

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



**BİR MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİLERİNİN LACUNARY
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE CESÀRO
TOPLANABİLMESİ**

Hatice GİDEMEN

Doktora Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

OCAK 2021

**T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Matematik Anabilim Dalı

Doktora Tezi

**BİR MODÜLÜS FONKSİYONU YARDIMIYLA TANIMLANMIŞ
GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK DİZİLERİNİN LACUNARY
İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI VE CESÀRO TOPLANABİLMESİ**

Tez Yazarı
Hatice GİDEMEN

Danışman
Prof. Dr. Mikail ET

OCAK 2021
ELAZIĞ

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Bir Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı ve Cesàro Toplanabilmesi” Başlıklı Doktora Tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

25.01.2021

Hatice GİDEMEN



ÖNSÖZ

Bu tez çalışmasında yapılan tanımlamalar, elde edilen kavramlar ve ortaya konan bağıntılar sayesinde istatistiksel yakınsaklık ve genelleştirilmiş fark dizileri konusu farklı noktalara taşınmış ve daha geniş bir alana yayılmıştır.

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. Mikail Et'e teşekkürlerimi sunmayı borç bilir, saygılarımı sunarım.

Hatice GİDEMEN

ELAZIĞ, 2021



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. MATERYAL VE METOT	3
1. TEMEL KAVRAMLAR	4
1.1. Temel Tanım ve Teoremler	4
2. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ CESARO TOPLANABİLME.....	11
2.1. α . Dereceden $\Delta_v^m(f)$ –İstatistiksel Yakınsaklık.....	11
2.2. α . Dereceden Kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cesàro Toplanabilme	13
2.3. α . Dereceden Kuvvetli Δ_v^m –Cesàro Toplanabilme ile α . Dereceden $\Delta_v^m(f)$ –İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki Bağlıntılar	16
3. GENELLEŞTİRİLMİŞ f –LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ f –LACUNARY TOPLANABİLME.....	18
3.1. Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin f –Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı	18
3.2. Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin f –Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığına ve Kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ –Toplanabilirliğine İlişkin Bağlıntılar.....	21
4. GENELLEŞTİRİLMİŞ f –İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ f –CESARO TOPLANABİLME.....	25
4.1. α . Dereceden $\Delta_n^m(f)$ –İstatistiksel Yakınsaklık.....	25
4.2. α . Dereceden Kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cesàro Toplanabilme	27
4.3. α . Dereceden Kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cesàro Toplanabilme ve α . Dereceden $\Delta_n^m(f)$ –İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki Bağlıntılar	29
5. SONUÇLAR.....	30
KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Bir Modülüs Fonksiyonu Yardımıyla Tanımlanmış Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı ve Cesàro Toplanabilmesi

Hatice GİDEMEN

Doktora Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Ocak 2021, Sayfa: viii + 33

Bu çalışmada genelleştirilmiş fark operatörü ve modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklık ve Cesàro toplanabilme kavramları genelleştirilmiş ve bu şekilde oluşturulan dizi uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Genelleştirilmiş fark dizileri, Fark dizi uzayları, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary istatistiksel yakınsaklık, Modülüs fonksiyonu.

ABSTRACT

Lacunary Statistical Convergence and Cesàro Summability of Generalized Difference Sequences Defined by Modulus Function

Hatice GİDEMEN

Ph.D. Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

January 2021, Pages: viii + 33

In this study, a new concept of statistical convergence and Cesàro summability were introduced by using generalized difference operator and a modulus function and examined these kind of sequence spaces relations.

Keywords: Generalized difference sequences, Difference sequence spaces, Statistical convergence, Lacunary statistical convergence, Modulus function.

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

C	: Yakınsak dizilerin uzayı
C_0	: Sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$d(\mathbb{E})$	: Bir $\mathbb{E}$ kümesinin doğal yoğunluğu
$d^f(\mathbb{E})$	: Bir $\mathbb{E}$ kümesinin f –yoğunluğu
$d_\alpha(\mathbb{E})$	: Bir $\mathbb{E}$ kümesinin α –yoğunluğu
Δ	: Fark operatörü
Δ^m	: Genelleştirilmiş fark operatörü
S	: İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
S^f	: f –istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
S_α	: α . dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
S_α^f	: α . dereceden f – istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
s	: Tüm reel veya karmaşık terimli dizilerin uzayı
w	: Kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin uzayı
ℓ_∞	: Sınırlı dizilerin uzayı

1. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık, klasik yakınsaklık kavramının genel bir halidir. İstatistiksel yakınsaklık fikri Zygmund [1] tarafından 1935 yılında yayınlanan çalışmasında ‘hemen hemen yakınsaklık’ şeklinde verilmiştir. Şeklen ise istatistiksel yakınsaklık, Fast [2] tarafından 1951 yılında tanıtılmıştır. 1959 yılında Schoenberg [3] istatistiksel yakınsaklığı yeniden tanımlanmış ve bir toplanabilme metodu olarak ifade etmiştir. Bundan sonraki yıllarda gelişme gösteren istatistiksel yakınsaklık kavramı birçok yazar tarafından çalışılmıştır [4-11,13-15]. Fridy ve Orhan [16] istatistiksel yakınsaklık fikrini bir lacunary dizi yardımıyla tanımlamıştır. Pozitif sayıların bir başka dizisi yardımıyla Mursaleen [17] λ –istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Çolak [11], α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olmak üzere istatistiksel yakınsaklık kavramını derecelendirmiştir. 2014 yılında Aizpuru v.d. [18], sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu yardımıyla klasik yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasında yeni bir kavram olan f –istatistiksel yakınsaklık kavramını tanımlamıştır. Yakın zamanda Bhardwaj ve Dhawan [4], Aizpuru [18]’nun yaklaşımını kullanarak istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel sınırlılık kavramına yeni bir bakış açısı getirmiştir. Buna göre; f –istatistiksel sınırlılık, klasik sınırlılık ile istatistiksel sınırlılık arasında olan kavramdır.

Cesàro toplanabilme kavramı literatürde çeşitli yazarlar tarafından istatistiksel yakınsaklık kavramından bağımsız olarak çalışılmıştır. Kuvvetli toplanabilir dizilerin uzayı Kuttner [19], Maddox [20,21] tarafından çalışılmıştır. Maddox [22], kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramını bir modülüs fonksiyonu ile ilişkilendirerek genişletmiş ve sonuç olarak sırasıyla w_0, w, w_∞ klasik dizi uzaylarının bir genelleştirmesi olan $w_0(f), w(f), w_\infty(f)$ dizi uzaylarını tanıtmıştır. Yakın zamanda Çolak [11], α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı ve p bir pozitif reel sayı olmak üzere α .dereceden kuvvetli p – Cesàro toplanabilme kavramını tanımlamıştır. Bhardwaj ve Dhawan [5] ise sınırsız bir modülüs fonksiyonu yardımıyla $w_0(f), w(f), w_\infty(f)$ dizi uzaylarını $w_{\alpha,0}^f, w_\alpha^f, w_{\alpha,\infty}^f$ dizi uzaylarına genelleştirmiştir.

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [23] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra Et ve Çolak [12, 24] bu dizi uzaylarını $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere genelleştirerek bu uzayların birer BK –uzayı olduğunu göstermişlerdir. Et ve Nuray [25] genelleştirilmiş fark dizileri kavramını, istatistiksel yakınsaklık ile birleştirerek Δ^m –istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmıştır. Yakın zamanda Bektaş, Et ve Çolak [26] ise $v = (v_k)$ sıfır olmayan herhangi bir sabit karmaşık sayı dizisi olmak üzere genelleştirilmiş fark dizileri kavramına yeni bir yaklaşım getirmiştir.

Bu çalışmada amaç, α sayısı $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı ve p bir pozitif reel sayı olmak üzere, genelleştirilmiş fark operatörü ve sınırsız bir modülüs fonksiyonu yardımıyla istatistiksel yakınsaklığı ve Cesàro toplanabilme kavramlarını genelleştirmektedir.



2. MATERYAL VE METOT

Temel kavramlar ve tanımlar için [2, 4-7, 11, 12, 16-31] ve [32-51] çalışmalarından yararlanılmıştır.

Bu çalışmada temel olarak Bhardwaj ve Dhawan [6] ve Şengül ve Et [27] tarafından verilen sonuçlar göz önüne alınarak, geliştirilmiş fark operatörü ve sınırsız bir modülüs fonksiyonu yardımıyla p bir pozitif reel sayı olmak üzere Δ_f^m –lacunary istatistiksel yakınsaklık ve Δ_f^m –Cesàro toplanabilme kavramları tanıtılarak bu şekilde oluşturulan dizi uzayları arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

$\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık, Δ_f^m –lacunary istatistiksel yakınsaklık, α .dereceden Δ_f^m –istatistiksel yakınsaklık kavramlarının tanımlanması için sırasıyla [5, 24, 27] numaralı çalışmalar incelenmiştir.

Bu çalışma hazırlanırken yukarıdaki çalışmalardan yararlanılmış, benzer metot ve yaklaşımlar kullanılarak geliştirilmiş fark dizilerinin sınırlı olmayan bir f modülüsü yardımıyla lacunary istatistiksel yakınsaklığı ve lacunary f –istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmıştır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde; daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

1.1. Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1: Tanım kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyon dizi olarak tanımlanır. Diziler değer kümelerine göre çeşitli şekillerde isimlendirilebilir. Buna göre eğer bir dizinin değer kümesi reel sayılar kümesi ise dizi reel terimli dizi, karmaşık sayılar kümesi ise dizi karmaşık terimli dizi olarak adlandırılır [29].

Tanım 1.1.2: Bir $x = (x_k)$ dizisinin (l limiti ile) yakınsak olması için gerek ve yeter şart verilen her $\varepsilon > 0$ için $k \geq N$ olduğunda $|x_k - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısının var olmasıdır. Bu durumda. $x_k \rightarrow l$ ($n \rightarrow \infty$) ya da $\lim x_k = l$ yazılır. Bütün yakınsak dizilerin uzayı c ile gösterilir [29].

