



T.C.

TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ

LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK YÜKSEK LİSANS PROGRAMI

**BİR SÜREKSİZ UYUMLU KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN
TEMEL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Fatma Betül TALİH

Danışman: Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

TOKAT- 2023

JÜRİ KABUL VE ONAY

Fatma Betül TALİH tarafından hazırlanan "**Bir Süreksiz Uyumlu Kesirli Sınır Değer Problemin Temel Çözümleri**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı **27.01.2023** tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen Jüri tarafından Oy Birliği ile Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri

İmzası

Üye: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Başkan)

Üye: Prof. Dr. Ali YAKAR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Üye: Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi
(Danışman)

Üye : Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR
Amasya Üniversitesi

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR
Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

ONAY

...../...../.....

Prof. Dr. Mehmet GÜNEŞ
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezde bilimsel etik ilkelere uyulduğunu, başka çalışmalardan yararlanılması halinde bilimsel çerçevede kaynak gösterilip atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların özgün olduğunu beyan ederim.

Fatma Betül TALİH

27/01/2023

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİR SÜREKSİZ UYUMLU KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİ

Fatma Betül TALİH

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN

Bu tez çalışmasında kesirli hesabın ortaya çıkışı ve günümüze kadarki süreci hakkında bilgi verilmiştir. Ardından uyumlu kesirli türev ve Sturm-Liouville probleminin bazı temel özelliklerine yer verilmiştir. Daha sonra süreksiz uyumlu kesirli Sturm-Liouville problem verilerek bu probleme uygun bir Hilbert uzayı ve bu uzayda bir operatör tanımlanarak verilen problem operatör denklem şeklinde ifade edilmiştir. Operatörün simetrikliği ve özdeğerlerin reelliği gösterilmiştir.

2023, 43 sayfa

ANAHTAR KELİMELEER: Sınır Değer Problemleri, Sturm-Liouville Problemi, Uyumlu Kesirli Türev, Temel Çözüm.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF A DISCONTINUOUS CONFORMABLE BOUNDARY VALUE PROBLEM

Fatma Betül TALİH

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Zulfigar AKDOGAN

In this work, information is given about the emergence of fractional calculus and its process until today. After that, some basic properties of the conformable fractional derivative and the Sturm-Liouville problem are given. Then, the discontinuous conformable fractional Sturm-Liouville problem is given and a suitable Hilbert space is defined for the problem. An operator is defined in this space and the given problem is expressed in the form of an operator equation. Finally, the symmetry of the operator and the realness of the eigenvalues are shown.

2023, 43 pages

KEYWORDS: Boundary Value Problems, The Sturm-Liouville Problem, Conformable Fractional Derivative, Fundamental Solution.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
SİMGE ve KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR	4
2.1. Uyumlu Kesirli Türev	4
2.2. Uyumlu Kesirli İntegral	8
2.3. Uyumlu Kesirli Kısmi İntegrasyon	10
2.4. Wronskian	10
2.5. Uyumlu Kesirli Diferensiyel Denklemin Wronskianı	11
2.6. Uyumlu Kesirli Diferensiyel Denklem için Abel Formülü	12
2.7. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi	13
2.8. Uyumlu Kesirli Sturm-Liouville Problemi	14
3. BULGULAR	21
3.1. Bir Süreksiz Uyumlu Kesirli Sturm-Liouville Probleminin İfadesi	21
3.2. Problemin Operatör Formülasyonu	22
3.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Bazı temel Bağıntılar	24
4. TARTIŞMA ve SONUÇ	32
KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

ÖNSÖZ

Tez yazım süreci boyunca desteklerini esirgemeyen saygıdeğer danışmanım Prof. Dr. Zülfigar AKDOĞAN'a, yardımlarından ötürü sayın hocam Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU'na ve gerek öğrenim sürecindeki gerekse tez yazım aşamasındaki katkılarından dolayı sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR'e teşekkürlerimi sunarım.

Fatma Betül TALİH

Ocak 2023

SİMGE ve KISALTMALAR

Simgeler	Açıklamalar
D_a^α	Riemann kesirli türevi
D_a^α	Caputo kesirli türevi
T_α	α . mertebeden uyumlu kesirli türevi
T_α^a	α . mertebeden soldan uyumlu kesirli türevi
${}^bT_\alpha$	α . mertebeden sağdan uyumlu kesirli türevi
I_α^a	α . mertebeden soldan uyumlu kesirli integrali
${}^bI_\alpha$	α . mertebeden sağdan uyumlu kesirli integrali
W_α	Uyumlu kesirli Wronskian
$L_\alpha^2(a, b)$	Hilbert uzayı

1. GİRİŞ

Türev, 17. yüzyılda Newton tarafından ortaya atılan ve üzerinde çalışmalar yapılan bir konudur. Türev konusundaki ilk çalışmaları esnasında Newton, L'Hospital ve Leibniz 1. mertebeden türevlerle ilgilenmişlerdir. Devamında bilim insanları 1'den farklı dereceden de türevin alınabilirliği üzerinde durmuştur. Bu düşünceler ilk olarak 17. yüzyılın sonlarına doğru, Leibnitz'in L'Hospital'a yazdığı mektuptaki "Klasik hesap kesirli hesaba genişletilebilir mi?" sorusuyla ortaya çıkmıştır. Bu doğrultuda Newton, Riemann, L'Hospital, Leibniz, Caputo, Grünwald gibi ünlü matematikçiler konuyla ilgili çeşitli tanım ve teoremler ortaya koymuştur. Önde gelen kesirli mertebeden türev tanımları; Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo tanımlarıdır. Tanımlar arasında geçişler olmasına rağmen farklılık gösterirler.

$n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere, f fonksiyonunun α mertebeden Riemann-Liouville kesirli türev tanımı,

$$D_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx \quad (1.0.1)$$

şeklinde yapılmıştır (Khalil ve ark., 2014).

$n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere, f 'nin α -Caputo türevi ise,

$$\mathbf{D}_a^\alpha(f)(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(x)}{(t - x)^{\alpha - n + 1}} dx$$

şeklinde tanımlanmıştır (Khalil ve ark., 2014).

Riemann-Liouville tanımı genellikle nümerik hesaplamalarda kullanılırken Caputo tarafından daha çok gerçek yaşam problemlerinde kullanılan bir tanım yapılmış ve yakın zamanda bu tanım daha da geliştirilerek kesirli mertebeden diferensiyel denklemlerin, kan akışı fenomeni, karmaşık ortamın elektrodinamiği, sinyal ve görüntü işleme, kimyasal analiz, ısı transferi, difüzyon problemi, kontrol teorisi gibi bilim ve mühendislik alanlarında kullanımı artırılmıştır. Ancak Caputo da dahil olmak üzere bu kesirli mertebeden türev tanımlarının adi türevdeki çarpım, bölüm veya zincir kuralı gibi bazı kuralları sağlamaması açısından dezavantajları vardır.

Örneğin (1.0.1) Riemann-Liouville tanımına göre α bir doğal sayı değilse $D_a^\alpha(1) = 0$ eşitliğini sağlamamaktadır (Khalil ve ark., 2014).

Yakın zamanda yapılan yeni çalışmalarla kesirli mertebeden türev tanımlarının bu dezavantajlarını ortadan kaldıracak olan yeni bir tanım, "Uyumlu (Conformable) Kesirli Türev" tanımı R. Khalil, M. Al Horani, A. Yousef ve M. Sababheh tarafından ortaya atılmıştır (Khalil ve ark., 2014). Bu tanım adi türeve benzerliği ile dikkat çekmiştir. Adi türevde geçerli olan çarpım, bölüm, zincir kuralı gibi kuralları sağlayan bu tanımı kullanarak Abdeljawad, kesirli kısmi interasyon, Laplace dönüşümü, Taylor kuvvet serisi açılımlarını sunmuştur (Abdeljawad, 2015).

Adi diferensiyel operatörler teorisi son yıllarda farklı problemlerle ele alınmıştır. Denklemlerde özdeğer parametresi içermesinin yanında sınır koşullarında da bu parametre bulunan, bir sınır değer problemi türü olan Sturm-Liouville problemi çoğu araştırmacının dikkatini çekmiş ve bu problem ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. O. Sh. Mukhtarov ve arkadaşları bazı çalışmalarında süreksiz katsayılı, sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunan fakat geçiş şartlarında özdeğer parametresi bulunmayan Sturm-Liouville denklemleri üzerinde çalışmıştır (Mukhtarov, 1994; Mukhtarov ve ark., 2003, 2004). Daha sonra O. Sh. Mukhtarov ve arkadaşları süreksiz katsayılı, sınır şartlarında ve geçiş şartlarında özdeğer parametresi bulunan Sturm-Liouville denklemleri üzerinde çalışmıştır (Akdoğan ve ark., 2005). Matematik ve fizikte sık karşılaşılan bu problemle oldukça önemli sonuçlar elde edilmektedir (Al-Gwaiz, 2007). Bu problemin Riemann- Liouville, Caputo, Grünwald gibi bilinen kesirli hesap tanımlarıyla ilgili birçok çalışmaları da karşımıza çıkmaktadır (Akdogan ve ark., 2019; Değerli, , 2018; Miller, 1993; Oldham ve Spainer, 1974; Yakar ve Akdoğan, 2017).

