

BİR MODÜL SINIFINA GÖRE SÜREKLİ
VE YARI-SÜREKLİ MODÜLLER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Teslime Ebru CEYLAN

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Nisan 2010

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİR MODÜL SINIFINA GÖRE SÜREKLİ

VE YARI-SÜREKLİ MODÜLLER

Teslime Ebru CEYLAN

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

NİSAN 2010

ONAY SAYFASI

Ebru Teslime CEYLAN'nın yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “**Bir modül sınıfına göre sürekli ve yarı-sürekli modüller** ” başlıklı bu çalışma,
lisansüstü yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca

06/04/2010

tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu
ile kabul edilmiştir.

Jüri Üyesi : (Başkan) Doç. Dr. Muhittin BAŞER

Jüri Üyesi : (Danışman) Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Jüri Üyesi : Yrd. Doç. Dr. Engin TAŞ

Afyon kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun
...../...../..... Gün ve
...../.....
sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Rıdvan Ünal
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

İÇİNDEKİLER

ONAY SAYFASI	i
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
SİMGELER DİZİNİ	vii
1.GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR ve ÖZELLİKLER	3
2.1 Cebirsel Yapılara Giriş	3
2.2 İnjektif ve Projektif Modüller	8
2.3 Homomorfizmalar	9
2.4 Artan ve Azalan Zincir Şartları	11
2.5 Burulmalı ve Burulmasız Modüller	11
2.6 Esas Alt Modüller	12
2.7 Bazı Özel Tanımlar	15
3. BİR MODÜL SINIFINA GÖRE SÜREKLİLİK	19
3.1 Bir Sınıf Göre Süreklilik.....	19

3.2 Özel Bir Sınıfa Göre $(C1)-(C3)$ Kavramları	21
3.4 Sonlu Direk Toplama Göre $(C1)-(C3)$ Şartları	28
3.3 Extending Modüllerin Ayrışimleri	29
4. TORSİYON TEORİYE GÖRE KAVRAMLAR	32
4.1 Torsiyon Teori İle İlgili Bazı Özel Karakterizasyonlar.....	32
5. BİR HALKAYA GÖRE SÜREKLİLİK.....	35
5.1 Artinian ve Noetherian Halkalarda Süreklilik.....	36
5.2 Bazı Özel Halkalara Göre Karakterizasyonlar	38
KAYNAKLAR.....	39
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR MODÜL SINIFINA GÖRE SÜREKLİ VE YARI-SÜREKLİ MODÜLLER

Ebru Teslime CEYLAN

Matematik Anabilim Dalı

Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, çalışmamız için gerekli olan bazı tanım ve teoremler ile $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ şartları ve bu şartların diğer bazı özellikleri verilmiştir. İkinci bölümde, extending, yarı-sürekli ve sürekli modüllerin bir modül sınıfına göre $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ şartlarının bir uyarlaması olarak tanımlanmış olan bu özelliklere ait karakterizasyonlar incelenmiştir. Ayrıca, bu bölümde direkt toplama ait özellikler ve kısa tam diziye göre genişleme problemleri çalışılmıştır. Üçüncü bölümde, bir R halkasına göre süreklilik karakterizasyonu ve düzgün boyutlu bir M modülü için yarı-sürekli modül karakterizasyonu incelenmiştir. Son olarak dördüncü bölümde genel teorideki $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ şartları bir modül sınıfına göre $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ şartları ile karşılaştırılmış, diğer bazı özel halka karakterizasyonları ile ilişkileri çalışılmıştır.

2010, 46 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sürekli Modül, Yarı-Sürekli Modül, Extending Modül.

ABSTRACT

Msc. Thesis

CONTINUOUS AND QUASI-CONTINUOUS MODULES RELATIVE TO A MODULE CLASSES

Ebru Teslime CEYLAN

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ

This master thesis consists of four chapters. In the first chapter, some necessary definitions and theorems which is needed for our study, $(C1)$, $(C2)$, $(C3)$ conditions as well as some properties of these conditions are given. In the second chapter, extending, (quasi-)continuous and continuous modules are examined according to one family of submodules that fits into $(C1)$, $(C2)$ and $(C3)$. Besides that, some properties related with direct sum and extended problems according to short exact sequence in the some chapter. In the third chapter, quasi continuous characterizations is examined for module M which has a uniform dimension according to ring R . By 4th chapter, $(C1)$, $(C2)$ and $(C3)$ conditions are compared with on $(C1)$, $(C2)$ and $(C3)$ conditions in a module and the relations between some of the ring characterization are studied.

2010, 46 pages

Keywords: Continuous Module, Quasi-Continuous Module, Extending Module.

TEŞEKKÜR

Bana bu çalışmayı veren, sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Semra DOĞRUÖZ' e, çalışmalarımın devamında yardımlarını esirgemeyen ve danışmanlığımı üstlenen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hasan ÖĞÜNMEZ'e ve çalışmamın kontrollerinde ve düzenlenmesinde yardımcı olan sayın Doç. Dr. Muhittin BAŞER hocama ilgi ve yardımlarından dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmalarım sırasında her zaman yanımda olan, sabır ve anlayışla bana destek olan eşim Ümit Can CEYLAN'a ve aileme teşekkür ederim.

Ebru Teslime CEYLAN

Afyonkarahisar, Nisan 2010

SİMGELER DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$\in$	: Elemanı
$\subset$	: Alt küme (sınıf)
0	: Sıfır modülü
$\subseteq$	: Alt veya eşit küme
M_R	: Sağ R -modül
$\emptyset$	: Boş küme
${}_R M$	: Sol R -modül
$\cap$	: Kesişim (Arakesit)
$\leq$	: Alt modül
$\cup$	: Birleşim
$\leq_e$	: Esas alt modül
$\leq_c$	: Komplement alt modül
$\leq_d$	: Direkt toplanan
$\cong$	: İzomorf
$\oplus$	: Direkt toplam
$Im f$	: f nin görüntü kümesi
$Ker f$	: f nin çekirdeği
$End^l(M)$	: (Toplamsal) değişmeli M grubunun sol endomorfizmaları halkası
$End^r(M)$	: (Toplamsal) değişmeli M grubunun sağ endomorfizmaları halkası
$\mathcal{X}$	: R -modüllerin belirli bir sınıfı
$\mathcal{U}$	: Düzgün R -modüllerin sınıfı
$\mathcal{P}$	: Projektif R -modüllerin sınıfı
$\mathcal{N}$	: Noetherian modüllerin sınıfı
$Z_2(M)$	: İkinci singüler alt modül

1 GİRİŞ

Bu çalışmada, sürekli geometriler ve sürekli regular halkalar için Von Neumann ve Utumi'nin çalışmaları kaynak alınarak sürekli modüller ve bu modüllerin çeşitli genellemeleri incelenmiştir.

Geçen yıllarda bazı yazarlar ([3], [4], [9], [11], [12], [13], [14], [15]) çalışmalarında, modüllerin injektiflik kavramının çeşitli genellemeleri, sürekli modüller ve bu türden kavramları çalışmışlardır. [9] da sürekli modüller ve ilgili teoremler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

([6], [7])'de yerel injektiflik kavramları detaylı bir şekilde incelendiği halde, bu çalışmalarda bazı tamamlanmamış tanımlar vardır. Bu çalışmada, N , bir halka ve M , bir sağ N modül olmak üzere M 'nin N -süreklilik kavramı tanımlanacak ve buradan elde edilecek bazı sonuçlar ve özellikler incelencektir.

Örneğin M , $\{N_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ailesindeki her modül için N_i -sürekliliği ise o zaman M 'nin, $\bigoplus_{i=1}^n N_i$ -sürekliliği olduğu gösterilecektir. Bununla birlikte, sonsuz direkt toplamlarda bu durumu göstermek gerekli değildir.

Bu çalışmada, özellikle halkaların temel özellikleri ile ilgili bir modülün sürekliliği incelenecektir. Başka uygulamalar içinde ise yerel süreklilik kavramını içeren bazı aileler karakterize edilecektir.

R bir halka, M bir sağ R -modül olsun. Eğer M bir extending modül ise M 'nin her direkt toplananı da extending modüldür. Fakat bu durumun tersi genelde doğru değildir. Bu yönünün ispatı için matematikçiler gerekli şartlar araştırmaktadırlar.

“Yerel süreklilik” adlı bu çalışma, [15]’te geniş bir şekilde ele alınmıştır

Bu çalışmada aksini belirtmedikçe R birimli bir halkayı gösterecek ve tüm R modüller birimsel sağ modüller olacaktır.

A ve B , birer R - modül olsun. A modülü B modülünün esas alt modülü ise $A \leq_e B$, A modülü B modülünün bir direkt toplananı ise $A \leq_d B$, A modülü, B modülünün komplement alt modülü ise $A \leq_c B$ gösterimi kullanılacaktır.

2 BAZI TEMEL KAVRAMLAR ve ÖZELLİKLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı temel kavramlar ve özellikleri verilecektir.

2.1 Cebirsel Yapılara Giriş

Tanım 2.1.1 R boş olmayan bir küme olsun. R üzerinde iki ikili işlem toplama “+” ve çarpma “.” tanımlansın. Bu işlemlere göre;

- (i) $(R, +)$ bir değişmeli grup,
- (ii) Her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$,
- (iii) Her $a, b, c \in R$ için soldan ve sağdan dağılma özellikleri yani;

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$(a + b)c = ac + bc$$

sağlanıyorsa $(R, +, \cdot)$ cebirsel yapısına bir *halka* denir. $(R, +, \cdot)$ notasyonu yerine kolaylık açısından R kullanılır. R bir halka olmak üzere, eğer her $a \in R$ için

$$1_R a = a 1_R = a$$

olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa, R ye *birimli halka* ve her $a, b \in R$ için

$$ab = ba$$

ise R ye *değişmeli halka* denir.

Bir R halkasında, $(R, +)$ değişmeli bir grup olduğundan bu toplamsal grubun etkisiz (birim) elemanı vardır. Bu eleman 0_R ile gösterilirse, 0_R ye R nin *sıfır elemanı* denir. (Hungerford, 1973)

Tanım 2.1.2 R bir halka olsun. S , R deki toplama ve çarpma işlemleri altında kapalı olan R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. S nin kendisi bu işlemlere göre kendi başına bir halka oluyor ise, S ye R nin bir *alt halkası* denir. (Hungerford, 1973)

Tanım 2.1.3 Sıfır böleni olmayan, sıfırdan farklı birimli ve değişmeli bir halkaya *bölge* (*domain*) denir. (Hungerford, 1973)

Tanım 2.1.4 R bir halka olsun. Bir (toplamsal) değişmeli M grubu ve M sıfırdan farklı olmak üzere

$$\lambda : R \longrightarrow \text{End}^l(M)$$

bir halka homomorfizması olacak şekilde R den M nin sol endomorfizmaları halkasına bir λ fonksiyonu var ise, (M, λ) çiftine bir *sol R -modül* denir. Bu durumda her bir $a \in R$ için

$$\lambda(a) : M \longrightarrow M$$

dönüşümü, her $a, b \in R$ ve her $x, y \in M$ için

$$\lambda(a)(x + y) = \lambda(a)(x) + \lambda(a)(y)$$

$$\lambda(a + b)(x) = \lambda(a)(x) + \lambda(b)(x)$$

$$\lambda(ab)(x) = \lambda(a)(\lambda(b)(x))$$

özelliklerini sağlar. Ayrıca $\lambda(1_R)(x) = x$ ise (M, λ) çiftine *birimsel sol R -modül* denir.

