifolds of $(LCS)_n$ -Manifolds. *New Trends in Math. Sciences*. 5: 204–212.
- Khan V. A and Khan M. A. (2007). Kontak Pseudo-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *Indian J. pure appl. Math.* (38)31-42.
- Lotta, A. (1996). Slant Submanifolds in Contact Geometry. *Bull. Math. Soc. Roumanie*. 39, 183-198.
- Matsumoto, K. and Mihai, I. (1988). On A Cartain Transformation in A Lorentzian Para Sasakian Manifold. *Tensor, New Ser.* 47: 189–197.
- Mihai, I. and Cheen, B. (2009). Classification of A Quasi-Minimal Slant Surfaces in Lorentzian Complex Space Forms. *Acta Math. Hung.* 122: 307–328.
- O'Neill B. (1983). Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativit. Pure and Applied Mathematics, 103. *Acedemic Press, Inc. Newyork*.
- Pandey, P. K. and Gupta, R. S. (2008). Characterization of a Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold. *Novi. Sad. J. Math, Vol. 38 (1)*, 97-102.
- Papaghuic, N. (1994). Semi-Slant Submanifolds of a Kaehlarian manifold. *An. St. Univ. Al. I. Cuza. Univ. Iasi*. 40, 55-61.
- Shaikh, A. A. (2003). On Lorentzian Almost Paracontact Manifolds with A Structure of the Conccircular Type. *Kyungpook Math. J.* 43: 305–314.
- Shaikh, A. A. and Bahishya, K. (2005). On Conccircular Structure Spacetimes, *J. Math. Stat.* 1: 129–132.
- Shaikh, Kim, H. and Hui, S. (2011). On Lorentzian Quasi-Einstein Manifolds, *J. Korean Math. Soc.* 48: 669–689.
- Sular, S. (2009). *Kenmotsu Manifoldlar ve Bunların Bazı Altmanifoldları*. D. Tezi. Balıkesir.
- Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi.*, Nobel Yayıncılık, No. 457, Ankara.

- Yano, K. (1940). Conircular Geometry. 1. Conircular Transformations. *Proc. Tmp. Acad. Jop.* 16: 195–200.
- Yano, K. ve Kon, M. (1984). Structures on Manifolds., *Series in Pure Mathematics*, 3. *World Scientific Publishing Co. Singapore.* 72.
- Yano, K. ve Kon, M. (1979). Anti-Invariant Submanifolds of Sasakian Space Form. *Kodai Math. J.* 2, 171-186



ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Ümit ÇELİK

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

- 1-) Dirik, S. and Çelik, Ü. (2022). On Contact Pseudo-Slant Submanifolds in $(LCS)_n$ -Manifolds, *Journal of Amasya University the Institute of Sciences and Technology*, 3(2), 41-50.