Sturm-Liouville probleminin kesirli hesabında uyumlu kesirli türev tanımı kullanılarak yapılan çalışmalar da mevcuttur. (Gülşen ve ark., 2018; Khalil ve Abu-Shaab, 2015) Ayrıca Hammad ve Khalil

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

ısı denklemini $0 < \alpha < 1$ olmak üzere α . mertebeden, uyumlu kesirli türevle ele almışlardır (Hammad ve Khalil, 2014). Bunun haricinde dalga denklemi ve çeşitli sürekli sınır-değer problemleri üzerinde de uyumlu kesirli türev ile çalışmalar yapılmıştır.

Bu tez çalışmasında bir süreksiz uyumlu kesirli Sturm-Liouville problem çalışılmıştır. Tezin ilk bölümünde uyumlu kesirli türev ve sınır değer problemleri hakkında bilgi verilmiştir. Ardından temel tanım, teorem ve özelliklerden bazılarına yer verilmiştir. Bir sonraki bölümde üzerinde çalışılan süreksiz uyumlu kesirli Sturm-Liouville problemi verilmiş ve bu problem operatör denklem şeklinde ifade edilmiştir. Operatörün simetrikliği incelenmiştir. Son olarak çalışılan problemin özdeğerlerinin reelliği gösterilmiştir.

2. TEMEL TANIM ve KAVRAMLAR

Bu kısımda, bir süreksiz uyumlu kesirli sınır değeri problemi ile ilgili, tez içerisinde kullanılacak temel tanım, teorem ve özelliklerden bazılarına yer verilecektir.

2.1. Uyumlu Kesirli Türev

Tanım 2.1.1. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $t > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere f fonksiyonunun α -mertebeden uyumlu kesirli türevi,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer f , $a > 0$ olmak üzere $(0, a)$ aralığında α -türevlenebilir ise ayrıca $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t)$ varsa, 0 noktasındaki kesirli türev tanımı

$$f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^\alpha(t) \quad (2.1.2)$$

şeklindedir. $T_\alpha(f)(t)$ şeklinde ifade edilen, f fonksiyonunun α - mertebeden uyumlu kesirli türevi $f^{(\alpha)}(t)$ şeklinde de gösterilebilir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 2.1.2. $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 > 0$ noktasında ve $\alpha \in (0, 1]$ için α -türevlenebilir ise f , t_0 'da sürekli (Khalil ve ark., 2014).

İspat. f , t_0 'da α - türevlenebilir olduğundan,

$$\begin{aligned} f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0) &= \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \varepsilon \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \varepsilon t_0^{1-\alpha}) - f(t_0)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \end{aligned}$$

yazılır. $h = \varepsilon t_0^{1-\alpha}$ olsun. Buradan,

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) - f(t_0) = f^\alpha(t_0) \cdot 0 \quad (2.1.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu da

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(t_0 + h) = f(t_0) \quad (2.1.4)$$

anlamına gelir. Dolayısıyla f , t_0 'da süreklidir.

Tanım 2.1.3. $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı bir f fonksiyonunun $0 < \alpha < 1$ mertebeden a noktasındaki sol uyumlu kesirli türevi

$$(T_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(t - a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.1.5)$$

şeklinde tanımlanır. $a = 0$ olması durumunda T_α yazarız. Eğer (a, b) aralığında $T_\alpha f(t)$ türevi varsa

$$(T_\alpha^a f)(a) = \lim_{t \rightarrow a^+} (T_\alpha^a f)(t) \quad (2.1.6)$$

olur.

Ayrıca $0 < \alpha < 1$ mertebeden, b noktasındaki sağ uyumlu kesirli türevi ise

$$({}^bT_\alpha f)(t) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon(b - t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \quad (2.1.7)$$

ile tanımlanır. Eğer (a, b) aralığında $({}^bT_\alpha f)(t)$ varsa

$$({}^bT_\alpha f)(b) = \lim_{t \rightarrow b^-} ({}^bT_\alpha f)(t) \quad (2.1.8)$$

olur (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.1.4. f ve g fonksiyonları, bir $t > 0$ noktasında α -türevlenebilir olsun. $\alpha \in (0, 1]$ olmak üzere,

i. $\forall \theta, \gamma \in \mathbb{R}$ için,

$$T_\alpha(\theta f + \gamma g) = \theta T_\alpha(f) + \gamma T_\alpha(g),$$

ii. $f(t) = \lambda$ şeklindeki tüm sabit fonksiyonlar için $T_\alpha(\lambda) = 0$ olur,

iii. $T_\alpha(f, g) = f T_\alpha(g) + g T_\alpha(f)$,

iv. $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g T_\alpha(f) - f T_\alpha(g)}{g^2}$,

v. Eğer f türevlenebilir ise

$$T_\alpha f(t) = t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t),$$

vi. $\forall n \in \mathbb{N} := 1, 2, \dots$ için,

$$T_\alpha(t^n) = nt^{n-\alpha},$$

eşitlikleri sağlanır (Khalil ve ark., 2014).

İspat. $t > 0$ olmak üzere,

i.

$$\begin{aligned} T_\alpha(\theta f + \gamma g) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\theta f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) + g(t + \varepsilon t^{1-\alpha})\gamma] - (\theta f + \gamma g)}{\varepsilon} \\ &= \theta \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \right) + \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \right) \gamma \\ &= \theta T_\alpha + \gamma T_\alpha(g), \quad \theta, \gamma \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

elde edilir (Allahverdiev ve ark., 2018).

ii. Tüm $f(t) = \lambda$ biçimindeki sabit fonksiyonlar için,

$$T_\alpha(\lambda) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\lambda - \lambda}{\varepsilon} = 0$$

iii.

$$\begin{aligned} T_\alpha(fg)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(fg)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - (fg)(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(fg)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t) + f(t + \varepsilon t^{1-\alpha})g(t) - (fg)(t)}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) \right] \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)}{\varepsilon} \right] \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t) \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \right] \\ &= f(t)T_\alpha(g)(t) + g(t)T_\alpha f(t) \end{aligned}$$

(Khalil ve ark., 2014).

iv.

$$\begin{aligned}
T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - \left(\frac{f}{g}\right)(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)f(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} - \frac{f(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}}{\varepsilon} - \frac{(fg)(t) - (fg)(t)}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\frac{g(t)[f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)] - f(t)[g(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - g(t)]}{g(t)g(t+\varepsilon t^{1-\alpha})}}{\varepsilon}
\end{aligned}$$

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} g(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) = g(t)$ olduğundan,

$$T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{g(t)T_\alpha f(t) - f(t)T_\alpha g(t)}{g^2}.$$

elde edilir (Akdaş, 2019).

v.

$$T_\alpha f(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

tanımında $h = \varepsilon t^{1-\alpha}$ olsun. Buradan $\varepsilon = t^{\alpha-1}h$ olduğu açıktır. Öyleyse

$$\begin{aligned}
T_\alpha f(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{ht^{\alpha-1}} \\
&= t^{1-\alpha} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t + h) - f(t)}{h} \\
&= t^{1-\alpha} \frac{df}{dt}(t)
\end{aligned}$$

olur (Khalil ve ark., 2014).

vi.

$$\begin{aligned}
T_\alpha(t^n) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(t + \varepsilon t^{1-\alpha})^n - t^n}{\varepsilon} \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1}t^{n-1}(\varepsilon t^{1-\alpha}) + \binom{n}{2}t^{n-2}(\varepsilon t^{1-\alpha})^2 + \binom{n}{3}t^{n-3}(\varepsilon t^{1-\alpha})^3 + \dots + \binom{n}{n}(\varepsilon t^{1-\alpha})^n}{\varepsilon} \\
&= nt^{n-\alpha}, n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

(Allahverdiev ve ark., 2018)

Bazı fonksiyonların uyumlu kesirli türevleri:

1. $\forall p \in \mathbb{R}$ için, $T_\alpha(t^p) = pt^{p-\alpha}$,
2. $T_\alpha(1) = 0$,
3. $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $T_\alpha(e^{bx}) = bx^{1-\alpha}e^{bx}$
4. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $T_\alpha(\sin kx) = kx^{1-\alpha} \cos kx$,
5. $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $T_\alpha(\cos kx) = -kx^{1-\alpha} \sin kx$,
6. $T_\alpha(\alpha^{-1}t^\alpha) = 1$.

şeklinde verilmiştir (Khalil ve ark., 2014).

Ayrıca,

- i. $T_\alpha(\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha) = \cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha$
- ii. $T_\alpha(\cos \frac{1}{\alpha}t^\alpha) = -\sin \frac{1}{\alpha}t^\alpha$
- iii. $T_\alpha(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}) = e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$

şeklinde tanımlanan belirli fonksiyonların uyumlu kesirli türevlerini belirtmekte fayda görülmektedir (Khalil ve ark., 2014).