Pratikte, genel olarak λ ve parantezler ihmal edilerek $\lambda(a)(x)$ yerine ax yazılır. O zaman $(a, x) \longrightarrow ax$ ile tanımlı $R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu her $a, b \in R$ ve her $x, y \in M$ için aşağıdaki özellikleri sağlar.

$$a(x + y) = ax + ay$$

$$(a + b)x = ax + bx$$

$$(ab)x = a(bx)$$

Bu durumda M 'ye bir *sol R -modül* denir. Ayrıca

$$1_R x = x$$

ise M' ye bir *birimsel sol R -modül* denir.

Sağ R -modül'de benzer biçimde tanımlanır. O zaman $(x, a) \longrightarrow xa$ ile tanımlı $M \times R \longrightarrow R$ fonksiyonu her $a, b \in R$ ve her $x, y \in M$ için

$$(x + y)a = xa + ya$$

$$x(a + b) = xa + xb$$

$$x(ab) = (xa)b$$

özelliklerini sağlarsa M' ye bir *sağ R -modül* denir. Ayrıca

$$x1_R = x$$

ise M ye *birimsel sağ R -modül* denir.

Bir R halkası değişmeli ve M, R üzerinde herhangi bir sol R -modül olsun. Her $a \in R$ ve her $x \in M$ için $xa = ax$ olarak tanımlanırsa M aynı zamanda bir sağ R -modül olur.

Aşıkarak $\{0\}$ (sıfır) modülünü kısaca “0” ile göstereceğiz. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.5 R bir halka, M bir sağ R -modül ve N, M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. M nin işlemlerine göre N, M nin bir toplamsal alt grubu ve her $r \in R$ ve her $b \in N$ için $br \in N$ ise, N ye M nin bir *sağ alt modülü* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

N bir sağ alt modül ise N bir sağ R -modüldür. R birimli bir halka ve M birimsel sağ R -modül ise, M nin bütün alt modülleri de birimsel sağ R -modüllerdir.

Sol R -modül için alt modül kavramı benzer biçimde tanımlanır. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.6 R -modül M nin kendisinden ve 0 modülünden farklı diğer alt modüllerine M nin *öz alt modülleri* denir.

M bir R -modül olsun. Aşağıda verilen iki şartı da sağlayan M nin bir K alt modülüne M' nin bir *maksimal alt modül*ü denir.

(i) K , M nin bir öz alt modülüdür,

(ii) M nin K yı kapsayan kendisinden başka hiçbir öz alt modülü yoktur. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.7 M bir sağ R -modül ve K , M nin bir alt modülü olsun. M nin K alt modülüne göre denklik sınıflarının kümesi

$$M/K = \{x + K : x \in M\}$$

$a \in R$ ve $x, y \in M$ için aşağıda verilen

$$(x + K) + (y + K) = (x + y) + K$$

$$(x + K)a = xa + K$$

toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir sağ R -modüldür. Toplamsal birim $K = 0 + K$ ve toplamsal ters eleman $-(x + K) = (-x) + K$ biçimindedir.

M/K modülüne M nin bir *sağ R -bölüm modülü* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.8 Sıfırdan farklı bir M modülü aşikar olmayan alt modüllere sahip değilse (yani M 'nin sıfırdan ve kendisinden başka alt modülü yoksa) M ye *basit (simple) modül* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.9 M bir R -modül ve Λ indis kümesi olmak üzere $(T_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, M nin basit alt modüllerinin indislenmiş bir ailesi olsun. Eğer M , bu kümenin direkt toplamı ise, bu takdirde

$$M = \oplus_\Lambda T_\alpha$$

M nin bir yarı basit ayrışımıdır.

Bir M modülü bir yarı basit ayrışımına sahipse M ye bir *yarı basit modül* denir. Diğer bir deyişle, basit modüllerin bir direkt toplamına bir *yarı basit modül* denir.

Açık olarak her basit modül yarı basit modüldür, böylece her halka için yarı basit modüller bulunabilir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.10 $\mathcal{B}$, modüllerin bir sınıfı olsun. Bir M modülü için, eğer $\mathcal{B}$ de bir (sonlu) $(B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ indislenmiş kümesi için bir

$$\bigoplus_{\alpha \in \Lambda} B_\alpha \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

epimorfizması varsa M modülüne $\mathcal{B}$ tarafından (sonlu) üreteçli (yada, $\mathcal{B}$, M yi (sonlu) üretir) denir.

Eğer $\mathcal{B} = \{B\}$ şeklinde bir tek elemandan oluşuyor ise bu takdirde $\mathcal{B}$, M yi (sonlu) üretir ve tabii ki bu anlamda (sonlu) bir Λ kümesi için bir

$$B^{(\Lambda)} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

epimorfizması vardır.

Diğer bir deyişle, n , bir pozitif tam sayı olmak üzere bir M sağ R -modülün sonlu bir $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ alt kümesi için $M = m_1R + m_2R + \dots + m_nR$ oluyorsa M ye bir *sonlu üreteçli modül* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.1.11 X , bir R -modül M nin bir alt kümesi ise M nin X alt kümesini içeren bütün alt modüllerinin arakesitine X' in ürettiği alt modül denir. Eğer X sonlu ve X' in ürettiği alt modül N ise, N ye *sonlu üreteçli modül* denir. Eğer $X = \emptyset$ ise, o zaman X , sıfır modülünü üretir.

Eğer bir $a \in M$ için $X = \{a\}$ tek elemanlı bir küme ise, o zaman X in ürettiği alt modüle a elemanının ürettiği devirli alt modül denir.

Ayrıca bir sağ R -modül M verildiğinde, bir $m \in M$ için $M = mR$ oluyorsa M ye bir *devirli modül* denir. (Hungerford, 1973)

Tanım 2.1.12 M bir R -modül $A \leq M$ ve $C \leq B \leq M$ olsun. Bu durumda

$$B \cap (A + C) = C + (A \cap B)$$

dir. Bu kurala *Modüler Kuralı* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

2.2 İnjektif ve Projektif Modüller

Tanım 2.2.1 R bir halka, U bir sağ R -modül olmak üzere, her bir $h : K \rightarrow M$ monomorfizması ve her bir $\alpha : K \rightarrow U$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccccc} & & U & & \\ & \nearrow \alpha & \uparrow \alpha' & & \\ 0 \longrightarrow & K & \xrightarrow{h} & M & \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $\alpha' h = \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha' : M \rightarrow U$ R -homomorfizması var ise, bu takdirde U ya M modülüne göre *injektiftir* (veya U , M -*injektiftir*) denir.

Her R -modül M' ye göre injektif olan bir modüle *injektif modül* denir. (Sharpe, Vamos, 1972)

Tanım 2.2.2 M bir R -modül olsun. M modülü M -injektif ise M' ye bir yarı-injektif ((quasi-)injektif) modül denir. (Sharpe, Vamos, 1972)

Teorem 2.2.3 M_1 ve M_2 , M nin alt modülleri olmak üzere

$$M = M_1 \oplus M_2$$

olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M_2 , M_1 -injektiftir.
- (ii) $N \cap M_2 = 0$ olacak şekilde M' nin herbir N alt modülü için

$$M = M' \oplus M_2$$

ve $N \subseteq M'$ olacak şekilde M' nin bir M' alt modülü vardır.

İspat. Bakınız. (Harmancı , Smith, 1993)

Tanım 2.2.4 R bir halka, U bir sağ R -modül olsun. M bir sağ R -modül olmak üzere, her bir $g : M \longrightarrow N$ epimorfizması ve her bir $\alpha : U \longrightarrow N$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccc} & U & \\ \alpha' \swarrow & \downarrow \alpha & \\ M \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow 0 \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan, yani $g\alpha' = \alpha$ olacak şekilde bir

$$\alpha' : U \longrightarrow M$$

R -homomorfizması var ise, bu takdirde U ya M modülüne göre *projektif modül* denir.

R bir halka, P bir sağ R -modül olmak üzere eğer P , her sağ R -modül M ye göre projektif ise P ' ye *projektif modül* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

2.3 Homomorfizmalar

Tanım 2.3.1 R bir halka, M ve N sağ R -modüller olsun. Her $x, y \in M$ ve her $r \in R$ için

$$(i) f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$(ii) f(xr) = f(x)r$$

ise $f : M \longrightarrow N$ fonksiyonuna bir *sağ R -modül homomorfizması* denir.

Gruplarda ve halkalarda olduğu gibi eğer f sırasıyla, birebir, örten ve hem birebir hem örten ise f ye sırasıyla, *sağ R -modül monomorfizması*, *sağ R -modül epimorfizması* ve *sağ R -modül izomorfizması* denir.

Eğer $M = N$ ise R -modül homomorfizmasına R -modül endomorfizması, R -modül izomorfizmasına ise R -modül otomorfizması denir. Bir M sağ R -modülünün endomorfizmaları halkası

$$End^r(M)$$

ile gösterilir.

Diğer yandan bir $f : M \longrightarrow N$ R -modül homomorfizması için f nin görüntü kümesi

$$Imf = \{f(x) : x \in M\}$$

ve f in çekirdeği

$$Kerf = \{x \in M : f(x) = 0\}$$

biçiminde tanımlanır. (Hungerford, 1973)

Tanım 2.3.2 M, M', M'' R -modüller ve $f : M' \longrightarrow M$ ve $g : M \longrightarrow M''$ R -modül homomorfizmaları olsun. Eğer $Imf = Ker g$ ise $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ homomorfizma çifti M de tam olarak adlandırılır. Bir tek $M' \xrightarrow{f} M$ homomorfizması için f, M' ve M de tamdır denir. Son olarak (sonlu yada sonsuz) bir

$$\dots \xrightarrow{f_{n-1}} M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \dots$$

homomorfizmalar dizisi her bir M_n de tam, yani her bir f_n, f_{n+1} çifti için $Imf_n = Kerf_{n+1}$ ise, homomorfizmalar dizisine *tam dizi* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.3.3 $f : M \longrightarrow N$ ve $f' : N \longrightarrow M$, $ff' = 1_N$ olacak şekilde R -modül homomorfizmaları olsun. Buna göre $f : M \longrightarrow N$ homomorfizmasına bir *split epimorfizm* denir ve $M \xrightarrow{f} \bigoplus \longrightarrow N \longrightarrow 0$ ile gösterilir. $f' : N \longrightarrow M$ homomorfizmasına ise bir *split monomorfizm* denir ve $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} \bigoplus \longrightarrow M$ ile gösterilir. Bu durumda f bir split monomorfizm ve g bir split epimorfizm ise bir $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M_2 \longrightarrow 0$ kısa tam dizisine *split* (yada, *tam split*) denir. (Anderson, Fuller, 1973)

2.4 Artan ve Azalan Zincir Şartları

Tanım 2.4.1 M bir R -modül olsun. M nin alt modüllerinin her artan (azalan)

$$K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots \subseteq K_m \subseteq K_{m+1} \subseteq \dots \quad (K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq K_{n+1} \supseteq \dots)$$

zinciri sonlu adımda sona eriyorsa M ' ye *artan zincir şartını* (ACC) sağlar, (*azalan zincir şartını* (DCC) sağlar) denir.

