



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÜRETTİĞİ OPERATÖR
DEMETİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Melih ATICI

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR

TOKAT- 2023

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR danışmanlığında hazırlamış olduğum “Bir Sınır Değer Probleminin Ürettiği Operatör Demeti” adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

13/03/2023

Melih ATICI

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini hiçbir zaman esirgemeyen bana karşı son derece anlayışlı davranan ve her türlü desteği veren sayın danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR’a teşekkür ederim. Çalışmalarımızda fikirlerinden ilham aldığımız Hocamın da Hocası Sayın Hocam Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU’na saygılarımı sunar teşekkür ederim.

Bu süreçte bana destek ve moral veren başta çok kıymetli eşim olmak üzere aileme sevgilerimi sunar teşekkür ederim.

MELİH ATICI

MART 2023

ÖZET

BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÜRETTİĞİ OPERATÖR DEMETİ

Atıcı, Melih

Yüksek Lisans, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLGAR

Mart 2023, vi + 56 sayfa

Bu tez çalışmasında; sınır şartlarının birinde özdeğer parametresi bulunduran ve geçiş şartlarına sahip üç ayırık aralıkta tanımlanan çok-aralıklı bir sınır değer probleminin bazı spektral özellikleri araştırılmıştır. İlk olarak problemin öneminden, uygulama alanlarından ve daha önce yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Sonra problemimiz ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Tezimizin ana bölümünde ise problemimize uygun Hilbert uzayları bulunmuş ve gerekli olan kavram ve eşitsizlikler verilmiş ve de özdeğerlerine uygun genelleştirilmiş çözüm kavramı tanımlanmıştır. Ayrıca incelenen problem operatör demeti denkleminde indirgenmiş ve bu operatör demetinin bazı özellikleri incelenmiştir. Son olarak genelleştirilmiş özfonksiyonların uygun Hilbert uzayında Riesz bazı oluşturduğu gösterilmiş ve Rayleigh-Ritz yönteminden faydalanarak özdeğerler için bir alt sınır tahmininde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Problemleri, Özdeğerler, Genelleştirilmiş Özfonksiyonlar, Riesz Bazı.

ABSTRACT

THE OPERATOR PENCIL GENERATED BY A BOUNDARY VALUE PROBLEM

Atıcı, Melih

Master's Thesis, Division of Analysis and Functional Theory

Advisor: Asst. Prof. Dr. Hayati OLĞAR

March 2023, vi + 56 pages

In this thesis, some spectral properties of a many-interval boundary value problem defined on three non-intersecting interval with transmission conditons and one of the boundary condition having an eigenvalue parameter are investigated. First of all, importance of the problem, its application areas and previous studies are mentioned. Then, basic definitions and theorems about our problem are given. In the main part of our thesis Hilbert space have been found of the appropriate for our problem, the necessary concepts and inequalities have been given, and the concept of generalized solutions in accordance with the eigenvalues has been defined. In addition, the analyzed problem is reduced to the operator pencil equation and some properties of this operator pencil are examined. Finally it has been shown that the generalized eigenfunctions form a Riesz basis on the appropriate Hilbert space and a lower limit is estimated for the eigenvalues by using Rayleigh-Ritz method.

Keywords: Sturm-Liouville Problem, Eigenvalues, Generalized Eigenfunctions, Riesz Basis.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ETİK SÖZLEŞME SAYFASI.....	i
TEŞEKKÜR.....	ii
ÖZET (TÜRKÇE).....	iii
ABSTRACT (İNGİLİZCE).....	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2.LİTERATÜR ÖZETİ.....	6
3.TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	12
3.1. İç Çarpım ve Norm.....	12
3.2. Lineer Operatör ve Özellikleri.....	14
3.3. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları.....	17
3.4. Regüler Sturm Liouville Problemleri.....	17
4. ÇOK-ARALIKLI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN İFADESİ ve UYGUN HİLBERT UZAYLARI..	21
4.1. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin ifadesi.....	21
4.2. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Problemine Uygun Uzaylar ve Eşitsizlikler	22
5. ÇOK-ARALIKLI SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ZAYIF ÇÖZÜMÜ ve OPERATÖR POLİNOMU.....	25
5.1. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin Zayıf Çözümü.....	25
5.2. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin Operatör-Polinomu.....	28
5.3. Çok-Aralıklı Sınır-Deger Probleminin Operatör-Polinomunun Bazı Özellikleri.....	36
5.4. Çok-Aralıklı Sınır Deger Probleminin Zayıf Özfunksiyonlarının Riesz Bazı Oluşturması.....	43

5.5. Çok Aralıklı Sınır Deger Probleminin Özdegerlerinin Alt Sınırı.....	46
6. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	48
KAYNAKÇA.....	49



1. GİRİŞ

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi matematik, fizik, mühendislik, biyoloji ve matematiksel finans gibi birçok uygulamalı bilimlerde önemli yere sahip olup özellikle fizikte ve matematiksel fizikte yoğun bir şekilde karşımıza çıkmaktadır. Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi; düz spektral problemler ve ters spektral problemler olmak üzere iki ana başlıkta incelenmektedir. Bir diferansiyel operatör verildiğinde operatörün hem spektrumunun ve özfonksiyonlarının incelenmesi, öz değer ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerinin bulunması hem de verilen bir fonksiyonun bu operatörün özfonksiyonlarına göre ayrışımının araştırılması vb. düz spektral problemler kısmında incelenirken; verilen belirli dizilere göre spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün inşası ise spektral analizin ikinci ana konusu olan ters problemler olarak adlandırılan kısmını ilgilendirmektedir. Düz spektral problemler genel olarak; elektronik teorisindeki uzun kablolar içeren elektrik devreleri, olasılık teorisindeki difüzyon süreçleri, matematiksel fizikteki serbest ve kuvvet uygulanmış titreşim problemleri, bir katı ile bir akışkan arasındaki difüzyon veya mekanikteki ısı ve kütle transferindeki problemleri araştırılırken ortaya çıkmaktadır. (Walter, 1973; Belinskiy ve ark., 2015; Guliyev, 2019; Gwak ve ark., 2016; Kaoullas ve Georgiou, 2015; Likov ve Mikhailov, 1963; Nie ve Linetsky, 2019; Rodriguez ve ark., 2018). Ters spektral problemlere örnek olarak ise kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması; jeofizikte yer altı madenlerinin yer altındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi; mekanikte, verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesi, parçacıkların enerji seviyelerine göre parçacıklar arasındaki etkileşim kuvvetlerinin belirlenmesi verilebilir (Güldü ve ark., 2013; Binding ve ark., 2000; Freiling ve Yurko, 2001; Gasyimov ve Levitan, 1966).

Onsekizinci asrın ortalarından başlayarak fiziksel olguların özellikle hareketin matematiksel olarak analizi kalkülüs alanındaki gelişmeleri de beraberinde getirdi. Araştırılan fiziksel olaylar arasında termodinamik, manyetizma ve elektrik de vardı. Bu ve buna benzer olgularda oluşan problemlerin çözülmesi için diferansiyel denklemler alanı oluştu ve farklı çözüm yolları keşfedildi. Bu yüzden fizikte ve mühendislikte bir

çok konu adi ve kısmi diferansiyel denklemlerdeki çalışmalara paralel olarak gelişti. Adi ve kısmi diferansiyel denklemler, fiziksel, mekaniksel, finansal ve doğa bilimlerinin birçok dalında meydana gelen olayları modelleme tarihinde uzun süredir önemli bir rol oynamış olup halen bu denklemlerin; mühendislik, fiziksel, kimyasal vb. problemlerin modellenmesinde önemli bir yeri bulunmaktadır. Uygulamalı matematik ve doğa bilimlerinin birçok dalında meydana gelen olaylar Newton yasasına göre doğrudan matematiksel hareket modelleri olarak, ancak daha sıklıkla Laplace denklemi, Schrödinger denklemi, ısı denklemi ve dalga denklemi gibi kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde karşılaşılmaktadır.

Matematiksel fiziğin birçok problemde, kısmi bir diferansiyel denklemin çözümü, tanımlı olduğu bölgenin sınırında verilmiş belirli sınır koşullarını sağlamalıdır. Bu tür problemlere sınır değer problemleri denir. İyi bilinen ve bağımsız değişkenlere ayırma yöntemi olarak da adlandırılan Fourier yönteminin kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerine uygulanması, genelde Sturm-Liouville problemlerine yol açmaktadır

Böyle sınır değer problemlerinde spektral parametre sadece ikinci mertebeden diferansiyel denkleminde değil aynı zamanda sınır şartlarında da bulunmaktadır. Jeofizik, matematiksel fizik, mekanik vb. alanlarda ortaya çıkan ısı denklemini kullanan bir katı ile bir akışkan arasındaki difüzyon, farklı fiziksel ve mekanik özellikleri bulunan cisimler arasındaki ısı ve madde iletimi, bir ucunda yük olan çubuğun titreşimi veya başka geçiş süreçlerinde ortaya çıkan benzer problemlerin çözümü ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem ve sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran Sturm-Liouville tipindeki sınır değer problemlerinin incelenmesine indirgenir. Böyle problemlerin araştırılması büyük bir önem arz etmektedir (Belinsky ve Dauer, 1997; Fulton, 1977; Guliyev, 2019; Gwak ve ark., 2016; Hinton, 1979; Kaoullas ve Georgiou, 2015; Ladyzhenskaia, 1985; Likov ve Mikhailov, 1963; Stakgold, 1971; Tikhonov ve Samarskii, 1963; Walter, 1973).

Örneğin, iki uçtan buz bloklarına bağlanmış L uzunluğundaki bir telin ısı iletimi denklemi;

$$\frac{du}{dt} = K \frac{d^2u}{dx^2} \quad (1.0.1)$$

biçiminde ifade edilir. $t=0$ için x noktasındaki sıcaklığı $s(x)$ ise

$$u(x, 0) = s(x) \quad (1.0.2)$$

başlangıç şartını elde ederiz. Buz bloklarından dolayı uç noktalarda sıcaklık sıfırdır yani;

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (1.0.3)$$

sınır şartı elde edilir.

$$\frac{du}{dt} = K \frac{d^2u}{dx^2}, \quad t = 0, \quad x \in [0, L] \quad (1.0.4)$$

$$u(x, 0) = s(x) \quad (1.0.5)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (1.0.6)$$

matematiksel modeli kurulmuş olur. Çözümü;

$$u(x, t) = g(x)h(t) \quad (1.0.7)$$

şeklinde arayacağız.

$$u_t = g(x)h'(t) \quad (1.0.8)$$

$$u_{xx} = g''(x)h(t) \quad (1.0.9)$$

(1.0.7)-(1.0.9) denklemlerini (1.0.4) denkleminde yerine yazarsak;

$$g(x)h'(t) = K g''(x)h(t) \quad (1.0.10)$$

denklemini elde ederiz.

$$\frac{g''(x)}{g(x)} = \frac{1}{K} \frac{h'(t)}{h(t)} = -\lambda \quad (1.0.11)$$

eşitliğini elde ederiz ve buradan;

$$g''(x) + \lambda g(x) = 0 \quad (1.0.12)$$

$$h'(t) + \lambda h(t)K = 0 \quad (1.0.13)$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir. (1.0.7) denklemini (1.0.6) sınır şartlarında yerine yazarsak

$$g(0) = 0, \quad g(L) = 0 \quad (1.0.14)$$

sınır şartlarını buluruz. (1.0.12) denklemi ve (1.0.14) sınır şartlarından oluşan sınır değer problemi basit bir Sturm-Liouville problemidir. Yani, bir ısı iletimi denkleminin değişkenlerine ayırma yöntemi diğer adıyla Fourier yöntemi ile çözümlenmesi problemi Sturm-Liouville problemine indirgenmiş oldu. Fourier yönteminin sonuçlandırılması için özfonksiyonlarının baz oluşturması gerekir. Bu durumda öncelikle problemin özdeğerleri bulunması daha sonra bu özdeğerlere uygun özfonksiyonlar bulunması gerekir. Bulunmuş özdeğer ve özfonksiyonlar yardımıyla çözüm elde edilmeye çalışılır ya da en azından çözümler hakkında bilgi edinilebilir. Bu da özdeğer ve özfonksiyonların bulunmasının çözümde etkin bir yöntem olduğunu gösteriyor. Ancak Sturm-Liouville problemlerinin tam çözümlerini bulmak genel olarak mümkün değildir. Bu yüzden problemin spektral özelliklerinin araştırılması gerekiyor. Yani özdeğerlerin seri açılımı, Green fonksiyonunun bulunması, özdeğerlerin hangi uzayda baz oluşturup oluşturmadığı, Rezolvent operatörünün bulunması gibi özelliklerin incelenmesi için bir operatör teorik yöntem geliştirilmesi, genelleştirilmiş özfonksiyonların tanımlanması ve bu özfonksiyonların uygun Hilbert uzayında baz oluşturması gibi özelliklerin incelenmesi gereklidir. Ayrıca gelişen teknoloji ve bilim daha farklı ve yeni tipten Sturm-Liouville problemlerini karşımıza çıkarmaktadır. Son zamanlarda fizikte ortaya çıkan çok-aralıklı somut problemler süresiz Sturm-Liouville problemlerine ilginin artmasını sağlamıştır. Bu da konunun ne kadar önemli ve güncel olduğunu göstermektedir.

Bu tez çalışmasında; sınır şartlarının birinde özdeğer parametresi bulunduran ve geçiş şartları içeren yeni tipten bir Sturm-Liouville probleminin bazı spektral özellikleri incelendi. Bu sınır-değer problemi üç ayrık aralıkta verilmiş olup uç noktaların daki iki adet sınır şartından ve iki süresizlik noktasında verilen dört adet geçiş şartından oluşmaktadır. Problemin çözümü için ilk olarak; probleme uygun iç çarpım uzayları kuruldu. İkinci olarak; bu iç çarpım uzaylarından yararlanılarak

probleme uygun Hilbert uzayları ve genelleştirilmiş özfonksiyon kavramı tanımlandı. Üçüncü olarak; incelemekte olduğumuz sınır-değer-geçiş problemi, operatör-teorik yöntem kullanmak suretiye operatör-demeti (ya da operatör-polinom) denklemine indirgenerek bu operatör-polinomun bazı özellikleri incelendi. Daha sonra sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri için alt sınır elde edilmiş ve genelleştirilmiş (zayıf) özfonksiyonların probleme uygun Hilbert uzayında Riesz bazı oluşturduğu kanıtlanmıştır.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

Özdeğer parametresi içeren özel tipten sınır değer problemlerine Sturm Liouville problemi adı verilir. Isı iletim problemleri üzerinde çalışırken ortaya atılan bu problem, Jacques Charles François Sturm ve Joseph Liouville'nin 1836-1837 yılları arasında yayımlamış oldukları çalışmaları çok ilgi görmesinden dolayı kendi adlarıyla anılır oldu ve Sturm-Liouville Teorisi olarak bilinir hale geldi.

Sturm ve Liouville'nin yaptığı çalışmalarının önemli bir özelliği, çözümlerin analitik ifadelerle sınırlı olması anlayışından uzaklaşarak analitik ifadeler olmadığında bile çözümlerin özelliklerinin denklemden bulunabileceğini göstermesiydi. Sturm Liouville Teorisi önemli bir konu olmasından dolayı günümüze kadar yoğun bir şekilde bilim insanlarının ilgisini ve dikkatini çekmeye devam etmektedir. Bu teori çok sayıda kitap ve makaleye konu olmuştur. Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville Teorisi, daha sonra matematiksel fizik, biyoloji, mühendislik ve matematiksel finans gibi birçok bilim dalında kendine uygulama alanı bulmuş yeni-yeni ortaya çıkan problemlerin araştırılmasıyla yeni neticeler ve yeni yöntemlerle bu teori geliştirilmektedir.

İkinci mertebeden kendine eşlenik adi diferansiyel denklemler ve kendine eşlenik sınır şartları ile birlikte verilen sınır değer problemleri genel olarak Sturm-Liouville problemleri olarak bilinir.

Klasik Sturm-Liouville problemleri,

$$(p(x)y')' + q(x)y + \lambda\omega(x)y = 0, \quad x \in [a, b] \quad (2.0.15)$$

ikinci mertebeden bir Sturm-Liouville denklemden ve

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = 0 \quad (2.0.16)$$

$$\beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = 0 \quad (2.0.17)$$

biçimindeki özdeğer parametresi içermeyen sınır şartlarından oluşmaktadır. Sturm ve Liouville bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bazı özelliklerini ve

özfonsiyonların seri açılımını incelemişlerdir. Sturm ve Liouville'nin 1836 ve 1837 yıllarındaki çalışmaları yayımlanmadan önce analitik ifadelerle çözüm bulma anlayışı hakim iken bu çalışmalardan sonra bu sınırlı yaklaşım aşılmıştır. Özellikle de çözüm bulmadan da çözüm hakkında yorum yapılabilirdiğini göstererek Sturm-Liouville problemleri adına çok önemli bir sonuç elde etmişlerdir. Sonraki yıllarda Birkhoff (1908) ve Tamarkin'in(1928) çok önemli çalışmaları olmuştur. Birkhoff, 1908'de makalesinde sınır şartları için regülerlik kavramı tanımlanmış ve bu sınır şartları ile verilen problemin özfonsiyonlarının ve özfonsiyonlara bağlı olan fonksiyonlar sisteminin tamlığı kanıtlanmıştır. Tamarkin'in 1928 yılında yayımlanan çalışmasında ise güçlü regüler sınır şartları tanımlanmış ve güçlü regüler sınır şartları altında Green fonksiyonu araştırılmıştır. 1951 yılında yayımlanan çalışmasında Keldys; $\mathbb{H}$ Hilbert uzayında

$$\mathbb{A}(\lambda)\psi = 0, \quad \mathbb{A}(\lambda) := \sum_{i=0}^n \lambda^i A_i \quad (2.0.18)$$

formundaki spektral parametre içeren operatör denklemlerin geniş bir sınıfı ile ilgilenmiş olup böyle bir operatör denklemini polinomal operatör ya da operatör demeti olarak adlandırmıştır. Yazar, bazı şartlar altında bu problemin spektrumunun diskret olduğunu, $\{\psi_i\}$ özfonsiyonlar ve bağlantılı fonksiyonlar sisteminin $\mathbb{H}$ Hilbert uzayın da tam olduğunu kanıtlamıştır.