2.2. Uyumlu Kesirli İntegral

Tanım 2.2.1.

$$I_\alpha^a(f)(t) = I_1^a(t^{\alpha-1}f) = \int_a^t \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx,$$

eşitliğine f fonksiyonunun, $a \geq 0$ dan başlayan α - uyumlu kesirli integrali denir. Burada $\alpha \in (0, 1)$ ve integral Riemann integralidir (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 2.2.2. Bir f fonksiyonunun, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere sol uyumlu kesirli integrali,

$$(I_\alpha^a f)(t) = \int_a^t f(x) d\alpha(x, a) = \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} f(x) dx$$

olarak tanımlıdır. Benzer şekilde sağ uyumlu kesirli integrali,

$$({}^b I_\alpha f)(t) = \int_t^b f(x) d\alpha(b, x) = \int_t^b (b - x)^{\alpha-1} f(x) dx$$

şeklindedir. Eğer $a = 0$ ise $d\alpha(0, x) = d\alpha(x)$ şeklinde gösterilecektir (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.2.3. f fonksiyonu, $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı sürekli fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde $\forall t > a$ için

$$T_\alpha I_\alpha f(t) = f(t)$$

olur (Khalil ve ark., 2014).

İspat.

$$\begin{aligned} T_\alpha(I_\alpha(f))(t) &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_\alpha^a(f)(t) \\ &= t^{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_a^t f(x) x^{\alpha-1} dx \\ &= t^{1-\alpha} \frac{f(t)}{t^{1-\alpha}} = f(t). \end{aligned}$$

Lemma 2.2.4. $f : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı türevlenebilir fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde $\forall t > a$ için,

$$I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) = f(t) - f(a)$$

elde edilir (Abdeljawad, 2015).

İspat. f fonksiyonu türevlenebilir olduğu için Teorem (2.1.4) (v) ten yararlanarak,

$$\begin{aligned} I_\alpha^a T_\alpha^a(f)(t) &= \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} T_\alpha(f)(x) dx \\ &= \int_a^t (x - a)^{\alpha-1} \frac{1}{(x - a)^{\alpha-1}} f'(x) dx = f(t) - f(a) \end{aligned}$$

olduğu gösterilir.

2.3. Uyumlu Kesirli Kısmi İntegrasyon

Teorem 2.3.1. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uyumlu kesirli türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

Bu durumda

$$\int_a^b f(x)T_\alpha^a g(x)d\alpha(x, a) = fg|_a^b - \int_a^b g(x)T_\alpha^a(f)(x)d\alpha(x, a) \quad (2.3.1)$$

eşitliği vardır (Abdeljawad, 2015).

Önerme 2.3.2. f ve g fonksiyonları, $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı birer fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Buna göre

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t)g(t)d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(t)(^b I_\alpha g)(t)d_\alpha(t, a)$$

olur.

İspat. Tanım (2.2.2) den,

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t)g(t)d_\alpha(t, a) = \int_a^b \left(\int_a^t (x-a)^{\alpha-1} f(x)dx \right) g(t)(b-t)^{\alpha-1} dt$$

olur. İntegrallerin sırasını değiştirerek

$$\int_a^b (I_\alpha^a f)(t)g(t)d_\alpha(b, t) = \int_a^b f(x)(^b I_\alpha g)(x)d_\alpha(x, a)$$

elde edilir ve ispatlanmış olur (Abdeljawad, 2015).

Teorem 2.3.3. $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uyumlu kesirli türevlenebilir iki fonksiyon ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde,

$$\int_a^b (T_\alpha^a f)(t)g(t)d_\alpha(t, a) = \int_a^b f(t)(^b T_\alpha g)(t)d_\alpha(b, t) + f(t)g(t)|_a^b \quad (2.3.2)$$

eşitliği sağlanır (Abdeljawad, 2015).

2.4. Wronskian

$$\frac{d^2 y}{dt} + P(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = 0 \quad (2.4.1)$$

tipinde verilen bir ikinci mertebeden diferensiyel denklemi göz önüne alalım. Bilindiği üzere bu denklemin lineer bağımsız iki y_1, y_2 çözümü vardır. Bu çözümlerin Wronskianı,

$$W[y_1, y_2] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır (Hammad ve Khalil, 2014a).

2.5. Uyumlu Kesirli Diferensiyel Denklemin Wronskianı

Tanım 2.5.1. $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$T_\alpha(T_\alpha y) + P(x)T_\alpha y + Q(x)y = 0 \quad (2.5.1)$$

olarak verilen uyumlu kesirli diferensiyel denklemini ele alalım. y_1, y_2 (2.5.1) denklemini sağlayan iki fonksiyon olsun. Bu uyumlu kesirli diferensiyel denklemin Wronskianı,

$$W_\alpha(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ T_\alpha y_1 & T_\alpha y_2 \end{vmatrix}$$

şeklinde tanımlıdır (Hammad ve Khalil, 2014a).

Teorem 2.5.2.

$$W_\alpha(y_1, y_2) = e^{-I_\alpha(P)} \quad (2.5.2)$$

(Hammad ve Khalil, 2014a).

İspat. T_α operatörünü $W_\alpha(y_1, y_2)$ üzerine uygularsak,

$$\begin{aligned} T_\alpha(W_\alpha(y_1, y_2)) &= T_\alpha(y_1 T_\alpha y_2 - y_2 T_\alpha y_1) \\ &= T_\alpha y_1 T_\alpha y_2 + y_1 T_\alpha T_\alpha y_2 - T_\alpha y_2 T_\alpha y_1 - y_2 T_\alpha T_\alpha y_1 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

Ancak y_1 ve y_2 (2.5.1)'i sağlar. Böylece,

$$T_\alpha T_\alpha y_1 = -P(x)T_\alpha y_1 - Q(x)y_1 \quad (2.5.4)$$

ve

$$T_\alpha T_\alpha y_2 = -P(x)T_\alpha y_2 - Q(x)y_2 \quad (2.5.5)$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} T_\alpha(W_\alpha(y_1, y_2)) &= -P(x)(y_1 T_\alpha y_2 - y_2 T_\alpha y_1) \\ &= -P(x)W_\alpha(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

olur. Tanım (2.2.1) ve teorem (2.2.3)'ten $I_\alpha(f) = \int \frac{f(x)}{x^{1-\alpha}} dx$ ve $T_\alpha I_\alpha(f) = f$ eşitliklerinden yararlanarak,

$$\frac{T_\alpha(W_\alpha(y_1, y_2))}{(W_\alpha(y_1, y_2))} = -P(x) \quad (2.5.7)$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$W_\alpha(y_1, y_2) = I_\alpha(-P(x)) \quad (2.5.8)$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

2.6. Uyumlu Kesirli Diferensiyel Denklem için Abel Formülü

Öncelikle, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere,

$$T_\alpha y + a(x)y = b(x) \quad (2.6.1)$$

lineer kesirli diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (2.6.1) denklemini $e^{I(a)}$ ile çarpalım,

$$(e^{I(a)})T_\alpha y + e^{I(a)}a(x)y = e^{I(a)}b(x) \quad (2.6.2)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$y = e^{-I(a)}I_\alpha(e^{I(a)}b(x)) \quad (2.6.3)$$

(2.6.1)'in bir çözümüdür. Şimdi, y_1 (2.5.1) denkleminin çözümü olsun. o halde (2.5.1) için bir y_2 çözümü bulalım. Bunun için (2.5.8)'i kullanarak,

$$y_1 T_\alpha y_2 - y_2 T_\alpha y_1 = I_\alpha(-P(x)), \quad (2.6.4)$$

$$T_\alpha y_2 - y_2 \frac{T_\alpha y_1}{y_1} = \frac{I_\alpha(-P(x))}{y_1} \quad (2.6.5)$$

elde edilir. Denklem (2.6.5), $a(x) = \frac{T_\alpha y_1}{y_1}$ ve $b(x) = \frac{I_\alpha(-P(x))}{y_1}$ olan bir kesirli lineer denklemdir.

$$I_\alpha\left(\frac{T_\alpha y_1}{y_1}\right) = \ln y_1 \quad (2.6.6)$$

eşitliğini ve (2.6.3)'ü kullanarak

$$y_2 = y_1 I_\alpha\left(\frac{e^{-I_\alpha(P)}}{y_1^2}\right) \quad (2.6.7)$$

eşitliği sağlanır (Hammad ve Khalil, 2014a).