Yani, M artan zincir şartını (azalan zincir şartını) sağlıyorsa öyle bir pozitif m tam sayısı (pozitif n tamsayısı) vardır ki, $K_m = K_{m+1}$ ($K_n = K_{n+1}$) dir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.4.2 Bir modül, alt modülleri için artan zincir şartını sağlıyorsa bu modüle *Noetherian* denir. Diğer bir ifadeyle, $\mathcal{S}$, basit modüllerin sınıfı ve M bir modül olsun. M nin bütün alt modüllerinin $\mathcal{S}(M)$ kafesi artan zincir şartına sahipse M ye *Noetherian* denir.

R bir halka olsun. R kendisi üzerinde sırasıyla bir sol R -modül olarak Noetherian ise R ye *sol Noetherian halka*, bir sağ R -modül olarak Noetherian ise R ye *sağ Noetherian halka* denir. R , hem sol Noetherian halka hem de sağ Noetherian halka ise R ye *Noetherian halka* denir.

M bir R -modül olsun. M nin sonlu üreteçli alt modülü Noetherian ise M ye *yerel Noetherian* (*locally Noetherian*) denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.4.3 Bir modül alt modülleri için azalan zincir şartını sağlıyorsa bu modüle *Artinian* denir. (Anderson, Fuller, 1973) Bir R -halkasının Artinian olması noetherian olmasına benzer şekilde tanımlanır.

2.5 Burulmalı ve Burulmasız Modüller

Tanım 2.5.1 M bir sol R -modül olsun. O zaman bir $X \subseteq M$ için

$$l_R(X) = l.\text{ann}_R(X) = \{r \in R : rx = 0 \quad (x \in X)\}$$

kümesine R de X in *(sol) sıfırlayanı* denir.

$A \subseteq R$ için

$$r_M(A) = r.\text{ann}_R(A) = \{x \in M : ax = 0 \quad (a \in A)\}$$

kümesine de M de A nın *sağ sıfırlayanı* denir. $X = \{x\}$ ve $A = \{a\}$ tek elemanlı küme iseler $l_R(x)$ ve $r_M(a)$ yazılır. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.5.2 R bir değişmeli bölge ve M bir R -modül olsun. Bir $m \in M$ için $mr = 0$ olacak şekilde R nin sıfırdan farklı bir r elemanı varsa bu takdirde m ye M nin *burulmalı (torsion) bir elemanı* denir. Eğer M nin burulmalı elemanı sadece "0" (sıfır) elemanı ise bu takdirde M ye *burulmasız* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.5.3 R bir değişmeli bölge ve M bir R -modül olsun. $T(M)$ ile tanımlanan küme, M nin bütün burulmalı elemanlarının kümesidir. Yani,

$$T(M) = \{m \in M : \exists 0 \neq r \in R \quad \text{için} \quad mr = 0\}$$

dir. Buna göre $T(M)$, M nin bir alt modülüdür ve bu alt modül M nin *burulmalı (torsion) alt modülü* olarak adlandırılır.

Eğer $T(M) = M$ ise, bu takdirde M ye *burulmalı (torsion) bir modül* denir. $T(M) = 0$ olması durumunda ise M modülüne *burulmasız (torsion-free) modül* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

2.6 Esas Alt Modüller

Tanım 2.6.1 M bir R -modül ve M_1, M_2, M nin alt modülleri olsun.

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 : m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}$$

olmak üzere $M_1 + M_2 = M$ ise, M bu iki alt modülü tarafından *geriliyor* denir. Diğer yandan $M_1 \cap M_2 = 0$ ise M_1 ve M_2 alt modülleri *bağımsızdır* denir.

$M_1 \times M_2$ kartezyen çarpım modülünden M ye, $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ için

$$(x_1, x_2) \longrightarrow x_1 + x_2$$

şeklinde tanımlanan $i : M_1 \times M_2 \longrightarrow M$ kanonik R -homomorfizması için $\text{Im } i = M_1 + M_2$ ve $\text{Ker } i = \{(x, -x) : x \in M_1 \cap M_2\}$ dir. Eğer $M = M_1 + M_2$ ise, yani M_1 ve M_2 , M yi geriyorsa bu takdirde i örtendir. Diğer yandan $M_1 \cap M_2 = 0$ ise, yani M_1 ve M_2 bağımsız ise i birebirdir.

Eğer bu i kanonik homomorfizması bir izomorfizma ise, yani M_1 ve M_2 bağımsız ve M' yi geriyor ise M modülü M_1 ve M_2 alt modüllerinin bir (iç) *direk toplamıdır* denir ve $M = M_1 \oplus M_2$ yazılır.

Böylece $M = M_1 \oplus M_2$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in M$ için $x = x_1 + x_2$ olacak şekilde $x_1 \in M_1$ ve $x_2 \in M_2$ elemanlarının tek türlü var olmasıdır.

M bir modül ve M_1 , M nin bir alt modülü olsun. $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde M nin bir M_2 alt modülünün var olması durumunda M_1 alt modülüne M nin bir *direk toplananı* denir ve $M = M_1 \leq_d M$ Aynı zamanda M_2 alt modülü de M nin bir direkt toplananı olur.

M_1 ve M_2 modülleri, *bütünleyici direk toplananlar* veya *direk tümleyenler* olarak adlandırılırlar. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.6.2 M bir R -modül ve K , M' nin bir alt modülü olsun. K' nın, M nin bir direk toplananı olması için gerek ve yeter şart $K \cap K' = 0$ ve $K + K' = M$ olacak şekilde M nin bir K' alt modülünün var olmasıdır.

M nin herhangi bir K alt modülü için daima bu iki şarttan birini sağlayan bir alt modül bulabiliriz. Gerçekten, $K \cap 0 = 0$ ve $K + M = M$ dir.

Özel olarak N , sıfırdan farklı ve L , bir R -modül M nin alt modülleri olmak üzere $N \cap L = 0$ olması $L = 0$ olmasını gerektiriyorsa N ' ye M de *esas alt modül* (*essential submodule*) denir ve $N \leq_e M$ ile gösterilir.

Her modül kendisinin esas alt modülüdür. Bir modülün kendisinden farklı bir esas alt modülüne *öz esas alt modül* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.6.3 R bir halka, M bir R -modül olsun. K , M nin sıfırdan farklı bir alt modülü olmak üzere her $0 \neq L \leq M$ alt modülü için $K \cap L \neq 0$ oluyorsa K , M de *esastır* denir. R -modül M ye K nın bir *esas genişlemesi* denir.

Her modül kendisinin bir esas genişlemesidir. Bir modülün kendisinden farklı bir esas genişlemesine *öz esas genişleme* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.6.4 Sıfırdan farklı her M modülü, 0 modülü ve kendisi olmak üzere en az iki direkt toplanana sahiptir. Sıfırdan farklı bir M modülünün direkt toplananları sadece 0 ve M nin kendisi ise M modülüne *ayrıştırılmaz* denir.

M sıfırdan farklı bir sağ R -modül olmak üzere, M nin sıfırdan farklı bütün alt modüllerinin ikişer ikişer arakesitleri sıfırdan farklı ise M ye *düzgün (uniform) modül* denir. Bu tanıma denk olarak, M nin sıfırdan farklı her alt modülü ayrıştırılmaz ise yada M nin sıfırdan farklı her bir alt modülü M de esas ise, sağ R -modül M ye *düzgün modül* denir. (Anderson, Fuller, 1973)

Tanım 2.6.5 R bir halka ve M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Eğer M sıfırdan farklı alt modüllerinin bir sonsuz direkt toplamını içermez ise M ye *sonlu düzgün boyuta* (yada *Goldie sonlu boyuta*) *sahiptir* denir. M sıfırdan farklı ve Goldie sonlu boyutlu bir R -modül olsun. Bu durumda M bir düzgün U alt modülünü içerir. Bundan başka bir pozitif n tam sayısı ve M nin (lineer) bağımsız düzgün U_i ($1 \leq i \leq n$) alt modülleri vardır ve

$$U_1 \oplus U_2 \oplus \dots \oplus U_n$$

M nin bir esas alt modülüdür. Bu durumda n , M için sabittir ve M nin *Goldie boyutu* (yada *düzgün boyutu*) “ n ” dir denir ve $u.dim(M) = n$ ile gösterilir.

Eğer $N_1 \oplus N_2 \oplus \dots \oplus N_k$, M nin sıfırdan farklı N_i ($1 \leq i \leq k$) alt modüllerinin herhangi bir direkt toplamı ise $k \leq n$ dir.

Herhangi bir R halkası için $\mathcal{U}$, sonlu düzgün boyutlu R -modüllerin sınıfını gösterebilir. Bu durumda $\mathcal{U}$ sıfırdan farklı alt modüllerin bir sonsuz direkt toplamını içermez. Ayrıca $\mathcal{U}$, alt modüllere göre kapalıdır. Yani bir düzgün modülün her alt modülü de düzgündür. (Anderson, Fuller, 1973)

2.7 Bazı Özel Tanımlar

M bir sağ R -modül olmak üzere aşağıdaki özellikleri göz önüne alalım;

(C1): M 'nin her alt modülü M 'nin bir direkt toplananında esastır.

(C2): M 'nin bir direkt toplananına izomorf olan M 'nin her alt modülü M 'nin kendi başına bir direkt toplananıdır.

(C3): A ve B , M 'nin direkt toplananları ve $A \cap B = 0$ ise $A \oplus B$ de M 'nin bir direkt toplananıdır.

Tanım 2.7.1 Bir M modülü (C1) şartını sağlar ise, bu modüle *extending* (veya *CS-modül*) denir. (Oshiro, 1983)

Tanım 2.7.2 Bir modül (C1) ve (C2) şartlarını sağlar ise, bu modüle *sürekli* (*continuous*) modül denir. (Oshiro, 1983)

Tanım 2.7.3 Bir M modülü (C1) ve (C3) şartlarını sağlar ise, bu modüle *yarı-sürekli* (*quasi-continuous*) modül denir. (Oshiro, 1983)

Bir M modülü için aşağıdaki gerektirmeler mevcuttur.

injektif $\Rightarrow$ yarı -injektif $\Rightarrow$ sürekli $\Rightarrow$ yarı -sürekli $\Rightarrow$ extending

[10]'u göz önüne alarak $\{M_i\}_{i \in I}$ bir modül ailesi olmak üzere $\forall j \neq i$ için M_i , M_j -injektif ise, M_i modüllerine *yerel (relative) injektif* denir. (Harmancı Smith, 1990)

Bu kısmı daha sonra ihtiyacımız olacak yarı-süreklili modüllere ait bir ön teorem ile kapatacağız. Ayrıca bu çalışmada bir M modülünün injektif hull'unu $E(M)$ ile göstereceğiz.