Tanım 1.1.3: $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere bir K kümesinin doğal yoğunluğu

$$d(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

şeklinde tanımlanır. Burada $|\{k \leq n : k \in K\}|$ ifadesi K kümesinin n den büyük olmayan elemanlarının sayısını göstermektedir. Eğer $d(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunluklu küme denir [30].

Tanım 1.1.4: Herhangi bir $x = (x_k)$ dizisinin terimleri bir P özelliğini sıfır yoğunluklu bir küme dışında bütün k lar için sağlıyorsa, (x_k) dizisi hemen hemen her k için P özelliğini sağlıyor denir ve " $h. h. k$ " biçiminde gösterilir [28].

Doğal yoğunluk kavramından faydalanılarak istatistiksel yakınsaklık tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 1.1.5: $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

veya $h. h. k$ için $|x_k - l| < \varepsilon$ olacak şekilde bir l sayısı varsa $x = (x_k)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim x_k = l$ veya $x_k \xrightarrow{S} l$ biçiminde gösterilir. İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı S ile gösterilir. Buna göre

$$S = \left\{ x \in s : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0, \exists l \in \mathbb{C} \right\}$$

şeklinde tanımlıdır [28].

Açıkça görülebileceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani $\lim x_k = l$ ise $S - \lim x_k = l$ dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Bunun için,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = m^2 \\ 0, & k \neq m^2 \end{cases} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n: |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n: x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Bu da $S - \lim x_k = 0$ olduğu anlamına gelir. Ancak x yakınsak değildir.

Bir dizi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tektir, yani $S - \lim x_k = l_1$, $S - \lim x_k = l_2$ ise $l_1 = l_2$ dir.

Lemma 1.1.6: $S - \lim x_k = a$, $S - \lim y_k = b$ ve c bir reel sayı olsun. Bu takdirde

- i) $S - \lim cx_k = ca$,
- ii) $S - \lim(x_k + y_k) = a + b$

dır. Bu teoreme göre istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi bir lineer uzaydır [2].

Tanım 1.1.7: Bir modülüs fonksiyonu $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ olarak tanımlanan ve aşağıdaki şartları sağlayan bir fonksiyondur.

- i) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
- ii) Her $x \geq 0$ ve $y \geq 0$ için $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$,
- iii) f artandır,
- iv) f fonksiyonu, 0 noktasında sağdan süreklidir [31].

Bir f modülüs fonksiyonu, $[0, \infty)$ aralığının her yerinde süreklidir. Bir modülüs fonksiyonu, sınırlı veya sınırsız olabilir. Örneğin, $f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) sınırlı değil, fakat $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sınırlıdır.

Aizpuru, Listán-Garcia ve Rambla-Barreno [18] sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu kullanarak reel sayı dizilerinin f -yoğunluğunu ve f -istatistiksel yakınsaklığı kavramlarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 1.1.8: f bir sınırlı olmayan modülüs fonksiyonu olmak üzere, $\mathbb{N}$ nin bir $\mathbb{E}$ alt kümesinin d^f -yoğunluğu

$$d^f(\mathbb{E}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n: k \in \mathbb{E}\}|)}{f(n)}$$

limitinin mevcut olması ile tanımlıdır [18].

Uyarı 1.1.9: $f(x) = x$ olduğunda f -yoğunluk kavramı doğal yoğunluk kavramına indirgenir. Doğal yoğunluk sözkonusu olduğunda $d(\mathbb{E}) + d(\mathbb{N} - \mathbb{E}) = 1$, fakat f -yoğunluk için $d^f(\mathbb{E}) + d^f(\mathbb{N} - \mathbb{E}) = 1$ eşitliği genellikle sağlanmaz. Ancak f -yoğunluk kavramı için $d^f(\mathbb{E}) = 0$ ise $d^f(\mathbb{N} - \mathbb{E}) = 1$ dir.

Uyarı 1.1.10: Her sınırsız f modülüsü ve $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ için $d^f(\mathbb{E}) = 0$ ise , $d(\mathbb{E}) = 0$ dır. Fakat tersinin doğru olması gerekmez, yani sıfır yoğunluğa sahip bir küme için f –yoğunluğu sıfır olmayan sınırsız f modülüsü bulunabilir. Örneğin; $f(x) = \log(x + 1)$ ve $\mathbb{E} = \{1, 4, 9, \dots\}$ alınırsa $d(\mathbb{E}) = 0$, ancak $d^f(\mathbb{E}) = \frac{1}{2}$ dir. Ancak Uyarı 1.1.9 gereğince $d(\mathbb{E}) = 0 \Rightarrow d^f(\mathbb{E}) = 0$ gerektirmesi f modülüsünün sınırsız olmasına bakılmaksızın her $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ sonlu kümesi için doğrudur.

Tanım 1.1.11: f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve $x = (x_k)$ dizisi verilsin, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$d^f(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına f –istatistiksel yakınsaktır (ya da l sayısına S^f –yakınsaktır) denir. f –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^f ile gösterilir [18].

Tanım 1.1.12: α , $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olsun. Bir $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ kümesinin α –yoğunluğu,

$$d_\alpha(\mathbb{E}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: k \in \mathbb{E}\}|$$

limitinin mevcut olması ile tanımlıdır. Burada $\alpha = 1$ olması durumunda α –yoğunluk kavramı bilinen doğal yoğunluk kavramına indirgenir [11].

Uyarı 1.1.9 da belirtildiği gibi $d(\mathbb{E}) + d(\mathbb{N} - \mathbb{E}) = 1$ bağıntısı, doğal yoğunluktan f –yoğunluğa ve α –yoğunluğa geçildiğinde sağlanmayabilir.

Tanım 1.1.13: α , $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı olsun ve $x = (x_k)$ dizisi verilsin, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$d_\alpha(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına α . dereceden istatistiksel yakınsaktır ya da l sayısına S_α –yakınsaktır denir ve $S_\alpha - \lim x_k = l$ yazılır. Bütün α .dereceden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_α ile gösterilir. $\alpha = 1$ ise α .dereceden istatistiksel yakınsaklık bilinen istatistiksel yakınsaklığa indirgenir [11].

Tanım 1.1.14: f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu, $0 < \alpha \leq 1$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisi verilsin, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$d_\alpha^f(\{k \in \mathbb{N}: |x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına α . dereceden f –istatistiksel yakınsaktır ya da l sayısına S_α^f –yakınsaktır denir ve $S_\alpha^f - \lim x_k = l$ yazılabilir. Bütün α . dereceden f –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_α^f ile gösterilir. S_α^f –yakınsaklık; $\alpha = 1$ için f –istatistiksel yakınsaklığa, $f(x) = x$ için α . dereceden istatistiksel yakınsaklığa $f(x) = x$ ve $\alpha = 1$ için bilinen istatistiksel yakınsaklığa dönüşür [5].

Fark dizisi ve bazı fark dizi uzayları, ilk defa 1981 yılında Kızmaz [23] tarafından tanımlanmıştır.

Tanım 1.1.15: $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi ve $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$ olmak üzere $\ell_\infty(\Delta)$, $c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$ dizi uzayları

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta) &= \{x = (x_k): \Delta x \in \ell_\infty\} \\ c(\Delta) &= \{x = (x_k): \Delta x \in c\} \\ c_0(\Delta) &= \{x = (x_k): \Delta x \in c_0\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaylar

$$\|x\|_1 = |x_1| + \|\Delta x\|_\infty$$

normu ile birer BK –uzayıdır. Daha sonra Et ve Çolak [12, 24], $m \in \mathbb{N}$, $\Delta^0 x = (x_k)$, $\Delta x = (x_k - x_{k+1})$, $\Delta^m x = (\Delta^m x_k) = (\Delta^{m-1} x_k - \Delta^{m-1} x_{k+1})$, $\Delta^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\ell_\infty(\Delta^m) &= \{x = (x_k): \Delta^m x \in \ell_\infty\} \\ c(\Delta^m) &= \{x = (x_k): \Delta^m x \in c\} \\ c_0(\Delta^m) &= \{x = (x_k): \Delta^m x \in c_0\}\end{aligned}$$

dizi uzaylarını tanımlamış ve bu uzayların

$$\|x\|_\Delta = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|_\infty$$

normu ile birer BK –uzayı olduğunu göstermişlerdir.

Eğer $x \in \Delta^m(X)$ ise

$$\begin{aligned}x_k &= \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-i-1}{m-1} y_i = \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k+m-i-1}{m-1} y_{i-m} \\ y_{1-m} &= y_{2-m} = \dots = y_0 = 0\end{aligned} \tag{1.1}$$

olmak üzere yeterince büyük k lar için (örneğin $k > 2m$ için) için $y_k = \Delta^m x_k$ olacak şekilde bir tek $y = (y_k) \in X$ dizisi vardır [25].

Şimdi X dizi uzayı ile $X(\Delta^m)$ dizi uzayı arasında birkaç bağıntı verelim.

Teorem 1.1.16: Eğer X bir lineer uzay ise $X(\Delta^m)$ de bir lineer uzaydır [25].

Teorem 1.1.17: Eğer $X \subset Y$ ise $X(\Delta^m) \subset Y(\Delta^m)$ dir [25].

Teorem 1.1.18: Eğer X , dizi uzayı $\|\cdot\|$ normu ile bir Banach uzayı ise $X(\Delta^m)$ uzayı da

$$\|x\|_{\Delta} = \sum_{i=1}^m |x_i| + \|\Delta^m x\|$$

normu ile bir Banach uzayıdır [25].