2.7. Sturm-Liouville Sınır Değer Problemi

Tanım 2.7.1. $p(x), p'(x), q(x)$ ve $h(x)$ fonksiyonları bir $[c, d] \in \mathbb{R}$ aralığında sürekli, bu aralıkta her bir noktada $p(x) > 0, h(x) > 0$ ve λ, x değişkeninden bağımsız bir parametre olmak üzere

$$(p(x)y')' + (q(x) + \lambda h(x))y = 0, c \leq x \leq d \quad (2.7.1)$$

$$\alpha_1 y(c) + \alpha_2 y'(d) = 0,$$

$$\beta_1 y(d) + \beta_2 y'(d) = 0, \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0 \quad (2.7.2)$$

biçiminde tanımlanan probleme regüler Sturm-Liouville problemi ya da Sturm-Liouville sistemi denir. Bu problemler katsayılarının sıfır ya da sıfırdan farklı olması durumlarına göre farklı şekillerde yazılabilir. Yani sınır koşullarına göre değişik problem değişiklik gösterebilir. Eğer $y(c) = y(d)$ ve $y'(c) = y'(d)$ ise sınır koşulları periyodiktir bu nedenle (2.7.1)-(2.7.2) problemi periyodik Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılır. $p(x), q(x)$ veya $h(x)$ fonksiyonlarından birinin $x = x_0$

noktasında singüler olduğunda (2.7.1)-(2.7.2) problemine singüler Sturm-Liouville problemi denir (Kandemir, 2021).

2.8. Uyumlu Kesirli Sturm-Liouville Problemi

$[a, b]$ aralığında tanımlı,

$$\|f\| := \left[\int_a^b |f(t)|^2 d_\alpha(t) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\int_a^b |f(t)|^2 t^{\alpha-1} d(t) \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

şartını sağlayan kompleks değerli fonksiyonların uzayı $L_\alpha^2(a, b)$ olsun. $L_\alpha^2(a, b)$ uzayı $f, g \in L_\alpha^2(a, b)$ olmak üzere

$$\langle f, g \rangle_\alpha := \int_a^b f(t) \overline{g(t)} d_\alpha(t)$$

iç çarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 2.8.1. λ bir kompleks parametre ve S fonksiyonu $[0, b]$ aralığında reel değerli sürekli uyumlu kesirli integrallenebilir olmak üzere,

$$-T_\alpha^2 y(t) + S(t)y(t) = \lambda y(t) \quad (2.8.1)$$

formunda bir uyumlu kesirli Sturm-Liouville denklemi, $L_\alpha^2(0, b)$ de $c_1, c_2, \lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\phi(0, \lambda) = c_1, T_\alpha \phi(0, \lambda) = c_2 \quad (2.8.2)$$

eşitliklerini sağlayan, bir tek çözüme sahiptir. Ayrıca, $\phi(t, \lambda)$ fonksiyonu $\exists t \in [0, b]$ için, λ nın bir tam fonksiyonudur (Allahverdiev ve ark., 2018).

İspat.

$$\varphi(t, \lambda) = \cos \left(\int_0^t \sqrt{\lambda} d_\alpha(x) \right), \quad (2.8.3)$$

$$\varphi(t, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin(\int_0^t \sqrt{\lambda} d_\alpha(x))}{\sqrt{\lambda}}, & \lambda \neq 0, \\ \frac{t^\alpha}{\alpha}, & \lambda = 0, \end{cases} \quad (2.8.4)$$

fonksiyonları

$$T_\alpha^2 y + \lambda y = 0 \quad (2.8.5)$$

denkleminin bir temel çözümüdür. Burada, $\lambda \in \mathbb{C}$ için α -Wronskian'ın $W_\alpha(\varphi_1(t, \lambda), \varphi_2(t, \lambda)) \equiv 1$ olduğu açıktır. Tüm $0 \leq t \leq a$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$\begin{aligned} \Pi_1(t, \lambda) &= c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi(t, \lambda), \quad \Pi_{m+1}(t, \lambda) = c_1 \varphi_1(x, \lambda) + c_2 \varphi(t, \lambda) \\ &+ \int_0^t [\varphi_2(t, \lambda) \varphi_1(x, \lambda) - \varphi_1(t, \lambda) \varphi_2(x, \lambda)] S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) = \Pi_1(t, \lambda) \\ &+ \int_0^t \left[\frac{\sin \int_0^t \sqrt{\lambda} d_\alpha(u)}{\lambda} \cos \left(\int_0^x \sqrt{\lambda} d_\alpha(s) \right) \right] S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) \\ &- \int_0^t \left[\cos \left(\int_0^t \sqrt{\lambda} d_\alpha(u) \right) \frac{\sin(\int_0^x \sqrt{\lambda} d_\alpha(s))}{\sqrt{\lambda}} \right] S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.8.6)$$

şeklinde ardışık yaklaşımlar metoduyla bir $[\Pi_m(t, \lambda)]_{m=1}^\infty$ dizisi oluşturduk. Şimdi her bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sabiti için $\Pi_m(t, \lambda)_{m=1}^\infty (m \rightarrow \infty)$ dizisinin düzgün limitinin var olduğunu ve (2.8.1) ve (2.8.2) nin çözümünü tanımladığını göstereceğiz. $\lambda \in \mathbb{C}$ sabit olsun.

$$|S(t)| \leq A, \quad |\varphi_i(t, \lambda)| \leq \sqrt{\frac{\Omega(\lambda)}{2}}, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq t \leq b$$

olacak şekilde $\Omega(\lambda)$ ve A pozitif sayıları vardır.

$$\widetilde{\Omega(\lambda)} = \frac{\sqrt{\Omega(\lambda)}}{2} (|c_1| + |c_1|)$$

olsun. O halde,

$$\begin{aligned}
|\Pi_2(t, \lambda) - \Pi_1(t, \lambda)| &\leq \left| \int_0^t \left[\frac{\sin \int_0^t \sqrt{\lambda} d_\alpha(u)}{\lambda} \cos \left(\int_0^x \sqrt{\lambda} d_\alpha(s) \right) \right] S(x) \Pi_1(x, \lambda) d_\alpha(x) \right| \\
&+ \left| \int_0^t \left[\cos \left(\int_0^t \sqrt{\lambda} d_\alpha(u) \right) \frac{\sin(\int_0^x \sqrt{\lambda} d_\alpha(s))}{\sqrt{\lambda}} \right] S(x) \Pi_1(x, \lambda) d_\alpha(x) \right| \\
&\leq \left(\Omega(\lambda) A \frac{\tilde{\Omega}}{2} + \Omega(\lambda) A \frac{\widetilde{\Omega(\lambda)}}{2} \right) \left| \int_0^t d_\alpha(x) \right| \\
&\leq \Omega(\lambda) A \widetilde{\Omega(\lambda)} \left| \int_0^t d_\alpha(x) \right| \leq \Omega(\lambda) A \widetilde{\Omega(\lambda)} \frac{t^\alpha}{\alpha} \tag{2.8.7}
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
|\Pi_3(t, \lambda) - \Pi_2(t, \lambda)| &\leq (\widetilde{\Omega(\lambda)})^2 \frac{A^2 \Omega^2(\lambda) t^{2\alpha}}{a^2 2!} \\
|\Pi_4(t, \lambda) - \Pi_3(t, \lambda)| &\leq (\widetilde{\Omega(\lambda)})^3 \frac{A^3 \Omega^3(\lambda) t^{3\alpha}}{a^3 3!} \\
&\dots \\
|\Pi_{n+1}(t, \lambda) - \Pi_n(t, \lambda)| &\leq (\widetilde{\Omega(\lambda)})^n \frac{(A \Omega(\lambda) t^\alpha)^n}{a^n n!}, \quad (n = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$$\sum_{n=1}^n (\widetilde{\Omega(\lambda)})^n \frac{(A \Omega(\lambda) t^\alpha)^n}{a^n n!}$$

serisi yakınsak olduğundan, Weierstrass testinden,

$$\Pi_1(t, \lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} [\Pi_{n+1}(t, \lambda) - \Pi_n(t, \lambda)], \tag{2.8.8}$$

ifadesi de $[0, b]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Daha sonra, bu serinin

$$\Pi_n(t, \lambda) = \Pi_1(t, \lambda) + \sum_{k=1}^{n-1} [\Pi_{k+1}(t, \lambda) - \Pi_k(t, \lambda)]$$

n'yinci kısmi toplamı, $\varphi(t, \lambda)$ fonksiyonuna $[0, b]$ aralığında $n \rightarrow \infty$ olmak üzere düzgün yakınsar. Burada $\phi(t, \lambda)$ toplam serisidir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pi_n(t, \lambda) = \phi(t, \lambda)$$

eşitliği vardır. $\Pi_n(t, \lambda)$ ve $T_\alpha \phi_n(t, \lambda)$ ifadelerinin sürekli olduklarını n de tümevarımla ispatlayabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned} T_\alpha \Pi_{n+1}(t, \lambda) &= c_1 T_\alpha \phi_1(t, \lambda) + c_2 T_\alpha \phi_2(t, \lambda) + \int_0^t [T_\alpha \phi_2(t, \lambda) \phi_1(x, \lambda) \\ &- T_\alpha \phi_2(t, \lambda) \phi_1(x, \lambda)] S(x) \Pi_n(x, \lambda) d_\alpha(x) \end{aligned}$$