Ön Teorem 2.7.4 *M bir R -modül olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar denktir.*

- (1) M , *yarı-süreklidir.*
- (2) M , π -*injektiftir.*
- (3) M 'nin injektif hull' nun her $E(M) = E_1 \oplus E_2$ ayrışımı için $M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2)$ *dir.*
- (4) M 'nin injektif hull' nun her $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ayrışımı için $M = \bigoplus_{i \in I} (M \cap E_i)$ *dir.*

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) M yarı-süreklili ve e , idempotent eleman olmak üzere,

$$A_1 = M \cap e(E(M))$$

ve

$$A_2 = M \cap (1 - e)(E(M))$$

olsun. $A_1 \subset B_1$ olmak üzere B_1 , A_2 'nin komplementi, $A_2 \subset B_2$ olmak üzere B_2 , B_1 'nin komplementi olsun. B_2 , B_1 'in komplementi olduğundan $B_2 \cap B_1 = 0$ olur. $B_2 \cap B_1 = 0$ şartına göre $B_1 \leq T$ ve $B_2 \cap T = 0$ olsun. B_1 komplement olduğundan $B_1 \cap A_2 = 0$ ve B_1 maksimal olur. Böylece (1) den dolayı

$$M = B_1 \oplus B_2$$

yazılır. Buradan $\pi : B_1 \oplus B_2 \rightarrow B_1$ doğal epimorfizması tanımlansın.

iddia: $M \cap (e - \pi)M = 0$ dır.

$$(e - \pi)(x) = y$$

olacak şekilde $x, y \in M$ olsun. $e(x) = \pi(x) + y$ ve buradan da

$$e(x) \in M \cap e(E(M)) = A_1$$

olur. Şimdi $A_2 = M \cap (1 - e)E(M)$ olduğunu gösterelim. $x \in M$ için

$$(1 - e)(x) = x - e(x) \in M \Rightarrow (1 - e)(x) \in M$$

olur. Diğer yandan, $x \in M \leq E(M) \Rightarrow x \in E(M)$ olur.

O zaman $x \in M \leq E(M)$ olduğundan $(1 - e)(x) \in (1 - e)E(M)$ olur. Yani;

$$(1 - e)(x) \in M \cap (1 - e)E(M) = A_2$$

dir. Ayrıca $M \leq_e E(M)$ olduğunu biliyoruz. $E(M)$ 'nin bir alt modülü ile M 'nin arakesitine bakalım. Buradan $\pi(x) = e(x)$ ve $y = 0$ olur. O halde iddia doğrulanır. $M \leq_e E(M)$ olduğundan $(e - \pi)M = 0$ olur yani;

$$eM = \pi M \leq M$$

dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $(M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) \leq M$ olduğu açıktır. m , M 'nin keyfi bir elemanı olmak üzere $m \in E_1 \oplus E_2$ dir. Ayrıca E^* , $E(M)$ 'nin bir ayrışımı olmak üzere

$$E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E^*$$

yazabiliriz. O zaman $E_i = e_i(E(M))$ olacak şekilde $e_i \in \text{End}(E(M))$,

($i = 1, 2$) ortogonal idempotenti vardır. Kabulden, $e_1(M) \leq M$ ve $e_2(M) \leq M$ olduğundan

$$M = e_1(m) + e_2(m) \in (M \cap E_1) + (M \cap E_2)$$

(3) $\Rightarrow$ (4) (3)'ü göz önünde tutarak

$$\bigoplus_{i \in I} M \cap E_i \leq M$$

olduğunun ispatı açıktır. Şimdi $m \in M$ 'nin $\bigoplus_{i \in I} (M \cap E_i)$ nin elemanı olduğunu gösterelim. M 'nin injektif hull'unun $E(M) = \bigoplus_{i \in I} E_i$ ayrışımını ele alırsak I nın sonlu alt kümesi F , için $m \in \bigoplus_{i \in F} E_i$ olmak üzere

$$E(M) = \bigoplus_{i \in F} E_i \oplus E^*$$

yazılabilir. O zaman $E_i = e_i(E(M))$ olacak şekilde $e_i \in \text{End}(E(M)) (i \in F)$ ortonormal idempotenti vardır. $e_i M \leq M$ olduğundan

$$m = \left(\sum_{i \in F} e_i \right)(m) = \sum_{i \in F} e_i(m) \in \bigoplus_{i \in F} M \cap E_i$$

olur. Böylece $M \leq \bigoplus_{i \in I} M \cap E_i$ olur ve buradan $M = \bigoplus_{i \in I} M \cap E_i$ olur.

(4) $\Rightarrow$ (1) $A \leq M$ olsun. $E(M) = E(A) \oplus E^*$ yazılsın. O zaman hipotezden $M = (M \cap E(A)) \oplus (M \cap E^*)$ buradan $A \leq_e M \cap E(A)$ olur. Böylece A bir direkt toplananda esastır; yani M , (C1) şartını sağlar. Şimdi, $M_1 \cap M_2 = 0$ ve $M_1 \leq_d M$ ve $M_2 \leq_d M$ olsunlar.

$$E(M) = E_1 \oplus E_2 \oplus E'$$

yazılsın, öyle ki $E_1 = E(M_1)$ ve $E_2 = E(M_2)$ olsun. Hipotezden dolayı

$$M = (M \cap E_1) \oplus (M \cap E_2) \oplus (M \cap E')$$

olur. $M_1 \leq_d M$ ve $M_2 \leq_d M$ olduğundan $M_1 \leq_e M \cap E_1$ ve $M_2 \leq_e M \cap E_2$ ve $M_1 = M \cap E_1$, $M_2 = M \cap E_2$ olur buradan da (C3) sağlanır ve ispat tamamlanır.

3 BİR MODÜL SINIFINA GÖRE SÜREKLİLİK

Oshiro'nun, (C1)-(C3) şartları olarak ifade edilen, yarı-sürekli, sürekli, extending kavramlarının bir genellemesi yapılarak, bir $\mathcal{A}$ ailesinden alınan bazı alt modüller için tanımlanacaktır. Bizim çalışmamıza ışık tutması açısından bu karakterizasyonlar aşağıdaki biçimde görülür.

3.1 Bir Sınıfa Göre Süreklilik

Bir M modülünün alt modüllerinin oluşturduğu bir $\mathcal{A}$ ailesi için aşağıdaki şartları göz önüne alalım.

$\mathcal{A}$ -(C1): Her bir $A \in \mathcal{A}$ için $A \leq_e A^*$ olacak şekilde M 'nin en az bir tane A^* direkt toplananı vardır.

$\mathcal{A}$ -(C2): Her bir $A \in \mathcal{A}$ için $A \cong X$ olacak şekilde X , M 'nin bir direkt toplananı ise A 'da M 'nin bir direkt toplananıdır.

$\mathcal{A}$ -(C3): Her bir $A \in \mathcal{A}$ ve $X \leq_d M$ için $A \leq_d M$ ve $A \cap X = 0$ ise $A \oplus X \leq_d M$ dir.

Tanım 3.1.1 M bir R -modül ve $\mathcal{A}$, M 'nin alt modüllerinin, esas genişlemeler ve izomorfik görüntüler altında kapalı bir ailesi olsun. Eğer M modülü, $\mathcal{A}$ -(C1), $\mathcal{A}$ -(C1) ve $\mathcal{A}$ -(C3) veya $\mathcal{A}$ -(C1) ve $\mathcal{A}$ -(C2) şartlarını sağlarsa M 'ye sırasıyla $\mathcal{A}$ -extending, $\mathcal{A}$ -yarı-sürekli veya $\mathcal{A}$ -sürekli modül denir. (Lopez-Permouth, Oshiro, Rizvi, 1998)

$\mathcal{A}$ ailesi M 'nin tüm alt modüllerinin ailesi ise, o zaman $\mathcal{A}$ -extending, $\mathcal{A}$ -yarı-sürekli ve $\mathcal{A}$ -sürekli modüller *extending*, *yarı-sürekli* ve *sürekli* modüllerle çıkarılır.

Önerme 3.1.2 $\mathcal{A}$, bir M modülünün, alt modüllerinin, alt modüller, esas genişlemeler ve izomorfik görüntüler altında kapalı bir ailesi olsun. M , $\mathcal{A}$ -extending olsun. O zaman aşağıdaki şartlar denktir.

(1) $\mathcal{A}$ -(C3) sağlanır.

(2) Her bir $A \in \mathcal{A}$ için ve $A \cap X = 0$ olacak şekilde her $X \leq_d M$ için, her $\varphi : A \rightarrow X$ homomorfizması $\tilde{\varphi} : M \rightarrow X$ homomorfizmasına genişletilebilir.

(3) Her $A \in \mathcal{A}$ ve $A \cap X = 0$ olacak şekilde her X direkt toplananı için X , A -injektiftir.

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2) Farzedelim ki (C3) sağlansın. $A \in \mathcal{A}$ ve $A \cap X = 0$ olacak şekilde $X \leq_d M$ olsun. $f : A \rightarrow X$ bir homomorfizma olsun.

$$B = \{x + f(x) \mid x \in A\}$$

kümesini ele alalım. $B \in \mathcal{A}$ olacağından $A \cong B$ dir. $B \leq_e B^*$ olacak şekilde $B^* \leq_d M$ vardır. Buradan $A \cap B^* = 0$ olur. $(C_3)'$ ten dolayı

$$M = A \oplus B^* \oplus Y$$

olacak şekilde Y alt modülü vardır.

$$\pi : M = A \oplus B^* \oplus Y \rightarrow A$$

projeksiyon olsun. $A \subset X \oplus B^*$ olduğundan π, f ye genişler.

(2) $\Rightarrow$ (1) Kabul edelim ki (2) sağlansın. $A \in \mathcal{A}$ ve $A \cap N = 0$ olacak biçimde A ve N M 'nin direkt toplananları olsun. $M = N \oplus X$ olacak biçimde $X \leq M$ verilsin. $\pi : M = N \oplus X \rightarrow X$ bir projeksiyon olsun. $A \cap N = 0$ olduğundan $A \cong \pi(A)$ olur. Buradan $\pi(A) \in \mathcal{A}$ olur ve $\pi(A) \leq_e Y$ olacak şekilde $Y \leq_d X$ vardır. O zaman M 'nin bir Z alt modülü için

$$M = N \oplus Y \oplus Z, \quad X = Y \oplus Z$$

olur. π_1 ve π_2 projeksiyonları sırasıyla $\pi_1 : M = N \oplus Y \oplus Z \rightarrow N$ ve

$\pi_2 : M = N \oplus Y \oplus Z \rightarrow Y$ şeklinde tanımlansın. Açıkça, $A = \{\pi_1(a) + \pi_2(a) \mid a \in A\}$ ve $\pi_2(a) \rightarrow \pi_1(a)$ ile tanımlanan $f : \pi_2(a) \rightarrow N$ fonksiyonu iyi tanımlıdır. (2) şartıyla $f, f^* : Y \rightarrow \pi_1(A)$ fonksiyonuna genişler. O zaman, $\pi_2(A) \leq_e Y$ dir ve buradan $A \leq_e \{y + f(y) \mid y \in Y\}$ ve $\pi(A) = Y$ olur. Sonuç olarak, $N \oplus A = N \oplus Y \leq_d M$ dir.

(2) $\Rightarrow$ (3) $A' \subset A$ ve $\varphi : A' \rightarrow X$ homomorfizmasını göz önüne alalım. $A' \cap X = 0$ için $A' \in \mathcal{A}$ alınırsa (2) ile $\varphi, \tilde{\varphi} : M \rightarrow X$ e genişletilebilir. $\tilde{\varphi}, A$ ya kısıtlanırsa X 'in A -injektif olduğu görülür.