Walter ise 1973 yılında yaptığı çalışmada; hem

$$\tau u := \frac{1}{r} \{-(pu')'(x) + q(x)u(x)\} = \lambda u(x), \quad x \in [a_1, a_2] \quad (2.0.19)$$

denkleminde hem de

$$-(\beta_{i1}u(a_i) - \beta_{i2}u'(a_i)) = \lambda(\alpha_{i1}u(a_i) - \alpha_{i2}u'(a_i)) \quad (i = 1, 2) \quad (2.0.20)$$

sınır şartlarında özdeğer parametresi içeren (2.0.19)-(2.0.20) sınır-değer problemini araştırmıştır. Walter bu makalede, uygun Hilbert uzayında bu problemin kendine eşlenik lineer operatörlerle bağlantısını kurmuş ve bu tip problemlerin operatör teorik yorumunu vermiştir. Fulton'un 1977 yılında yayımlanan makalesinde; sınır şartlarının sadece bir tanesinde özdeğer parametresi bulunduran sınır-değer prob

lemine operatör denkleme indirgemiş, özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik eşitlikler bulmuş ve bu problemin Green fonksiyonunu inşa etmiştir.

1983 yılında yayımlanmış olan çalışmada Kostyuchenko ve Shkalikov; $n = 2$ için (2.0.18) formundaki operatör demetlerini incelemişlerdir. Yazarlar bu çalışmada; en az bir $c \in \mathbb{R}$ reel sayısı için $A(c)$ operatörünün pozitif tanımlı olduğunu göstermişlerdir. Ladyzhenskaia; bir Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözümler kavramı yardımıyla, özdeğer probleminin bir operatör denkleme indirgenmesine olanak sağladığını 1985 yılında yayımlamış olduğu kitabında göstermiştir.

Bilindiği üzere geçiş şartları ya da diğer isimleriyle sıçrama şartları, yüzeyarası şartları, impulsive şartları olarak da bilinen ve bu koşulları içeren SLP'leri klasik olmayan SLP'leridir. Klasik olmayan SLP'leri uygulama alanlarının (matematiksel fizik, mühendislik teknolojisi, vb.) genişliğinden dolayı birçok araştırmacı tarafından araştırılmış ve araştırılmaya devam edilmektedir. Çok sayıda kitabın yazılmasına ve binlerce makalenin yayımlanmasına vesile olan klasik SLP'leri iyi bilinen yöntem ve teorilere sahiptir. Ancak klasik SLP'leri; birçok matematiksel fizik problemine direkt olarak uygulanamaz. Bu durum ortamın pürüzlü olmasından veya ortamın sürekli olmamasından kaynaklanmaktadır. Örneğin geçiş koşulları içeren problemlere klasik SLP'lerinin yöntem ve teorilerinin uygulanabilmesinin zorluğuna rağmen bu problemlere olan ilgi giderek artmaya devam etmektedir.

Son yıllarda Mukhtarov ve çalışma arkadaşları, sınır şartlarının yanı sıra geçiş şartları da içeren Sturm-Liouville problemlerinin birçok spektral özelliklerini incelemişlerdir. (Aydemir ve Mukhtarov, 2017; Çavuşoğlu ve ark., 2021; Mukhtarov ve Aydemir, 2021; Mukhtarov ve ark., 2015a; Olğar ve ark., 2018). Bu vesileyle geniş sınıftan geçiş şartları içeren Sturm-Liouville problemlerinin kendine eşlenik operatörlerle temsiline olanak sağlayan yöntemler geliştirmişlerdir. Geliştirdikleri bu yöntemler sayesinde klasik yöntemlerin uygulanamadığı birçok yeni tipten Sturm-Liouville problemlerinin özelliklerinin incelenmesine olanak sağlamıştır.

Sturm-Liouville tipindeki sınır değer problemlerine süreksizlik noktasında geçiş şartları olarak adlandırılan ilave şartların eklenmesiyle bu teori önemli bir hal almış

ve bu durum bu teoriye çok önemli bir katkı sağlamıştır. Süreksizlik noktasına sahip ve sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran süreksiz katsayılı sınır değer problemleri üzerine son zamanlarda yayımlanan bilimsel çalışmaların sayısında azımsanmayacak ölçüde büyük bir artış olmuştur (Allahverdiev ve Tuna, 2020a; Bairamov ve ark., 2019; Faydaoğlu ve Guseinov, 2010; Şen ve ark., 2017; Uğurlu ve Bairamov, 2014).

Mukhtarov ve Yakubov tarafından 2002 yılında yayımlanmış olan makalede, ağırlıklı Sobolev uzaylarında sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran ve iletim şartları ile verilen süreksiz SLP araştırılmıştır. Bu makalede, süreksiz SLP'nin kök fonksiyonları sisteminin spektral parametreye göre koersitivliği, izomorfizmi, tamlığı ve Abel bazı gibi özellikler incelenmiştir.

Demirci ve ark. nın 2004 yılındaki çalışmalarında

$$-p(x)u'' + q(x)u = \lambda u, \quad x \in [a, c) \cup (c, b] \quad (2.0.21)$$

$$\lambda(\alpha'_1 u(a) - \alpha'_2 u'(a)) - (\alpha_1 u(a) - \alpha_2 u'(a)) = 0 \quad (2.0.22)$$

$$\lambda(\beta'_1 u(b) - \beta'_2 u'(b)) + (\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = 0 \quad (2.0.23)$$

$$u(c+0) - u(c-0) = 0 \quad (2.0.24)$$

$$u'(c+0) - u'(c-0) + \lambda \delta_1 u(c) = 0 \quad (2.0.25)$$

problemi araştırılmıştır. Bu problemde sınır şartlarının her ikisi özdeğer parametresi içeren ve süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunan SDGP'nin bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmada ele alınan problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik eşitlikleri de bulunmuştur.

Mukhtarov ve ark. nın 2015 yılındaki çalışmalarında;

$$-y''(x) + (By)(x) = \lambda y(x), \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \quad (2.0.26)$$

$$\cos \alpha y(-1) + \sin \alpha y'(-1) = 0, \quad \alpha \in [0, \pi) \quad (2.0.27)$$

$$\lambda y(1) - y'(1) = 0 \quad (2.0.28)$$

$$y(+0) - \beta_1 y(-0) - \gamma_1 y'(-0) = 0 \quad (2.0.29)$$

$$y'(+0) - \beta_2 y(-0) - \gamma_2 y'(-0) = 0 \quad (2.0.30)$$

soyut operatör içeren yeni tipten sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotiği, spektrumu ve rezolvent operatörü incelenmiştir. Bu problem de özdeğer parametresi hem denkleminde hem de sınır şartlarının birinde mevcut olup, ayrıca $x = 0$ süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunmaktadır.

Belinsky ve Dauer, 1997 yılındaki çalışmalarında;

$$-(pu')'(x) + q(x)u(x) = \lambda r(x)u(x), \quad x \in (a, b) \quad (2.0.31)$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha (pu')(a) = 0, \quad \alpha \in [0, \pi) \quad (2.0.32)$$

$$-\{\beta_1 u(b) - \beta_2 (pu')(b)\} = \lambda \left\{ \beta'_1 u(b) - \beta'_2 (pu')(b) \right\} \quad (2.0.33)$$

sınır-değer problemini incelemişlerdir. Bu çalışmada; (2.0.31)-(2.0.33) probleminin uygun Hilbert uzayında genelleştirilmiş çözüm kavramı tanımlanmış, operatör - polinom denklemine indirgenmiş ve genelleştirilmiş özfonksiyonlarının Riesz bazı oluşturduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu çalışma tez çalışmamız açısından çok önemli bir yere sahip olup aşağıda ifade etmeye çalıştığımız çalışmalara da ilham kaynağı oluşturmuştur.

2018 yılında Mukhtarov ve ark. tarafından yayımlanan çalışmada;

$$-f''(x) + q(x)f(x) = \lambda r(x)f(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (2.0.34)$$

$$\alpha f(-1) + \alpha' f'(-1) = 0 \quad (2.0.35)$$

$$(\ln f)'(1) = \frac{a\lambda}{b\lambda + c} \quad (2.0.36)$$

$$f(0^+) - f(0^-) = 0 \quad (2.0.37)$$

$$f'(0^+) - f'(0^-) = \delta f(0) \quad (2.0.38)$$

biçiminde ifade edilen yeni tipten Sturm-Liouville problemi incelenmiştir. Bu çalışma da bu probleme uygun Hilbert uzayları tanımlanmış ve genelleştirilmiş özfonksiyonların bu uzayda baz oluşturup oluşturmadığı araştırılmıştır.

Olğar'ın 2021 yılında yayımlanan makalesinde iki tane süreksizlik noktasına sahip olan

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \mu u(x), \quad x \in [-1, -c) \cup (-c, c) \cup (c, 1] \quad (2.0.39)$$

$$u(-1) = u'(-1) \quad (2.0.40)$$

$$u(1) = u'(1) \quad (2.0.41)$$

$$u(-c^+) - u(-c^-) = 0 \quad (2.0.42)$$

$$u'(-c^+) = u'(-c^-) + \gamma_1 u(-c^-) + \delta_1 u(-c^+) \quad (2.0.43)$$

$$u(c^+) - u(c^-) = 0 \quad (2.0.44)$$

$$u'(c^+) = u'(c^-) + \gamma_2 u(c^-) + \delta_2 u(c^+) \quad (2.0.45)$$

sınır-değer-geçiş probleminin zayıf çözümleri tanımlanmış, (2.0.39)-(2.0.45) problemi operatör-demeti denklemine indirgenmiş, daha sonra bu operatör-demetinin kendine eşlenik ve pozitif tanımlı olduğu gösterilmiştir.

3. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu kısımda tez çalışmamızda geçen önemli temel kavram ve teoremlere yer verilmiştir.

3.1. İç Çarpım ve Norm

Tanım 3.1.1.

Bir X vektör uzayı üzerindeki norm, X üzerinde tanımlı olup her $x \in X$ noktasındaki değeri $\|x\|$ ile gösterilen ve α bir skaler, x ve y X 'de keyfi vektörler olmak üzere aşağıdaki özellikleri gerçekleyen, reel değerli bir fonksiyondur.

- i. $\|x\| \geq 0$
- ii. $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- iii. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Üzerinde norm tanımlanmış X vektör uzayına normlu uzay adı verilir. Tam normlu uzaya (norm tarafından üretilen metriğe göre tam) Banach uzayı denir. X üzerinde bir norm X üzerinde, $d(x, y) = \|x - y\|$, $(x, y \in X)$ ile verilen bir d metriği tanımlar ve bu metrik norm tarafından üretilen metrik olarak adlandırılır (Çakar, 2007).

Tanım 3.1.2.

İç çarpım $H \times H$ 'den H 'nin $\mathbb{F}$ skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür; yani H 'nin her x ve y vektör çifti x ve y 'nin iç çarpımı olarak adlandırılan ve $\langle x, y \rangle$ ile gösterilen ve her x, y ve z vektörleri ve α skaleri için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen bir skalerle eşlenmektedir:

- i. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ii. $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- iii. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- iv. $\langle x, x \rangle \geq 0, \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Üzerinde iç çarpım tanımlanmış X vektör uzayına iç çarpım uzayı denir. X üzerinde tanımlanmış bir iç çarpım, X üzerinde,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

ile verilen norm ve

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

ile verilen bir metrik tanımlar. Üzerinde iç çarpımla tanımlanmış bir metriğe göre tam olan bir iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayı adı verilir. Buna göre iç çarpım uzayları birer normlu uzay olup, Hilbert uzayları ise birer Banach uzayıdır. (Çakar, 2007).

Tanım 3.1.3.

$f(x)$, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f(x)|^2$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir ise, $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir. $L_2[a, b]$ uzayı,

$$L_2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

eşitliği ile tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım ise $\forall f, g \in L_2$ için

$$\langle f(x), g(x) \rangle_{L_2[a, b]} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

biçiminde tanımlanır. Bu iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır. Bu uzaya aynı zamanda Lebesgue Uzayı da denir (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.1.4.

$\mathbb{R}^n$ nin bir açık kümesi Ω olsun. Bu küme üzerindeki skaler değerli fonksiyonları $u(x) = u(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in \Omega$ şeklinde gösterelim. m bir pozitif tamsayı olmak üzere tüm $D^r u$, $0 \leq |r| \leq m$ zayıf türevleri $L_p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$ uzayı içinde olan fonksiyonları göz önüne alalım. Ω üzerinde hemen hemen her yerde eşit fonksiyonları eşit kabul ettiğimiz takdirde böyle fonksiyonların bir vektör uzayı oluşturacağı kolayca görülür. Normlandırabileceğimiz bu uzaya bir Sobolev uzayı adını vereceğiz. Örneğin

$W_2^m(\Omega)$ Sobolev uzayını göz önüne alalım. Bu uzayda bir iç çarpımı $u, v \in W_2^m(\Omega)$ için

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} \sum_{0 \leq |r| \leq m} D^r u(x) D^r \overline{v(x)} d\mu$$

şeklinde tanımlayabileceğimiz kolayca görülür. $W_2^m(\Omega)$ normlu uzay olarak tam olduğundan bir Hilbert uzayıdır (Şuhubi, 2001).

3.2. Lineer Operatörler ve Özellikleri

Tanım 3.2.1.

Aynı $\mathbb{F}$ skalerler cismi üzerinde tanımlanmış U ve V vektör uzaylarını göz önüne alalım. Bir $A : U \rightarrow V$ fonksiyonu

i. $\forall u_1, u_2 \in U$ için $A(u_1 + u_2) = A(u_1) + A(u_2)$

ii. $\forall u \in U$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ için $A(\alpha u) = \alpha A(u)$

koşullarını gerçekleştiriyorsa bir lineer dönüşüm ya da lineer operatör adını alır. (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.2.2.

Bir $A : U \rightarrow V$ operatörü sınırlı kümeleri yine sınırlı kümelere dönüştürüyorsa sınırlı operatör adını alır (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.2.3. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. Ancak ve ancak her $u \in U$ için $\|Au\| \leq K\|u\|$ olacak şekilde bir $K > 0$ sabiti varsa A operatörü sınırlıdır (Şuhubi, 2001).

Teorem 3.2.4. U ve V normlu uzaylar ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. A operatörü ancak ve ancak sınırlı ise süreklidir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.2.5.

H_1 ve H_2 Hilbert uzaylar olmak üzere $T : H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. T 'nin, T^* Hilbert-adjoint operatörü her $x \in H_1$ ve $y \in H_2$ için

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

olacak şekilde bir $T^* : H_2 \rightarrow H_1$ operatörüdür. $T = T^*$ ise self adjoint ya da hermityen adı verilir.(Çakar, 2007).

Tanım 3.2.6.

Bir H Hilbert uzayını kendisine dönüştüren bir $A : H \rightarrow H$ lineer operatörünü göz önüne alalım. Her $u, v \in D(A)$ vektörü için $(Au, v) = (u, Av)$ yazılabiliyorsa A bir simetrik operatör adını alır. A simetrik bir operatörse ve her u için $(Au, u) \geq 0$ ise A pozitif operatör adını alır. A sınırlı bir pozitif operatör olsun. Bir K pozitif operatörü $K^2 = A$ bağıntısını sağlarsa A nın karekökü adını alır ve $K = \sqrt{A} = A^{1/2}$ şeklinde gösterilir(Şuhubi, 2001).

Teorem 3.2.7.

Bir H Hilbert uzayı üzerinde bir $A : H \rightarrow H$ simetrik operatörü ancak ve ancak $D(A) = H$ veya $R(A) = H$ ise kendine eştir (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.2.8.

U ve V normlu vektör uzaylar olsun. $A : U \rightarrow V$ operatörü U uzayındaki sınırlı kümeleri V uzayında göreceli kompakt kümelere dönüştürüyorsa bir kompakt operatör adını alır. Yani A bir kompakt operatörse her sınırlı $\mathfrak{M} \subset U$ kümesinin $A(\mathfrak{M}) \subset V$ görüntüsünün $\overline{A(\mathfrak{M})}$ kapanışı kompakt kümedir. (Şuhubi, 2001).

Tanım 3.2.9. (Lineer ve Sınırlı Fonksiyonel)

- $\mathbb{F}$ (reel veya kompleks) cismi üzerinde tanımlı olan herhangi bir vektör uzayın dan bu $\mathbb{F}$ cismine tanımlı dönüşümlere fonksiyonel denir.
- Lineerlik şartını sağlayan fonksiyonele lineer fonksiyonel denir.
- $f : V \rightarrow \mathbb{F}$ lineer fonksiyonel olsun. Eğer öyle bir $K > 0$ sayısı varsa ki $\forall v \in V$ için $|f(v)| \leq K\|v\|$ eşitsizliği sağlansın, o halde f ' ye sınırlı lineer fonksiyonel denir (Kreyszig, 1978).