ve $n = 1, 2, \dots$ $\phi(t, \lambda)$ ve $T_\alpha \phi_n(t, \lambda)$ 'nın sürekli olduğunu yani, $\phi(t, \lambda) \in \mathbb{L}_\alpha^2(0, b)$ olduğunu kontrol ederiz. Düzgün yakınsama sayesinde (2.8.7) de $n \rightarrow \infty$ alarak,

$$\begin{aligned} \phi(t, \lambda) &= c_1 \varphi_1(t, \lambda) + c_1 \varphi_1(t, \lambda) + \int_0^t [\varphi_2(t, \lambda) \varphi_1(x, \lambda) \\ &- \varphi_1(t, \lambda) \varphi_2(x, \lambda)] S(x) \phi(x, \lambda) d_\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.8.9)$$

olduğu sonucuna varırız. Şimdi, $\varphi(t, \lambda)$ fonksiyonunun (2.8.1) ve (2.8.2)'yi sağladığını ispatlatacağız. Açıkça görülür ki $\phi(0, \lambda) = c_1$ ve

$$T_\alpha \phi(0, \lambda) = c_1 T_\alpha \varphi_1(0, \lambda) + c_2 T_\alpha \varphi_2(0, \lambda) = c_2,$$

yani $\phi(t, \lambda)$ (2.8.2)'yi sağlar. Eğer $t \neq 0$ ise,

$$\begin{aligned} T_\alpha \phi(t, \lambda) &= c_1 T_\alpha \varphi_1(t, \lambda) + c_2 T_\alpha \varphi_2(t, \lambda) \\ &+ \int_0^t [T_\alpha \varphi_2(t, \lambda) \varphi_1(x, \lambda) - T_\alpha \varphi_1(t, \lambda) \varphi_2(x, \lambda)] S(x) \phi(x, \lambda) d_\alpha(x) \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} -T_\alpha^2 \phi(t, \lambda) &= -c_1 T_\alpha^2 \varphi_1(t, \lambda) + T_\alpha^2 \varphi_1(t, \lambda) \int_0^t \varphi_2(x, \lambda) S(x) \phi(x, \lambda) d_\alpha(x) \\ &- c_2 T_\alpha^2 \varphi_2(t, \lambda) - T_\alpha^2 \varphi_2(t, \lambda) \int_0^t \varphi_1(x, \lambda) S(x) \phi(x, \lambda) d_\alpha(x) - S(t) \phi(t, \lambda), \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} -T_\alpha^2 \phi(t, \lambda) &= -T_\alpha^2 \varphi_1(t, \lambda) \left(c_1 + \int_0^t \varphi_2(x, \lambda) S(x) \phi(x, \lambda) d_\alpha(x) \right) \\ &- T_\alpha^2 \varphi_2(t, \lambda) \left(c_2 + \int_0^t \varphi_1(x, \lambda) S(x) \phi(x, \lambda) d_\alpha(x) \right) \\ &- S(t) \phi(t, \lambda) \end{aligned} \quad (2.8.10)$$

sonucuna varılır. (2.8.4), (2.8.5) ve (2.8.9)'u, (2.8.10) eşitliğinde uygularsak $\phi(t, \lambda)$ 'nın $t \neq 0$ için teorem (2.8.1)'ü sağladığı sonucuna varırız. Eğer $t = 0$ ise (2.8.1),

$$T_\alpha^2 y(0) - S(0)y(0) = -\lambda y(0)$$

olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} T_\alpha^2 \phi(0, \lambda) &= c_1 T_\alpha^2 \varphi_1(0, \lambda) + T_\alpha^2 \varphi_2(0, \lambda) + S(0)\phi(0, \lambda) \\ &= -c_1 \lambda \varphi(0, \lambda) - c_2 \lambda T_\alpha^2 \varphi_2(0, \lambda) + S(0)\phi(0, \lambda) \\ &= -\lambda \varphi(0, \lambda) + S(0)\phi(0, \lambda) \end{aligned}$$

olduğu açıkça görülür.

Şimdi (2.8.1)-(2.8.2) probleminin tek çözümü olduğunu ispatlayacağız. Varsayalım ki $\varphi_1(t, \lambda)$ ve $\varphi_2(t, \lambda)$, bu problemin iki çözümü olsun. $t \in [0, b]$ aralığında $T_\alpha H(0, \lambda) = \varphi_1(t, \lambda) - \varphi_2(t, \lambda)$ olsun. O halde $H(t, \lambda)$ bu problemin bir çözümüdür. $H(0, \lambda) = T_\alpha H(0, \lambda) = 0$ olduğu açıktır. (2.8.1) denkleminde iki defa α -integrasyon uygulandığında,

$$H(t, \lambda) = \int_0^t \left(\int_0^x (S(u) - \lambda) H(u, \lambda) d_\alpha(u) \right) d_\alpha(x)$$

sonucunu verir. $H(t, \lambda)$ ve $S(t)$ $[0, b]$ aralığında sürekli olduklarından,

$$N_\lambda = \sup_{t \in [0, b]} |H(t, \lambda)|, \quad M_\lambda = \sup_{t \in [0, b]} |V(t) - \lambda|$$

olacak şekilde N_λ, M_λ pozitif sayıları vardır. O halde,

$$\begin{aligned} |H(t, \lambda)| &= \left| \int_0^t \left(\int_0^x (S(u) - \lambda) S(u, \lambda) d_\alpha(u) \right) d_\alpha(x) \right| \\ &\leq N_\lambda M_\lambda \left| \int_0^t \left(\int_0^x d_\alpha(u) \right) d_\alpha(x) \right| = N_\lambda M_\lambda \frac{t^{2\alpha}}{2\alpha^2} \end{aligned}$$

elde ederiz.

Matematiksel tümevarımla k 'da,

$$|H(t, \lambda)| \leq N_\lambda^k M_\lambda^k \frac{t^{(k+1)\alpha}}{\alpha^{k+1}(k+1)!}, \quad k \in \mathbb{N}, t \in [0, b] \quad (2.8.11)$$

şeklinde ispatlayabiliriz. Şimdi bunu $(k + 1)$ için kanıtlayacağız. Buna göre

$$\begin{aligned}
|H(t, \lambda)| &= \left| \int_0^t \left(\int_0^x (S(u) - \lambda) H(u, \lambda) d_\alpha(u) \right) d_\alpha(x) \right| \\
&\leq N_\lambda^{k+1} M_\lambda^{k+1} \left| \int_0^t \left(\int_0^x \frac{x^{(k+1)\alpha}}{\alpha^{k+1}(k+1)!} d_\alpha(u) \right) d_\alpha(x) \right| \\
&\leq N_\lambda^{k+1} M_\lambda^{k+1} \frac{t^{(k+2)\alpha}}{\alpha^{k+2}(k+2)!}
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\lim_{k \rightarrow \infty} N_\lambda^k M_\lambda^k \frac{t^{(k+1)\alpha}}{\alpha^{k+1}(k+1)!} = 0$ olduğundan, tüm $0 \leq t \leq b$ için, $H(t, \lambda) = 0$ olur. Bu da teklifi ispatlar.

Devamında $0 \leq t \leq b$ olmak üzere $\phi(t, \lambda)$ 'nın λ 'nın bir tam fonksiyonu olduğunu göstereceğiz. Bunun için, $\Gamma_M = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq M\}$ olmak üzere $\phi(t, \lambda)$ 'nın her Γ_M diskinde analitik olduğunu göstermek yeterlidir. Şimdi m 'de tümevarımdan,

$$\Pi_m(t, \lambda) \Gamma_M \text{'de analitiktir, } \forall t \in [0, b] \quad (2.8.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi_m(t, \lambda)(0, \lambda) \text{'da sürekli, } \forall \lambda \in \Gamma_M \quad (2.8.13)$$

olduğunu ispatlayacağız. Açıkça görülür ki $\varphi_1(t, \lambda)$ ve $\varphi_2(t, \lambda)$, $t \in [0, b]$ için λ 'nın tam fonksiyonlarıdır. Ayrıca, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_i(i = 1, 2)$, $(0, \lambda)$ aralığında sürekli. Buradan, (2.8.12) ve (2.8.13) $m = 1$ için sağlanır. Varsayalım ki (2.8.12) ve (2.8.13) $m \geq 1$ için sağlansın. O halde $t_0 \in [a, b]$ ve $\lambda_0 \in \Gamma_M$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \Pi_{m+1}(t_0, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0} &= \frac{\partial \Pi_1(t_0, \lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0} \\
&+ \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_2(t_0, \lambda)|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{t_0} \varphi_1(x, \lambda) S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) \\
&- \frac{\partial \varphi_1(t_0, \lambda)}{\partial \lambda}|_{\lambda=\lambda_0} \int_0^{t_0} \varphi_2(x, \lambda) S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) \\
&+ \varphi_2(t_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{t_0} \varphi_1(x, \lambda) S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) \right) |_{\lambda=\lambda_0} \\
&- \varphi_1(t_0, \lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\int_0^{t_0} \varphi_2(x, \lambda) S(x) \Pi_m(x, \lambda) d_\alpha(x) \right) |_{\lambda=\lambda_0}. \quad (2.8.14)
\end{aligned}$$