Fark dizisi uzayları Bektaş, Et ve Çolak [26] tarafından aşağıdaki şekilde genelleştirilmiştir:

Tanım 1.1.19: $v = (v_k)$ sıfır olmayan herhangi bir sabit karmaşık sayı dizisi, m negatif olmayan bir tamsayı ve X herhangi bir dizi uzayı olsun, bu takdirde $\Delta_v^0 x = (v_k x_k)$, $\Delta_v^m x = (\Delta_v^{m-1} x_k - \Delta_v^{m-1} x_{k+1})$ ve $\Delta_v^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} v_{k+i} x_{k+i}$ olmak üzere

$$\Delta_v^m(X) = \{x = (x_k) : (\Delta_v^m x_k) \in X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer $x \in \Delta_v^m(X)$ ise

$$x_k = v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k-i-1}{m-1} y_i = v_k^{-1} \sum_{i=1}^{k-m} (-1)^m \binom{k+m-i-1}{m-1} y_{i-m} \quad (1.2)$$

$$y_{1-m} = y_{2-m} = \dots = y_0 = 0$$

olmak üzere yeterince büyük k lar için (örneğin $k > 2m$ için) için $y_k = \Delta_v^m x_k$ olacak şekilde bir $y = (y_k) \in X$ dizisi vardır [26].

Tanım 1.1.20: $x = (x_k)$ kompleks terimli bir dizi olsun. Buna göre her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

yani $h. h. k$ için $|\Delta^m x_k - l| < \varepsilon$ ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına Δ^m -istatistiksel yakınsaktır denir.

Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı $S(\Delta^m)$ ile gösterilir [25].

Sonuç 1.1.21: $S(\Delta^m)$ uzayı bir lineer uzaydır [25].

Tanım 1.1.22: $0 < \alpha \leq 1$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisi verilsin, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$d_{\alpha}(\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\alpha}} |\{k \leq n : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına α . dereceden Δ^m -istatistiksel yakınsaktır ya da l sayısına $S_{\alpha}(\Delta^m)$ -yakınsaktır denir ve $S_{\alpha} - \lim \Delta^m x_k = l$ olarak yazılır. Bütün α . dereceden Δ^m -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_{\alpha}(\Delta^m)$ ile gösterilir. $\alpha = 1$ durumunda, α . dereceden Δ^m -istatistiksel yakınsaklık, Δ^m -istatistiksel yakınsaklığa ve $m = 0$ durumunda da bilinen yakınsaklığa indirgenir [36].

Tanım 1.1.23: f bir sınırlı olmayan modülüs ve $x = (x_k)$ dizisi verilsin, eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$d^f(\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n)} f(\{k \leq n: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına Δ_f^m –istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $S^f - \lim \Delta^m x_k = l$ yazılabilir. Bütün Δ_f^m –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S^f(\Delta^m)$ ile gösterilir. $f(x) = x$ durumunda, Δ_f^m –istatistiksel yakınsaklık, Δ^m –istatistiksel yakınsaklığa dönüşür [48].

Tanım 1.1.23 ve Uyarı 1.1.10 dan, her Δ_f^m –istatistiksel yakınsak dizinin Δ^m –istatistiksel yakınsak olduğunu fakat Δ^m –istatistiksel yakınsak bir dizinin, sınırsız bir f modülüsü için Δ_f^m –istatistiksel yakınsak olması gerekmediği görülür.

Tanım 1.1.24: w_0, w, w_∞ kuvvetli Cesàro toplanabilir dizi uzaylar aşağıdaki gibi tanımlanır [19]:

$$\begin{aligned} w_0 &= \left\{ x \in s: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| = 0 \right\}, \\ w &= \left\{ x \in s: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k - l| = 0, \text{ en az bir } l \text{ sayısı için} \right\}, \\ w_\infty &= \left\{ x \in s: \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |x_k| < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Tanım 1.1.25: Bir $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi, negatif olmayan tamsayıların, $k_0 = 0$ ve $r \rightarrow \infty$ iken $h_r = (k_r - k_{r-1}) \rightarrow \infty$ olacak şekilde bir artan dizisidir. Kolaylık olması için θ ile belirtilen aralıklar $I_r = (k_{r-1} - k_r]$ ile $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile gösterilecek, $q_1 = k_1$ olarak alınacaktır [33].

Tanım 1.1.26: $\theta = (k_r)$ lacunary dizisi verilsin, bir $\mathbb{E} \subset \mathbb{N}$ kümesinin lacunary yoğunluğu ya da θ –yoğunluğu

$$d^\theta(\mathbb{E}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r: k \in \mathbb{E}\}|$$

Limitinin mevcut olması şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 1.1.27: θ bir lacunary dizisi olsun. ve bir $x = (x_k)$ sayı dizisi verilsin, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına lacunary istatistiksel yakınsak ya da l sayısına S_θ –yakınsaktır denir. Bütün lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ ile gösterilir [16].

Tanım 1.1.28: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun ve $0 < \alpha \leq 1$ verilsin. $x = (x_k) \in s$ dizisine

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r: |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise l reel sayısına α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır denir. Bütün α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ^α ile gösterilir [27].

Uyarı 1.1.29: α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır, fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Bunu göstermek için $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 2r \\ 0, & k \neq 2r \end{cases} \quad r = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $\alpha > 1$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - 1| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^\alpha}{2h_r^\alpha} = 0$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r^\alpha} |\{k \in I_r : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{k_r - k_{r-1}}{2h_r^\alpha} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{h_r^\alpha}{2h_r^\alpha} = 0$$

olup $x = (x_k)$ dizisi hem 0 hem de 1 sayısına α . dereceden lacunary istatistiksel yakınsaktır, fakat bu mümkün değildir [27].

Lemma 1.1.30: θ herhangi bir lacunary dizisi ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs ve her $x \geq 0, y \geq 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde c pozitif bir sabit olsun. Bu takdirde $S_\theta^f \subset S^f$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup_r q_r < \infty$ dir [6].

2. GENELLEŞTİRİLMİŞ İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ CESARO TOPLANABİLME

Bu bölümde, sınırsız bir modülüs fonksiyonu ve genelleştirilmiş Δ^m fark operatörü kullanılarak reel sayı dizilerinin α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cèsaro toplanabilme kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca bütün α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile bütün α . dereceden kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ – Cèsaro toplanabilir dizilerin kümesi arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Bu bölümde, $\alpha > 1$ için α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli Cèsaro toplanabilirlik anlamlı olmadığından (Bak. [50]) hem α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık hem de α . dereceden kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cèsaro toplanabilme kavramlarını tanımlarken α sayısı, $\alpha \in (0,1]$ olacak şekilde bir real alınmıştır.

2.1. α . Dereceden $\Delta_v^m(f)$ –İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve genelleştirilmiş Δ^m fark operatörü yardımıyla reel sayı dizileri için α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 2.1.1: α , $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde herhangi bir reel sayı ve f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu olsun. Bir $x = (x_k)$ dizisi ve verilen bir $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaktır (ya da l sayısına $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ –yakınsak) denir. Bu durumda $S_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l$ yazılır. $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ ile bütün α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilir. $\alpha = 1$ ise $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ yerine $S^f(\Delta_v^m)$ ve $f(x) = x$ olması halinde $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ yerine $S_\alpha(\Delta_v^m)$ yazılır.

$\alpha > 1$ için, bir dizinin α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel limitin tek olmadığı aşağıdaki örnekten açıkça görülebilir.

Örnek 2.1.2: $f, \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu olsun, $x = (x_k)$ dizisi

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 1| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f(n^\alpha)}$$

ve

$$\frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f(n^\alpha)}$$

elde edilir. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olduğundan $\alpha > 1$ ve her bir $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 1| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

elde edilir. Buradan $x = (x_k)$ dizisi hem 1 hem de 0 sayılarına $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ –yakınsaktır ki bu da mümkün değildir.

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi Δ_v^m –yakınsak ise bu takdirde sınırlı olmayan bir f modülüsü ve $\alpha \in (0, 1]$ için $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ –yakınsaktır fakat tersi doğru değildir. Bunu göstermek için $f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) alınsın ve $x = (x_k)$ dizisi

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlansın. $x = (x_k)$ dizisi Δ_v^m –yakınsak değildir, fakat $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|)}{f(n^\alpha)} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(\sqrt{n})}{f(n^\alpha)}$$

ve buradan $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|)}{f(n^\alpha)} = 0,$$

elde edilir. Buradan x dizisi $S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ –yakınsaktır.

Teorem 2.1.3: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi olmak üzere

- (i) $S_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim cx_k = cl$ dir,
- (ii) $S_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l_1$ ve $S_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim y_k = l_2$ ise $S_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim(x_k + y_k) = l_1 + l_2$ dir.

İspat: İspat, Lemma 1.1.6 ve Teorem 1.1.16 dan elde edilir.

Teorem 2.1.4: f sınırlı olmayan bir modülüs ve α ve β parametreleri $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde reel sayılar olsunlar. Bu takdirde $S_\alpha^f(\Delta_v^m) \subset S_\beta^f(\Delta_v^m)$ kapsamı kesindir.

İspat: f sınırlı olmayan bir modülüs ve α ve β parametreleri $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde reel sayılar ve $x \in S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ olsun. Bu takdirde $\alpha \leq \beta$ için

$$\frac{1}{f(n^\beta)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|)$$

olup $x \in S_\beta^f(\Delta_v^m)$ dır.

Kapsamasının kesinliğini göstermek için $f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) olsun ve $x = (x_k)$ dizisi

$$\Delta_v^m x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3 \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde $\beta \in (\frac{1}{3}, 1]$ için $x \in S_\beta^f(\Delta_v^m)$, fakat $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$ için $x \notin S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ dir.

Aşağıdaki sonuç Teorem 2.1.4 ten kolayca elde edilebilir.

Sonuç 2.1.5: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde $S_\alpha^f(\Delta_v^m) \subset S^f(\Delta_v^m)$ kapsaması kesindir.

Teorem 2.1.6: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde

- i) $S_\alpha^f(\Delta_v^m) \subset S_\alpha(\Delta_v^m)$,
- ii) $S_\alpha^f(\Delta_v^m) \subset S(\Delta_v^m)$

kapsamaları kesindir.