Teorem 3.2.10. (Riesz Temsil Teoremi)

V Hilbert uzayı olmak üzere; $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ile tanımlı dönüşüm sınırlı lineer fonksiyonel ise o halde $\exists v \in V$ vardır ki, $\forall s \in V$ için $f(s) = \langle s, v \rangle$ eşitliği sağlanır (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.2.11.

X bir Banach uzayı, $L : X \longrightarrow X$ şeklinde tanımlı bir sınırlı lineer operatör olmak üzere $Ly = \mu y$ veya I birim operatör olmak üzere $(L - \mu I)y = 0$ denkleminin sıfırdan farklı bir y çözümü varsa $\mu \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün özdeğeri, y fonksiyonuna da μ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir. Bu operatörün tersi mevcut olsun ve $R_\mu = (L - \mu I)^{-1}$ ile gösterilsin. R_μ operatörüne L operatörünün Rezolvent operatörü denir. R_μ operatörü mevcut, sınırlı ve tüm V Hilbert uzayında tanımlı ise μ kompleks sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Regüler noktaların oluşturduğu kümeye Rezolvent kümesi denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

$\sigma(L) := \mathbb{C} \setminus \rho(L)$ kümesine ise L operatörünün spektrumu denir.

Eğer R_μ yoksa $\sigma(L)$ kümesine nokta spektrumu ya da diskret spektrumu adı verilir ve bu kümenin $\lambda \in \sigma(L)$ elemanları özdeğerler olarak adlandırılır (Kreyszig, 1978).

Tanım 3.2.12.

V Hilbert uzayı ve uzayın elemanlarından oluşan dizi $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ verilsin.

Eğer $\forall v \in V$ elemanı için, $v = \sum_{n=1}^{\infty} b_n v_n$ toplamı şeklinde yazılabilecek $\{b_n\}$ skalerlerinin bir tek dizisi mevcut ise bu takdirde $\{v_n\}$ elemanlarından oluşan aile V Hilbert uzayının bazı olarak adlandırılır (Gohberg ve Krein, 1969).

Eğer $\forall n \neq m$ için $\langle v_n, v_m \rangle_V = 0$ şartı sağlanıyor ise $\{v_n\}$ bazına ortogonal baz adı verilir.

δ_{nm} kroneker delta olmak üzere eğer $\langle v_n, v_m \rangle = \delta_{nm}$ şartı sağlanıyor ise bu takdirde $\{v_n\}$ ortogonal bazının bir ortonormal baz olduğu söylenir (Bary, 1946,1950).

Tanım 3.2.13.

V Hilbert uzayı ve bu V Hilbert uzayında $\{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, \dots\}$ ortonormal bazı ve $L : V \rightarrow V$ ile tanımlı operatör verilsin ve ayrıca bu L operatörü birebir, örten ve sınırlı olsun. Dolayısıyla L operatörünün ters operatörü de sınırlıdır. Bu takdirde, bu ortonormal bazın L operatörü altındaki görüntüsü olarak elde edilen $\{g_1, g_2, g_3, \dots, g_n, \dots\}$ vektörler sistemi ($g_i = Le_i$) bir baz oluşturur. Bu baza Riesz bazı denir (Gohberg ve Krein, 1969).

3.3. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Şartları

$k_j(s) (j = 0, 1, 2, \dots, n)$ fonksiyonları $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonlar, $\forall s$ için $k_n(s) \neq 0$ ve $s \in (a, b)$ olmak üzere

$$l(X) := \sum_{j=0}^n k_j(s) X^{(j)}(s)$$

şeklinde yazılan ifadeye n . mertebeden lineer diferansiyel ifade

$$S(X) := \sum_{j=0}^{n-1} \{ \gamma_j X^{(j)}(a) + \delta_j X^{(j)}(b) \}$$

şeklinde verilen ifadeye de sınır-değer ifadesi denir. $S_j(X)$, $j = 1, 2, \dots, m$ ifadeleri sınır-değer ifadeleri olduğunda

$$S_j(X) = 0, j = 1, 2, \dots, m$$

biçimindeki eşitlikler sınır şartları olarak adlandırılır (Naimark, 1967).

3.4. Regular Sturm-Liouville Problemleri

Bu kesimde klasik Sturm-Liouville problemlerinin bazı temel özelliklerini ifade edeceğiz.

•

$$-\frac{d}{ds}(\varphi(s) \frac{dv}{ds}) + \{\psi(s) - \mu \varrho(s)\}v(s) = 0, \quad s \in (a, b) \quad (3.4.46)$$

biçiminde ifade edilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi, Sturm-Liouville denklemi (SLD) olarak isimlendirilir.

- (3.4.46) denklemindeki $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\varrho(s)$ reel değerli fonksiyonlar, μ ise spektral parametredir.
- (3.4.46) SLD'nin $[a, b]$ kapalı sınırlı aralığında tanımlı ve ψ ile ϱ fonksiyonlarının sürekli, φ fonksiyonunun sürekli diferensiyellenebilir ayrıca $\forall s \in [a, b]$ için

$\varphi(s) > 0$, $\varrho(s) > 0$ koşullarının sağlanması durumunda (3.4.46) SLD'ne regular Sturm-Liouville denklemi (RSLD) denir.

- Uygulamalarda sık sık rastlanan diferansiyel operatörlerden biri de

$$L = -\frac{d}{ds}\left\{\varphi(s)\frac{d}{ds}\right\} + \psi(s)$$

biçiminde ifade edilen operatördür. L diferensiyel operatörü (3.4.46) RSLD'nde dikkate alınırsa, bu problem

$$Lv(s) - \mu\varrho(s)v(s) = 0, \quad s \in (a, b)$$

biçiminde yazılabilir.

- $[a, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş

$$\gamma_1 v(a) + \delta_1 v'(a) = 0 \quad (3.4.47)$$

$$\gamma_2 v(b) + \delta_2 v'(b) = 0 \quad (3.4.48)$$

uç nokta şartları, sınır şartları olarak adlandırılır.

- (3.4.46) RSLD ile (3.4.47)-(3.4.48) sınır şartlarından oluşan (3.4.46)-(3.4.48) problemi regular SLP olarak bilinir.
- (3.4.47) -(3.4.48) sınır şartlarındaki $\gamma_j, \delta_j (j = 1, 2)$ katsayıları reel sayılardır ve $|\gamma_1| + |\delta_1| \neq 0$, $|\gamma_2| + |\delta_2| \neq 0$ şartı sağlanır.
- Hem (3.4.46) lineer diferensiyel denklemi, hem de (3.4.47)-(3.4.48) sınır şartları homojen oldukları için $v(s) = 0$ fonksiyonu μ parametresinin her bir değeri için aşikâr çözümdür.
- Doğal olarak (3.4.46)-(3.4.48) probleminin aşikâr olmayan çözümlerini bulmak gerekir. Fakat μ parametresinin her bir değeri için sıfırdan farklı çözüm mevcut olmayabilir.

- Eğer μ spektral parametresinin $\mu = \mu_0$ değeri için (3.4.46)-(3.4.48) SLP'nin aşıkâr olmayan $v_0 \neq 0$ çözümü mevcut ise μ_0 sayısına problemin özdeğeri, $v_0(s)$ çözümüne ise bu özdeğere uygun olan özfonksiyon denir.
- Problemin sayılabilir sonsuz sayıda $\mu_1, \mu_2, \dots$, özdeğerleri mevcuttur, tüm özdeğerler reeldir ve $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$ şeklinde sıralanabilir.
- Özdeğerlerin sonlu yığılma noktası bulunmamaktadır, yani $\mu_n \rightarrow \infty (n \rightarrow \infty)$ özelliğine sahiptir.
- Farklı özdeğerlere uygun gelen özfonksiyonlar $\varrho(s)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır.
- RSLP'leri kendine-eşleniktir.
- Özfonksiyonlar sistemi, $[a, b]$ aralığında tanımlı ve parçalı sürekli fonksiyonlar uzayında

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(s)|^2 \varrho(s) ds$$

normuna göre tamdır, yani $[a, b]$ aralığında tanımlı ve parçalı sürekli olan her $f(s)$ fonksiyonu

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b f(t) v_n(t) \varrho(t) dt \right\} v_n(s)$$

serisine açılabilir; sonuncu eşitlikten çok önemli olan

$$\int_a^b |f(s)|^2 \varrho(s) ds = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b f(t) v_n(t) \varrho(t) dt \right\}^2$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe Parseval eşitliği denir.

- Her bir μ_n özdeğeri ile bu özdeğere uygun $v_n(s)$ özfonksiyonu arasında

$$\mu_n = R(v_n) = \frac{\int_a^b v_n L[v_n] ds}{\int_a^b |v_n|^2 \varrho(s) ds}$$

bağıntısı mevcuttur.

-

$$R(w) = \frac{\int_a^b w L[w] ds}{\|w\|^2}$$

oranına Rayleigh oranı denir.

- (3.4.46) - (3.4.48) SLP'nin özfonksiyonları, özdeğerleri bulunmadan hesaplanamayacağına göre Rayleigh oranı yardımı ile özdeğerleri direkt olarak bulunamaz. Ancak Rayleigh oranıyla SLD'ni çözmeden de önemli sonuçlar elde edilebilir.
- Matematiksel fizik problemlerinde ve bir çok mühendislik uygulamasında λ parametresinin işareti oldukça önem arzeder. Rayleigh oranı gereği

1. $\varphi w \frac{dw}{ds} \Big|_a^b \leq 0$
2. $\psi \leq 0$

şartlarının sağlanması durumunda $\mu \geq 0$ elde edilir. Rayleigh oranı, (3.4.46)-(3.4.48) SLP'nin özdeğerlerini tahmin etmek için faydalı olabilir.

- $\mu_1 = \min R(w)$, yani ilk özdeğer Rayleigh oranının minimum değerine eşittir.

(Atkinson, 1964; Woldegebriel, 2011).

4. ÇOK-ARALIKLI SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN İFADESİ ve UYGUN HİLBERT UZAYLAR

Tezimizin bu kesiminde ilk olarak araştıracağımız problemi izah edeceğiz ve daha sonra problemimizin çözümünde gerekli olacak probleme uygun bazı yeni uzayları ve bu uzaylarda geçerli olan bazı kavramlar ve eşitsizlikler verilecektir.

4.1. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin İfadesi

Çalışmamızın esas konusu, sırasıyla ayırık $[a, \xi_1^-)$, (ξ_1^+, ξ_2^-) , $(\xi_2^+, b]$ aralıklarında

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_1}{dt}\right) + h_1(t)s_1(t) = \mu s_1(t), t \in [a, \xi_1^-) \quad (4.1.1)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_2}{dt}\right) + h_2(t)s_2(t) = \mu s_2(t), t \in (\xi_1^+, \xi_2^-) \quad (4.1.2)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_3}{dt}\right) + h_3(t)s_3(t) = \mu s_3(t), t \in (\xi_2^+, b] \quad (4.1.3)$$

biçiminde tanımlı ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerinden, $[a, \xi_1^-) \cup (\xi_1^+, \xi_2^-) \cup (\xi_2^+, b]$ aralığının uç noktalarında verilmiş ama sadece sol ucunda özdeğer parametre sini bulunduran

$$\beta_3 s_1'(a) + \mu \beta_2 s_1'(a) = \beta_1 s_1(a) \quad (4.1.4)$$

$$s_3'(b) = 0 \quad (4.1.5)$$

sınır şartlarından ve $[a, \xi_1^-)$, (ξ_1^+, ξ_2^-) , $(\xi_2^+, b]$ aralığının iç noktaları olan ve süreksizlik noktaları olarak da adlandırılan $t = \xi_1$ ve $t = \xi_2$ noktalarındaki

$$s_2(\xi_1^+) = \alpha_1 s_1(\xi_1^-) \quad (4.1.6)$$

$$s_2'(\xi_1^+) - \frac{1}{\alpha_1} s_1'(\xi_1^-) = s_1(\xi_1^-) \quad (4.1.7)$$

$$s_3(\xi_2^+) = \alpha_2 s_2(\xi_2^-) \quad (4.1.8)$$

$$s_3'(\xi_2^+) - \frac{1}{\alpha_2} s_2'(\xi_2^-) = s_2(\xi_2^-) \quad (4.1.9)$$

ilave koşullarından oluşan çok-aralıklı Sturm Liouville problemini inceleyeceğiz. İlave koşullar literatürde, geçiş koşulları, sıçrama koşulları, arayüz koşulları, interface koşulları ya da impulsif koşulları gibi isimlerle bilinmektedir.

Bu tez çalışması boyunca kısalığın hatırına; $\Upsilon_1 := [a, \xi_1^-)$, $\Upsilon_2 := (\xi_1^+, \xi_2^-)$, $\Upsilon_3 := (\xi_2^+, b]$ ve $\Upsilon = \cup_{i=1}^3 \Upsilon_i$, $s(t) = \begin{cases} s_1(t), & t \in \Upsilon_1 \\ s_2(t), & t \in \Upsilon_2 \\ s_3(t), & t \in \Upsilon_3 \end{cases}$, $h(t) = \begin{cases} h_1(t), & t \in \Upsilon_1 \\ h_2(t), & t \in \Upsilon_2 \\ h_3(t), & t \in \Upsilon_3 \end{cases}$

gösterimlerinden istifade edilecektir.

Burada $h_1(t), h_2(t), h_3(t)$ fonksiyonları sırasıyla ayrık $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ aralıkları üzerinde reel-değerli ve sürekli fonksiyonlar ve bu fonksiyonların sonlu $h(\xi_1^\pm) = \lim_{t \rightarrow \xi_1^\pm} h(t)$, $h(\xi_2^\pm) = \lim_{t \rightarrow \xi_2^\pm} h(t)$ limit değerleri mevcuttur. μ kompleks spektral parametre, $\alpha_i, \beta_j (i = 1, 2 \text{ ve } j = 1, 2, 3)$ reel katsayılar, $\theta = \beta_1 \beta_2 > 0$ dir.

4.2. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Problemine Uygun Uzaylar ve Eşitsizlikler

Bir önceki bölümde vermiş olduğumuz Tanım 3.1.3 ve Tanım 3.1.4 de bulunan standart $L_2[a, b]$ ve $W_2^k[a, b]$ uzaylarının tanımları göz önünde bulundurularak ve yukarıdaki temsillerden yararlanılarak çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) problemine uygun Hilbert uzayları $\Xi_0 := \oplus_{i=1}^3 L_2(\Upsilon_i)$, $\Xi_1 := \oplus_{i=1}^3 W_2^1(\Upsilon_i)$ ve $\Xi_2 := \oplus_{i=1}^3 W_{2,h}^1(\Upsilon_i)$ simgeleri ile gösterilecektir.

$\Xi_0 := \oplus_{i=1}^3 L_2(\Upsilon_i)$ Hilbert uzayının direkt toplamında tanımlı olan iç çarpım ve bu iç çarpıma karşılık gelen normu

$$\langle s, \varrho \rangle_{\Xi_0} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} s_i(t) \cdot \overline{\varrho_i(t)} dt \quad , \quad \|s\|_{\Xi_0}^2 = \langle s, s \rangle_{\Xi_0} \quad (4.2.10)$$

eşitlikleri ile tanımlayacağız.

Ξ_0 Hilbert uzayının elemanlarından oluşan ve (4.1.6)-(4.1.9) geçiş şartlarını sağlayan lineer uzay $\Xi_1 := \oplus_{i=1}^3 W_2^1(\Upsilon_i)$ ile gösterilirse, bu lineer uzay üzerinde tanımlı olan iç çarpım ve karşılık gelen normu

$$\langle s, \rho \rangle_{\Xi_1} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} \left\{ s'_i(t) \cdot \overline{\rho'_i(t)} + s_i(t) \cdot \overline{\rho_i(t)} \right\} dt \quad , \quad \|s\|_{\Xi_1}^2 = \langle s, s \rangle_{\Xi_1} \quad (4.2.11)$$

eşitlikleri temsil edecektir.

Lemma 4.2.1. Üzerinde (4.2.11) ile temsil edilen iç çarpım ve norm tanımlı olan $\Xi_1 := \oplus_{i=1}^3 W_2^1(\Upsilon_i)$ iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Not 4.2.2. Ξ_1 Hilbert uzayının elemanı olan s fonksiyonunun normal türevi Ξ_0 Hilbert uzayının elemanı olarak tanımlı olmayabilir. Yani, Sobolev uzayları için gömülme teoremlerine göre; Ξ_1 Sobolev uzayından alınan fonksiyonlar Υ_1 , Υ_2 ve Υ_3 aralıklarında sürekli olmalarına rağmen, bu fonksiyonların genelleştirilmiş türevleri Ξ_0 uzayının elemanlarıdır.

Ξ_1 Hilbert uzayının tanımdan yararlanarak bu uzay üzerinde problemin çözümünde elzem olan yeni bir iç çarpım ve karşılık gelen normu kısalık hatırına

$$\langle s, \varrho \rangle_{\Xi_2} = \langle s', \varrho' \rangle_{\Xi_0} + \langle s, h\varrho \rangle_{\Xi_0} \quad , \quad \|s\|_{\Xi_2}^2 = \langle s, s \rangle_{\Xi_2} \quad (4.2.12)$$

eşitlikleri ile tanımlayalım.