(2.8.14)'ten, $\varphi_i(t, \lambda)S(t)I_m(t, \lambda)$ ifadesinin $\exists i = 1, 2$ için $(0, \lambda)$ aralığında sürekli olduğu sonucuna varıyoruz. Sonuç olarak,

$$\left| \frac{\partial}{\partial \lambda}(\varphi_i(t, \lambda)S(t)I_m(t, \lambda)) \right| \leq C, \quad m \in \mathbb{N},$$

olacak şekilde $C, \delta > 0$ sabitleri vardır. Burada $\forall \lambda \in |\lambda - \lambda_0| \leq \delta$ dır. Buradan $\int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\varphi_i(x, \lambda)S(x)I_m(x, \lambda))d_\alpha(x) (i = 1, 2)$ α -integrallerine karşılık gelen serilerin $\lambda = \lambda_0$ komşuluğunda düzgün yakınsak olduğunu görüyoruz. Buna göre (2.8.14)'teki integral ile türevin sırasını değiştirebiliriz. t_0 ve λ_0 keyfi olduklarından,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} I_{m+1}(t, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} I_1(t, \lambda) + \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\varphi_1(x, \lambda)\varphi_2(t, \lambda)S(x)I_m(x, \lambda))d_\alpha(x) \\ &\quad - \int_0^{t_0} \frac{\partial}{\partial \lambda}(\varphi_1(t, \lambda)\varphi_2(x, \lambda)S(x)I_m(x, \lambda))d_\alpha(x) \end{aligned} \quad (2.8.15)$$

elde edilir. Burada $\forall t \in [0, b], \lambda \in \Gamma_M$ dir. (2.8.13)'ten, (2.8.15)'teki integraller $(0, \lambda)$ 'da süreklidirler. Buradan, $\frac{\partial}{\partial \lambda} I_{m+1}(t, \lambda)$ $(0, \lambda)$ ' da süreklidirler. $\lambda_0 \in [0, b]$ aralığından bir keyfi sayı olsun. O halde,

$$|\varphi_i(t_0, \lambda)| \leq \frac{\sqrt{\beta(t_0)}}{2}, i = 1, 2 \text{ ve } |S(t_0)I_1(t_0, \lambda)| \leq \widetilde{\beta(t_0)}, \lambda \in \Gamma_M.$$

Son olarak matematiksel tümevarımla

$$|I_{m+1}(t_0, \lambda) - I_m(t_0, \lambda)| \leq (\widetilde{\beta(t_0)})^m \frac{(\beta(t_0)t_0^\alpha)^m}{\alpha^m m!}$$

elde ederiz. Buradan (2.8.8) serileri, $t = t_0$ iken Γ_m 'de $\phi(t_0, \lambda)$ ' ye düzgün yakınsar. Dolayısıyla $\phi(t_0, \lambda)$, Γ_m 'de analitiktir.

3. BULGULAR

3.1. Bir Süreksiz Uyumlu Kesirli Sturm-Liouville Probleminin İfadesi

Bu kısımda $[-1, 0) \cup (0, 1]$ aralığında,

$$-T_\alpha(T_\alpha y) + q(x)y = \lambda y \quad (3.1.1)$$

diferensiyel denkleminin, $c_1^2 + c_2^2 > 0$ ve $r_1^2 + r_2^2 > 0$ olmak üzere $x = -1$ ve $x = 1$ noktalarındaki

$$L_1 y : c_1 y(-1) + c_2 T_\alpha y(-1) = 0, \quad (3.1.2)$$

$$L_2 y := r_1 y(1) + r_2 T_\alpha y(1) = 0, \quad (3.1.3)$$

sınır şartları ve $x = 0$ süreksizlik noktasındaki

$$L_3 y := y(0^-) - \beta y(0^+) = 0, \quad (3.1.4)$$

$$L_4 y := T_\alpha y(0^-) - \frac{1}{\beta} T_\alpha y(0^+) = 0, \quad (3.1.5)$$

geçiş şartından oluşan Sturm-Liouville problemini inceleyeceğiz. Burada $0 < \alpha \leq 1$, $q(x)$ fonksiyonu reel değerli, $[-1, 0) \cup (0, 1]$ aralığında sürekli ayrıca $q(0^\pm) := \lim_{x \rightarrow 0^\pm} q(x)$ sonlu limitlerine sahip bir fonksiyon, λ bir kompleks parametre ve $\beta \neq 0$ bir reel sayıdır. İleride $f(x)$ ve $g(x)$ gibi herhangi bir aralıkta diferensiyellenebilir fonksiyonların uyumlu kesirli Wronskiyen'ini

$$W_\alpha[f(x), g(x)] = f(x)T_\alpha g(x) - T_\alpha f(x)g(x)$$

şeklinde göstereceğiz. (3.1.1)-(3.1.5) probleminin, $\lambda = \lambda_0$ değeri için $y_0 \neq 0$ çözümü varsa bu değere, verilen sınır değer probleminin özdeğeri denecektir.

3.2. Problemin Operatör Formülasyonu

$\mathbb{L}_\alpha^2(-1, 1)$ Hilbert uzayında h, s fonksiyonlarının iç çarpımı aşağıdaki gibidir:

$$\langle h, s \rangle_\alpha = \int_{-1}^1 h(x) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1). \quad (3.2.1)$$

Burada $H := h(x)$, $S := s(x) \in \mathbb{L}_\alpha^2(-1, 1)$ dir. Hilbert uzayında A operatörünü,

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} h : h(x) \text{ ile } T_\alpha h(x), [1, 0) \cup (0, 1] \text{ aralığında sürekli ve } h(\pm 0), \\ {}^{-1+}T_\alpha h(0\pm), {}^{1-}T_\alpha h(0\pm) \text{ sonlu limitlere sahiptir, } L_i h = 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right\}$$

ve

$$Ah = -T_\alpha(T_\alpha h) + q(x)h \quad (3.2.2)$$

eşitlikleriyle tanımlanırsa (3.1.1)-(3.1.5) problemi

$$Ay = \lambda y \quad (3.2.3)$$

operatör formunda yazılabilir. Sırasıyla (3.1.1)-(3.1.5) probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları ile A operatörünün özdeğerleri ve özfonksiyonları aynı anlama geldiği basitçe görülebilir.

Teorem 3.2.1. A lineer operatörü simetriktir.

İspat. $\forall h, s \in D(A)$ için,

$$\begin{aligned} \langle Ah, s \rangle_\alpha &= \int_{-1}^1 Ah(x) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) \\ &= \int_{-1}^1 T_\alpha(T_\alpha h(x)) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) + \int_{-1}^1 q(x)h(x) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. İlgili teoremden kısmi integrasyon uygulayarak,

$$\begin{aligned}
\langle Ah, s \rangle_\alpha &= \overline{s(x)} T_\alpha h(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 T_\alpha h(x) T_\alpha \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) + \int_{-1}^1 q(x) h(x) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) \\
&= \overline{s(x)} T_\alpha h(x)|_{-1}^1 - \left[T_\alpha \overline{s(x)} h(x)|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 h(x) T_\alpha (T_\alpha \overline{s(x)}) d_\alpha(x, -1) \right] \\
&+ \int_{-1}^1 q(x) h(x) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) \\
&= \left[\int_{-1}^1 h(x) T_\alpha (T_\alpha \overline{s(x)}) d_\alpha(x, -1) + \int_{-1}^1 q(x) h(x) \overline{s(x)} d_\alpha(x, -1) \right] \\
&+ \overline{s(x)} T_\alpha h(x)|_{-1}^1 - T_\alpha \overline{s(x)} h(x)|_{-1}^1 \\
&= \langle h, As \rangle_\alpha + \overline{s(x)} T_\alpha h(x)|_{-1}^{0^-} - T_\alpha \overline{s(x)} h(x)|_{-1}^{0^-} \\
&+ \overline{s(x)} T_\alpha h(x)|_{0^+}^1 - T_\alpha \overline{s(x)} h(x)|_{0^+}^1
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir, buradan