İspat. Kapsama kısımlarının ispatı kolaydır. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $f(x) = \log(x + 1)$ olsun ve (2.2) ile tanımlanan dizi göz önüne alınsın. Bu takdirde $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in S_\alpha(\Delta_v^m)$ ve buradan $x \in S(\Delta_v^m)$ fakat $x \notin S_\alpha^f(\Delta_v^m)$ dir.

2.2. α . Dereceden Kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cesàro Toplanabilme

Bu kısımda α . dereceden kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cesàro toplanabilme kavramı tanımlanmış ve bu kavrama ilişkin birkaç bağıntı ispatlanmıştır.

Tanım 2.2.1: f bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} w_{\alpha,0}^f(\Delta_v^m) &= \left\{ x \in s: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k|) = 0 \right\}, \\ w_\alpha^f(\Delta_v^m) &= \left\{ x \in s: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|) = 0 \text{ en az bir } l \text{ için} \right\}, \\ w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_v^m) &= \left\{ x \in s: \sup_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k|) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $x \in w_\alpha^f(\Delta_v^m)$ ise $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına f modülüs fonksiyonuna göre α . dereceden kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cesàro toplanabilirdir (ya da α dereceli kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cesàro toplanabilirdir) denir. Bu durumda $w_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l$ yazarız. Bu uzaylar

oldukça genel uzaylardır. Gerçekten f , v ve α özel seçilerek aşağıda verilen bazı uzaylar elde edilir.

- i) $f(x) = x$ olması durumunda, $w_{\alpha,0}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\alpha,0}(\Delta_v^m)$, $w_{\alpha}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\alpha}(\Delta_v^m)$ ve $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\alpha,\infty}(\Delta_v^m)$ yazılır.
- ii) $\alpha = 1$ olması durumunda $w_{\alpha,0}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_0^f(\Delta_v^m)$, $w_{\alpha}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w^f(\Delta_v^m)$ ve $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\infty}^f(\Delta_v^m)$ yazılır.
- iii) $f(x) = x$ ve $\alpha = 1$ ise, $w_{\alpha,0}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_0(\Delta_v^m)$, $w_{\alpha}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w(\Delta_v^m)$ ve $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\infty}(\Delta_v^m)$ yazılır.
- iv) Eğer $v = (1,1,1, \dots)$ ise, bu takdirde $w_{\alpha,0}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\alpha,0}^f(\Delta^m)$, $w_{\alpha}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\alpha}^f(\Delta^m)$ ve $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_v^m)$ yerine $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta^m)$ yazılır.

Teorem 2.2.2: i) Herhangi bir f modülüsü ve $0 < \alpha \leq 1$ şeklindeki α sayısı için $w_{\alpha,0}^f(\Delta_v^m) \subset w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_v^m)$,

ii) Herhangi bir f modülüsü ve $\alpha = 1$ için, $w^f(\Delta_v^m) \subset w_{\infty}^f(\Delta_v^m)$

dir.

İspat: ii) nin ispatını verelim, i) in ispatı benzer olarak verilir. $x \in w^f(\Delta_v^m)$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k|) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|) + f(|l|) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1$$

dır. Buradan $x \in w_{\infty}^f(\Delta_v^m)$ elde edilir.

Teorem 2.2.3: Herhangi bir f modülüsü ve $\alpha = 1$ için,

- i) $w(\Delta_v^m) \subset w^f(\Delta_v^m)$,
- ii) $w_0(\Delta_v^m) \subset w_0^f(\Delta_v^m)$,
- iii) $w_{\infty}(\Delta_v^m) \subset w_{\infty}^f(\Delta_v^m)$

dir.

İspat: Sadece (iii) ün ispatını yapalım, diğerlerinin ispatı da benzerdir. $x \in w_{\infty}(\Delta_v^m)$ olsun, bu takdirde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k| < M$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcuttur. $\varepsilon > 0$ olsun ve $0 < \delta < 1$ şeklinde bir δ seçilsin. Bu takdirde $0 < t \leq \delta$ için $f(t) < \varepsilon$ dir. Buradan

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k|) = \frac{1}{n} \sum_{|\Delta_v^m x_k| \leq \delta} f(|\Delta_v^m x_k|) + \frac{1}{n} \sum_{|\Delta_v^m x_k| > \delta} f(|\Delta_v^m x_k|)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\frac{1}{n} \sum_{|\Delta_v^m x_k| \leq \delta} f(|\Delta_v^m x_k|) \leq \frac{1}{n} \sum \varepsilon \leq \frac{n\varepsilon}{n} = \varepsilon \quad (2.4)$$

dir ve $|\Delta_v^m x_k| > \delta$ olduğundan ve t nin tam kısmı $[t]$ olmak üzere $|\Delta_v^m x_k| < |\Delta_v^m x_k|/\delta < 1 + [|\Delta_v^m x_k|/\delta]$ ve modülüs fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$f(|\Delta_v^m x_k|) \leq \left(1 + \left\lceil \frac{|\Delta_v^m x_k|}{\delta} \right\rceil\right) f(1) \leq 2f(1) \frac{|\Delta_v^m x_k|}{\delta}$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{1}{n} \sum_{|\Delta_v^m x_k| > \delta} f(|\Delta_v^m x_k|) \leq 2f(1)\delta^{-1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k| \quad (2.5)$$

dir. (2.4) ve (2.5) ten

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k|) \leq \varepsilon + 2f(1)\delta^{-1} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k|$$

elde edilir. Böylece $x \in w_{\alpha, \infty}(\Delta_v^m)$ olduğundan $x \in w_{\alpha, \infty}^f(\Delta_v^m)$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.2.4: f bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise, bu takdirde $w_{\alpha}^f(\Delta_v^m) \subset w_{\alpha}(\Delta_v^m)$ dir.

İspat. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise $\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} = \inf\{\frac{f(t)}{t}; t > 0\}$ yazılabilir. γ nın tanımından, her $t \geq 0$ için, $f(t) \geq \gamma t$ elde edilir. $\gamma > 0$ olduğundan her $t \geq 0$ için $t \leq \gamma^{-1} f(t)$ dir ve böylece

$$\frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - l| \leq \gamma^{-1} \frac{1}{n^{\alpha}} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|)$$

olup ispat tamamlanır.

Teorem 2.2.3 ve Teorem 2.2.4 aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Teorem 2.2.5: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f herhangi bir modülüs ve $\alpha = 1$ sayısı için $w^f(\Delta_v^m) = w(\Delta_v^m)$ dir.

Teorem 2.2.6: f bir modülüs ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun, bu takdirde $w_{\alpha}^f(\Delta_v^m) \subset w_{\beta}^f(\Delta_v^m)$ ve bu kapsama kesindir.

İspat. f sınırlı olmayan bir modülüs ve α, β parametreleri $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde reel sayılar ve $x \in w_{\alpha}^f(\Delta_v^m)$ olsun. Bu takdirde $\alpha \leq \beta$ için

$$\frac{1}{f(n^{\beta})} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - l| \leq \frac{1}{f(n^{\alpha})} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|)$$

olup $x \in w_{\beta}^f(\Delta_v^m)$ dir.

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için bir f modülüsünü ve (2.2) ile tanımlanan diziyi göz önüne alalım. Modülüs fonksiyonunun özelliğinden ($f(0) = 0$ durumu kullanılarak) her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - 0|) \leq \frac{2\delta^{-1}f(1)}{n^\beta} \sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k| \leq \frac{2\delta^{-1}f(1)\sqrt{n}}{n^\beta} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

elde edilir. Böylece $\beta > \frac{1}{2}$ için $x \in w_\beta^f(\Delta_v^m)$

ve

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - 0|) \geq \frac{\sqrt{n} - 1}{n^\alpha} f(1) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty \text{ iken}$$

olup bu da $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için $x \notin w_\alpha^f(\Delta_v^m)$ demektir.

Teorem 2.2.7: f bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun, bu takdirde $w_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l$ limiti tektir.

İspat. Kabul edelim ki $w_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l$ limiti tek olmasın, yani $l_1 \neq l$ olmak üzere $w_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l_1$ ve $w_\alpha^f(\Delta_v^m) - \lim x_k = l$ olsun. Bu takdirde

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l_1|) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde l_1 ve l sayıları vardır. Buradan

$$f(|l - l_1|) \leq \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l_1|) + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olup modülüs fonksiyonun (i) ve (iv) özelliklerinden $|l - l_1| = 0$ elde edilir. Böylece $l = l_1$ dir.

2.3. α . Dereceden Kuvvetli Δ_v^m -Cesàro Toplanabilme ile α . Dereceden $\Delta_v^m(f)$ -İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda f modülüs fonksiyonuna göre α . dereceden kuvvetli Δ_v^m -Cesàro toplanabilme ile α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ -istatistiksel yakınsaklık arasında birkaç bağıntı verilmiştir.

Teorem 2.3.1. $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde α, β sabit reel sayılar, her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Bu durumda eğer bir dizi bir l sayısına bir f modülüs fonksiyonuna göre α . dereceden kuvvetli Δ_v^m -Cesàro toplanabilir ise l sayısına β . dereceden $\Delta_v^m(f)$ -istatistiksel yakınsaktır.