Not 4.2.3. Eğer $h(t)$ fonksiyonu alttan sınırlı ise, öyle bir spektral $\mu \rightarrow \tilde{\mu} - d$ ötelemesi mevcuttur ki $h(t)$ fonksiyonu ve $d \in \mathbb{R}$ nin Υ aralığında pozitif tanımlı olduğu varsayılabilir.

İspat. (4.1.1)-(4.1.3) diferensiyel denklemleri $\mu \rightarrow \tilde{\mu} - d$ ötelemesi sonucunda $\tilde{\mu} \rightarrow \mu + d$ terimli aynı yapıdaki denklemlere dönüşür. $\forall t \in \Upsilon$ için $d = \max h(t)$ almak suretiyle $h(t)$ fonksiyonu Υ aralığının her yerinde pozitif olarak varsayılabilir.

Not 4.2.4. Dikkat etmek gerekir ki, $\theta = \beta_1\beta_2$ ifadesi spektral $\mu \rightarrow \tilde{\mu} - d$ parametresi nin ötelemesine göre değişmez.

Not 4.2.5. $h(t)$ fonksiyonu Υ aralığında sınırlı, pozitif tanımlı ve ölçülebilir olduğundan dolayı $0 < \mathcal{N}_1 < \mathcal{N}_2$ koşulunu sağlayacak şekilde öyle $\mathcal{N}_1$ ve $\mathcal{N}_2$ sayıları vardır ki $\forall s \in \Xi_2$ için

$$\mathcal{N}_1 \|s\|_{\Xi_1} < \|s\|_{\Xi_2} < \mathcal{N}_2 \|s\|_{\Xi_1} \quad (4.2.13)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.2.6. $\|\cdot\|_{\Xi_1}$ ve $\|\cdot\|_{\Xi_2}$ normları denktir.

Giriş bölümünde ifade edildiği üzere bu tez çalışmasının amaçlarından biri incelenen çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) Sturm-Liouville probleminin opertör-demeti denkleminde indirgenmesi idi. Bunun için çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) Sturm-Liouville problemine uygun yeni bir Hilbert uzayı daha inşa edilecektir.

Tanım 4.2.7. $\forall t \in \Upsilon$ için $s, v \in \Xi_1$ ve $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere iki bileşenli $S = \begin{pmatrix} s(t) \\ z_1 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} v(t) \\ z_2 \end{pmatrix}$ elemanların lineer uzayını $\tilde{\Xi}$ ile gösterelim. $\tilde{\Xi} := \Xi_1 \oplus \mathbb{C}$ lineer uzayının S ve V fonksiyonlarının iç çarpımını

$$\langle U, V \rangle_{\tilde{\Xi}} := \langle s, v \rangle_{\Xi_1} + z_1 \overline{z_2} \quad (4.2.14)$$

eşitliği ile tanımlayalım. Üzerinde iç çarpım tanımlı olan $\tilde{\Xi}$ lineer uzayının bir Hilbert uzayı olduğu aşıkardır.

Çalışmamızın bundan sonraki kısmında çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır-değer problemine uygunluğu açısından özellikle Ξ_1 ve $\tilde{\Xi}$ Sobolev uzaylarından yararlanılacaktır. Sobolev uzayları için gömülme eşitsizliklerinden yararlanılarak takip eden Lemma ile verilen eşitsizlikler elde edilir (Ladyzhenskaia, 1985). Bu eşitsizlikler (4.1.1)-(4.1.9) sınır-değer problemini operatör-polinom denkleminde indirgemede kullanılacaktır.

Lemma 4.2.8. $\forall s \in \Xi_1$ için

$$|s(t_j)|^2 \leq \gamma \|s'\|_{\Xi_0}^2 + \frac{2}{\gamma} \|s\|_{\Xi_0}^2, \quad (4.2.15)$$

ve $\forall t \in \Upsilon$ için

$$|s(t)| \leq C(t) \|s\|_{\Xi_1} \quad (4.2.16)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $j = \overline{1, 4}$, $t_1 = a, t_2 = \xi_1^\mp, t_3 = \xi_2^\mp, t_4 = b$ ve γ yeterince küçük herhangi bir pozitif reel sayı ve $C(t)$ sabiti de s fonksiyonundan bağımsız sadece t ye bağımlı olan bir sabittir.

Böylece bu tez çalışmasında incelenecek olan problem (4.1.1)-(4.1.9) çok-aralıklı sınır değer problemi olarak ifade edilmiş ve bu problemin araştırılmasında elzem olan probleme özgü uzaylar ve eşitsizlikler izah edilmiştir.

5. ÇOK-ARALIKLI SINIR-DEĞER PROBLEMİNİN ZAYIF ÇÖZÜMÜ ve OPERATÖR-POLİNOMU

Tezimizin bu kesiminde incelemekte olduğumuz çok-aralıklı sınır-değer-geçiş problemi, operator-teorik yöntem kullanmak suretiye operatör-polinom denkleminde indirgenerek bu operatör-polinomun bazı özellikleri incelendi.

5.1. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin Zayıf Çözümü

Bu kesimde (4.1.1)-(4.1.9) çok-aralıklı sınır-değer problemine özgü zayıf çözüm kavramı tanımlanacaktır. Bunun için Ξ_1 Hilbert uzayının elemanı olan keyfi bir kompleks ϱ fonksiyonu ve bu fonksiyonun kompleks eşleneği olan ve $\bar{\varrho}$ ile gösterilen kompleks eşlenik fonksiyonunu alalım. (4.1.1)-(4.1.9) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için (4.1.1)-(4.1.3) Sturm-Liouville denklemlerinin her iki tarafı $\bar{\varrho}$ kompleks eşlenik fonksiyonu ile çarpılırsa

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_1}{dt}\right)\bar{\varrho}_1(t) + h_1(t)s_1(t)\bar{\varrho}_1(t) = \mu s_1(t)\bar{\varrho}_1(t), t \in \Upsilon_1 \quad (5.1.1)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_2}{dt}\right)\bar{\varrho}_2(t) + h_2(t)s_2(t)\bar{\varrho}_2(t) = \mu s_2(t)\bar{\varrho}_2(t), t \in \Upsilon_2 \quad (5.1.2)$$

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_3}{dt}\right)\bar{\varrho}_3(t) + h_3(t)s_3(t)\bar{\varrho}_3(t) = \mu s_3(t)\bar{\varrho}_3(t), t \in \Upsilon_3 \quad (5.1.3)$$

denklemleri elde edilir. Şimdi sırasıyla $\Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3$ aralıkları üzerinden (5.1.1)-(5.1.3) denklemlerinin integralleri alınır

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} \left\{ -\frac{d}{dt}\left(\frac{ds_i}{dt}\right)\bar{\varrho}_i(t) + h_i(t)s_i(t)\bar{\varrho}_i(t) - \mu s_i(t)\bar{\varrho}_i(t) \right\} dt = 0 \quad (i = \overline{1,3}) \quad (5.1.4)$$

integral denklemleri elde edilir. İntegral denklemindeki ilk terime kısmi integral uygulanması durumunda

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} \left\{ -\frac{ds_i(t)}{dt} \frac{d\bar{\varrho}_i(t)}{dt} + h_i(t)s_i(t)\bar{\varrho}_i(t) \right\} dt + B(s, \varrho) = \mu \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} s_i(t)\bar{\varrho}_i(t) dt \quad (5.1.5)$$

integral denklemi elde edilir. Burada $B(s, \varrho)$ ile

$$\begin{aligned} B(s, \varrho) &:= -s'_3(b)\overline{\varrho}_3(b) + s'_1(a)\overline{\varrho}_1(a) + [s'_2(\xi_1^+)\overline{\varrho}_2(\xi_1^+) - s'_1(\xi_1^-)\overline{\varrho}_1(\xi_1^-)] \\ &+ [s'_3(\xi_2^+)\overline{\varrho}_3(\xi_2^+) - s'_2(\xi_2^-)\overline{\varrho}_2(\xi_2^-)] \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

ifadesi kastedilmektedir. (not 4.2.2) gereği (5.1.6) ifadesindeki $s'_3(b), s'_1(a), s'_1(\xi_1^-), s'_2(\xi_1^+), s'_2(\xi_2^-), s'_3(\xi_2^+)$ terimler Ξ_1 Hilbert uzayında tanımlı olmadığından (4.1.4)-(4.1.9) sınır ve geçiş şartlarını kullanmak suretiyle türevli terimlerin (5.1.6) ifadesinden yok edilmesi gerekmektedir.

(4.1.4) sınır koşulunun göz önünde bulundurulması kaydıyla $B(s, \varrho)$ ifadesindeki $s'_1(a)$ türevli terimin yok edilmesi için

$$\phi := \beta_2 s'_1(a) \quad (5.1.7)$$

olacak şekilde yeni bir ϕ parametresi tanımlanacaktır. Dolayısıyla (4.1.4) sınır koşulu bu parametre vesilesiyle

$$\beta_1 s_1(a) - \beta_3 s'_1(a) = \mu \phi \quad (5.1.8)$$

biçiminde yazılır.

$\theta = \beta_1 \beta_2 > 0$ olduğu dikkate alınarak $s'_1(a)$ terimini yok etmek için son iki denklem birlikte düşünülürse ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\frac{s_1(a)}{\beta_2} - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} = \mu \frac{\phi}{\theta} \quad (5.1.9)$$

şeklinde bir eşitlik elde edilmiş olur.

(5.1.7) eşitliği, (4.1.5) sınır ve (4.1.6)-(4.1.9) geçiş koşulları birlikte (5.1.6) denkleminde dikkate alınırsa

$$B(s, \varrho) := \alpha_1 s_1(\xi_1^-)\overline{\varrho}_1(\xi_1^-) + \alpha_2 s_2(\xi_2^-)\overline{\varrho}_2(\xi_2^-) + \frac{\phi}{\beta_2} \overline{\varrho}_1(a) \quad (5.1.10)$$

ifadesi elde edilir. Bulunan son eşitlik (5.1.5) integral denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} \left\{ -\frac{ds_i(t)}{dt} \frac{d\bar{\varrho}_i(t)}{dt} + h_i(t)s_i(t)\bar{\varrho}_i(t) \right\} dt + \alpha_1 s_1(\xi_1^-) \bar{\varrho}_1(\xi_1^-) + \alpha_2 s_2(\xi_2^-) \bar{\varrho}_2(\xi_2^-) \\ & + \frac{\phi}{\beta_2} \bar{\varrho}_1(a) = \mu \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} s_i(t) \bar{\varrho}_i(t) dt \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

denklemini bulunmuş olur.

(4.2.10) ve (4.2.12) gösterimlerini dikkate almak koşuluyla (5.1.11) integral denklemini

$$\langle s, \varrho \rangle_{\Xi_2} + \alpha_1 s(\xi_1^-) \bar{\varrho}(\xi_1^-) + \alpha_2 s(\xi_2^-) \bar{\varrho}(\xi_2^-) + \frac{\phi}{\beta_2} \bar{\varrho}(a) = \mu \langle s, \varrho \rangle_{\Xi_0} \quad (5.1.12)$$

biçiminde yazılır.

Böylece göstermiş olduk ki ele alınan çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer problemi, elemanları Ξ_1 Hilbert uzayının olan (5.1.12) ve (5.1.9) ile temsil edilen iki denkleme indirgenmiş olur.

Şimdi elde edilen (5.1.12) ve (5.1.9) denklemlerini kullanmak suretiyle Ξ_1 Hilbert uzayında çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin genelleştirilmiş (zayıf) çözüm kavramını tanımlayabiliriz.

Tanım 5.1.1. $\tilde{\Xi} = \Xi_1 \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayı ve bu uzayın elemanı olan $\Psi = \begin{pmatrix} s(t) \\ \phi \end{pmatrix}$ fonksiyonu verilsin. Eğer (5.1.12) ve (5.1.9) eşitlikleri $\forall \varrho \in \Xi_1$ için gerçekleşiyorsa, Ψ fonksiyonu çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin genelleştirilmiş (zayıf) çözümü olarak isimlendirilir.

Genelleştirilmiş çözümünün tanımı olan Tanım (5.1.1) in uygunluğu takip eden sonuca dayanmaktadır.

Lemma 5.1.2. $s \in C^2(\Upsilon)$ ve $h \in C(\Upsilon)$ olsun. Bu takdirde çok-aralıklı sınır değer probleminin zayıf çözümü (4.1.1)-(4.1.3) Sturm-Liouville denklemleri ile (4.1.4)-(4.1.9) sınır ve geçiş koşullarının oluşturduğu denklemleri klasik anlamda gerçekler. (Burada $C(\Upsilon)$ ile Υ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonların uzayını, $C^2(\Upsilon)$ ile de Υ aralığı üzerinde ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayını göstermektedir.)

Not 5.1.3. Eğer Lemma 5.1.2' nin koşulları gerçekleşmez ise, çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin klasik çözümü mevcut olmayabilir ama bu problemin zayıf çözümü mevcut olabilir. Bu bağlamda zayıf çözüm, klasik çözüm kavramının bir genelleştirmesi olarak kabul edilebilir.

Böylece çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin zayıf (genelleştirilmiş) çözüm kavramı tanımlanmış bulunmaktadır.

5.2. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin Operatör-Polinomu

Tez çalışmamın bu kısmında çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin operatör-polinom denkleminde indirgenebilmesi incelenecektir ve bunun için gerekli olan özellikler araştırılacaktır. Tez çalışmamızın bundan sonraki kesiminde takip eden temsillerden istifade edilecektir.

Teorem 5.2.1.

$$f_1(s, \varrho) := \alpha_1 s_1(\xi_1^-) \overline{\varrho_1}(\xi_1^-) + \alpha_2 s_2(\xi_2^-) \overline{\varrho_2}(\xi_2^-) \quad (5.2.13)$$

$$f_2(s, \varrho) := \langle s, \varrho \rangle_0 \quad (5.2.14)$$

$$f_3(\phi, \varrho) := \frac{\phi}{\beta_2} \overline{\varrho_1}(a) \quad (5.2.15)$$

eşitlikleri ile temsil edilen $f_1(s, \varrho)$, $f_2(s, \varrho)$ ve $f_3(\phi, \varrho)$ fonksiyonelleri $s \in \Xi_1$ ve $\phi \in \mathbb{C}$ için $\varrho \in \Xi_1$ değişkenine göre lineer fonksiyoneldir.

İspat. f_1, f_2, f_3 fonksiyonellerinin lineer olduklarını göstermek için Ξ_1 Hilbert uzayının elemanı olan ϱ değişkenine aynı uzayda sürekli olduklarını ifade etmemiz gerekmektedir. Normlu uzaylarda süreklilik ile sınırlılık birbirine denk olduğundan f_1, f_2, f_3 fonksiyonellerin sınırlı olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Bunun için de aşağıda ki eşitsizliklerin sağlandığını göstermeliyiz.

$$|f_1(s, \varrho)| \leq \gamma_1 \{ |s_1(\xi_1^-)| |\overline{\varrho_1}(\xi_1^-)| + |s_2(\xi_2^-)| |\overline{\varrho_2}(\xi_2^-)| \}, \quad (5.2.16)$$

$$|f_2(s, \varrho)| \leq \gamma_2 \{ \|s_1\| \|\varrho_1\| + \|s_2\| \|\varrho_2\| + \|s_3\| \|\varrho_3\| \}, \quad (5.2.17)$$

$$|f_3(\phi, \varrho)| \leq \gamma_3 |\phi| |\varrho_1(a)|. \quad (5.2.18)$$

Not 5.2.2. Yukarıda ve bundan sonraki kısımlarda kullanılacak olan γ_k sabitlerinin s ve ϱ değişkenlerinden bağımsız oldukları dikkate alınacaktır.

Şimdi sırasıyla bu eşitsizliklerin gerçekleştiğini gösterelim: (4.2.13) ifadesi, Fonksiyonel Analizden iyi bilinen Cauchy-Schwarz eşitsizliği ve çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin sınır ve geçiş şartları dikkate alınacak olursa

$$\begin{aligned}
|f_1(s, \varrho)| &= |\alpha_1 s_1(\xi_1^-) \overline{\varrho}_1(\xi_1^-) + \alpha_2 s_2(\xi_2^-) \overline{\varrho}_2(\xi_2^-)| \\
&\leq |\alpha_1 s_1(\xi_1^-) \overline{\varrho}_1(\xi_1^-)| + |\alpha_2 s_2(\xi_2^-) \overline{\varrho}_2(\xi_2^-)| \\
&= |\alpha_1| |s_1(\xi_1^-)| |\overline{\varrho}_1(\xi_1^-)| + |\alpha_2| |s_2(\xi_2^-)| |\overline{\varrho}_2(\xi_2^-)| \\
&\leq \gamma_1 \{ |s_1(\xi_1^-)| |\overline{\varrho}_1(\xi_1^-)| + |s_2(\xi_2^-)| |\overline{\varrho}_2(\xi_2^-)| \} \text{ ki burada } \gamma_1 := \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (5.2.16) eşitsizliğinin gerçekleştiğini gösterir. Benzer şekilde, f_1 fonksiyoneli için kullandığımız argümanlardan yararlanmak kaydıyla f_2 fonksiyoneli için

$$\begin{aligned}
|f_2(s, \varrho)| &= \left| \int_{\Upsilon_1} s_1(t) \overline{\varrho}_1(t) dt + \int_{\Upsilon_2} s_2(t) \overline{\varrho}_2(t) dt + \int_{\Upsilon_3} s_3(t) \overline{\varrho}_3(t) dt \right| \\
&\leq \left| \int_{\Upsilon_1} s_1(t) \overline{\varrho}_1(t) dt \right| + \left| \int_{\Upsilon_2} s_2(t) \overline{\varrho}_2(t) dt \right| + \left| \int_{\Upsilon_3} s_3(t) \overline{\varrho}_3(t) dt \right| \\
&\leq \int_{\Upsilon_1} |s_1(t) \overline{\varrho}_1(t)| dt + \int_{\Upsilon_2} |s_2(t) \overline{\varrho}_2(t)| dt + \int_{\Upsilon_3} |s_3(t) \overline{\varrho}_3(t)| dt \\
&\leq \int_{\Upsilon_1} |s_1(t)| |\varrho_1(t)| dt + \int_{\Upsilon_2} |s_2(t)| |\varrho_2(t)| dt + \int_{\Upsilon_3} |s_3(t)| |\varrho_3(t)| dt \\
&\leq \gamma_2 \{ |s_1| |\varrho_1| + |s_2| |\varrho_2| + |s_3| |\varrho_3| \}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir ki bu (5.2.17) eşitsizliğinin sağlandığı anlamına gelmektedir.