(3) $\Rightarrow$ (2) Kabul edelim ki (3) sağlansın. $A \cap X = 0$ olacak şekilde $A \in \mathcal{A}$ dan $X \leq_d M$ ye tanımlanan bir dönüşüm $\varphi : A \rightarrow X$ olsun. (C1) şartı ile $Y \subset M$ için $A^* \oplus Y = M$ olacak şekilde $A \leq_e A^*$ bulunur. O zaman $A^* \cap X = 0$ ve $A^* \in \mathcal{A}$ olur ve buradan da X, A^* -injektiftir. Buradan φ dönüşümü, $\tilde{\varphi}$ dönüşümüne genişler dolayısıyla A^* da $\varphi^* = \tilde{\varphi}$ ve Y de $\varphi^* = 0$ olduğunda $\varphi^* : M \rightarrow X$ dönüşümü gerçekleşir. Buradan da (2) sağlanmış olur. (Oshiro, 1983)

3.2 Özel Bir Sınıfa Göre (C1)-(C3) Kavramları

M ve N birer modül olmak üzere $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ ailesi;

$\mathcal{A}(N, M) = \{A \leq M \mid \exists X \leq N, \exists f \in \text{Hom}(X, M), f(X) \leq_e A\}$ şeklinde tanımlansın.

Bu $\mathcal{A}(N, M)$ ailesi alt modüller, esas genişlemeler ve izomorfik görüntüler altında kapalıdır.

Tanım 3.2.1 M , bir R - modül olsun. $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ için M , sırasıyla $\mathcal{A}$ -*extending*, $\mathcal{A}$ -*yarı-sürekli* veya $\mathcal{A}$ -*sürekli* ise M' ye sırasıyla N -*extending*, N -*yarı-sürekli* veya N -*sürekli* modül denir. $\mathcal{A}$ ailesi $\mathcal{A}(N, M)$ olarak düşünülürse her $(i = 1, 2, 3)$ için $N - (C_i)$ özellikleri olarak $\mathcal{A} - (C_i)$ özelliklerini göz önüne alacağız. Buna göre bir M modülü için aşağıdaki denklik görülebilir.

$$N\text{-sürekli} \Rightarrow, N\text{-yarı-sürekli} \Rightarrow, N\text{-extending}$$

Açıktır ki yerel sürekliliğin bu notasyonu süreklilik kavramının bir genellemesidir. Diğer taraftan yerel injektiflik, yerel sürekliliği gerektirmez. Örneğin, S basit modül olduğunda, bütün modüller S -injektiftir. Diğer taraftan eğer

$$M = S \oplus E(S)$$

olacak şekilde S -basit modülü injektif değilse, $\mathcal{A}(S, M)$ nin bir elemanı için M 'nin $S \oplus 0$ toplananına izomorfik değildir. (Lopez-Permouth, Oshiro, Rizvi, 1998)

Önerme 3.2.2 (1) Her N alt modülü için, M , yarı-sürekli $\Leftrightarrow M$, M -yarı-sürekli, $\Leftrightarrow M$, N -yarı-sürekli.

(2) $N-(C_i)$ şartları, ($i=1,2,3$ için), M 'nin bir direkt toplananı için de sağlanır.

(3) M , N -yarı-sürekli ve $A \in \mathcal{A}(N, M)$ için $A \leq_d M$ ise A -yarı-sürekli'dir

İspat. (1) Kabul edelim ki M , yarı-sürekli olsun. Öncelikle (C_1) şartını sağlasın. M 'nin $M-(C_1)$ şartını sağladığını göstereceğiz. Kabulden M 'nin her alt modülü M 'nin bir direkt toplananında esastır. $A \in \mathcal{A}(M, M)$ olsun. Burada A , M 'nin bir alt modülüdür. Kabulden A alt modülü de M 'nin bir A^* direkt toplananında esastır. Yani M , $M-(C_1)$ şartını sağlar.

Tersine, M , $M-(C_1)$ şartını sağlasın. Her $A \in \mathcal{A}(M, M)$ için, M 'nin en az bir tane A^* direkt toplananı vardır öyle ki A , A^* da esastır. Bu durum A 'nın her alt modülü için geçerli olacağından M , (C_1) şartını sağlar.

M , (C_3) şartını sağlasın. M 'nin $M-(C_3)$ şartını sağladığını göstereceğiz. Kabulden her $A, B \leq_d M$ ve $A \cap B = 0$ için $A \oplus B$ de M 'nin bir direkt toplananıdır. $A \in \mathcal{A}(M, M)$ ve $B \leq_d M$ alalım. A , M 'nin alt modülüdür. Kabulden $A \leq_d M$ ve $B \leq_d M$ için $A \cap B = 0$ olduğunda $A \oplus B \leq_d M$ dir. Böylece M , (C_3) şartını sağlar.

Tersine, M , $M-(C_3)$ şartını sağlasın. Kabulden her $A \in \mathcal{A}(M, M)$ ve $B \leq_d M$ için $A \leq_d M$ ve $A \cap B = 0$ ise $A \oplus B \leq_d M$ dir ve buradan $A \leq_d M$ olduğundan $A \leq M$ dir ve bu sonuç her A için sağlanır. Dolayısıyla M , (C_3) şartını sağlar.

M , M -yarı-sürekli olsun. Bu durumda M , $M-(C_1)$ şartını sağlar. $A \in \mathcal{A}(N, M)$ olsun. O zaman A , M 'nin alt modülü ve $f(X)$, A 'da esas olacak

şekilde N 'nin en az bir X alt modülü ve en az bir $f \in \text{Hom}(X, M)$ vardır. $N \leq M$ olduğundan $X \leq M$ dir. O halde hipotezden M 'nin A 'yı esas olarak içeren bir direkt toplananı vardır. Seçime göre M , N -(C_1) şartını sağlar. M 'nin her alt modülü N -(C_3) şartını sağlarsa açıkça M , M -(C_3) şartını sağlar.

Tersine M , M - (C_3) şartını sağlasın. $A \in \mathcal{A}(N, M)$ alalım. Buradan $A \in \mathcal{A}(M, M)$ olacağından ispat açıktır.

(2) M , N -(C_1) şartını sağlasın. $M_1 \leq_d M$ olsun. Her $A \in \mathcal{A}(N, M)$ ve $A^* \leq_d M$ için A , A^* da esastır. M_1 , M 'nin bir direkt toplananı ve $A_1 \in \mathcal{A}(N, M_1)$ olsun. Buradan A_1 , M_1 'in bir alt modülüdür. $A_1 \in \mathcal{A}(N, M)$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Kabulden $X \leq N$ ve $f \in \text{Hom}(X, M_1)$ için $f(X) \leq_e A_1$ dir. $\exists X \leq N$ için

$$X \xrightarrow{f} M_1 \xrightarrow{i} M$$

ve

$$X \xrightarrow{g} M$$

için $g(X) \leq_e A_1$ mi dir?

$$g(X) = if(X) = i(f(X)) = f(X) \leq_e A_1$$

ise $g(X) \leq_e A_1$ olur. Buradan $A_1 \in \mathcal{A}(N, M)$ dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

M , N -(C_2) şartını sağlasın. $M_1 \leq_d M$ için $A \in \mathcal{A}(N, M_1)$ alalım. A , M 'nin bir direkt toplananına izomorf ise

$$A \cong Y \leq_d M_1$$

için $Y \leq_d M$ olacağından kabul gereği $A \leq_d M$ olur. Bu durumda

$$M = A \oplus A'$$

olacak şekilde $A' \leq M$ vardır. Modüler kuralından $A \leq_d M_1$ bulunur.

M , N -(C_3) şartını sağlasın. M 'nin M_1 direkt toplananının N -(C_3) şartını sağladığını gösterelim. $A \in \mathcal{A}(N, M_1)$ için

$$A \cap Y = 0$$

olacak şekilde $A \leq_d M_1$ ve $Y \leq_d M_1$ olsun. $M_1 \leq_d M$ olduğundan $A \leq_d M$ ve $Y \leq_d M$ olur. Hipotezden $A \oplus Y \leq_d M$ bulunur. Modüler kuralından

$$A \oplus Y \leq_d M_1$$

olur.

(3) A , M 'nin bir direkt toplananı olduğundan (2) den A , N -yarı-süreklidir. $A \in \mathcal{A}(N, M)$ ve $A \leq M$ için

$$\mathcal{A}(M, M) = \bigcup_{N \in \text{Mod} R} \mathcal{A}(N, M) \equiv P(A) \equiv \mathcal{A}(A, A)$$

iken

$$\mathcal{A}(N, A) = \mathcal{P}(A)$$

olduğunu gösterirsek A , N -yarı-süreklilik iken $\mathcal{A}(N, A) = \mathcal{P}(A)$ eşitliğinden A 'nın her alt modülü için yarı-süreklilik olacaktır. Buradan da (1) ile A , yarı-süreklidir diyeceğiz. $A \in \mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{A}) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ olduğu açıktır.

Tersine, $A_i \in P(A)$ alalım.

$$A_i \in P(A) \Rightarrow A_i \in \mathcal{A}(N, A)$$

olduğunu göstermeye çalışalım.

$$\exists Y \leq N, \exists f_i \in \text{Hom}(Y, A), \ni f_i(Y) \leq_e A_i$$

mıdır? $A \in \mathcal{A}(N, M)$ olduğundan, $A \leq M$ için,

$$\exists X \leq N, \exists f \in \text{Hom}(X, M), \ni f(X) \leq_e A$$

dır. Buradan

$$X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{\pi} A$$

$$f(X) \leq_e A \Rightarrow \pi(f(X)) \leq_e \pi(A) = A$$

olur. $A_i \leq_e A_i$ olduğundan $\pi f(X) \cap A_i \leq_e A_i$ olacağından buradan da

$f_i(Y) = \pi f(X) \cap A_i$ olacak biçimde f_i ve Y bulunur böylece $P(A) \subseteq \mathcal{A}(N, A)$ olur ve (3) şartı sağlanır.

Önerme 3.2.3 $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ tam dizisi verilsin. O zaman $\mathcal{A}(N', M) \cup \mathcal{A}(N'', M) \subset \mathcal{A}(N, M)$. Böylece eğer M , N -extending (sırasıyla yarı-süreklili) ise o zaman M , N' -extending ve N'' -extending (sırasıyla yarı-süreklili) dir.

İspat. $N' \leq N$ olduğu düşünülürse tanımdan $\mathcal{A}(N', M) \subseteq \mathcal{A}(N, M)$ olduğu açıktır. Şimdi de $\varphi(N) = N''$ ve $A \in \mathcal{A}(N'', M)$ olsun. $X \leq \varphi(N) = N''$ ve $f \in \text{Hom}(X, M)$ için A , $f(X)$ 'in bir genişlemesidir. φ örten olduğundan $\varphi(Y) = X$ olacak şekilde bir $Y \leq N$ vardır. Buradan $f\varphi(Y) = f(X) \leq_e A$ olur ki $A \in \mathcal{A}(N, M)$ bulunur.