İspat. Her $x = (x_k)$ ve $\varepsilon > 0$ için modülüs fonksiyonun tanımı kullanılarak

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|) &\geq f\left(\sum_{k=1}^n |\Delta_v^m x_k - l|\right) \\
&\geq f(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| \varepsilon) \\
&\geq cf(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|)f(\varepsilon)
\end{aligned}$$

ve $\alpha \leq \beta$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_v^m x_k - l|) &\geq \frac{cf(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|)f(\varepsilon)}{n^\alpha} \\
&\geq \frac{cf(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|)f(\varepsilon)}{n^\beta} \\
&= \frac{cf(|\{k \leq n: |\Delta_v^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|)f(\varepsilon)f(n^\beta)}{n^\beta f(n^\beta)}
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Burada $n \rightarrow \infty$ iken limit alınarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.1 den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 2.3.2. $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α bir reel sayı, her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına bir f modülüs fonksiyonuna göre α . dereceden kuvvetli Δ_v^m –Cesàro toplanabilir ise l sayısına $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 2.3.3. Her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına bir f modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli Δ_v^m –Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.3.4. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f bir modülüs ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına bir f modülüs fonksiyonun göre α . dereceden kuvvetli Δ_v^m –Cesàro toplanabilir ise bu takdirde α . dereceden Δ_v^m –istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 2.3.4 kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.3.5. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına bir f modülüs fonksiyonuna göre α . dereceden kuvvetli Δ_v^m –Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına Δ_v^m –istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 2.3.6. Eğer bir dizi bir l sayısına kuvvetli Δ_v^m –Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına Δ_v^m –istatistiksel yakınsaktır.

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ f -LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ f -LACUNARY TOPLANABİLME

Bu bölümde sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve genelleştirilmiş Δ^m fark operatörü kullanılarak Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Δ_f^m -lacunary yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile kuvvetli Δ_f^m -lacunary yakınsak dizilerin kümesi arasındaki kapsama bağıntıları verilmiştir.

3.1 Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin f -Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığı

Tanım 3.1.1: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsak (ya da l sayısına $S^f(\Delta_\theta^m)$ -yakınsak) denir. Bu durumda, $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l$ yazılabilir. $S^f(\Delta_\theta^m)$ ile bütün Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilir. $\theta = (2^r)$ olması halinde $S^f(\Delta_\theta^m)$ yerine $S^f(\Delta^m)$; $f(x) = x$ olması halinde $S^f(\Delta_\theta^m)$ yerine $S(\Delta_\theta^m)$ ve ayrıca $\theta = (2^r)$ ve $f(x) = x$ özel durumunda da $S^f(\Delta_\theta^m)$ yerine $S(\Delta^m)$ yazılır.

Teorem 3.1.2: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi birer dizi olsun. Bu takdirde

- i) $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim cx_k = cl$ dir,
- ii) $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l_1$ ve $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim y_k = l_2$ ise $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim (x_k + y_k) = l_1 + l_2$ dir.

İspat: İspat, Lemma 1.1.6 ve Teorem 1.1.16 dan elde edilir.

Teorem 3.1.3: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu olsun. Bu takdirde her Δ^m -yakınsak dizisi Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi herhangi bir Δ^m -yakınsak dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}$ kümesi sonludur. $|\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| = M$ diyelim. Buna göre $\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\} \subset \{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}$ ve f artan olduğundan

$$f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \leq f(|\{k \leq n : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = f(M)$$

yazılabilir ve böylece

$$\frac{f(|\{k \in I_r: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|)}{f(h_r)} \leq \frac{f(M)}{f(h_r)}$$

olur. Her iki tarafın $r \rightarrow \infty$ için limiti alınırsa

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)} f(|\{k \in I_r: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = 0.$$

elde edilir.

Kapsamanın kesinliğini göstermek için $f(x) = x$ alınsın ve $x = (x_k)$ dizisi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} 1, & k_{r(j)-1} < k \leq 2k_{r(j)-1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad \text{bazı } j = 1, 2, 3, \dots \text{ için} \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan $x = (x_k)$ dizisi Δ^m -yakınsak değildir, fakat (1.1) ve Lemma 1.1.30 dan $x \in S^f(\Delta_\theta^m)$ elde edilir.

Teorem 3.1.4: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Bu takdirde her Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsak dizi, Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $x = (x_k)$ dizisi Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq r_0$ olduğunda

$$\frac{1}{f(h_r)} f(|\{k \in I_r: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) < \frac{1}{p}$$

olacak şekilde bir $p \in \mathbb{N}$ vardır. f fonksiyonu alt toplamsal olduğundan limit tanımı göz önüne alınırsa

$$f(|\{k \in I_r: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) < \frac{1}{p} f(h_r) < \frac{1}{p} p f\left(\frac{h_r}{p}\right) = f\left(\frac{h_r}{p}\right)$$

elde edilir. f fonksiyonu artan olduğundan

$$(|\{k \in I_r: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) < \left(\frac{h_r}{p}\right)$$

olup, $r_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $r \geq r_0$ olduğunda

$$\frac{1}{h_r} (|\{k \in I_r: |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) < \frac{1}{p}$$

dır, yani x dizisi Δ^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.1.5: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$

ve $\liminf q_r > 1$ ise Δ_f^m -istatistiksel yakınsak bir dizi Δ_f^m -lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\liminf q_r > 1$ ise yeterince büyük r ler için $q_r > 1 + a$ olacak şekilde bir $a > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\frac{h_r}{k_r} > \frac{a}{1+a}$$

yazılabilir. Şimdi $x = (x_k)$ dizisi Δ_f^m – istatistiksel yakınsak olsun. Bu durumda $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük r ler için

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(k_r)} f(|\{k \leq k_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) &\geq \frac{1}{f(k_r)} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \\ &= \frac{f(h_r)}{h_r} \frac{k_r}{f(k_r)} \frac{h_r}{k_r} \frac{1}{f(h_r)} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \\ &\geq \frac{f(h_r)}{h_r} \frac{k_r}{f(k_r)} \frac{a}{1+a} \frac{1}{f(h_r)} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \end{aligned}$$

olup x dizisi Δ_f^m –lacunary istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 3.1.6: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve $\limsup q_r < \infty$ ise Δ_f^m – lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi Δ_f^m – istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\limsup q_r < \infty$ ise $q_r < H$ olacak şekilde bir $H > 0$ sayısı vardır. Şimdi $x = (x_k)$ dizisi Δ_f^m – lacunary istatistiksel yakınsak ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(h_r)}{h_r} = l_1 > 0$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $r \geq r_0$ olduğunda

$$\frac{f(h_r)}{h_r} < l_1 + \varepsilon$$

olacak şekilde bir $r_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve böylece

$$\frac{1}{f(h_r)} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) < \varepsilon$$

dır. $N_r = \{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için $r \geq r_0$ olduğunda

$$\frac{f(N_r)}{f(h_r)} < \varepsilon$$

dır. $M = \max\{f(N_1), f(N_2), \dots, f(N_{r_0})\}$ olsun ve n sayısı $k_{r-1} < n \leq k_r$ olacak şekilde seçilsin.

Bu takdirde

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(n)} f(|\{k \leq n : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) &\leq \frac{1}{f(k_{r-1})} f(|\{k \leq k_{r-1} : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) \\ &\leq \frac{1}{f(k_{r-1})} f(\{N_1 + N_2 + \dots + N_{r_0} + N_{r_0+1} + \dots + N_r\}) \\ &\leq \frac{1}{f(k_{r-1})} \{f(N_1) + f(N_2) + \dots + f(N_{r_0}) + f(N_{r_0+1}) + \dots + f(N_r)\} \\ &\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \{f(N_{r_0+1}) + \dots + f(N_r)\} \\ &\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \left\{ \frac{f(h_{r_0+1})f(N_{r_0+1})}{h_{r_0+1}f(h_{r_0+1})} h_{r_0+1} + \dots + \frac{f(h_r)f(N_r)}{h_r f(h_r)} h_r \right\} \\ &\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{1}{f(k_{r-1})} \{(l_1 + \varepsilon)\varepsilon h_{r_0+1} + \dots + (l_1 + \varepsilon)\varepsilon h_r\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{(l_1 + \varepsilon)\varepsilon}{f(k_{r-1})} \{k_r - k_{r_0}\} \\
&\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + \frac{(l_1 + \varepsilon)\varepsilon}{f(k_{r-1})} k_r \\
&= \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + q_r \frac{(l_1 + \varepsilon)\varepsilon}{f(k_{r-1})/k_{r-1}} \\
&\leq \frac{r_0 M}{f(k_{r-1})} + H \frac{(l_1 + \varepsilon)\varepsilon}{f(k_{r-1})/k_{r-1}}
\end{aligned}$$

olup x dizisi Δ_f^m – istatistiksel yakınsaktır.

3.2. Genelleştirilmiş Fark Dizilerinin f –Lacunary İstatistiksel Yakınsaklığına ve Kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ –Toplanabilirliğine İlişkin Bağıntılar

Tanım 3.2.1: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve p bir real sayı olsun.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} [f(|\Delta^m x_k - l|)]^p = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına kuvvetli $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilirdir denir. Bu durumda $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l$ yazılabilir. $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ ile bütün kuvvetli $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilir dizilerin kümesi gösterilir, yani

$$N_p^{ff}(\Delta_\theta^m) = \left\{ x \in s: \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} [f(|\Delta^m x_k - l|)]^p = 0, \text{ en az bir } l \text{ sayısı için} \right\}$$

dir. Eğer $\theta = (2^r)$ ise $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p^{ff}(\Delta^m)$, $f(x) = x$ olması durumunda $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p(\Delta_\theta^m)$, $\theta = (2^r)$ ve $f(x) = x$ özel durumunda ise $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p(\Delta^m)$ yazılabilir.

Tanım 3.2.2: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve p bir real sayı olsun.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k - l|^p = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına kuvvetli $N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilirdir denir. Bu durumda, $N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l$ yazılabilir. $N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ ile bütün kuvvetli $N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilir dizilerin kümesi gösterilir, yani

$$N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m) = \left\{ x \in s: \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k - l|^p = 0, \text{ en az bir } l \text{ sayısı için} \right\}$$

dir. Eğer $\theta = (2^r)$ ise $N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p^{(f)}(\Delta^m)$, $f(x) = x$ olması durumunda $N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p(\Delta_\theta^m)$, $\theta = (2^r)$ ve $f(x) = x$ özel durumunda ise $N_p^{(f)}(\Delta^m)$ yerine $N_p(\Delta^m)$ yazılabilir.