Aynı şekilde $\forall s \in \Xi_1$ için f_3 fonksiyoneli

$$|f_3(\phi, \varrho)| = \left| \frac{\phi}{\beta_2} \overline{\varrho}_1(a) \right| = \frac{|\phi|}{|\beta_2|} |\overline{\varrho}_1(a)| \leq \gamma_3 |\phi| |\varrho_1(a)|$$

eşitsizliğini sağlar. Bu ise (5.2.18) eşitsizliğinin de sağlandığını gösterir. Böylece (5.2.16)-(5.2.18) eşitsizliklerinin sağlandığı gösterilmiş olundu.

Ξ_0 ve Ξ_1 Hilbert uzayları üzerinde (4.2.10)-(4.2.12) eşitlikleri ile tanımlı iç çarpımlar ve normların tanımlarından yola çıkılarak

$$\|s\|_{\Xi_0} \leq \gamma_4 \|s\|_{\Xi_2} \quad (5.2.19)$$

eşitsizliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

Lemma 4.2.8 ve (5.2.16)-(5.2.19) eşitsizlikleri dikkate alınacak olursa

$$|f_1(s, \varrho)| \leq \gamma_5 \|s\|_{\Xi_2} \cdot \|\varrho\|_{\Xi_2} \quad (5.2.20)$$

$$|f_2(s, \varrho)| \leq \gamma_6 \|s\|_{\Xi_2} \cdot \|\varrho\|_{\Xi_2} \quad (5.2.21)$$

$$|f_3(\phi, \varrho)| \leq \gamma_7 |\phi| \cdot \|\varrho\|_{\Xi_2} \quad (5.2.22)$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

(5.2.20)-(5.2.21) eşitsizlikleri $\forall s \in \Xi_1$ için f_1 ve f_2 fonksiyonellerinin $\varrho \in \Xi_1$ değişkenine göre Ξ_1 Hilbert uzayında sınırlı dolayısıyla sürekli nihayetinde lineer olduklarını, (5.2.22) eşitsizliği ise $\forall \phi \in \mathbb{C}$ için f_3 fonksiyonelinin $\varrho \in \Xi_1$ değişkenine göre Ξ_1 Hilbert uzayında aynı şekilde lineer olduğunu ifade etmektedirler. Böylece f_1, f_2, f_3 fonksiyonellerinin lineer olduklarının ispatı tamamlanmış olur.

Çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer problemini operatör denkleme indirgeyebilmek için $f_i (i = \overline{1-3})$ lineer fonksiyonellerini Riesz temsil teoreminden istifade etmek suretiyle operatörler cinsinden ifade edeceğiz.

$f_i (i = \overline{1-3})$ lineer fonksiyonelleri için Riesz temsil teoremi dikkate alınacak olursa

$$f_i(s, \varrho) = \langle L_i s, \varrho \rangle_{\Xi_2} \quad (i = 1, 2) \quad \text{ve} \quad f_3(\phi, \varrho) = \langle L_3 \phi, \varrho \rangle_{\Xi_2} \quad (5.2.23)$$

eşitliklerini sağlayacak şekilde $L_i (i = \overline{1-3})$ operatörlerini tanımlayalım.

$$\langle L_1 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} := \alpha_1 s_1(\xi_1^-) \overline{\varrho_1(\xi_1^-)} + \alpha_2 s_2(\xi_2^-) \overline{\varrho_2(\xi_2^-)} \quad (5.2.24)$$

$$\langle L_2 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} := \langle s, \varrho \rangle_0 \quad (5.2.25)$$

$$\langle L_3 \phi, \varrho \rangle_{\Xi_2} := \frac{\phi}{\beta_2} \overline{\varrho_1(a)} \quad (5.2.26)$$

$$L_3^* s := \frac{s_1(a)}{\beta_2} \quad (5.2.27)$$

eşitlikleri ile tanımlanan $L_1, L_2 : \Xi_1 \rightarrow \Xi_1, L_3 : \Xi_1 \rightarrow \mathbb{C}$ ve $L_3^* : \mathbb{C} \rightarrow \Xi_1$ operatörleri takip eden özelliklere sahiptir. Burada L_3^*, L_3 operatörünün eşlenik operatörünü temsil etmektedir. Çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer problemini operatör denkleme indirgeyebilmek için, yukarıda tanımlamış olduğumuz L_i ($i = \overline{1-3}$) operatörlerinin bazı özelliklerini inceleyeceğiz.

Teorem 5.2.3. $L_1, L_2 : \Xi_1 \rightarrow \Xi_1$ operatörleri kendine eşleniktir.

İspat. Ξ_1 Hilbert uzayında L_i ($i = 1, 2$) lineer operatörlerinin kendine eşlenik olduğunu göstermek için iç çarpım fonksiyonunun özelliklerinden ve L_i ($i = 1, 2$) operatörlerinin tanım kümesinden alınan her s, ϱ elemanları için (5.2.23) eşitliğinden yararlanmak kaydıyla

$$\begin{aligned} \langle s, L_1 \varrho \rangle_{\Xi_2} &= \overline{\langle L_1 \varrho, s \rangle_{\Xi_2}} \\ &= \overline{\alpha_1 \varrho_1(\xi_1^-) \overline{s_1(\xi_1^-)} + \alpha_2 \varrho_2(\xi_2^-) \overline{s_2(\xi_2^-)}} \\ &= \alpha_1 s_1(\xi_1^-) \overline{\varrho_1(\xi_1^-)} + \alpha_2 s_2(\xi_2^-) \overline{\varrho_2(\xi_2^-)} \\ &= \langle L_1 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} \end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} \langle s, L_2 \varrho \rangle_{\Xi_2} &= \overline{\langle L_2 \varrho, s \rangle} \\ &= \overline{\int_{\Upsilon_1} \overline{s_1(t)} \varrho_1(t) dt + \int_{\Upsilon_2} \overline{s_2(t)} \varrho_2(t) dt + \int_{\Upsilon_3} \overline{s_3(t)} \varrho_3(t) dt} \\ &= \int_{\Upsilon_1} s_1(t) \overline{\varrho_1(t)} dt + \int_{\Upsilon_2} s_2(t) \overline{\varrho_2(t)} dt + \int_{\Upsilon_3} s_3(t) \overline{\varrho_3(t)} dt \\ &= \langle L_2 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler bize $L_i (i = 1, 2)$ operatörlerinin Tanım 3.2.6 gereği Ξ_1 Hilbert uzayında simetrik olduklarını gösterir. Ξ_1 Hilbert uzayında $L_i (i = 1, 2)$ simetrik operatörler ve bu operatörlerin tanım bölgesi, Ξ_1 Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğundan Fonksiyonel Analizden iyi bilinen teorem ve yöntemin uygulanması sonucunda $L_i (i = 1, 2)$ operatörlerinin kendine eşlenik olduğu söylenir.

Teorem 5.2.4. L_1 ve L_2 pozitif operatörlerdir.

İspat. Ξ_1 Hilbert uzayında tanımlı ve (5.2.24) eşitliği ile temsil edilen L_1 operatörünün pozitif olduğunu gösterelim. Bunun için her $s(t) \in \Xi_1$ için (5.2.24) eşitliği ile iç çarpım ve norm fonksiyonlarının özelliklerinden yararlanılacak olursa

$$\begin{aligned} \langle L_1 s, s \rangle_{\Xi_2} &= \alpha_1 s_1 (\xi_1^-) \bar{s}_1 (\xi_1^-) + \alpha_2 s_2 (\xi_2^-) \bar{s}_2 (\xi_2^-) \\ &= \alpha_1 |s_1(\xi_1^-)|^2 + \alpha_2 |s_2(\xi_2^-)|^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\alpha_i (i = 1, 2)$ sıfırdan büyük reel sayılar olarak kabul ettiğimizden dolayı $\forall s(t) \in \Xi_1$ için L_1 operatörünün pozitif olduğu söylenir.

Benzer şekilde L_2 operatörünün (5.2.25) eşitliğiyle verilen tanımından yararlanılacak olursa kolayca görülür ki öyle bir γ_8 pozitif reel sayısı vardır öyle ki $\forall s(t) \in \Xi_1$ için

$$\langle L_2 s, s \rangle_{\Xi_2} = \int_{\Upsilon_1} |s(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_2} |s(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_3} |s(t)|^2 dt = \|s\|_{\oplus \Xi_1}^2 > 0$$

eşitsizliği bulunur. Bu eşitsizlikten L_2 operatörünün pozitif olduğu söylenir. İspat tamamlandı

Teorem 5.2.5. $L_i (i = \overline{1-3})$ ve L_3^* operatörleri kompaktır.

İspat. (5.2.24) ve (5.2.25) eşitlikleri ile verilmiş ve Ξ_1 Hilbert uzayında tanımlı olan L_1 ve L_2 lineer sürekli operatörler ve (s_k) fonksiyonlar dizisi aynı uzay da zayıf yakınsak olan fonksiyonların dizisi olsun. Dolayısıyla (s_k) fonksiyonlar dizisi sınırlı olacağından

$$\|s_k\|_{\Xi_1} \leq \gamma_8 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\gamma_8 > 0$ sabiti mevcuttur.

Ξ_1 Hilbert uzayında L_1 ve L_2 sınırlı operatörler ve $\Xi_1 \hookrightarrow \Xi_0$ gömülmesi kompakt olduğundan Ξ_1 ve Ξ_0 Hilbert uzayları arasında $L_1, L_2 : \Xi_1 \longrightarrow \Xi_0$ şeklinde tanımlı operatörler kompakt operatörlerdir. Bu ise $\{L_1 s_k\}$ ve $\{L_2 s_k\}$ fonksiyon dizilerinin Ξ_0 Hilbert uzayında yakınsak diziler olduğunu göstermektedir.

Υ , Reel sayılar kümesinin bir alt kümesi olmak üzere $W_2^1(\Upsilon) \subset C(\Upsilon)$ gömülmesinin kompakt ve $\{s_k\}$ fonksiyonlar dizisinin Ξ_1 uzayında sınırlı olmalarından dolayı $\{s_k\}$ fonksiyonlar dizisi $C(\Upsilon)$ uzayında yakınsaktır. Dolayısıyla $\{s_k(\xi_1)\}$ ve $\{s_k(\xi_2)\}$ dizileri $\mathbb{C}$ uzayında yakınsaktırlar.

(5.2.20) eşitsizliği ve L_1 operatörünün (5.2.24) eşitliği ile tanımlı temsilinden yararlanmak kaydıyla; $\forall s \in \Xi_1$ için

$$\begin{aligned} \|L_1 s\|_{\Xi_2}^2 &= \langle L_1 s, L_1 s \rangle_{\Xi_2} \\ &\leq |\alpha_1 s_1(\xi_1) \overline{(L_1 s)}(\xi_1) + \alpha_2 s_2(\xi_2) \overline{(L_1 s)}(\xi_2)| \\ &\leq \gamma_9 \{|s_1(\xi_1)| |(L_1 s)(\xi_1)| + |s_2(\xi_2)| |(L_1 s)(\xi_2)|\} \\ &\leq \gamma_{10} \|L_1 s\|_{C(\Upsilon)} (|s_1(\xi_1)| + |s_2(\xi_2)|) \\ &\leq \gamma_{11} \|L_1 s\|_{\Xi_2} (|s_1(\xi_1)| + |s_2(\xi_2)|) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$\|L_1(s_n - s_m)\|_2 \leq \gamma_{12} (|s_n(\xi_1) - s_m(\xi_1)| + |s_n(\xi_2) - s_m(\xi_2)|)$$

eşitsizliği geçerli olur ki bu $\{L_1 s_n\}$ dizisinin Ξ_1 uzayında Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Buradan da L_1 operatörünün Ξ_1 Hilbert uzayında kompakt operatör olduğu söylenir.

L_2 operatörü için (5.2.23), (5.2.25) temsilleri ve (5.2.21) eşitsizliği birlikte dikkate alınacak olursa

$$\begin{aligned} \|L_2 s\|_{\Xi_2}^2 &= \langle L_2 s, L_2 s \rangle_{\Xi_2} \\ &\leq \int_{\Upsilon_1} s_1(t) \overline{(L_2 s)}(t) dt + \int_{\Upsilon_2} s_2(t) \overline{(L_2 s)}(t) dt + \int_{\Upsilon_3} s_3(t) \overline{(L_2 s)}(t) dt \\ &\leq \gamma_{13} \|s\|_{\Xi_0} \|L_2 s\|_{\Xi_2} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla bu eşitsizlikten

$$\|L_2 s_n - L_2 s_m\|_{\Xi_2} = \|L_2(s_n - s_m)\|_{\Xi_2} \leq \gamma_{14} \|s_n - s_m\|_{\Xi_0}$$

yazılır. Bu ise $\{L_2 s_n\}$ dizisinin Ξ_0 uzayında yakınsak olduğunu gösterir. Dolayısıyla $\{L_2 s_n\}$ dizisi Ξ_2 uzayında da yakınsak olur. Bu da gösteriyor ki L_2 operatörü Ξ_2 Hilbert uzayında kompakttır. Bu da L_2 operatörünün kompaktlığının ispatını tamamlar.

Şimdi de L_3 operatörünün kompakt olduğunu göstererek ispatı bitireceğiz. $L_3^* : \mathbb{C} \rightarrow \Xi_1$ olmak üzere;

$$L_3^* s := \frac{1}{\beta_2} s_1(a)$$

şeklinde tanımlanan L_3^* operatörü L_3 operatörünün eşlenik operatörüdür. Bu durumda;

$$\|L_3^* s\| \leq \gamma_{15} \|s\|_{\Xi_2}$$

yazılabilir ki buradan görüntü uzayı sonlu boyutlu olan L_3^* eşlenik operatörünün sınırlı lineer operatör olduğu görülür. Bu nedenle L_3^* eşlenik sınırlı lineer operatörünün kompakt olduğu söylenir. O halde, Fonksiyonel Analizin iyi bilinen teoremi gereği (bakınız, örneğin (Kreyszig, 1978)) L_3 operatörü de kompakt operatördür. Yani, L_3^* operatörü kompakt olmasından dolayı L_3 operatörü de kompakt operatör olduğu söylenir. Bu ise ispatı tamamlar.

(5.2.13)-(5.2.15), (5.2.23)-(5.2.27) eşitlikleri ile tanımlı olan $L_i (i = \overline{1-3})$ ve L_3^* operatörleri yukarıda ispatları yapılan teoremler gereğince (5.1.9)-(5.1.12) ile tanımlı integral denklemleri

$$\langle s, \varrho \rangle_{\Xi_2} + \langle L_1 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} + \langle L_3 \phi, \varrho \rangle_{\Xi_2} = \mu \langle L_2 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} \quad (5.2.28)$$

$$L_3^* s - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} = \mu \frac{\phi}{\theta} \quad (5.2.29)$$

şeklinde denklem sistemine indirgenir.

Çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözüm kavramının tanımı olan Tanım 5.1.1 gereği $\forall \varrho \in \Xi_1$ için $\Psi \in \tilde{\Xi}$ genelleştirilmiş çözüm olduğundan

(5.2.28) denklemi $\forall \varrho \in \oplus \Xi_1$ için

$$s + L_1 s + L_3 \phi = \mu L_2 s \quad (5.2.30)$$

lineer denklemi biçiminde yazılabilir.

Not 5.2.6. Eğer $s \in \Xi_1$, çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin μ özdeğerine karşılık gelen genelleştirilmiş çözümü ise $\Psi \in \tilde{\Xi}$ fonksiyonu $\forall \varrho \in \Xi_1$ için sağlanan (5.2.28)-(5.2.29) sisteminin genelleştirilmiş çözümüdür. Tersine eğer $\Psi \in \tilde{\Xi}$, $\forall \varrho \in \Xi_1$ için sağlanan (5.2.28)-(5.2.29) sisteminin zayıf bir çözümü ise bu durumda $s \in \Xi_1$, çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin μ özdeğerine karşılık gelen bir zayıf çözümüdür.

Lemma 5.2.7. Çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin zayıf özfonksiyonları, $\tilde{\Xi}$ Hilbert uzayında iki yeni Λ ve Π operatörleri

$$\Lambda = \begin{pmatrix} I + L_1 & L_3 \\ L_3^* & -\frac{\beta_3}{\beta_2 \varrho} I \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varrho} I \end{pmatrix} \quad (5.2.31)$$

şeklinde tanımlı olmak üzere

$$\mathcal{O}(\mu)\Psi = 0, \quad \mathcal{O}(\mu) = \Lambda - \mu\Pi, \quad (5.2.32)$$

operatör demeti denklemini sağlar. Burada I operatörü birim operatör ve $\tilde{\Xi}$ uzayı Tanım 4.2.7 ile tanımlı olan bir Hilbert uzayı ve $\Psi = \begin{pmatrix} s(t) \\ \phi \end{pmatrix} \in \tilde{\Xi}$ dir.