Böylece

$$\mathcal{A}(N', M) \cup \mathcal{A}(N'', M) \subset \mathcal{A}(N, M)$$

olur. M , N -(C_1), N -(C_2), N -(C_3) şartlarını sağladığı durumda M 'nin N' -(C_1), N' -(C_2), N' -(C_3) ve N'' -(C_1), N'' -(C_2), N'' -(C_3) şartlarını sağladığı tanımdan açıktır.

Önerme 3.2.4 $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ bir tam dizi ve M bir sağ modül olsun. M 'nin N -extending olması için gerek ve yeter koşul M , N' -extending ve N'' -extending olmasıdır. Bu durumda $\mathcal{A}(N, M)$ 'nin her K alt modülü, $K' \in \mathcal{A}(N', M)$ ve $K'' \in \mathcal{A}(N'', M)$ için $K = K' \oplus K''$ formunda yazılabilir.

İspat. M , N -extending olsun. O zaman Önerme 2.2.3 ile M , N' -extending ve N'' -extending olur.

Tersine, M , N' -extending ve N'' -extending olsun. Genelliği bozmaksızın $N' \leq N$ ve $N'' = N/N'$ olarak kabul edelim. L , N nin bir alt modülü ve $\varphi \in \text{Hom}(L, M)$ olsun. K , M de, $\varphi(L)$ 'nin bir kapanışı ve K' , K da, $\varphi(L \cap N')$ alt modülünün bir kapanışı olsun. Bu durumda

$$\varphi(L) \leq_e K \leq_c M$$

ve

$$\varphi(L \cap N') \leq_e K' \leq_c K$$

dan $K' \leq_c M$ elde edilir. Aynı zamanda $K' \in \mathcal{A}(N', M)$ dir. M , N' -extending olduğundan, M nin bir H direkt toplananı vardır ki $K' \leq_e H$ olur. Ancak K' , M de kapalı olduğundan $K' = H$ olur yani K' , M nin bir direkt toplananı olur. M 'nin bir K'' alt modülü için $M = K' \oplus K''$ olarak yazılır. Modüler kuralından

$$K = K' \oplus (K \cap K'')$$

olur.

$$\pi : K \rightarrow K \cap K''$$

kanonik projeksiyonu gösterebilirsin. Her $x \in L$ için

$$\phi : (L + N')/N' \rightarrow M$$

fonksiyonunu $\phi(x + N') = \pi\varphi(x)$ ile tanımlayalım. $x \in L$ için eğer $x \in N'$ ise o zaman $\varphi(x) \in \varphi(L \cap N') \subset K'$ olacağından $\varphi(x) \in K' = \text{Ker}\pi$ olur ki $\pi\varphi(x) = 0$, yani $\phi(x + N') = \pi\varphi(x) = 0$ bulunur.

Buradan ϕ iyi tanımlıdır ve $\phi \in \text{Hom}((L + N')/N', M)$ olduğu açıktır. Şimdi $0 \neq y \in K \cap K''$ olsun. Bir $r \in R$ ve $u \in L$ için $0 \neq yr = \varphi(u)$ olur. $\varphi(u) \in K \cap K''$ olduğundan

$$0 \neq yr = \varphi(u) = \pi\varphi(u) = \phi(u + N')$$

olur. Buradan ;

$$0 \neq yr \in (K \cap K'') \cap (\theta(L + N'/N'))$$

olur ki $\theta(L + N'/N')$, $K \cap K''$ nun bir esas alt modülü olur. $K \cap K''$, K' nin bir direkt toplananı olduğundan K da kapalı olur.

$$K \cap K'' \leq_c K \leq_c M$$

olması $K \cap K''$ nin M de kapalı olduğunu verir. Böylece $\phi((L + N')/N')$, N'' -extending M modülünün $K \cap K''$ kapalı alt modülünde esas olarak bulunur. $K \cap K'' \in \mathcal{A}(N'', M)$ olduğundan, $K \cap K'' \leq_e H$ olacak şekilde bir $H \leq_d M$ vardır. Ancak, $K \cap K'' \leq_c M$ olduğundan $K \cap K'' = H$ yani $K \cap K'' \leq_d M$ dir. Modüler kuralından $K \cap K'' \leq_d K''$ olur. Buradan K , M nin bir direkt toplananıdır. Böylece $\varphi(L) \in \mathcal{A}(N, M)$ olduğundan ve K da esas olduğundan M , N -extending olur.

Sonuç 3.2.5 $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ bir tam dizi ve M bir sağ modül olsun. M nin N -yarı-sürekli olması için gerek ve yeter koşul M nin, N' -yarı-sürekli ve N'' -yarı-sürekli olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ M , N -yarı-sürekli olsun. Önerme 2.2.3 ile M , N' -yarı-sürekli ve N'' -yarı-sürekli.

$(\Leftarrow)$ Tersine ilk olarak M , N' -yarı-sürekli ve N'' -yarı-sürekli olsun. Önerme 2.2.4 ile M , N -extendingtir. $K \in \mathcal{A}(N, M)$ ve $K \cap H = 0$ olacak şekilde K ve H , M nin birer direkt toplananı olsunlar. Önerme 2.2.4 ile $K' \in \mathcal{A}(N', M)$ ve $K'' \in \mathcal{A}(N'', M)$ olacak şekilde $K = K' \oplus K''$ yazılabilir. Buradan $K' \oplus (K'' \oplus H)$ olur.

$K' \cap (K'' \oplus H) = 0$ olduğundan $K' \cap H = 0$ ve hipotez gereğince $K' \oplus H$, M 'nin bir direkt toplananı olur. Benzer şekilde $K'' \oplus H$ da M 'nin bir direkt toplananıdır. Şimdi $K' \in \mathcal{A}(N', M)$ M , N' -yarı-süreklili ve $K'' \oplus H \leq_d M$ olduğundan yine hipotez gereğince

$$K \oplus H = K' \oplus K'' \oplus H$$

M 'nin bir direkt toplananı olur. Böylece M , N -(C3) şartını sağlar. Bu nedenle M , N -yarı-süreklidir.

Şimdi M , N' -süreklili ve N'' -süreklili olsun. Önerme 2.2.4 ile M , N -extendingtir. $K \in \mathcal{A}(N, M)$ ve K , M 'nin bir direkt toplananına izomorf olsun. Önerme 2.2.4 den $K' \in \mathcal{A}(N', M)$ ve $K'' \in \mathcal{A}(N'', M)$ olacak şekilde $K = K' \oplus K''$ yazılır. Buradan K' ve K'' nin her ikisinde M 'nin direkt toplananlarına izomorflardır.

Buradan K' ve K'' M 'nin direkt toplananı olur. M , N' -süreklili ve N'' -süreklili olduğundan M , N' -yarı-süreklili ve N'' -yarı-süreklidir. $K' \cap K'' = 0$ olduğundan ispatın ilk bölümündeki argüment ile $K = K' \oplus K''$, M 'nin bir direkt toplananı olur. O halde M , N -süreklidir.

3.3 Sonlu Direkt Toplama Göre (C1)-(C3) Şartları

Önerme 3.3.1 $i = 1, 2, \dots, n$ için M , N_i -extending (yarı-süreklili) ve $N = \bigoplus_{i=1}^n N_i$ ise M , N -extending (yarı-süreklili) dir.

İspat. M , N_1 -extending ve N_2 -extending olsun. Önerme 2.2.4 ile M , N -extending olur. Tümevarımla genelleme yapılırsa $i = 1, 2, \dots, n$ için açıktır. Benzer şekilde Sonuç 2.2.5 ten de M , N_i -yarı-süreklili ise M , N -yarı-süreklidir.

Önerme 2.3.1 daki sonlu bir küme için geçerli olan tanımlamaların sonsuz indeksli kümelerde geçerli olmadığını aşağıdaki örnekle gösterebiliriz.

Örnek 3.3.2 Modüllerin bir $\{(S_i) | i = 1, 2, \dots\}$ ailesine göre yarı-süreklili bir R halkası vardır fakat $\bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ -yarı-süreklili değildir.

İspat. F bir cisim ve

$$R = \{(x_i)_{i=1}^{\infty} | \exists f \in F \text{ öyle ki, } x_j = f \text{ sonlu sayıda } j \text{ dışında}\}$$

olsun.

$$e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$$

olmak üzere

$$S_i = (0, 0, \dots, 0, F, 0, \dots) = e_i R \subset^{\oplus} R$$

olur. (sadece sıfırdan farklı girişlerde i inci terim 1 olur). O zaman R değişmeli ve bir terse sahip iken, injektif olduğunda S_i basittir. Bundan dolayıda R , her i için S_i -süreklidir. Bununla birlikte R , $\bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ -süreklili değildir.

$$A = S_1 \oplus S_3 \oplus S_5 \oplus \dots \in \mathcal{A}(\bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i, R)$$

için A , R 'nin bir direkt toplananına genişletilemez. Gerçekten, $e^2 = e \in R$ için $A \leq_e eR$ kabul edelim. $0 \neq f \in F, n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$x = f_{e_{2n}}$$

olsun. O zaman herhangi $0 \neq r \in R$ için $xr \subseteq A$ olur. Buradan R , $\bigoplus_{i=1}^{\infty} S_i$ -extending değildir.

3.4 Extending Modüllerin Ayrışimleri

Önerme 3.4.1 M ve N iki modül, $\mathcal{A} = \mathcal{A}(N, M)$ olsun. M , N -extending olmak üzere aşağıdaki şartlar denktir.

- (1) $A \in \mathcal{A}$ ve $M = A \oplus X$ için A ve X yerel injektiftir.
- (2) $F \cap M \in \mathcal{A}$ ve $E(M) = F \oplus G$ için $M = (F \cap M) \oplus (G \cap M)$ dir.
- (3) $F_{\alpha} \cap M \in \mathcal{A}$ ve $E(M) = (\bigoplus_{\alpha \in I} F_{\alpha}) \oplus G$ için $M = (\bigoplus_{\alpha \in I} (F_{\alpha} \cap M)) \oplus (G \cap M)$ dir.

İspat. $(1 \Rightarrow 2)$ $A = F \cap M \in \mathcal{A}$ ve $E(M) = F \oplus G$ olsun. $M \leq_e E(M)$ ve F , $E(M)$ 'nin kapalı bir alt modülü olduğundan A , M 'nin bir kapalı alt modülüdür. Bundan başka M , N -extending olduğundan $A \leq_d M$ dir. Böylece $M = A \oplus X$, $X \leq M$ yazılabilir.

π_A ve π_X doğal epimorfizmalar olsun. O zaman $G \cap M \cong \pi_X(G \cap M)$ olur.

$$\varphi : \pi_X(G \cap M) \rightarrow A$$

fonksiyonu için,

$$\pi_X(a) \rightarrow \pi_A(a)$$

her $a \in G \cap M$ için bir homomorfizmadır. A , X -injektif olduğundan $\varphi, \varphi^* : X \rightarrow A$ homomorfizmasına genişler.

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow \varphi & \uparrow \varphi^* \\ 0 \longrightarrow & \pi_X(G \cap M) & \xrightarrow{i} X \end{array}$$

O zaman $G \cap M \leq_e \{a + \varphi^*(a) | a \in X\} \leq_d M$ dir. Bu yüzden $G \cap M$, M 'nin kapalı alt modülüdür. Bundan dolayı

$G \cap M = \{a + \varphi^*(a) | a \in X\}$ ve $M = A \oplus X = A \oplus G \cap M = (F \cap M) \oplus (G \cap M)$ dir.