Tanım 3.2.3: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi, f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve p bir real sayı olsun.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [f(|\Delta^m x_k - l|)]^p = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi bir l sayısına kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ -toplanabildir denir. Bu durumda, $N_p^f(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l$ yazılabilir. $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ ile bütün kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ -toplanabilir dizilerin kümesi gösterilir, yani

$$N_p^f(\Delta_\theta^m) = \left\{ x \in s: \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} [f(|\Delta^m x_k - l|)]^p = 0, \text{ en az bir } l \text{ sayısı için} \right\}$$

dir. Eğer $\theta = (2^r)$ ise $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p^f(\Delta^m)$, $f(x) = x$ olması durumunda $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p(\Delta_\theta^m)$, $\theta = (2^r)$ ve $f(x) = x$ özel durumunda ise $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ yerine $N_p(\Delta^m)$ yazılabilir.

Tanım 3.2.1, Tanım 3.2.2 ve Tanım 3.2.3 de verilen kümeler, herhangi sınırsız bir modülüs fonksiyonu için birbirlerinden farklı olup birer vektör uzayıdır. $f(x) = x$ olarak seçildiğinde bu üç küme $N_p(\Delta_\theta^m)$ kümesine indirgenir.

Teorem 3.2.4: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi ve f sınırlı olmayan bir modülüs olsun.

$\liminf_t \frac{f(t)}{t} > 0$ ise $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m) \subset N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ dir.

İspat: $x \in N_p^{ff}(\Delta_\theta^m)$ olsun. $\liminf_t \frac{f(t)}{t} > 0$ olduğundan $f(t) > Mt$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} [f(|\Delta^m x_k - l|)]^p &\geq \frac{1}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} M^p |\Delta^m x_k - l|^p \\ &\geq \frac{M^p}{f(h_r)} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k - l|^p \end{aligned}$$

elde edilir, bu ise $x \in N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ demektir.

Teorem 3.2.4 te f modülüs fonksiyonun $\liminf_t \frac{f(t)}{t} > 0$ şartının sağlanması esastır, bu şart sağlanmadığında $N_p^{ff}(\Delta_\theta^m) \subset N_p^{(f)}(\Delta_\theta^m)$ bağıntısı sağlanmayabilir.

Teorem 3.2.5: $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. $N_p(\Delta_\theta^m)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_{\Delta_\theta} = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayı, $0 < p < 1$ için

$$\|x\|_{\Delta_{\theta_1}} = \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k|^p$$

ile bir tam p –normlu uzaydır.

İspat: Kuvvetli lacunary toplanabilir dizilerin uzayı N_θ , $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_\theta = \sup_r \left(\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayı ve $0 < p < 1$ için

$$\|x\|_{\theta_1} = \sup_r \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} |x_k|^p$$

ile bir tam p –normlu uzay olduğundan Teorem 1.1.18 göz önüne alınırsa $N_p(\Delta_\theta^m)$ dizi uzayının $1 \leq p < \infty$ için $\|x\|_{\Delta_\theta}$ normu ile bir Banach uzayı, $0 < p < 1$ için $\|x\|_{\Delta_{\theta_1}}$ normu ile bir tam p –normlu uzay olduğu görülür.

Teorem 3.2.5 te $\theta = (2^r)$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.6: $N_p(\Delta^m)$ uzayı $1 \leq p < \infty$ için

$$\|x\|_\Delta = \sup_n \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir Banach uzayı ve $0 < p < 1$ için

$$\|x\|_{\Delta_1} = \sup_n \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\Delta^m x_k|^p$$

ile bir tam p –normlu uzaydır.

Teorem 3.2.7: f bir modülüs fonksiyonu ve $\theta = (k_r)$ bir lacunary dizisi olsun. Bu takdirde

- i) Her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilir ise bu takdirde l sayısına $S^f(\Delta_\theta^m)$ –yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.
- ii) f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ^m –sınırlı ve $S^f(\Delta_\theta^m)$ –yakınsak ise bu takdirde kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilirdir.

İspat: i) $x = (x_k)$ herhangi bir dizi ve $\varepsilon > 0$ için, modülüs fonksiyonunun tanımı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f(|\Delta^m x_k - l|) &\geq \frac{1}{h_r} f\left(\sum_{k \in I_r} |\Delta^m x_k - l|\right) \\
&\geq \frac{1}{h_r} f\left(\sum_{\substack{k \in I_r \\ |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon}} |\Delta^m x_k - l|\right) \\
&\geq \frac{1}{h_r} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| \varepsilon) \\
&\geq \frac{c}{h_r} f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) f(\varepsilon) \\
&\geq \frac{c}{h_r} \frac{f(h_r) f(|\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|)}{f(h_r)} f(\varepsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir ki buradan x dizisi kuvvetli $N_p^f(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilir ve $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(h_r)}{h_r} > 0$ olduğundan $S^f(\Delta_\theta^m)$ –yakınsaktır.

ii) Kabul edelim ki $x \in \ell_\infty(\Delta^m)$ ve $S^f(\Delta_\theta^m) - \lim x_k = l$ olsun. Bu durumda her $k \in \mathbb{N}$ için $|\Delta^m x_k - l| \leq H$ olacak şekilde bir $H > 0$ bulunabilir. $\varepsilon > 0$ verilsin, bu takdirde

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} f(|\Delta^m x_k - l|) &= \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon}} f(|\Delta^m x_k - l|) + \frac{1}{h_r} \sum_{\substack{k \in I_r \\ |\Delta^m x_k - l| < \varepsilon}} f(|\Delta^m x_k - l|) \\
&\leq \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |\Delta^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| f(H) + \frac{1}{h_r} h_r f(\varepsilon)
\end{aligned}$$

elde edilir

Sonuç 3.2.8: i) Eğer bir dizi bir l sayısına kuvvetli $N(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilir ise bu takdirde l sayısına $S(\Delta_\theta^m)$ –yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir.

ii) Eğer $x = (x_k)$ dizisi Δ^m –sınırlı ve $S(\Delta_\theta^m)$ –yakınsak ise bu takdirde kuvvetli $N(\Delta_\theta^m)$ –toplanabilirdir.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ f -İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE KUVVETLİ f -CESARO TOPLANABİLME

Bu bölümde sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve genelleştirilmiş Δ_n^m fark operatörü kullanılarak α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cesàro toplanabilme kavramı tanımlanmış ve α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık ile α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cesàro toplanabilme arasındaki bağıntılar verilmiştir.

Genelleştirilmiş Δ_n^m fark operatörü $m, n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Tripathy v. d. [34, 35] tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$\Delta_n^0 x = (x_k), \Delta_n^1 x = (x_k - x_{k+n}), \Delta_n^m x = (\Delta_n^m x_k) = (\Delta_n^{m-1} x_k - \Delta_n^{m-1} x_{k+1}), \Delta_n^m x_k = \sum_{i=0}^m (-1)^i \binom{m}{i} x_{k+ni}.$$

Bu bölümde, $\alpha > 1$ için α . dereceden istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli Cèsaro toplanabilirlik anlamlı olmadığından (Bak. [50]) hem α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık hem de α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cèsaro toplanabilme kavramları α sayısı, $\alpha \in (0, 1]$ olacak şekilde bir real alınmıştır.

4.1. α . Dereceden $\Delta_n^m(f)$ –İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve genelleştirilmiş Δ_n^m fark operatörü kullanılarak α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık tanımlanmış ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 4.1.1: $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α herhangi bir reel sayı olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} |\{k \leq n: |\Delta_n^m x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına α . dereceden Δ_n^m –istatistiksel yakınsaktır (ya da l sayısına $S_\alpha(\Delta_n^m)$ –yakınsak) denir. Böylece $S_\alpha(\Delta_n^m) - \lim x_k = l$ yazılabilir. $S_\alpha(\Delta_n^m)$ ile bütün α . dereceden Δ_n^m –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilecektir.

Tanım 4.1.2: $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α herhangi bir reel sayı ve f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \in \mathbb{N}: |\Delta_n^m x_k - l| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel yakınsaktır (ya da l sayısına $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ –yakınsak) denir. Bu durumda $S_\alpha^f(\Delta_n^m) - \lim x_k = l$ yazılabilir. $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ ile bütün α . dereceden $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ –istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilir. $\alpha = 1$ olması durumunda $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ yerine $S^f(\Delta_n^m)$ yazılır. $n = 1$ olması durumunda $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ yerine $S^f(\Delta^m)$ yazılır. α .

dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel limit, $\alpha > 1$ için tek olmayabilir, bu da aşağıdaki örnekte gösterilmiştir.

Örnek 4.1.3: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu $n=1$ olsun ve $x = (x_k)$ dizisi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} 1, & k = 2n \\ 0, & k \neq 2n \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.1)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde

$$\frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - 1| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f(n^\alpha)}$$

ve

$$\frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|) \leq \frac{f\left(\frac{n}{2}\right)}{f(n^\alpha)}$$

elde edilir.

$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ ve $\alpha > 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - 1| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{f(n^\alpha)} f(|\{k \in \mathbb{N} : |\Delta^m x_k - 0| \geq \varepsilon\}|) = 0$$

elde edilir. Böylece bir $x = (x_k)$ dizisi hem 1 hem de 0 sayılarına $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ –yakınsaktır ki bu da mümkün değildir.

Eğer bir $x = (x_k)$ dizisi Δ_n^m –yakınsak ise bu takdirde herhangi bir sınırlı olmayan f modülüs fonksiyonu ve $\alpha \in (0, 1]$ sayısı için $S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ –yakınsaktır, fakat tersi doğru değildir. Bunun için $n=1$, $f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) alınsın ve bir x dizisi

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2 \\ 0, & k \neq n^2 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde Δ_n^m –yakınsak olmadığı halde $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ için $x \in S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ dir.