İspat. Teorem 5.2.1 ve (5.2.24)-(5.2.27) temsillerini kullanmak suretiyle (5.1.9)-(5.1.12) denklem sistemi

$$\langle s, \varrho \rangle_{\Xi_2} + \langle L_1 s, \varrho \rangle_{\Xi_2} + \langle L_3 \phi, \varrho \rangle_{\Xi_2} = \mu \langle L_2 s, \varrho \rangle_{\Xi_2},$$

$$L_3^* s - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} = \mu \frac{\phi}{\theta}$$

şeklinde yazılır. Ξ_2 Hilbert uzayında

$$s + L_1 s + L_3 \phi = \mu L_2 s$$

lineer denklemini sağlayan keyfi bir ϱ fonksiyonu mevcuttur. İspat tamamlandı.

Sonuç 5.2.8. $\mu \in \mathbb{C}$ spektral parametresi $\tilde{\Psi}(t, \mu) := \begin{pmatrix} s(t) \\ \phi \end{pmatrix}$ şeklinde tanımlı zayıf özfonksiyonuna karşılık gelen, çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin bir özdeğeri olsun. Bu durumda ele alınan çok-aralıklı sınır değer probleminin zayıf özfonksiyonları, takip eden

$$\mathcal{O}(\mu)\tilde{\Psi}(t, \mu) = 0$$

operatör denklemini $\tilde{\Xi}$ Hilbert uzayında sağlar.

5.3. Çok-Aralıklı Sınır-Değer Probleminin Operatör-Polinomunun Bazı Özellikleri

Bir önceki bölümde çok aralıklı sınır değer problemimizi operatör polinom denkleme indirgemistik. Bu bölümde ise bu operatör polinomun pozitiflik ve kendine eşleniklik özelliklerini inceleyeceğiz. İlk olarak operatör polinomun pozitifliğini araştırarak başlayacağız.

Lemma 5.3.1. Öyle bir $\omega > 0$ reel sayısı vardır ki $\mu_0 > \omega$ için $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatör-demeti pozitif tanımlıdır. Yani yeterince büyük pozitif μ_0 değeri için $C = C(\mu_0) > 0$ sabiti vardır ki $\forall \Psi \in \tilde{\Xi}$ için;

$$\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\tilde{\Xi}} \geq G(\mu_0)\|\Psi\|_{\tilde{\Xi}}^2 \quad (5.3.33)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\tilde{\Xi}$ uzayının herhangi bir elemanı $\Psi = \begin{pmatrix} s(t) \\ \phi \end{pmatrix}$ olmak üzere Lemma 5.2.7 ile tanımlanan $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatörü dikkate alınmak üzere $\forall \Psi \in \tilde{\Xi}$ için yukarıdaki eşitsizliğin kanıtlanabilmesi için sol tarafı gözönünde bulundurulur ve iç-çarpım

fonksiyonunun özelliklerinden yararlanılarak lazım olan hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\Xi} &= \langle s(t) + L_1 s(t) + L_3 \phi + \mu_0 L_2 s(t), s(t) \rangle_{\Xi_1} \\
&+ \left\{ L_3^* s(t) - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} + \mu_0 \frac{\phi}{\theta} \right\} \bar{\phi} \\
&= \langle s(t), s(t) \rangle_{\Xi_2} + \langle L_1 s(t), s(t) \rangle_{\Xi_2} + \langle L_3 \phi, s(t) \rangle_{\Xi_2} \\
&+ \mu_0 \langle L_2 s(t), s(t) \rangle_{\Xi_2} + \left\{ L_3^* s(t) - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} + \mu_0 \frac{\phi}{\theta} \right\} \bar{\phi} \\
&= \|s\|_{\Xi_2}^2 + \alpha_1 |s_1(\xi_1)|^2 + \alpha_2 |s_2(\xi_2)|^2 + \frac{\phi}{\beta_2} \bar{s}_1(a) + (L_3^* s(t)) \bar{\phi} \\
&- \frac{\beta_3 |\phi|^2}{\beta_2 \theta} + \mu_0 \frac{|\phi|^2}{\theta} + \mu_0 \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} |s_i(t)|^2 dt \\
&= \|s\|_{\Xi_2}^2 + \alpha_1 |s_1(\xi_1)|^2 + \alpha_2 |s_2(\xi_2)|^2 + \frac{2}{\beta_2} \text{Re}(\phi \bar{s}_1(a)) \\
&+ \mu_0 \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} |s_i(t)|^2 dt - \frac{\beta_3 |\phi|^2}{\beta_2 \theta} + \mu_0 \frac{|\phi|^2}{\theta} \tag{5.3.34}
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. $\nu > 0$ keyfi olmak üzere

$$\frac{2}{\beta_2} \text{Re}(\phi \bar{s}_1(a)) \geq \frac{-1}{|\beta_2|} \left(\nu |\phi|^2 + \frac{1}{\nu} |s_1(a)|^2 \right) \tag{5.3.35}$$

elementer (5.3.35) eşitsizliğinden yola çıkılarak bu eşitsizliği (5.3.34) ifadesinde dikkate alır gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(s) &= \|s\|_{\Xi_2}^2 + \alpha_1 |s_1(\xi_1)|^2 + \alpha_2 |s_2(\xi_2)|^2 - \frac{1}{|\beta_2| \nu} |s_1(a)|^2 \\
&+ \mu_0 \sum_{i=1}^3 \int_{\Upsilon_i} |s_i(t)|^2 dt \tag{5.3.36}
\end{aligned}$$

$$\Gamma_2(\phi) = \left(\frac{-\nu}{|\beta_2|} - \frac{\beta_3}{\beta_2 \theta} + \frac{\mu_0}{\theta} \right) |\phi|^2 \tag{5.3.37}$$

olmak üzere

$$\langle \mathcal{O}(\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\Xi} \geq \Gamma_1(s) + \Gamma_2(\phi) \tag{5.3.38}$$

eşitsizliği elde edilir.

Ξ uzayının herhangi bir elemanı $\Psi = \begin{pmatrix} s(t) \\ \phi \end{pmatrix} \in \Xi$ fonksiyonun bileşenleri olan

$s \in \Xi_1$ ve $\phi \in \mathbb{C}$ birbirinden bağımsızdır. Bu durumda $\Gamma_1(s)$ ve $\Gamma_2(\phi)$ kuadratik formlarının pozitif tanımlı oldukları gösterilirse $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatörünün pozitif tanımlı olduğu ispatlanmış olur. Öncelikle $\Gamma_2(\phi)$ kuadratik formunun pozitif tanımlı olduğu gösterilecektir.

Başlangıçta verilen $\theta > 0$ eşitsizliğinden yararlanılacak olursa, μ_0 özdeğer parametresi için

$$\mu_0 \geq \frac{\nu\theta}{|\beta_2|} + \frac{\beta_3}{\beta_2}$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesi kaydıyla $\Gamma_2(\phi)$ formunun pozitif tanımlılığı kolayca görülür.

Şimdi Ξ_1 uzayında $\Gamma_1(s)$ formunun pozitif tanımlı olduğu gösterilecektir.

Bu durumda (5.3.36) eşitliğinde bulunan $\frac{1}{|\beta_2|\nu}$ terimi

$$\frac{1}{|\beta_2|\nu} \leq 0 \quad (5.3.39)$$

eşitsizliğini sağlaması durumunda $\Gamma_1(s)$ formunun pozitif tanımlı olduğunu söyleyebiliriz.

Aksi takdirde (5.3.39) ifadesindeki koşulun gerçekleşmemesi durumunda

$$\mathcal{L}_1(s) := \int_{\Upsilon_1} |s'_1(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_2} |s'_2(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_3} |s'_3(t)|^2 dt \quad (5.3.40)$$

$$\mathcal{L}_2(s) := \int_{\Upsilon_1} h_1(t)|s_1(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_2} h_2(t)|s_2(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_3} h_3(t)|s_3(t)|^2 dt \quad (5.3.41)$$

$$\mathcal{L}_3(s) := \int_{\Upsilon_1} |s_1(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_2} |s_2(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_3} |s_3(t)|^2 dt \quad (5.3.42)$$

şeklindeki fonksiyonelleri tanımlayalım. Bu durumda; (5.3.40)-(5.3.42) gösterimleri dikkate alınırsa

$$\|s\|_{\Xi_2}^2 := \mathcal{L}_1(s) + \mathcal{L}_2(s) \quad (5.3.43)$$

eşitliği yazılabilir. (Lemma 4.2.8)'den yararlanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$|s_1(\xi_1)|^2 \leq c_1 \|s'\|^2 + \frac{2}{c_1} \|s\|^2, \quad (5.3.44)$$

$$|s_2(\xi_2)|^2 \leq c_2 \|s'\|^2 + \frac{2}{c_2} \|s\|^2, \quad (5.3.45)$$

$$|s_1(a)|^2 \leq c_3 \|s'\|^2 + \frac{2}{c_3} \|s\|^2, \quad (5.3.46)$$

Burada c_1, c_2 ve c_3 sabitleri $(0, 1)$ aralığının elemanlarıdır. Şimdi de $h(t)$ fonksiyonunun pozitif ve sınırlı olmasından dolayı da;

$$\|s'\|^2 \leq \gamma_{16} \mathcal{L}_1(s) \quad (5.3.47)$$

$$\|s\|^2 \leq \gamma_{17} \mathcal{L}_2(s) \quad (5.3.48)$$

$$\mathcal{L}_3(s) \geq \gamma_{18} \mathcal{L}_2(s) \quad (5.3.49)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde öyle γ_{16}, γ_{17} ve γ_{18} sabit sayıları mevcuttur. (5.3.47)-(5.3.48) eşitsizliklerinin gerçekleştiği (5.3.40)-(5.3.42) temsillerinden kolaylıkla görülmür. (5.3.49) eşitsizliğinin gerçekleştiği aşağıda gösterilmiştir.

$h(t)$ fonksiyonu Υ aralığında sınırlı ve pozitif bir fonksiyon olduğundan pozitif öyle bir m_0 pozitif reel sayısı mevcuttur ki

$$\int_{\Upsilon} h(t) |s(t)|^2 dx \leq m_0 \int_{\Upsilon} |s(t)|^2 dt$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan da

$$\int_{\Upsilon} |s(t)|^2 dt \geq \frac{1}{m_0} \int_{\Upsilon} h(t) |s(t)|^2 dt$$

ifadesi elde edilir. Eğer $\frac{1}{m_0} := \gamma_{18}$ olarak tanımlanırsa; (5.3.49) eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiş olur.

Yukarıda gösterdiğimiz (5.3.47)-(5.3.49) eşitsizliklerinden faydalanarak (5.3.36) ifadesi nde düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(s) &\geq \mathcal{L}_1(s) + \mathcal{L}_2(s) - \alpha_1 \left(c_1 \|s'\|^2 + \frac{2}{c_1} \|s\|^2 \right) \\
&+ \alpha_2 \left(c_2 \|s'\|^2 + \frac{2}{c_2} \|s\|^2 \right) - \frac{1}{\beta_2 \nu} \left(c_3 \|s'\|^2 + \frac{2}{c_3} \|s\|^2 \right) \\
&+ \mu_0 \left\{ \int_{\Upsilon_1} |s_1(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_2} |s_2(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_3} |s_3(t)|^2 dt \right\} \\
&\geq \mathcal{L}_1(s) + \mathcal{L}_2(s) - \alpha_1 \left(c_1 \gamma_{14} \mathcal{L}_1(s) + \frac{2}{c_1} \gamma_{15} \mathcal{L}_2(s) \right) \\
&+ \alpha_2 \left(c_2 \gamma_{14} \mathcal{L}_1(s) + \frac{2}{c_2} \gamma_{15} \mathcal{L}_2(s) \right) - \frac{1}{\beta_2 \nu} \left(c_3 \gamma_{14} \mathcal{L}_1(s) + \frac{2}{c_3} \gamma_{15} \mathcal{L}_2(s) \right) \\
&+ \mu_0 \left\{ \int_{\Upsilon_1} |s_1(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_2} |s_2(t)|^2 dt + \int_{\Upsilon_3} |s_3(t)|^2 dt \right\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade $\mathcal{L}_1(s)$ ve $\mathcal{L}_2(s)$ ye göre tekrar düzenlenecek olursa

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(s) &\geq \mathcal{L}_1(s) \left\{ 1 - \alpha_1 c_1 \gamma_{14} + \alpha_2 c_2 \gamma_{14} - \left(\frac{1}{\beta_2 \nu} \right) c_3 \gamma_{14} \right\} \\
&+ \mathcal{L}_2(s) \left\{ 1 - \alpha_1 \frac{2}{c_1} \gamma_{15} + \alpha_2 \frac{2}{c_2} \gamma_{15} - \left(\frac{1}{\beta_2 \nu} \right) \frac{2}{c_3} \gamma_{15} + \mu_0 \gamma_{15} \right\}
\end{aligned} \tag{5.3.50}$$

eşitsizliği elde edilir. (5.3.37) eşitliği ve (5.3.50) eşitsizliği için kısalığın hatırına aşağıdaki gösterimlerden yararlanılacaktır:

$$G_1 := 1 - \alpha_1 c_1 \gamma_{14} + \alpha_2 c_2 \gamma_{14} - \left(\frac{1}{\beta_2 \nu} \right) c_3 \gamma_{14} \tag{5.3.51}$$

$$G_2 := 1 - \alpha_1 \frac{2}{c_1} \gamma_{15} + \alpha_2 \frac{2}{c_2} \gamma_{15} - \left(\frac{1}{\beta_2 \nu} \right) \frac{2}{c_3} \gamma_{15} + \mu_0 \gamma_{15} \tag{5.3.52}$$

$$G_3 := \frac{-\nu}{|\beta_2|} - \frac{\beta_3}{\beta_2 \theta} + \frac{\mu_0}{\theta} \tag{5.3.53}$$

Bu gösterimlerden faydalanılarak;

$$\langle \mathcal{O}(-\mu_0) \Psi, \Psi \rangle_{\Xi} \geq G_1 \mathcal{L}_1(s) + G_2 \mathcal{L}_2(s) + G_3 |\phi|^2 \tag{5.3.54}$$

eşitsizliği elde edilir. $c_i (i = 1, 2, 3)$ pozitif reel sayıları yeterince küçük seçilebildiğinden G_1 ifadesi pozitif olacaktır. μ_0 da yeterince büyük pozitif bir sayı olmak üzere G_2 ifadeside pozitif olacaktır. G_3 ifadesinin pozitifliğini daha önceden ifade etmiştik. Bu durumda

$$\Gamma_1(s) > 0$$

eşitsizliği sağlanmış olur. Şimdi $G(\mu_0)$,

$$G(\mu_0) := \min(G_1, G_2, G_3)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\forall \Psi \in \tilde{\Xi}$ için geçerli olmak üzere

$$\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\tilde{\Xi}} \geq G(\mu_0) \|\Psi\|_{\tilde{\Xi}}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu da bize $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatör-demetinin pozitif tanımlı olduğunu gösterir.

Lemma 5.3.2. $\forall \mu_0 \in \mathbb{R}$ için;

$$\mathcal{O}(-\mu_0) = \Lambda + \mu_0 \Pi$$

ile tanımlı $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatör-demeti kendine eşleniktir.

İspat. $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatör-demetinin kendine eşlenik olduğunu göstermek için bu operatör-demetini oluşturan Λ ve Π operatörlerinin önce simetrik olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\Psi_1, \Psi_2 \in \tilde{\Xi}$ olmak üzere;

$$\Psi_1 = (s(t), \phi)$$

$$\Psi_2 = (u(t), \omega)$$

eşitliklerini sağlayan Tanım 5.1.1'deki gibi tanımlanmış genelleştirilmiş özfonksiyonlar olsun.

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{\Xi} &= \langle s + L_1 s + L_3 \phi, u \rangle_{\Xi_2} + \left(L_3^* s - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} \right) \bar{\omega} \\
&= \langle s, u \rangle_{\Xi_2} + \langle L_1 s, u \rangle_{\Xi_2} + \langle L_3 \phi, \rangle_{\Xi_2} \\
&+ (L_3^* s) \bar{\omega} - \frac{\beta_3 \phi}{\beta_2 \theta} \bar{\omega}
\end{aligned} \tag{5.3.55}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_1, \Lambda \Psi_2 \rangle_{\Xi} &= \overline{\langle \Lambda \Psi_2, \Psi_1 \rangle_{\Xi}} \\
&= \overline{\langle u + L_1 u + L_3 \omega, s \rangle_{\Xi_2} + \left(L_3^* u - \frac{\beta_3 \omega}{\beta_2 \theta} \right) \bar{\phi}} \\
&= \overline{\langle u, s \rangle_{\Xi_2}} + \overline{\langle L_1 u, s \rangle_{\Xi_2}} + \overline{\langle L_3 \omega, s \rangle_{\Xi_2}} \\
&+ \overline{(L_3^* u) \bar{\phi}} - \overline{\frac{\beta_3 \omega}{\beta_2 \theta} \bar{\phi}}
\end{aligned} \tag{5.3.56}$$

elde edilir. (5.3.55) ve (5.3.56) ifadeleri üzerinde gerekli düzenlemeler yapılması durumunda bu ifadelerin birbirine eşit olduğu görülür. Bu eşitlikte Λ operatörünün simetrik olduğunu gösterir. Benzer işlemler Π operatörü üzerinde yapılırsa

$$\langle \Pi \Psi_1, \Psi_2 \rangle_{\Xi} = \langle \tau_2 s, \varrho \rangle_2 + \frac{\phi}{\theta} \bar{\omega} \tag{5.3.57}$$

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_1, \Pi \Psi_2 \rangle_{\Xi} &= \overline{\langle \Pi \Psi_2, \Psi_1 \rangle_{\Xi}} \\
&= \overline{\langle \tau_2 \varrho, s \rangle_2} + \frac{\overline{\omega \phi}}{\theta} \\
&= \langle \tau_2 s, \varrho \rangle_2 + \frac{\phi}{\theta} \bar{\omega}
\end{aligned} \tag{5.3.58}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan (5.3.57) ve (5.3.58) ifadelerinin eşit olduğu bu durumun ise Π operatörünün simetrik olduğunu gösterir.