$(2) \Rightarrow (3)$ ve $(3) \Rightarrow (2)$ ispatları açıktır.

$(2) \Rightarrow (1)$: Tersine A 'nın X -injektif olduğunu göstereceğiz. $Z \leq X$ için $\varphi : Z \rightarrow A$ bir homomorfizma ve

$$T = \{z + \varphi(z) : z \in Z\}$$

olsun. Buradan $T \cap A = 0$ dir. $E(M) = E(A) \oplus E(T) \oplus F$ ayrışımını gözönüne alalım. (2) ile ; $M = (E(A) \cap M) \oplus [(E(T) \oplus F) \cap M] = A \oplus ((E(T) \oplus F) \cap M)$, π doğal epimorfizma olsun ve $\varphi^* = -\pi/x$ olarak yazılsın. $\varphi^*(z) = (-\pi/x)(z) =$

$(-\pi/x)(-\varphi(z) + z + \varphi(z)) = -\pi/x(-\varphi(z)) + -\pi/x(z + \varphi(z)) = 0 \Rightarrow -\pi_x(z) - \pi_x(z + \varphi(z)) = \varphi(z)$. $z \in Z$, $z = -\varphi(z) + (z + \varphi(z))$ ve buradan $\varphi^*(z) = \varphi(z)$ dir. Böylece φ^* , φ ye genişlemesi olur ki buradan A , X -injektif olarak bulunur.

4 TORSION TEORİYE GÖRE KAVRAMLAR

M bir R -modül olsun. $\mathcal{T}_M = \{N \mid M, N\text{-süreklili}\}$ olsun. Buradan $\mathcal{F}_M = \{X \mid \text{Hom}(N, X) = 0, \forall N \in \mathcal{T}_M\}$ ile tanımlansın. $\mathcal{T}=\mathcal{T}_M$ ile gösterilirse $\mathcal{T}_M$, homomorfik görüntüler, alt modüller, genişlemeler altında kapalıdır. (Burada $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için $N', N'' \in \mathcal{T}_M$ ise $N \in \mathcal{T}_M$ sağlanıyorsa $\mathcal{T}_M$ genişlemeler altında kapalıdır denir). (Önerme 2.2.5 ile) Basitlik için $\mathcal{T}_M = \mathcal{T}$ ve $\mathcal{F}_M = \mathcal{F}$ gösteriminde $(\mathcal{T}_M, \mathcal{F}_M)$ ikilisinin hereditary(torsion) teori olması için gerek ve yeter şart herhangi direkt toplamlar altında kapalı olmasıdır. Örnek 2.3.2 gereğince $\mathcal{T}_M$ sınıfı herhangi direkt toplamlara göre kapalı olmak zorunda değildir.

4.1 Torsion Teori ile İlgili Bazı Özel Karakterizasyonlar

Teorem 4.1.1 M bir R -modül olsun. Buna göre aşağıdaki şartlar denktir.

- (1) $(\mathcal{T}_M, \mathcal{F}_M)$ çifti bir torsion (hereditary) teoridir.
- (2) T , sürekli, $F \in \mathcal{F}_M$ ve F, T -injektif olacak şekilde $M = T + F$ ayrışımı vardır.

İspat. $\mathcal{T}=\mathcal{T}_M$ ve $\mathcal{F}=\mathcal{F}_M$ olsun. $\tau_M = (\mathcal{T}, \mathcal{F})$ bir (hereditary) torsion teori olsun. M 'nin $\tau(M)$ torsion kısmını gözönüne alalım. $N_i \in \mathcal{T}_M$ için, $\tau(M) = \Sigma N_i$ olduğundan, $\mathcal{T}_M$ sınıfının tanımı gereğince $\Sigma N_i = \tau(M) \in \mathcal{T}_M$ olduğundan $M, \tau(M)$ -süreklili olur. Diğer yandan açıkça $\tau(M) \in \mathcal{A}(\tau(M), M)$ dir. $M, \tau(M)$ - C_1 şartını sağladığından $\tau(M) \in \mathcal{A}(\tau(M), M)$ için $\tau(M), M$ 'nin bir direkt toplananında esas olur. $\tau(M) \leq_e T$ olacak şekilde $M = T \oplus F$ ayrışımını gözönüne alabiliriz. O zaman $F \in \mathcal{F}$ dir. $\mathcal{A}(\tau(M), M)$ ailesi esas genişlemeler altında kapalı olduğundan $T \in \mathcal{A}(\tau(M), M)$ olur ki Önerme 2.2.2(3) ten T sürekli olur. $M, \tau(M)$ - C_2 şartını sağladığından $M, \tau(M)$ - C_3 şartını sağlar. Önerme 2.1.2 den $T \in \mathcal{A}$ ve $F \leq_d M$, $T \cap F = 0$ olduğu için F, T -injektif olur.

Tersine, T , sürekli ve $F \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ ve F , T -injektif olacak şekilde $M = T \oplus F$, M 'nin bir ayrışımı olsun. $\tau_M = (\mathcal{T}_{\mathcal{M}}, \mathcal{F}_{\mathcal{M}})$ nin bir (hereditary) torsion teori olduğunu göstermek için sadece $\mathcal{T}_{\mathcal{M}}$ 'nin keyfi direkt toplamalar altında kapalı olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$$\{N_{\alpha}\}_{\alpha \in I} \subset \mathcal{T}_{\mathcal{M}}$$

için $N = \bigoplus_{\alpha \in I} N_{\alpha}$ olsun. (Muller, Rizvi, 1983)'den yararlanarak iddiayı ispatlayalım.

İddia: Bazı $X \leq N$ için $Hom(X, M) = Hom(X, T)$ dir.

$$\varphi : X \rightarrow M = T \oplus F$$

olsun. $x \in X$ olmak üzere $t_x \in T$ ve $f_x \in F$ için $\varphi(x) = t_x + f_x$ yazılır. Farzedelim ki $f_x \neq 0$ olsun. O zaman

$$x = \sum_{i=1}^n x_{\alpha_i}$$

için $0 \neq x_{\alpha_i} \in N_{\alpha_i}$ vardır ve

$$\Gamma_{\alpha_i} : N_{\alpha_i} \rightarrow N$$

içerim dönüşümü ve

$$\pi_F : M \rightarrow F$$

bir projeksiyon olmak üzere

$$\pi_F \varphi \Gamma_{\alpha_i}(x_{\alpha_i}) = f_{x_{\alpha_i}} \neq 0$$

dır.

Bundan başka $X_{\alpha_i} R \subset N_{\alpha_i}$ ve M , N_{α_i} -sürekli iken M , $X_{\alpha_i} R$ -sürekli dir. Buradan $Hom(X_{\alpha_i} R, F) = 0$ bir çelişki oluşturur. Bu yüzden $f_x = 0$ ve $Hom(X, M) \subset Hom(X, T)$ dir. Bu olgu için $\mathcal{A}(N, M)$ ailesinde (C1) ve (C2) şartlarını ispatlamak yararlı olacaktır. $A \in \mathcal{A}(N, M)$ alalım. $X \leq N$ için $f(X) \leq_e A$ olmak üzere $f \in Hom(X, M) = Hom(X, T)$ olur. π_T ve π_F , sırasıyla $M = T \oplus F$ den T ve F

ye birer doğal epimorfizma olsunlar. buna göre $f(X) \leq_e A$ ve $f(X) \leq T$ olur ve buradan $A \cong \pi_T(A)$ olduğunu görürüz. Bu yüzden $\varphi(\pi_T(a)) = \pi_F(a)$ iyi tanımlı homomorfizmasıyla

$$\varphi : \pi_T(A) \rightarrow \pi_F(A)$$

dönüşümü tanımlanabilir. T 'nin sürekliliğiyle $\pi_T(A) \leq_e P$ için $T = P \oplus Q$ ayrışımını elde ederiz. F , $P - injektif$ olduğu sürece φ bir $\varphi^* : P \rightarrow F$ homomorfizmasına genişletilebilir.

$$A^* = \{p + \varphi^*(p) | p \in P\}$$

kabulüyle $A \leq_e A^*$ ve $A^* \leq_d M$ olduğunu görürüz ve $\mathcal{A}(N, M)$ için (C1) ispatlanır. Bu düzenle (C2)'nin ispatıda kolaydır. $A, B \in \mathcal{A}(N, M)$ için $A \leq_d M$ ve $A \cong B$ olur. $X \leq N$ ve $f \in Hom(X, M) = Hom(X, T)$ olmak üzere $f(X) \leq_e A$ dir. $g : A \rightarrow B$ bir homomorfizma olmak üzere $h = gf$ yazılmasıyla $h(X) \leq_e B$ dir. Önceden kullanılan bazı argümentleri kullanarak $A \leq_d M$ olduğu kanıtlanır ve $T = P \oplus Q$ ayrışımı elde edilir, böylece $A^* = A \cong P$ olur. Önceden kullanılan $B \in \mathcal{A}(N, M)$ argümenti için $B \leq_e B^*$ için $B^* \leq_d M$ ve $T = P' \oplus Q'$ ayrışımı ile $B^* \cong P^*$ 'dir. Böylece

$$T \supset P \cong A \cong B \leq_e B^* \cong P' \leq_d T$$

olur. T , sürekli iken $B = B^* \leq_d M$ olması beklenir. Gerçekten $\psi : B^* \rightarrow P$ bir izomorfizma ise T 'nin sürekliliği ve $\psi(B) = P'$ kabulüyle $B \cong \psi(B) \leq P' \leq_d T$ ve $\psi(B) \cong P \leq_d T$ dir. Böylece $M, \bigoplus_{\alpha \in I} N_\alpha$ -süreklidir.

5 BİR HALKAYA GÖRE SÜREKLİLİK

Bir R -modül M 'nin , R -injektif ise injektif olduğunu biliyoruz (Baer Kriteri). Bu durumda doğal olarak şu soru sorulabilir: “Her R -sürekli modül, sürekli midir?” Bu durumun herhangi bir modül için doğru olup olmadığını bilmiyoruz. Fakat burada modülün sonlu üreteçli yada sonlu düzgün boyuta sahip olması durumunda ya da halkanın sağ noetherian halka olması halinde doğru olduğunu gösterebiliriz.

Ayrıca bu bölümde, sonraki teoremlerde kullanılmak üzere yardımcı teoremleri verelim.

Ön Teorem 5.0.2 $0 \neq A_R$ sonlu düzgün boyutlu bir modül olsun. Bu durumda A_R , bir düzgün alt modül kapsar.

İspat. A_R düzgün ise ispat biter. A_R düzgün olmasın. Bu durumda $A_R \supseteq A_1 \oplus A_2'$ olacak biçimde $0 \neq A_1, A_2'$ alt modülleri vardır. Aynı şekilde devam edilirse

$$A_1' \oplus A_2' \oplus A_3' \oplus \dots$$

sonsuz bir dik toplam elde edilir ki bu A_R nin sonlu düzgün boyuta sahip olması ile çelişir. O halde en az bir düzgün A_i alt modülü vardır öyle ki $A_i \subseteq A$ dır.(Takıl, 2008)

Ön Teorem 5.0.3 A_R sonlu Goldie boyutlu bir modül olsun. Bu durumda A_R , sonlu tane düzgün alt modülün bir dik toplamını esas olarak kapsar.