Teorem 4.1.4: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ herhangi iki dizi olsun. Bu takdirde

- i) $S_\alpha^f(\Delta_n^m) - \lim x_k = l$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_\alpha^f(\Delta_n^m) - \lim cx_k = cl$ dir,
- ii) $S_\alpha^f(\Delta_n^m) - \lim x_k = l_1$ ve $S_\alpha^f(\Delta_n^m) - \lim y_k = l_2$ ise $S_\alpha^f(\Delta_n^m) - \lim(x_k + y_k) = l_1 + l_2$ dir.

İspat: İspat Lemma 1.1.6 ve Teorem 1.1.16 dan elde edilir.

Teorem 4.1.5: f bir sınırlı olmayan modülüs ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ şeklinde sabit reel sayılar olsun. Bu takdirde $S_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset S_\beta^f(\Delta_n^m)$ dir ve bu kapsama kesindir.

İspat: Kapsama kısmının ispatı kolaydır (Bak Teorem 2.1.4).

$S_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset S_\beta^f(\Delta_n^m)$ kapsamasının kesinliğini göstermek için $n = 1$ ve $f(x) = x^p$ ($0 < p \leq 1$) seçelim ve bir $x = (x_k)$ dizisini

$$\Delta^m x_k = \begin{cases} 1, & k = n^3 \\ 0, & k \neq n^3 \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

Olarak tanımlayalım. $\beta \in (\frac{1}{3}, 1]$ için $x \in S_\beta^f(\Delta_n^m)$, fakat $\alpha \in (0, \frac{1}{3}]$ için $x \notin S_\alpha^f(\Delta_n^m)$ dir.

Teorem 4.1.5 ten aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 4.1.6: f bir sınırlı olmayan modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde $S_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset S^f(\Delta_n^m)$ dir ve bu kapsama kesindir.

Teorem 4.1.7: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde

- i) $S_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset S_\alpha(\Delta_n^m)$,
- ii) $S_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset S(\Delta_n^m)$

kapsamaları kesindir.

İspat: Kapsama kısımlarının ispatı kolaydır. Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $n = 1$, $f(x) = \log(x + 1)$ olsun ve (4.2) de tanımlanan dizi göz önüne alınsın. Bu takdirde $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $x \in S_\alpha(\Delta^m)$ dir ve buradan $x \in S(\Delta^m)$ dir fakat $x \notin S_\alpha^f(\Delta^m)$ dir.

4.2. α . Dereceden Kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cesàro Toplanabilme

Bu kısımda genelleştirilmiş fark dizilerinin α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ –Cesàro toplanabilme kavramı tanımlanmış ve bu kavrama ilişkin birkaç bağıntı ispatlanmıştır.

Tanım 4.2.1: f sınırlı olmayan bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$\begin{aligned} w_{\alpha,0}^f(\Delta_n^m) &= \left\{ x \in s: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_n^m x_k|) = 0 \right\}, \\ w_\alpha^f(\Delta_n^m) &= \left\{ x \in s: \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_n^m x_k - l|) = 0 \text{ bazı } l \text{ sayıları için} \right\}, \\ w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_n^m) &= \left\{ x \in s: \sup_n \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta_n^m x_k|) < \infty \right\}, \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. f ve α nın bazı özel durumları için aşağıdaki uzaylar elde edilir.

- i) $f(x) = x$ durumunda, $w_{\alpha,0}^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_{\alpha,0}(\Delta_n^m)$ yerine, $w_\alpha^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_\alpha(\Delta_n^m)$, $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_{\alpha,\infty}(\Delta_n^m)$ yazılabilir.

- ii) $\alpha = 1$ durumunda, $w_{\alpha,0}^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_0^f(\Delta_n^m)$ yerine, $w_\alpha^f(\Delta_n^m)$ yerine $w^f(\Delta_n^m)$, $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_\infty^f(\Delta_n^m)$ yazılabilir.
- iii) $f(x) = x$ ve $\alpha = 1$ özel durumunda, $w_{\alpha,0}^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_0(\Delta_n^m)$ yerine, $w_\alpha^f(\Delta_n^m)$ yerine $w(\Delta_n^m)$, $w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_n^m)$ yerine $w_\infty(\Delta_n^m)$ yazılabilir.

Aşağıdaki iki teoremin ispatı Teorem 2.2.2 ve Teorem 2.2.3 'e benzerdir, bu yüzden bu teoremler ispatsız olarak verilmiştir.

Teorem 4.2.2: i) Herhangi bir f modülüsü ve $0 < \alpha \leq 1$ için $w_{\alpha,0}^f(\Delta_n^m) \subset w_{\alpha,\infty}^f(\Delta_n^m)$,

ii) Herhangi bir f modülüsü ve $\alpha = 1$ için, $w^f(\Delta_n^m) \subset w_\infty^f(\Delta_n^m)$ dir.

Teorem 4.2.3: Herhangi bir f modülüsü ve $\alpha = 1$ için,

- i) $w(\Delta_n^m) \subset w^f(\Delta_n^m)$,
- ii) $w_0(\Delta_n^m) \subset w_0^f(\Delta_n^m)$,
- iii) $w_\infty(\Delta_n^m) \subset w_\infty^f(\Delta_n^m)$ dir.

Teorem 4.2.4: f bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ise, bu takdirde $w_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset w_\alpha(\Delta_n^m)$ dir.

İspat: Teorem 2.2.4 ün ispatı ile benzerdir.

Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4 aşağıdaki sonucu verir.

Teorem 4.2.5: $\frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f herhangi bir modülüs ve $\alpha = 1$ olsun. Bu takdirde $w^f(\Delta_n^m) = w(\Delta_n^m)$ elde edilir.

Teorem 4.2.6: f bir modülüs ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu takdirde $w_\alpha^f(\Delta_n^m) \subset w_\beta^f(\Delta_n^m)$ dir ve bu kapsama kesindir.

İspat: İspatın kapsama kısmını göstermek kolaydır (Bak Teorem 2.2.6).

Kapsamanın kesin olduğunu göstermek için (4.2) ile tanımlanan dizi göz önüne alınsın ve $n=1$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\frac{1}{n^\beta} \sum_{k=1}^n f(|\Delta^m x_k - 0|) \leq \frac{\sqrt{n}}{n^\beta} f(1) = \frac{1}{n^{\beta-\frac{1}{2}}} f(1) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

elde edilir. Böylece $\beta > \frac{1}{2}$ için $x \in w_\beta^f(\Delta^m)$.

Diğer taraftan $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n f(|\Delta^m x_k - 0|) \geq \frac{\sqrt{n}-1}{n^\alpha} f(1) \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$$

dir. Bu ise $x \notin w_\alpha^f(\Delta^m)$ demektir.

4.3. α . Dereceden Kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ -Cesàro Toplanabilme ve α . Dereceden $\Delta_n^m(f)$ -İstatistiksel Yakınsaklık Arasındaki Bağlılıklar

Bu kısımda f modülüsü yardımıyla α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ -Cesàro toplanabilme ile α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ -istatistiksel yakınsaklık arasında birkaç bağıntı verilecektir.

Teorem 4.3.1: $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olacak şekilde α, β sabit reel sayılar, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ ve olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına α . dereceden kuvvetli Δ_n^m -Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına β . dereceden $\Delta_n^m(f)$ -istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Teorem 2.3.1 in ispatına benzerdir.

Teorem 4.3.1 den aşağıdaki sonuç kolayca elde edilebilir.

Sonuç 4.3.2: $0 < \alpha \leq 1$ olacak şekilde α herhangi bir reel sayı ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Eğer bir dizi bir f modülüs fonksiyonuna göre α . dereceden kuvvetli Δ_n^m -Cesàro toplanabilir ise bu α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ -istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 4.3.3: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ ve her $x \geq 0, y \geq 0, c > 0$ için $f(xy) \geq cf(x)f(y)$ ve olacak şekilde f sınırlı olmayan bir modülüs olsun. Eğer bir dizi bir f modülüs fonksiyonuna göre kuvvetli Δ_n^m -Cesàro toplanabilir ise bu takdirde $\Delta_n^m(f)$ -istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.3.4: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f bir modülüs ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ -Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ -istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.3.4 ten aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.3.5: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t)}{t} > 0$ olacak şekilde f bir modülüs fonksiyonu olsun. Eğer bir dizi bir l sayısına kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ -Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına $\Delta_n^m(f)$ -istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç 4.3.6: Eğer bir dizi bir l sayısına kuvvetli Δ_n^m -Cesàro toplanabilir ise bu takdirde l sayısına Δ_n^m -istatistiksel yakınsaktır.

5. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında sınırlı olmayan bir modülüs fonksiyonu ve genelleştirilmiş Δ^m (Δ_v^m veya Δ_n^m) fark operatörü kullanılarak bazı kavramlar tanıtılıp bu kavramlara ilişkin bazı özellikler verilmiştir.

Bu kavramlardan ilk olarak α . dereceden $\Delta_v^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklık ve α . dereceden kuvvetli $\Delta_v^m(f)$ –Cèsaro toplanabilme kavramları tanıtılmıştır. Bu kavramlar arasındaki bağıntılar verilmiş ve elde edilen sonuçlar [39] da verilen çalışma ile literatüre kazandırılmıştır.

Çalışmada tanıtılan diğer kavramlar Δ_f^m –lacunary istatistiksel yakınsaklık ve kuvvetli Δ_f^m –lacunary yakınsaklık kavramlarıdır. Burada Δ_f^m –lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi ile kuvvetli Δ_f^m –lacunary yakınsak dizilerin kümesi arasındaki kapsama bağıntıları verilmiştir. Burada elde edilen sonuçlar [32,48] de verilen çalışmalar ile literatüre kazandırılmıştır.