$$\begin{aligned}
\langle Ah, s \rangle_\alpha &= \langle h, As \rangle_\alpha + \left(\overline{s(0^-)} T_\alpha h(0^-) - \overline{s(-1)} T_\alpha h(-1) \right) \\
&- \left(T_\alpha \overline{s(0^-)} h(0^-) - T_\alpha \overline{s(-1)} h(-1) \right) \\
&+ \left(\overline{s(1)} T_\alpha h(1) - \overline{s(0^+)} T_\alpha h(0^+) \right) \\
&- \left(T_\alpha \overline{s(1)} h(1) - T_\alpha \overline{s(0^+)} h(0^+) \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilen eşitlikte (3.1.2)-(3.1.3) sınır şartları ve (3.1.4)-(3.1.5) geçiş şartları uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\langle Ah, s \rangle_\alpha &= \langle h, As \rangle_\alpha + \beta \overline{s(0^+)} \left(\frac{1}{\beta} T_\alpha h(0^+) \right) - \overline{s(-1)} \left(-\frac{c_1}{c_2} h(-1) \right) \\
&- \left(\frac{1}{\beta} T_\alpha \overline{s(0^+)} \right) \beta h(0^+) + \left(-\frac{c_1}{c_2} \overline{s(-1)} \right) h(-1) \\
&+ \overline{s(1)} \left(-\frac{r_1}{r_2} h(1) \right) - \overline{s(0^+)} T_\alpha h(0^+) \\
&- \left(-\frac{r_1}{r_2} \overline{s(1)} \right) h(1) + T_\alpha \overline{s(0^+)} h(0^+) \\
&= \langle h, As \rangle_\alpha + \beta \cdot \frac{1}{\beta} \left[\overline{s(0^+)} T_\alpha h(0^+) - T_\alpha \overline{s(0^+)} h(0^+) \right] \\
&- \overline{s(0^+)} T_\alpha h(0^+) + T_\alpha \overline{s(0^+)} h(0^+) \\
&= \langle h, As \rangle_\alpha + \left[\overline{s(0^+)} T_\alpha h(0^+) - T_\alpha \overline{s(0^+)} h(0^+) \right] \left(\beta \cdot \frac{1}{\beta} - 1 \right)
\end{aligned}$$

olup

$$\langle Ah, s \rangle_\alpha = \langle h, As \rangle_\alpha$$

eşitliğinin sağlandığı açıkça görülmektedir. Böylelikle A operatörünün simetrikliği gösterilmiş olur.

3.3. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Bazı temel Bağıntılar

Bu kısımda

$$-T_\alpha(T_\alpha y) + q(x)y = \lambda y \quad (3.3.1)$$

$$L_1 y : c_1 y(-1) + c_2 T_\alpha y(-1) = 0, \quad (3.3.2)$$

$$L_2 y := y(0^-) - \beta y(0^+) = 0, \quad (3.3.3)$$

$$L_3 y := T_\alpha y(0^-) - \frac{1}{\beta} T_\alpha y(0^+) = 0 \quad (3.3.4)$$

$$L_4 y := r_1 y(1) + r_2 T_\alpha y(1) = 0 \quad (3.3.5)$$

uyumlu kesirli Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonları arasındaki temel bağıntılardan bazılarını inceleyeceğiz. Öncelikle aşağıdaki sınır-değer problemini ele alalım;

$$-T_\alpha(T_\alpha) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [-1, 0] \quad (3.3.6)$$

$$y(-1) = c_2 \quad (3.3.7)$$

$$T_\alpha y(-1) = -c_1. \quad (3.3.8)$$

(2.8.1) varlık ve teklik teoreminden, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için (3.3.6)-(3.3.8) uyumlu kesirli sınır değer probleminin $y = \phi_1(x) \equiv \phi_1(x, \lambda)$ şeklinde bir tek çözümü vardır.

$$-T_\alpha(T_\alpha) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3.3.9)$$

$$y(1) = r_2 \quad (3.3.10)$$

$$T_\alpha y(1) = -r_1 \quad (3.3.11)$$

sınır-değer probleminin, yine teorem (2.8.1)'ten $y = \psi_2(x) \equiv \psi_2(x, \lambda)$ şeklinde bir tek çözümü vardır. $\phi_1(x, \lambda)$ ve $\psi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları ile ilişkili olan uyumlu kesirli sınır-değer problemini ele alalım. Sınır koşullarının λ parametresine bağıllığı açıkça görülen,

$$-T_\alpha(T_\alpha) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [0, 1] \quad (3.3.12)$$

$$y(0^+) = \frac{1}{\beta} \phi_1(0, \lambda) \quad (3.3.13)$$

$$T_\alpha y(0^+) = \beta T_\alpha \phi_1(0, \lambda) \quad (3.3.14)$$

probleminin $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için teorem (2.8.1) gereği, $y = \phi_2(x) \equiv \phi_2(x, \lambda)$ şeklinde bir tek çözümü vardır. Benzer şekilde,

$$-T_\alpha(T_\alpha) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in [-1, 0] \quad (3.3.15)$$

$$y(0^-) = \beta \psi_2(0, \lambda) \quad (3.3.16)$$

$$T_\alpha y(0^-) = \frac{1}{\beta} T_\alpha \psi_2(0, \lambda) \quad (3.3.17)$$

sınır-değer probleminin, $y = \psi_1(x) \equiv \psi_1(x, \lambda)$ şeklinde bir tek çözümü vardır.

Teorem (2.8.1)'den $\phi_1(x, \lambda)$ ve $\psi_1(x, \lambda)$ fonksiyonları $\forall x \in [-1, 0]$ için; $\phi_2(x, \lambda)$ ve $\psi_2(x, \lambda)$ fonksiyonları da $\forall x \in [0, 1]$ için λ parametresine göre tüm kompleks düzlemde analitiktir. Bir başka deyişle bu fonksiyonlar λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır. Bu fonksiyonların $[-1, 1]$ aralığında sıfırla devamlarını $\widetilde{\phi}_i$ ve $\widetilde{\psi}_i$ biçiminde gösterelim. Bunun yanı sıra $W_\alpha(\phi_1(x, \lambda), \psi_1(x, \lambda))$ ve $W_\alpha(\phi_2(x, \lambda), \psi_2(x, \lambda))$ Wronskiyelemleri, $x \in [-1, 0]$ ve $x \in [0, 1]$ değişkenlerinden bağımsız olup (Boyce ve DiPrima, 2017) her bir x için $\phi_i(x, \lambda)$ ve $\psi_i(x, \lambda)$ fonksiyonları, λ parametresinin tam fonksiyonları

olduklarından

$$\mu_1(\lambda) = W_\alpha(\phi_1(x, \lambda), \psi_1(x, \lambda)) \quad (3.3.18)$$

$$\mu_2(\lambda) = W_\alpha(\phi_2(x, \lambda), \psi_2(x, \lambda)) \quad (3.3.19)$$

fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

Lemma 3.3.1. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)$ eşitliği sağlanır.

İspat. (3.3.13),(3.3.14),(3.3.16),(3.3.17) eşitlikleri gereği,

$$\begin{aligned} \mu_1(\lambda) &= W_\alpha(\phi_1(x, \lambda), \psi_1(x, \lambda)) \\ &= W_\alpha(\phi_1(0, \lambda), \psi_1(0, \lambda)) \\ &= \phi_1(0, \lambda)T_\alpha(\psi_1)(0, \lambda) - T_\alpha(\phi_1)(0, \lambda)\psi_1(0, \lambda) \\ &= \beta\phi_2(0, \lambda)\frac{1}{\beta}T_\alpha(\psi_2)(0, \lambda) - \frac{1}{\beta}T_\alpha(\phi_2)(0, \lambda)\beta\psi_2(0, \lambda) \\ &= \phi_2(0, \lambda)T_\alpha(\psi_2)(0, \lambda) - T_\alpha(\phi_2)(0, \lambda)\psi_2(0, \lambda) \\ &= W_\alpha((\phi_2)(0, \lambda)\psi_2(0, \lambda)) \\ &= \mu_2(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç 3.3.2. $\mu_1(\lambda)$ ve $\mu_2(\lambda)$ tam fonksiyonlarının sıfır yerleri çakışır.

Şimdi $[-1, 0) \cup (0, 1]$ aralığında tanımlı olan $\phi(x, \lambda)$, $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonlarını

$$\phi(x, \lambda) = \begin{cases} \phi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0), \\ \phi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1], \end{cases}$$

$$\psi(x, \lambda) = \begin{cases} \psi_1(x, \lambda), & x \in [-1, 0), \\ \psi_2(x, \lambda), & x \in (0, 1] \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak Lemma (3.3.1)'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.3. $\phi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonlarının uyumlu kesirli Wronskianı $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ değişkeninden bağımsız ve λ parametrelerinin tam fonksiyonudur.

İspat. $\mu(x, \lambda) = W(\psi(x, \lambda), \phi(x, \lambda))$ olarak gösterirsek,

$$\mu(x, \lambda) = \begin{cases} \mu_1(\lambda), & x \in [-1, 0), \\ \mu_2(\lambda), & x \in (0, 1], \end{cases}$$

formülü elde edilir. Lemma (3.3.1)'den $\mu_1(\lambda) = \mu_2(\lambda)$ eşitliği elde edilir.

Not 3.3.4. Bundan sonra $\phi(x, \lambda)$ ve $\psi(x, \lambda)$ fonksiyonlarının uyumlu kesirli Wronskiyen'ini

$$\mu(\lambda) = W_\alpha(\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)) \quad (3.3.20)$$

ile göstereceğiz.