Dolayısıyla Λ ve Π operatörlerinin simetrik olmalarından dolayı da bu operatörlerin lineer terkiinden oluşan

$$\mathcal{O}(-\mu_0) = \Lambda + \mu_0 \Pi$$

operatör-demetinin de simetrik operatör olduğu görülür. Simetrik operatörün tanım bölgesi tüm Hilbert uzayı olduğundan $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatörü kendine eşleniktir. İspat tamamlandı.

5.4. Çok-Aralıklı Sınır Değer Probleminin Zayıf Özfonksiyonlarının Riesz Bazı Oluşturması

Bu bölümde, çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin zayıf özfonksiyonlarının probleme uygun Hilbert uzayında Riesz bazı oluşturduğu araştırılacaktır. İyi bilinmektedir ki her pozitif simetrik $\mathcal{O}$ dönüşümünün, $\mathcal{O}^{\frac{1}{2}}$ ile temsil edilen sadece bir pozitif simetrik karekökü mevcuttur. Bu takdirde; $\mathcal{O}(-\mu_0)$ pozitif tanımlı ve kendine-eşlenik operatör olduğundan dolayı bu operatörün $(\mathcal{O}(-\mu_0))^{\frac{1}{2}}$ olacak şekilde pozitif karekökü vardır.

Lemma 5.4.1.

Eğer Z operatörü, $G \geq 0$ olacak şekilde bir G operatörü ile sağdan (ve ya soldan) simetri yapılır ise, bu takdirde Z operatörü bir self-adjoint operatöre benzerdir (Markus, 1988)).

Aslında, eğer $ZG = (ZG)^*$ ise, bu takdirde

$$Z = G^{\frac{1}{2}}(G^{-\frac{1}{2}} ZG G^{-\frac{1}{2}})G^{-\frac{1}{2}} \quad (5.4.59)$$

dır. (5.4.59)' deki eşitliğin sağ tarafındaki parantezin içindeki operatör self-adjoint operatördür. Fakat, eğer $GZ = (GZ)^*$ ise, bu takdirde

$$Z = G^{-\frac{1}{2}}(G^{\frac{1}{2}} GZ G^{\frac{1}{2}})G^{\frac{1}{2}} \quad (5.4.60)$$

dır (Markus, 1988)).

Yukarıda simetri edilebilir operatörler ile ilgili verilmiş olan bilgilerin dikkate alınması durumunda; $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatörünün pozitif tanımlı olmasından dolayı bu operatörün pozitif karekökü olan $(\mathcal{O}(-\mu_0))^{\frac{1}{2}}$ operatörü terslenebilirdir. Bu bilgiler ışığında $\tilde{\Xi}$

Hilbert uzayında

$$\chi(\mu_0) := \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right)^{-1} \Pi \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right)^{-1} \quad (5.4.61)$$

ile tanımlı olan yeni bir $\chi(\mu_0)$ operatörü göz önünde bulundurulacaktır.

Teorem 5.4.2. $\tilde{\Xi}$ Hilbert uzayında tanımlı $\chi(\mu_0)$ operatörü pozitif, kendine-eşlenik ve kompakt operatördür.

İspat. L_2 operatörü kendine-eşlenik olduğundan dolayı Π operatörü de kendine eşleniktir. $\forall \Psi = (s(t), \phi) \in \tilde{\Xi}$ için;

$$\langle \Pi \Psi, \Psi \rangle_{\tilde{\Xi}} = \langle L_2 s, s \rangle_{\Xi_2} + \frac{|\phi|^2}{\theta} \geq 0 \quad (5.4.62)$$

olur ki buradan Π operatörünün pozitifliği elde edilmiş olur.

$\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatördemeti kendine eşlenik ve pozitif olmasından $\left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right)^{-1}$ operatörde aynı özellikleri sağlar. Ayrıca $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatör-demeti sınırlıdır. Bu durumda $\chi(\mu_0)$ operatörünü oluşturan $\Pi, \mathcal{O}(-\mu_0)$ operatörlerinin pozitif, kendine-eşlenik ve kompakt gibi özellikleri sağlamaları sayesinde (5.4.62) ile tanımlı $\chi(\mu_0)$ operatörü için de kendine-eşlenik, pozitif ve kompakt gibi özelliklere sahip olduğu söylenebilir ki bu ise ispatı tamamlar.

μ_0 parametresi Lemma 5.3.1 deki gibi tanımlı olmak üzere

$$\zeta = \mu + \mu_0 \quad (5.4.63)$$

biçiminde tanımlı yeni bir parametre ζ olsun. Bu yeni ζ parametresi altında çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9)sınır değer problemini;

$$\mathcal{O}(-\mu_0)\Psi - \zeta\Pi\Psi = 0 \quad (5.4.64)$$

operatör-demeti denklemi biçiminde yazabiliriz.

Operatör-demeti denklemini göz önünde bulundurmak şartıyla aşağıdaki

$$\Phi := \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right) \Psi \quad (5.4.65)$$

şekilde tanımlı yeni bir Φ operatörünü tanımlayalım.

$\chi(\mu_0)$ ile tanımlanmış olan operatörü ve yeni tanımlanmış olan Φ operatörü dikkate alınacak olursa (5.4.64) denklemi tekrardan düzenlenirse

$$\Phi - \zeta\chi(\mu_0)\Phi = 0 \quad (5.4.66)$$

formundaki operatör denklemi elde edilmiş olur.

Lemma 5.4.3. Çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin herhangi özdeğeri ζ_m ve bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon Φ_m olmak üzere; $\zeta_m, \chi(\mu_0)$ operatörünün özdeğeridir ve $\Phi_m = \sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)}\Psi_m$ ise $\chi(\mu_0)$ operatörünün ζ_m özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

İspat. ζ_m çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin özdeğeri ise (5.4.64) operatör denklemini sağlar. Bu durumda

$$\mathcal{O}(-\mu_0)\Psi_m = \zeta_m\Pi\Psi_m \quad (5.4.67)$$

denklemi elde edilir. Bu denklem kullanılarak,

$$\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)}\Psi_m = \zeta_m \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right)^{-1} \Pi\Psi_m \quad (5.4.68)$$

$$\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)}\Psi_m = \zeta_m \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right)^{-1} \Pi \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right)^{-1} \sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)}\Psi_m \quad (5.4.69)$$

elde edilir. Sonuç itibariyle (5.4.65)'de tanımlamış olduğumuz $\Phi_m = \left(\sqrt{\mathcal{O}(-\mu_0)} \right) \Psi_m$ operatörü göz önünde bulundurulursa

$$\Phi_m = \zeta_m\chi(\mu_0)\Phi_m \quad (5.4.70)$$

denklemi elde edilir. İspat burada tamamlandı.

Bu bölümün başında da belirtmiş olduğumuz gibi amacımız çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının Riesz bazı oluşturmasını incelemektir. Şimdi bunun için bu problemin bazlık özelliğini incelemek amacıyla üçüncü bölümde vermiş olduğumuz Temel Tanım ve Teoremlerden yararlanacağız.

Teorem 5.4.4. $0 < \mu_0 \in \mathbb{R}$ herhangi bir sayı ve $\tilde{\Xi}$ uzayında tanımlı $\mathcal{O}(-\mu_0)$ operatörü pozitif tanımlı olsun. Bu takdirde $\chi(\mu_0) := (\mathcal{O}(-\mu_0))^{-\frac{1}{2}} \Pi (\mathcal{O}(-\mu_0))^{-\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlı $\chi(\mu_0)$ operatörünün tam olarak sayılabilir sonsuz sayıda pozitif $\{\zeta_m\}$ özdeğerleri mevcuttur ve bu özdeğerlere karşılık $\{\Phi_m\}$ özfonksiyonları da $\tilde{\Xi}$ Hilbert uzayının bir ortogonal bazını oluşturur.

Son olarak; $\sqrt{\mathcal{O}(-\lambda_0)}$ operatörünün sınırlı terslenebilir olduğunu ve her sınırlı terslenebilir operatörün $\tilde{\Xi}$ Hilbert uzayının herhangi bir ortonormal bazını yine aynı $\tilde{\Xi}$ uzayın Riesz bazı olarak adlandırılan diğer bazına dönüştürür. Dolayısıyla bu teoremi dikkate alırsak takip eden temel sonucu elde ederiz.

Teorem 5.4.5. Çok-aralıklı (4.1.1)-(4.1.9) sınır değer probleminin sayılabilir sonsuz sayıda özdeğerleri mevcut olup bu özdeğerlerin yığılma noktası sadece $+\infty$ dur. Bu çok-aralıklı sınır değer probleminin özdeğerlerinin yığılma noktası bir tek $+\infty$ olduğundan (4.1.1)-(4.1.9) probleminin genelleştirilmiş özfonksiyonlar sistemi, $\tilde{\Xi}$ Hilbert uzayında Riesz bazı oluşturur.

Not 5.4.6. Özdeğerlerin tek bir yığılma noktası $+\infty$ olduğu için özdeğerler alttan sınırlıdır ve en fazla sonlu sayıda negatif özdeğer mevcut olabilir.

5.5. Çok Aralıklı Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Alt Sınırı

Bir önceki bölümde özdeğerlerin üstten sınırlı olmadığını göstermiştik. Bu bölümde ise sınırlı olduklarını bildiğimiz özdeğerlerin alttan sınırını Rayleigh-Ritz yöntemi ile bulmaya çalışacağız.

$$\mathcal{O}(-\mu_0)\Psi - \zeta\Pi\Psi = 0 \quad (5.5.71)$$

problemini tekrar inceleyeceğiz. (5.5.71) denkleminin Ψ ile iç çarpımı;

$$\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi - \zeta\Pi\Psi, \Psi \rangle_{\tilde{\Xi}} = 0 \quad (5.5.72)$$

olur.

$$\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\tilde{\Xi}} - \langle \zeta\Pi\Psi, \Psi \rangle_{\tilde{\Xi}} = 0 \quad (5.5.73)$$

olduğuna göre;

$$\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\Xi} = \zeta \langle \Pi\Psi, \Psi \rangle_{\Xi} \quad (5.5.74)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda;

$$\zeta = \frac{\langle \mathcal{O}(-\mu_0)\Psi, \Psi \rangle_{\Xi}}{\langle \Pi\Psi, \Psi \rangle_{\Xi}} \quad (5.5.75)$$

olur ki pay ve paydadaki ifadelerle daha önceden işlemler yapmıştık. Burada o işlemleri kullanarak ve Rayleigh-Ritz yönteminden de faydalanarak özdeğerler için minumum değerler bulmaya çalışacağız.

$$\zeta \geq \frac{\Gamma_1(s) + \Gamma_2(\phi)}{\langle \tau_2 s, s \rangle + \frac{|\phi|^2}{\theta}} \quad (5.5.76)$$

Önceden ispatlarını yaptığımız bilgilerle yukarıdaki eşitsizliği kolayca elde ettik. (5.3.37), (5.3.49) ifadelerini kullanarak (5.5.76) ifadesini düzenleyelim;

$$\zeta \geq \frac{G_1\mathcal{L}_1(s) + G_2\mathcal{L}_2(s) + G_3|\phi|^2}{\mathcal{L}_3(s) + \frac{|\phi|^2}{\theta}} \quad (5.5.77)$$

Daha önceden ispatlanan teoremler ışığında düzenlemeye devam edilecek olursa;

$$\zeta \geq \frac{\mu\mathcal{L}_2(s) + G_2\mathcal{L}_2(s) + G_3|\phi|^2}{|\phi|^2 + \frac{|\phi|^2}{\theta}} \quad (5.5.78)$$

$$\zeta \geq \min(\mathcal{L}_2(s)(\mu + G_2), \theta G_3) \quad (5.5.79)$$

elde edilir ki özdeğerler için alt sınır bulunmuş oldu.

6. TARTIşMA VE SONUÇ

Bu çalışmada daha önceden bazı zellikleri Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR tarafından yazılmış bir makalede incelenen bir problem daha geniş şekilde ele alınmıştır ve bu makaleden farklı birçok özellik incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmanın diğerk çalışmalardan farklı olan en önemli zelliğisınır şartlarının birinde zdeğerparmetresi bulunduran ve iki süreksizlik noktasında geçiş şartlarıyla birlikte verilmiş olmasıdır. Bu çalışmada kullanılan yöntemler, bulunan sonuçlar hem uygulama hemde teorik olarak Sturm Liouville Teorisine yarar sağlamıştır. Bu çalışmada sınır değergeiş probleminin rettiğiopeartr demetinin pozitifliğini, kendine eşlenikliğini, genel leştirilmiş özfonksiyonlarının Hilbert uzayında Riesz bazı oluşturduğunu ve özdeğerler için bir alt sınır tahmini bulduk.

KAYNAKLAR

- Adams, R.A., 1975. Sobolev spaces. Academic Press, New York.
- Akça, H., 1986. Sturm, Liouville arkadaşlığı, Erciyes Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi 2, 143 - 154.
- Akçay, O., 2021. Uniqueness Theorems for Inverse Problems of Discontinuous Sturm-Liouville Operator. Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 44, 1927-1940.
- Akdoğan, Z., Demirci, M. ve Mukhtrov, O. Sh., 2005. Sturm-Liouville Problem with eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission conditions, Acta applancaendae mathematicae 86, 329 - 344.
- Allahverdiev, B.P., Bairamov, E. ve Ugurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boundary conditions with transmission conditions. J. Math. Anal. Appl. 401(1), 388-396.
- Allahverdiev, B.P. ve Tuna, H. (2020a). Eigenfunction expansion for singular Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Electron. J. Differ. Equ. 3, 4286-4302.
- Allahverdiev, B.P. ve Tuna, H., (2020b). Qualitative spectral analysis of singular q-Sturm-Liouville operators. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43(2), 1391-1402.
- Allahverdiev, B.P. ve Tuna, H., 2021. Conformable fractional Sturm-Liouville problems on time scales. Math Meth Appl Sci. 2021;1-16, DOI: 10.1002/mma.7925.
- Amirov, R., Ergun, A. ve Durak, S., 2021. Half-inverse problems for the quadratic pencil of the Sturm-Liouville equations with impulse. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 37, no. 1, pp. 915-924.
- Amirov, R.Kh. ve Nabiev, A.A., 2013. Inverse problems for the quadratic pencil of the Sturm-Liouville equations with impulse. Abstract and Applied Analysis, Article ID 3611989.
- Amirov, R.Kh., Ozkan, A.S. ve Keskin, B. 2009. Inverse problems for impulsive Sturm-Liouville operator with spectral parameter linearly contained in boundary conditions. Integral Transforms and Special Functions, 20(8), 607-618.
- Atkinson, F.V., 1964. Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York.
- Ao, J. ve Sun, J., 2021. Eigenvalues of a class of fourth-order boundary value problems with transmission conditions using matrix theory. Linear Multilinear Algebra 69(9), 1610-1624.
- Aydemir, K., 2010. Soyut Lineer Operatörle Etkilenmiş Bir Süreksiz Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri. (Yüksek Lisans Tezi), Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat.
- Aydemir, K. ve Mukhtarov, O.Sh., 2014. Completeness of one two-interval boundary value problem with transmission conditions, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 15, No. 2, pp. 293 - 303.