Son olarak Δ_n^m fark operatörü yardımıyla reel sayı dizilerinin α . dereceden $\Delta_n^m(f)$ –istatistiksel yakınsaklığı ve α . dereceden kuvvetli $\Delta_n^m(f)$ – Cesàro toplanabilmesi kavramları tanımlanmış ve bu kümeler arasındaki bağıntılar verilmiştir. Burada $n = 1$ için elde edilen sonuçlar, [49] de verilen çalışma ile literatüre kazandırılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Zygmund, A., (1979). *Trigonometric series*, Cambridge University Press, UK.
- [2] Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique, *Colloq. Math.* 2: 241-244.
- [3] Schoenberg, I. J. (1959). The integrability of certain functions and related summability methods. *Amer. Math. Monthly* 66: 361-375.
- [4] Bhardwaj, V. K., Dhawan, S., Gupta, S. (2016). Density by moduli and statistical boundness, *Abstract and Applied Analysis*, 2016.
- [5] Bhardwaj, V. K., and S. Dhawan. (2015). f -statistical convergence of order α and strong Cesàro summability of order α with respect to a modulus. *J. Inequal. Appl.* 2015:332, 14 pp.
- [6] Bhardwaj, V. K., Dhawan, S., (2016). Density by moduli and lacunary statistical convergence, *Abstract and Applied Analysis*, 2016(2), 1-11.
- [7] Connor, J. S. (1988). The statistical and strong p Cesaro convergence of sequences. *Analysis* 8: 47-63.
- [8] Connor, J.,(1989). On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence. *Can. Math. Bull.* 32(2), 194-198.
- [9] Çakkallı, H. (2011). Statistical quasi-Cauchy sequences. *Math. Comput. Modelling* 54(5-6):1620–1624.
- [10] Çınar, M., Karakaş, M., and Et, M., (2013). On pointwise and uniform statistical convergence of order α for sequences of functions. *Fixed Point Theory Appl.* 33, 11.
- [11] Çolak, R. (2010). Statistical convergence of order α , *Modern Methods in Analysis and Its Applications, New Delhi, India: Anamaya Pub.* 121–129.
- [12] Çolak, R., Et, M., (1997). On some generalized difference sequence spaces and related matrix transformations. *Hokkaido Math. J.*, 26(3), 483-492.
- [13] Das, P., S. Ghosal, and S. Som. (2015). Statistical convergence of order α in probability, *Arab J. Math. Sci.* 21(2): 253-265.
- [14] Das, P., S. Ghosal, and S. Som. (2017). Different types of quasi weighted $\alpha\beta$ –statistical convergence in probability, *Filomat.* 31(5): 1463-1473.
- [15] Das, P., S. Ghosal, and V. Karakaya. (2018). A notion of $\alpha\beta$ – statistical convergence of order γ in probability. *Kragujevac J. Math.* 42(1): 51-67.
- [16] Fridy, J.A., Orhan, C., (1993). Lacunary statistical convergence, *Pacific J. Math*, 160, 43-51.
- [17] Mursaleen, M. (2000). λ –statistical convergence. *Math. Slovaca* 50(1): 111–115.
- [18] Aizpuru, A., M. C. Listán-García, and F. Rambla-Barreno. (2014). Density by moduli and statistical convergence. *Quaest. Math.* 37(4): 525-530.
- [19] Kuttner, B., (1946). Note on strong summability, *J. Lond. Math. Soc.*, 80(2), 118-122.
- [20] Maddox, I.J.,(1967). Spaces of strongly summable sequences, *Q.J. Math.*, 8(2), 345-355.
- [21] Maddox, I.J., (1968). On Kuttner's theorem, *J. Lond. Math. Soc.*, 43, 285-290.
- [22] Maddox, I.J., (1986). Sequence spaces defined by a modulus. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 100, 161-166.
- [23] Kızmaz, H., (1981). On certin sequence spaces, *Canad. Math. Bull.*, 24, 169-176.
- [24] Et, M. and Çolak, R., (1995). On some generalized difference sequence spaces, *Soochow J. Math.*, 21, 377-386.

- [25] Et, M., Nuray, F., (2001). Δ^m –Statistical convergence, *Indian J. Pure Appl. Math.*, 32(6), 961-969.
- [26] Bektas, C. A., M. Et, and R. Colak. (2004). Generalized difference sequence spaces and their dual spaces, *J. Math. Anal. Appl.* 292(2): 423–432.
- [27] Şengül, H., Et, M., (2014). On lacunary statistical convergence of order α , *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 34(2), 473-482.
- [28] Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence, *Analysis* 5: 301-313.
- [29] Maddox, I.J., (1970). *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- [30] Niven, I. And Zuckerman, H.S., (1960). *An introduction to the theory of numbers*, John Wiley& Sons, New York.
- [31] Nakano, H., (1953). Concave modulars, *J. Math. Soc. Japan*, 5, 29-49.
- [32] Gidemen, H., Et, M., (2018). On f –lacunary statistical convergence of generalized difference sequences, *AIP Conference Proceedings*, 2037.
- [33] Freedman, A.R., Sember, J.J., Raphael, M., (1978) Some Cesaro-type summability spaces, *Proc. Lond. Math. Soc.* 37(3), 508-520.
- [34] Ayhan, E., Tripathy, Chandra B., Bipul S., (2007). On some new type generalized difference sequence spaces. *Math. Slovaca* 57, 5, 475-482.
- [35] Tripathy, B.C., Ayhan, E., Tripathy, B., (2005). On a new type of generalized difference Cesàro sequence spaces. *Soochow J. Math.* 31, 3, 333-340.
- [36] Et, M., Alotaibi, A., Mohiuddine, S.A., (2014). On (Δ^m, I) –statistical convergence of order α . *The Scientific World Journal*. 535419.
- [37] Et, M., Çınar, M., Karakaş, M., (2013). On λ – statistical convergence of order α of sequences of function. *J. Inequal. Appl.* 2013:204, 8 pp.
- [38] Et, M., B. C. Tripathy, and A. J. Dutta. (2014). On pointwise statistical convergence of order α of sequences of fuzzy mappings. *Kuwait J. Sci.* 41(3): 17–30.
- [39] Et, M., Gidemen, H., (2020). On $\Delta_v^m(f)$ -statistical convergence of order α , *Comm. Statist. Theory Methods*, 49, 14, 3521-3529.
- [40] Gadjiev, A. D. and C. Orhan. (2002). Some approximation theorems via statistical convergence. *Rocky Mountain J. Math.* 32(1): 129-138.
- [41] Ghosal, S. (2013). Statistical convergence of a sequence of random variables and limit theorems. *Appl. Math.* 58(4): 423-437.
- [42] Rath, D., Tripathy, B.C. (1994). On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, *Indian J. Pure. Appl. Math.*, 25(4), 381-386.
- [43] Salat, T. (1980). On statistically convergent sequences of real numbers. *Math. Slovaca* 30:139-150.
- [44] Srivastava, H. M., and M. Et. (2017). Lacunary statistical convergence and strongly lacunary summable functions of order α . *Filomat* 31(6):1573–1582.
- [45] Steinhaus, H. (1951). Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloquium Mathematicum* 2: 73-74.
- [47] Şengül, H., and M. Et. (2017). On I - lacunary statistical convergence of order α of sequences of sets. *Filomat* 31(8): 2403–2412.

- [48] Gidemen H., Et, M., (2018). On f –lacunary statistical convergence of generalized difference sequences, International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 7), Kyiv, Ukraine.
- [49] Gidemen H., Et, M., (2017). On f –Statistical Convergence of Generalized Difference Sequences, International Workshop on Mathematical Methods in Engineering, Çankaya Üniversitesi, Ankara.
- [50] Çolak, R., Kayan, E., dg –Statistical Convergence of Order α , Punjab University Journal of Mathematics. (yayına kabul edildi).
- [51] Şengül, H., Et, M., (2018). f –lacunary statistical convergence and strong f –lacunary summability of order α , Filomat, 32(13) , 4513-4521.



ÖZGEÇMİŞ



KİŞİSEL BİLGİLER

ARAŞTIRMACI BİLGİLERİ



EĞİTİM BİLGİLERİ

- Yüksek Lisans** : “Bulanık Sayı Dizilerinde β –Dereceden Δ –İstatistiksel Yakınsaklık”
Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2013
Danışman: Prof. Dr. Hıfı ALTINOK
- Lisans** : Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 2011
Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi, Psikoloji Bölümü, 2020
- Lise** : İskenderun Demir-Çelik Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi, Hatay, 2006

ARAŞTIRMA DENEYİMİ

- ✓ SWP, MATHEMATİCA, SPSS, SUPERLAB

AKADEMİK FAALİYETLER

Makaleler:

1. Et, M., Gidemen, H., (2020). On $\Delta_p^m(f)$ -statistical convergence of order α , Comm. Statist. Theory Methods, 49, 14, 3521-3529.
2. Gidemen, H., Et, M., (2018). On f –lacunary statistical convergence of generalized difference sequences, AIP Conference Proceedings, 2037.
3. Baştuğ, G., Gidemen, H., Karaburun, A., Kazancı, Ö., Kızıldağ, H., Kışloğlu, M., Koç, A., (2020). Başladığı Yerde Sonlanan Varoluşsal Mücadele: Sokaktaki Adam Yaşlılık Psikolojisi Kapsamında Farklı Bir Yaklaşım. Kriz Dergisi, 28(1), 45-56.
4. Baştuğ, G., Erden, H.G., Gidemen, H., Kuru, Ş., Şen, E., (2020). 2005-2019 Yılları Arasında Türkiye’de Basında Yer Almış Çocuk Ölümünün İncelenmesi. Çocuk ve Gençlik Ruh Sağlığı Dergisi. (Yayına kabul)

Bildiriler:

1. Gidemen H., Et, M., (2017). On f –Statistical Convergence of Generalized Difference Sequences, International Workshop on Mathematical Methods in Engineering, Çankaya Üniversitesi, Ankara.
2. Gidemen H., Et, M., (2018). On f –lacunary statistical convergence of generalized difference sequences. International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA 7), Kyiv, Ukraine.