İspat. $i = 1, 2, \dots, n$ için $U_i \leq A$ düzgün alt modüller olmak üzere $A' = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ diyelim. Farzedelim ki $A' \leq_e A_R$ olsun. Bu durumda en az bir $0 \neq X \leq A_R$ vardır öyle ki $A' \cap X = 0$ dır. Ön Teorem 4.0.2'den X bir U_{n+1} düzgün alt modülü kapsar. Böylece

$$A_R \supseteq A' \oplus U_{n+1} = \bigoplus_{i=1}^{n+1} U_i$$

elde edilir. Bu şekilde işlemlere devam edilirse sonsuz bir dik toplam bulunur ki bu da A_R nin sonlu düzgün boyutlu olması ile çelişir. O halde $A' \leq_e A_R$ olmalıdır. (Takıl, 2008)

5.1 Artinian ve Noetherian Halkalarda Süreklilik

Teorem 5.1.1 *M sonlu üreteçli bir sağ- R -modül olsun. M , R -yarı-süreklili ise M , yarı-süreklidir.*

İspat. $M = \sum m_i R$ olsun. M, R -yarı-süreklili olduğundan ($i=1,2,\dots,n$) için $M, m_i R$ -yarı-süreklidir. Bu yüzden Önerme 2.3.1 ile $\bigoplus_{i=1}^n m_i R$ -yarı-süreklidir. Bunun yanında $M, \bigoplus_{i=1}^n m_i R$ nin bir homomorfik görüntüsüdür. Bu yüzden M, M -yarı-süreklili olduğundan M , yarı-süreklidir.

Sonuç 5.1.2 *R halkasının yarı-basit artinian olması için gerek ve yeter şart sonlu boyutlu her R modülünün R -yarı-süreklili olmasıdır.*

İspat. M sonlu boyutlu R -modül olsun. O zaman $R \oplus M$ de yine sonlu boyutludur. Bu nedenle R , yarı-süreklili dir. Teorem 4.1.1 ile $R \oplus M$ de yarı-süreklidir. Bu yüzden M, R -injektiftir dolayısıyla injektiftir. Tersisi aşıkardır.

Buna göre eğer M ve N modülleri için $\text{Hom}(N, M) = 0$ ise M, N -yarı-süreklidir. Bu durumda M 'in aşıkak N -yarı-süreklili olduğunu söyleyebiliriz. Bunlara göre M 'nin aşıkak olmayan N -yarı-süreklili olması için gerek ve yeter şart $\text{Hom}(N, M) \neq 0$ ve M 'nin N -yarı-süreklili olmasıdır.

Teorem 5.1.3 *M , düzgün sonlu boyutlu bir sağ R -modül olsun. M 'nin yarı-süreklili olması için gerek ve yeter şart bir N modülü için M 'nin her toplananı , aşıkak olmayan N -yarı-süreklidir. Özellikle sonlu boyutlu düzgün bir modül, R -yarı-süreklili ise yarı-süreklidir.*

İspat. $\mathcal{A}(N, M)$ ailesindeki yerel injektif yarı-sürekli toplananlarının bir direkt toplananı olan her N -yarı-sürekli toplananı ile her sonlu düzgün boyutlu modülü göstermek amacıyla düzgün boyutta tümevarımı kullanacağız. $\dim(M) = 1$ için $f \in \text{Hom}(N, M)$ iken $0 \neq f(N) \leq_e M$ olur. $M \in \mathcal{A}(N, M)$ olduğundan Önerme 2.2.2(3) ile M , yarı-sürekli olur. Şimdi $\dim(M) = n$ ve düzgün boyut $< n$ olduğunda modüller için teorem açıktır. Şimdi bazı $f \in \text{Hom}(N, M)$ için $0 \neq f(N) \leq M$ olsun. M 'nin N -sürekli olması ile

$$f(N) \leq_e M_1 \leq_d M$$

dir. Buradan $M = M_1 \oplus M'$ söylenebilir. Önerme 2.2.2(3) ile M_1 , yarı-sürekli ve Önerme 2.3(3) ile M' - injektiftir. Tümevarımsal hipotezle, $(j=2, \dots, k)$ için $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ ailesinin yarı-sürekli göreceli(mutually) injektif elemanları M_j ler iken

$$M' = M_2 \oplus \dots \oplus M_k$$

olur. Çünkü $(j=2 \dots k)$ için M_j , M_1 -injektif ise M' , M_1 injektif olur. Şimdi sadece $(j=2 \dots k)$ için M_1 'in M_j -injektifliğini göstermek kaldı . $\widetilde{M}_j = \bigoplus_{i \neq j} M_i$ iken, herhangi bir $(j=1 \dots k)$ için $M_1 \oplus \widetilde{M}_j \oplus M_j$ vardır. Önerme 2.2.2(3) ile $M_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ dir.

Teorem 5.1.4 *R , bir sağ noetherian halka olsun. O zaman her R -sürekli modül sürekli dir.*

İspat. M , R -sürekli modül olsun. $\{m_i R \mid i \in I\}$ devirli modüllerin ailesini göz önüne alırsak $\{\bigoplus_{i \in I} m_i R \leq_e M\}$ olduğunu görürüz. Buradan her bir $i \in I$ için $m_i R \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mathcal{M})$ dir. Her bir $i \in I$ için $(m_i R)^* \leq_d M$ olduğunda M 'nin R -sürekli olduğu kabul edilirse $m_i R \leq_e (m_i R)^*$ dir.

Sonuç 5.1.5 *Bir R halkasının sağ noetherian olması için gerek ve yeter şart her R -sürekli modülün bir ayrışmayan ayrışma sahip olmasıdır.*

İspat. R sağ noetherian olsun. M , R -sürekli ise Teorem 4.1.4 ile M , sürekli. O zaman her bir M_i ayrışmayan ise $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olur [10, sonuç 4]. Tersine, R -sürekli modül bir ayrışmayan ayrışma sahipse her sürekli modülde ayrışmayan ayrışma sahiptir ve bu yüzden R sağ-noetheriandır.

Teorem 5.1.6 *Bir N modülü, öyle ki her modül N -yarı-sürekli $\Leftrightarrow N$, yarı-basit ve injektiftir.*

İspat. Kabul edelim ki her modül N -yarı sürekli ve A , N 'nin bir alt modülü olsun. O zaman $M = E(A) \oplus A$, N -sürekli. Önerme 2.3(3) ile $E(A) \in \mathcal{A}$ ve $M = E(A) \oplus A$ iken A , $E(A)$ -injektif buradan da injektiftir. Bu yüzden N yarı-basit ve injektiftir. Tersine, N , yarı-basit ve injektif ise her M modülü için $\mathcal{A}(\mathcal{N}, \mathcal{M}) = \{\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \mid \mathcal{A}, N \text{ de gömülür}\}$ kümesi, M 'nin injektif alt modüllerinin tamamından oluşur. Buradan da M , N -sürekli olur.

5.2 Bazı Özel Halkalara Göre Karakterizasyon

Bir R halkasına, basit sağ R -modül injektif ise sağ V -halkası veya singular sağ modül injektif ise sağ SI -halkası denir. Sonuç olarak Önerme 3.6 da anılan yerel süreklilik terimleri de bu halkaların karakterizasyonları elde edilecektir.

Sonuç 5.2.1 (1) *Bir R halkasının bir sağ V -halkası olması için gerek ve yeter şart her sağ R -modülün, her basit sağ modül S için S -sürekli olmasıdır.*

(2) *Bir R halkasının bir sağ noetherian sağ V -halkası olması için gerek ve yeter şart her sağ R -modülün, her yarı-basit sağ modül S için S -sürekli olmasıdır.*

(3) *Bir R halkasının bir sağ SI -halkası olması için gerek ve yeter şart her sağ R -modülün, her singular sağ modül S için S -sürekli olmasıdır.*

İspat. Önerme 4.1.6 dan açıktır.

KAYNAKLAR

- Anderson, F.W. and Fuller, K.R., 1973, "Rings and categories of modules", Springer-Verlag.
- Doğruöz, S., 1997, "Extending modules relative to module classes", Doktora tezi, University of Glasgow, Scotland U. K.
- Harada, M. and Oshiro, K., 1981, "On extending property of direct sums of uniform modules", Osaka J. Math 18,767-785.
- Harmancı, A., Smith, P.F., 1992, "relative injectivity and modules classes, Comm. Alg. 20 (9), 2471-2501.
- Harmancı, A., Smith, P.F., 1993, "Finite direct sums of CS-modules", Houston J. Math. (19), 523-532.
- Hungerford, T.W., 1973, "Algebra", Seattle Washington, September.
- Kamal, M.A. and Muller, B.J., 1988, "Extending modules over commutative domains" Osaka J. Math. (25), 531-538.
- Lopez Permouth, S.R., Oshiro, K., Rizvi, S.T, 1998, "On the Relative Quasi-Continuity of Modules", Comm. in Algebra, 26(11), 3497-3510.
- Mohamed, S.H., Muller, B.J., 1990, "Continuous and Discrete Modules" London Math. Soc. Lecture Note Series 147, Cambridge Univ. Press.

- Mohamed, S. and Müller, B.J. 1990, "On injective and (quasi-) continuous modules", London Math. Soc. Lect. Note Series 147, Cambridge Univ. Press.
- Muller, B.J. and Rizvi S.T. 1983, "On injective and (quasi-)continuous modules", J. Pure Applied Algebra (28), 197-210.
- Muller B.J. and Rizvi, S.T., 1982, "On the decomposition of continuous modules", Canad Math. Bull. (25), 296-301.
- Okado, M., 1984, "On the decomposition of extending modules", Math. Japonica (29), 939-941.
- Oshiro, K., 1983, "Continuous Modules and (Quasi-)Continuous Modules", Osaka J. Math. (20), 681-694.
- Oshiro, K. and Rizvi, S.T., 1996, "The exchange property of (quasi-)continuous modules with finite exchange property", Osaka J. Math. (33), 217-234.
- Sharpe, D.W., Vamos, P., 1972, "Injective modules", Cambridge Tracts in Mathematics (62) Cambridge University Press, Cambridge.
- Smith, P.F., 1990, "Modules with many direct summands", Osaka J. Math. 27, 253-264.
- Smith, P.F., Van Huyng, D., Viet Dung, N., 1990, "A characterization of Noetherian modules", Quart. J. Math. Oxford (2) (41) 225-235.

Smith, P. F., De Viola-Prioli, A. M., Viola-Prioli, J., 1997, "Modules complemented with respect to a torsion theory", Comm. Algebra (25),1307-132.

Takıl, F., 2008, "Genelleştirilmiş CS-Modüller ve Genişleme Özellikleri Üzerine Araştırmalar", Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik (85).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Teslime Ebru CEYLAN

Doğum Yeri : Adana

Doğum Tarihi : 12/04/1982

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Tezsiz Yüksek Lisans : 2007 Çukurova Üniversitesi, Eğitim Fakültesi

Lisans : 2003 Afyon Kocatepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Lise: 1999 Adana Tepebağ Lisesi