- Aydemir, K. ve Mukhtarov, O. Sh. 2017. Class of Sturm-Liouville problems with eigen-parameter dependent transmission conditions. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1260-1275.
- Bairamov, E., Aygar, Y. ve Oznur, G.B., 2019. Scattering properties of eigenparameter dependent impulsive Sturm-Liouville Equations. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 4 2769-2781.
- Bairamov, E. ve Uğurlu, E., 2011. The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions, *Math. Comput. Modelling*, Vol. 53, Nr. 5-6, p. 805-813.
- Bary, N.K., 1946. On bases in Hilbert space, *Doklady Akad. Nauk. SSSR*, Vol. 54, No 5, pp. 383 - 386 (in Russian).
- Bary, N.K., 1951. Biorthogonal systems and bases in Hilbert space, *Uchenye zapiski Moskovskogo Gos. Universiteta*, Vol. 148, Matematika, No 4, pp. 69 - 107 (in Russian).
- Bayraktar, M., 1987. Fonksiyonel Analiz, Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Erzurum.
- Belinskiy, B.P., Hiestand, J.W. ve Matthews, J.V., 2015. Piecewise Uniform Optimal Design of a Bar with An Attached Mass. *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2015, No. 206, pp. 1-17.
- Belinsky, B.P. ve Dauer, J.P., 1997. On a Regular Sturm-Liouville Problem on a Finite Interval with the Eigenvalue Parameter Appearing Linearly in the Boundary Conditions, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 191, Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems, 183 - 196.
- Binding, P.A., Browne, P.J. ve Watson, B.A., 2000. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions. *J. London Math. Soc.* 62 161-182.
- Binding, P.A., Browne, P.J. ve Watson, B.A., 2002. Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II, *J. Comput. Appl. Math.* 148, 147 - 169.
- Chanane, B., 2007. Eigenvalues of Sturm-Liouville problems with discontinuity conditions inside a finite interval, *Appl. Math. Comput.* 188, 1725 - 1732.
- Conway, J.B., 1985. A course in Functional Analysis, Springer-Verlag, New York.
- Çakar, Ö., 2007. Fonksiyonel Analize Giriş I, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, Ankara.
- Çavuşoğlu, S., Mukhtarov, O. ve Olgar, H., 2021. Finite Difference Method for Approximate Solution of a Boundary Value Problem with Interior Singular Point. *Konuralp Journal of Mathematics (KJM)*, vol. 9, no. 1, pp. 40-48.
- Dunford, N. ve Schwartz, J.T., 1963. Linear operators II, Spectral Theory, Interscience, New York.
- Faydaoglu, S. ve Guseinov, G.Sh., 2010. An expansion result for a Sturm-Liouville eigenvalue problem with impulse. *Turkish Journal of Mathematics*, (3), 355-366.
- Freiling, G. ve Yurko, V.A., 2001. Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New York.

- Fulton, C.T., 1977. Two point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 77A, 293 - 308.
- Fulton, C.T., 1980. Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg, 87A, 1.
- Gasymov, M.G. ve Levitan, B.M., 1966. The Inverse Problem for the Dirac System. Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.
- Gohberg, I.C. ve Krein, M.G., 1969. Introduction to the Theory of Linear Non-selfadjoint Operators, Translation of Mathematical Monographs, vol. 18, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island. 1990.
- Griffel, D.H., 2002. *Applied Functional Analysis*, Dover Publications, Inc., Mineola, New York.
- Guliyev, N.J., 2019. Schrödinger operators with distributional potentials and boundary conditions dependent on the eigenvalue parameter. J. Math. Phys. 60, no. 6, 063501, 23.
- Güldü, Y., Amirov, R. Kh. ve Topsakal, N., 2013. On impulsive Sturm-Liouville operators with singularity and spectral parameter in boundary conditions. Ukrainian Mathematical Journal, Vol. 64, No. 12, (Ukrainian Original Vol. 64, No. 12, December, 2012), 1816-1838.
- Gwak, S., Kim, J. ve Rey, S.J., 2016. Massless and massive higher spins from anti-de Sitter space waveguide. Journal of High Energy Physics, volume 2016, Article number: 24.
- Hinton, D.B., 1979. An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2), 33 - 42.
- Hinton, D.B. ve Shaw, J. K., 1987. Spectrum of a Hamiltonian System with Spectral Parameter in a Boundary Condition, Canad. Math. Soc. Proc. 8, 171 - 186.
- Hinton, D.B. ve Shaw, J.K., 1990. Differential Operators with Spectral Parameter in Completely in the Boundary Conditions, Funkcial. Ekvac. 33, 363.
- Ipek, P., Yilmaz, B. ve Ismailov, Z.I., 2017. First-order selfadjoint singular differential operators in a Hilbert space of vector functions. Electron. J. Difer. Equ. 2017(143), 1-8.
- Kadakal, M., 1996. Lineer diferensiyel operatörlerin bazı temel özellikleri. (Yüksek Lisans Tezi), Ondokuz Mayıs Üniversitesi.
- Kandemir, M., 2015. Diferensiyel Denklemler, Pegem Akademi, Ankara.
- Kandemir, M., Mukhtarov, O. Sh. ve Yakubov, Y.Y., 2009. Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter, Mediterr. J. Math. 6, 317 - 338.
- Kandemir, M. ve Mukhtarov, O. Sh. 2017. Nonlocal Sturm-Liouville problems with integral terms in the boundary conditions. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017, No. 11, pp. 112.
- Kaoullas, G. ve Georgiou, G.C., 2015. Start-up and cessation Newtonian Poiseuille and Couette flows with dynamic wall slip. Meccanica, 50:1747-1760.

- Kapustin, N. Yu. ve Moiseev, E.I., 1998. The Square Laplace Operator for the Spectral Problem with the Spectral Parameter in the BoundaryCondition, Diff. Uravn., V.34, N.5, 662 - 667.
- Kapustin, N. Yu., 1999. Oscillation properties of solutions to a non selfadjoint spectral problem with spectral parameter in the boundary condition, Differentsial' nye Uravneniya, 35, No. 8, 1024 - 1027.
- Kato, T., 1966. Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag , New -York Inc.
- Keldys, M.V., 1951. On the eigenvalues and eigenfunctions of certain classes of non-self-adjoint equations. Dokl Akad. Nauk SSSR (in Russian) 77, 11-14; English transl. in this volume.
- Keldys, M.V., 1951. On the Characteristic Values and Characteristic Functions of Certain Classes of Non-selfadjoint Equations", Dokl. Akad. Nauk. SSR (in Russian) 77, 11.
- Kerimov N.B., 1996a. On the basis property of systems eigen and associated functions of a second order differantial operator. (Russian).Dokl.Akad.Nauk 346, no 5, pp.596 - 597.
- Kerimov N.B., 1996b. On the basis property and uniform minimality of system of root functions of differential operators. I. (Russian) Differentsialnye Uravneniya, 32(3), 317-322.
- Kerimov, N.B. ve Allakhverdiev, T.I., 1993a. On a boundary value problem I, (Russian), Differential nye Uravneniya 29, no 1, pp. 54 - 60.
- Kerimov, N.B. ve Allakhverdiev, T.I., 1993b. On a boundary value problem II, (Russian), Differential nye Uravneniya 29, no 6, pp. 814 - 821.
- Kerimov N.B. ve Mamedov Kh.R., 1998. On the Riesz basis property of root functions of some regular boundary value problems (Russian). Mat. Zametki, 64(4), 558-563.
- Kerimov, N.B. ve Mamedov, Kh.R., 1999. On a boundary value problem with Spectral parameter in the boundary conditions (Russian). Sibirsk. Mat. Zh. 40(2), 325-335.
- Kerimov N.B. ve Mirzoyev V.S., 2003. On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. (Russian) Sibirsk.Mat.Zh. 44(2003), no.5, pp.1041 - 1045.
- Kostyuchenko, A.G. ve Shkalikov, A.A., 1983. Self-adjoint Quadratic Operator Pencils and Elliptic Problems", Functional Anal. Appl. 17, 109.
- Koyunbakan, H. ve Mosazadeh, S., 2021. Inverse nodal problem for discontinuous Sturm-Liouville operator by new Prüfer substitutions. Math. Sci. 15, 387-394.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis Whit Application, New-York.
- Ladyzhenskaia, O.A., 1985. The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Springer - Verlag, New York.
- Lang, S., 1983. Real Analysis (Second Edition), Addison-wesley, Reading Mass.
- Levitan, B.M. ve Sargsyan, I.S., 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

- Li, K., Sun, J. ve Hao, X., 2017. Eigenvalues of regular fourth order Sturm-Liouville problems with transmission conditions. *Math. Methods Appl. Sci.* 40, 3538-3551.
- Likov, A.V. ve Mikhailov, Y.A., 1963. The theory of heat and mass transfer (Russian), Qosenergoizdat.
- Liouville, J. ve Sturm, J.C.F., 1837. Extrait d'une mémoire sur le développement des fonctions en serie (in French), *J. Math. Pures et Appl. de Liouville*, vol. 11, pp. 220-223.
- Markus, A.S. ve Matsayev, V.I., 1984. Comparison theorems for spectra of linear Operators and spectral asymptotics, *Tr. Mosk. Mat. Obshch.*, (1982), vol.45, pp. 133- 181; English transl., *Trans. Moscow Math. Soc.*, vol. 1, pp. 139 - 188.
- Markus, A.S., 1988. Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Pencils, Translation of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Mukhtarov, O.S., 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition. *Tr. J. of Mathematics*, 18, 183-192.
- Mukhtarov, O.S., Aydemir, K. ve Olğar, H., 2014. Spectral theory of one perturbed boundary value problem with interior singularities, *AIP Conference Proceedings*, Volume 1611, Issue 1, p.283 - 289.
- Mukhtarov, O.S., Olğar, H. ve Aydemir, K., 2014. Transmission problems for the Sturm-Liouville equation involving an abstract linear operator, *AIP Conf. Proc.* 1611, p.325.
- Mukhtarov, O.S., Olğar, H. ve Aydemir, K., 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems, *Filomat*, 29:7, 1671 - 1680.
- Mukhtarov, O.S. ve Aydemir, K., 2015. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point, *Acta Mathematica Scientia*, 35B(3):639 - 649.
- Mukhtarov, O.S., Olğar, H., Aydemir, K. ve Jabbarov I., 2018. Operator-Pencil Realization Of One Sturm-Liouville Problem With Transmission Conditions. *Applied And Computational Mathematics*, 17(2), 284-294.
- Mukhtarov, O., Çavuşoğlu, S. ve Olğar, H., 2019. Numerical Solution of One Boundary Value Problem Using Finite Difference Method. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 11, 85-89.
- Mukhtarov, O.S., Yücel, M. ve Aydemir, K., 2020. Treatment a new approximation method and its justification for Sturm-Liouville problems. *Complexity* 5, 2020.
- Mukhtarov, O.S. ve Aydemir, K., 2020. Discontinuous Sturm-Liouville Problems Involving an Abstract Linear Operator. *Journal of Applied Analysis and Computation*, 10(4), 1545-1560.
- Mukhtarov, O.S. ve Aydemir, K., 2021. Oscillation properties for non-classical Sturm-Liouville problems with additional transmission conditions. *Mathematical Modelling and Analysis*, 26(3), 432-443.

- Mukhtarov, O.S., Yücel, M. ve Aydemir, K., 2021. A New Generalization of the Differential Transform Method for Solving Boundary Value Problems. *Journal of New Results in Science* 10, 2, 49-58.
- Mukhtarov, O.S. ve Demir, H., 1999. Coerciveness of the discontinuous initial-boundary value problem for parabolic equations, *Israel J. Math.* 114, 239 - 252.
- Mukhtarov, O.S. ve Kadakal, M., 2005. Some spectral properties of one Sturm-Liouville type problem with discontinuous weight, *Sib. Math. J.*, Vol. 46, 681 - 694.
- Mukhtarov, O.S. ve Kandemir, M., 2002. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary- value problem with Functional-Transmission conditions, *Acta Mathematica Scientia* vol 22 B(3), pp.335 - 345.
- Mukhtarov, O.S. ve Yakubov, S., 2002. Problems for ordinary differential equations with transmission conditions, *Appl. Anal.*, Vol 81, 1033 - 1064.
- Naimark, M.A., 1967. *Linear Differential Operators*, Ungar, New York.
- Nie, Y. ve Linetsky, V., 2019. Sticky reflecting Ornstein-Uhlenbeck diffusions and the Vasicek interest rate model with the sticky zero lower bound. *Stochastic Models*, pages 1-19.
- Olğar, H., 2009. Denkleminde Soyut Lineer Operatör Bulunduran Bir Sınır-Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı. (Yüksek Lisans tezi), Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat.
- Olğar, H., 2015. Geçiş Şartları İçeren Bir Sturm Liouville Probleminin Genelleştirilmiş Özfonksiyonlarının Tamlık Özelliği. (Doktora tezi), Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat.
- Olğar, H., 2019. Selfadjointness and Positiveness of the Differential Operators Generated by New Type Sturm Liouville Problems. *Cumhuriyet Science Journal*, vol.40, 24-34.
- Olğar, H., 2021a. Weak Solutions of a Sturm-Liouville Problem with Three-Interval, *Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research*, 10(3), 165-173.
- Olğar, H., 2021b. On Examination of a Multi-Interval Discontinuous Boundary Value Problem with Jump Conditions by the Operator-Pencil Method, *Gaziosmanpasa Journal of Scientific Research*, 10(3), 209-216.
- Olğar, H., Mukhtarov, O.Sh. ve Aydemir, K., 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem. *Filomat*, 32:3, 911-920.
- Olğar, H., Mukhtarov, O.S., Muhtarov, F.S. ve Aydemir, K., 2022. The weak eigenfunctions of boundary-value problem with symmetric discontinuities. *Journal of Applied Analysis*, 28(2), 275-283.
- Panakhov, E.S. ve Gulsen, T., 2015. On discontinuous Dirac systems with eigenvalue dependent boundary conditions, *AIP Conference Proceeding*, 1648, 260003, 1-4.

- Rasulov, M.L., 1967. Methods of Contour Integration, North-Holland Publishing Company, Amsterdam.
- Rodman, L., 1989. An Introduction to Operator Polynomials, Birkhauser Verlag, Boston, Massachusetts.
- Parra R.A., Rico, E., Solano, E. ve Egusguiza, I.L., 2018. Quantum Networks in Divergence-free Circuit QED. Quantum Sci. Technol. 3, no. 2, 024012, 46pp, arXiv:1711108817.
- Russakovskii, E.M., 1975. Sınır şartları özdeğer parametresinden polinomial şekilde bağımlı olan sınır değer probleminin operator yorumu, Funk. Analiz. I ego priloj, 9, no 4, sayfa 91 - 92.
- Russakovskii, E M., 1993. Sturm-Liouville problem with parameter in the boundary conditions. Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo, 18.
- Schneider, A., 1974. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions. Math. Z. 136, 163-167. Sturm, J. C. F. (1836). Memoire sur les equations differentielles lineaires du second ordre (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. I, pp. 106-186 (=Liouville Journal).
- Shkalikov, A.A., 1979. On the Basis Problem of the Eigenfunctions of an Ordinary Differential Operators, Uspekhi Mat. Nauk, 34:5 (209), 235 - 236.
- Shkalikov, A.A., 1982. Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, (Moscow State University.
- Stakgold, I., 1971. Boundary Value Problems of Mathematical Physics, II, Macmillan Co., New York.
- Sturm, J.C.F., 1836. Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. I, pp. 106-186. (=Liouville Journal).
- Sturm, J.C.F., 1837. Memoire sur une classe d'equations differentielles partielles (in French), J. Math. Pures et Appl. de Liouville, vol. I, pp. 373-444.
- Şen, E., Açıkgöz, M. ve Aracı, S., 2017. Spectral problem for Sturm-Liouville operator with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition. Ukrainian Mathematical Journal 68,8, 1263-1277.
- Şen, E. ve Stikonas, A., 2021. Asymptotic Distribution of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Nonlocal Boundary Value Problem. Mathematical Modelling and Analysis, 26(2), 253-266.
- Şuhubi, E.S., 2001. Fonksiyonel Analiz, İTÜ Vakfı Yayınları, İstanbul.
- Taşçı, D., 2001. Lineer Cebir, Sel-Ün Vakfı Yayınları, Konya.
- Tamarkin, J.D., 1917. About certain General Problems of Theory of Ordinary Linear Differential Equations and about Expansion of Derivative Functions into series, Petrograd.

- Tikhonov, A.N. ve Samarskii, A.A., 1963. Equations of Mathematical Physics, Oxford and New York, Pergamon.
- Titchmarsh, E.C., 1962. Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, Second Edn. Oxford Univ. press, London.
- Titeux, I. ve Yakubov, Y., 1997. Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients, Math. Models Methods Appl. Sc., 7(7), 1035 - 1050.
- Triebel, H., 1978. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland, Amsterdam.
- Uğurlu, E. ve Bairamov, E., 2014. Spectral analysis of eigenparameter dependent boundary value transmission problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 413 (1), 482-494.
- Uğurlu, E. ve Taş, K., 2018. A new method for dissipative dynamic operator with transmission conditions. Compl Anal Oper. Theory 12, 4, 1027-1055.
- Voitovich, N.N., Katsenelbaum, B.Z. ve Sivov, A.N., 1997. Generalized Method of Eigen-vibration in the theory of Diffraction, Nauka, Moscow, (Russian).
- Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions", Math. Z., 133, 301 - 312.
- Wang, A., Sun, J. ve Gao, P., 2009. Completeness eigenfunctions of Sturm-Liouville problems with transmission conditions, Methods Appl. Anal. 16, 299 - 312.
- Woldegebriel, A.W., 2011. The Sturm-Liouville Boundary Value Problems and Their Applications, First Edition, LAP LAMPERT Academic Publishing, Saarbrücken, Germany.
- Yakubov, S.Y., 1994. Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators", Longman, Scientific and Technical.
- Yakubov, S.Y. ve Yakubov, Y.Y., 1999. Abel Basis of Root functions of Regular Boundary Value Problems, Math. Nachr. 197, p. 157 - 187.
- Yakubov, S.Y. ve Yakubov, Y.Y., 2000. Differential Operators Equations. Ordinary and Partial Differential Equations, Chapman and Hall / CRC, Boca Raton.
- Zettl, A., 1968. Adjoint and self-adjoint boundary value problems with interface conditions, Siam J. Appl. Math., 16, 851 - 859.
- Zettl, A., 2005. Sturm-Liouville Theory. Mathematical Surveys and Monographs, Volume 121, American Mathematical Society, Providence.
- Zhang, M.Z. ve Wang, Y.C., 2015. Dependence of eigenvalues of Sturm-Liouville problems with interface conditions. Appl. Math. Comput. 265, 31-39.