Teorem 3.3.5. (3.3.1)-(3.3.5) probleminin özdeğerleri ancak ve ancak $\mu(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibarettir.

İspat. $\beta \neq 0$ olsun.

$(\Rightarrow)$: $\mu(\lambda_0) = 0$ olsun. O halde

$$\mu_1(\lambda_0) = \mu_2(\lambda_0) = 0$$

olacaktır. Buna göre

$$\phi_1(x, \lambda_0) = k_1 \psi_1(x, \lambda_0) \quad (3.3.21)$$

olacak şekilde $k_1 \neq 0$ sayısı bulunur. (Boyce ve DiPrima, 2017) $\psi(x, \lambda_0)$ fonksiyonunun (3.3.1) denklemini ve (3.3.3), (3.3.4) ve (3.3.5) sınır ve geçiş koşullarını sağladığı açıkça görülür.

(3.3.21) eşitliğinden, $\psi(x, \lambda_0)$ fonksiyonu (3.3.2) sınır koşulunu da sağlar. Dolayısıyla $\psi(x, \lambda_0) \neq 0$ fonksiyonu (3.3.1)-(3.3.5) uyumlu kesirli sınır-değer probleminin çözümü oluyor. Bu ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının özdeğer olduğunu gösterir.

$(\Leftarrow)$: Şimdi ise $\lambda = \lambda_0$ sayısının özdeğer olduğunu kabul ederek $\mu(\lambda_0) = 0$ eşitliğinin doğruluğunu aksini kabul etme yöntemi ile ispat edelim.

Herhangi bir $\lambda = \lambda_0$ özdeğeri için $\mu(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Buna göre $\phi_1(x, \lambda_0)$ ile $\psi_1(x, \lambda_0)$ ve $\phi_2(x, \lambda_0)$ ile $\psi_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımsız olacaktır

(Boyce ve DiPrima, 2017). (3.3.1) diferensiyel denkleminin genel çözümünün,

$$y(x, \lambda) = c_1 \widetilde{\phi}_1(x, \lambda) + c_2 \widetilde{\psi}_1(x, \lambda) + c_3 \widetilde{\phi}_2(x, \lambda) + c_4 \widetilde{\psi}_2(x, \lambda) \quad (3.3.22)$$

olarak ifade edilebileceği kolayca anlaşılabilir. Dolayısıyla λ_0 özdeğerine uygun olan her bir $y_0(x)$ özfonksiyonu için

$$y_0(x) = k_1 \widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0) + k_2 \widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0) + k_3 \widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0) + k_4 \widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0) \quad (3.3.23)$$

olacak şekilde en az biri sıfırdan farklı k_1, k_2, k_3, k_4 sayıları bulunur. (3.3.23)

te verilen $y_0(x)$ özfonksiyonu (3.3.2)-(3.3.5) sınır ve geçiş koşullarını sağladığından,

$$L_1((\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)))k_1 + L_1((\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)))k_2 + L_1((\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)))k_3 + L_1((\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)))k_4 = 0$$

$$L_2((\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)))k_1 + L_2((\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)))k_2 + L_2((\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)))k_3 + L_2((\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)))k_4 = 0$$

$$L_3((\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)))k_1 + L_3((\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)))k_2 + L_3((\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)))k_3 + L_3((\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)))k_4 = 0$$

$$L_4((\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)))k_1 + L_4((\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)))k_2 + L_4((\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)))k_3 + L_4((\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)))k_4 = 0$$

eşitlikleri geçerlidir. Buradan,

$$\begin{vmatrix} L_1(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) & L_1(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) & L_1(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) & L_1(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) \\ L_2(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) & L_2(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) & L_2(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) & L_2(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) \\ L_3(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) & L_3(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) & L_3(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) & L_3(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) \\ L_4(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) & L_4(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) & L_4(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) & L_4(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) \end{vmatrix} = 0 \quad (3.3.24)$$

elde edilir. Elde edilen determinantın elemanlarını hesapladığımızda,

$$L_1(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) = 0 \quad (3.3.25)$$

$$\begin{aligned}
L_1(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) &= c_1 \widetilde{\psi}_1(-1, \lambda_0) + c_2 T_\alpha(\widetilde{\psi})(-1, \lambda_0) \\
&= -T_\alpha(\phi_1)(-1, \lambda_0) \psi_1(-1, \lambda_0) + \phi_1(-1, \lambda_0) T_\alpha(\psi_1)(-1, \lambda_0) \\
&= W_\alpha(\phi_1(x, \lambda_0), \psi_1(x, \lambda_0))|_{x=-1} \\
&= \mu_1(\lambda_0) \\
&= \mu(\lambda_0)
\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

$$L_1(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) = 0 \tag{3.3.27}$$

$$L_1(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) = 0 \tag{3.3.28}$$

$$\begin{aligned}
L_2(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) &= \widetilde{\phi}_1(0^-, \lambda_0) - \beta \widetilde{\phi}_1(0^+, \lambda_0) \\
&= \widetilde{\phi}_1(0^-, \lambda_0) \\
&= \phi_1(0^-, \lambda_0)
\end{aligned} \tag{3.3.29}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$L_2(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) = \psi_1(0^-, \lambda_0) \tag{3.3.30}$$

$$L_2(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) = -\beta \phi_2(0^+, \lambda_0) \tag{3.3.31}$$

$$L_2(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) = -\beta \phi_2(0^+, \lambda_0) \tag{3.3.32}$$

$$L_3(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) = T_\alpha(\phi_1)(0^-, \lambda_0) \tag{3.3.33}$$

$$L_3(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) = T_\alpha(\psi_1)(0^-, \lambda_0) \tag{3.3.34}$$

$$L_3(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) = -\frac{1}{\beta} T_\alpha(\phi_2)(0^+, \lambda_0) \tag{3.3.35}$$

$$L_3(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) = \frac{1}{\beta} T_\alpha(\phi_2)(0^+, \lambda_0) \tag{3.3.36}$$

eşitlikleri elde edilir.

$$L_4(\widetilde{\phi}_1(x, \lambda_0)) = 0 \tag{3.3.37}$$

$$L_4(\widetilde{\psi}_1(x, \lambda_0)) = 0 \tag{3.3.38}$$

eşitlikleri açıktır ve

$$\begin{aligned}
L_4(\widetilde{\phi}_2(x, \lambda_0)) &= r_1\phi_2(1, \lambda_0) + r_2T_\alpha(\phi_2(1, \lambda_0)) \\
&= -T_\alpha\psi_1(1, \lambda_0)\phi_2(1, \lambda_0) + \psi_2T_\alpha(\phi_2(1, \lambda_0)) \\
&= -W_\alpha(\phi_2(x, \lambda_0), \psi_2(x, \lambda_0))|_{x=1} \\
&= -\mu_2(\lambda_0) \\
&= -\mu(\lambda_0)
\end{aligned} \tag{3.3.39}$$

olur. Ayrıca $\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)$ fonksiyonunun tanımı gereği

$$L_4(\widetilde{\psi}_2(x, \lambda_0)) = 0 \tag{3.3.40}$$

olduğu açıktır. Şimdi bulmuş olduğumuz (3.3.25)-(3.3.40) eşitliklerini (3.3.24) determinantında yerine yazdığımızda,

$$\begin{vmatrix}
0 & \mu(\lambda_0) & 0 & 0 \\
\phi_1(0^-, \lambda_0) & \psi_1(0^-, \lambda_0) & -\beta\phi_2(0^-, \lambda_0) & -\beta\psi_2(0^+, \lambda_0) \\
T_\alpha(\phi_1)(0^-, \lambda_0) & T_\alpha(\psi_1)(0^-, \lambda_0) & -\frac{1}{\beta}T_\alpha(\phi_2)(0^+, \lambda_0) & -\frac{1}{\beta}T_\alpha(\psi_2)(0^+, \lambda_0) \\
0 & 0 & -\mu(\lambda_0) & 0
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.3.41}$$

olur. $\omega(\lambda_0) \neq 0$ kabulünü dikkate alırsak,

$$\begin{vmatrix}
\phi_1(0^-, \lambda_0) & -\beta\psi_2(0^+, \lambda_0) \\
T_\alpha(\phi_1)(0^-, \lambda_0) & -\frac{1}{\beta}T_\alpha(\psi_2)(0^+, \lambda_0)
\end{vmatrix} = 0 \tag{3.3.42}$$

eşitliği elde edilir.

$$\phi_1(0^-, \lambda_0) = \beta\phi_2(0^+, \lambda_0)$$

$$T_\alpha(\phi_1)(0^- i\lambda_0) = \frac{1}{\beta}T_\alpha(\phi_2)(0^+, \lambda_0)$$

eşitliklerini (3.3.42)'de dikkate aldığımızda,

$$\begin{vmatrix}
\beta\phi_2(0^+, \lambda_0) & -\beta\psi_2(0^+, \lambda_0) \\
\frac{1}{\beta}T_\alpha(\phi_2)(0^+, \lambda_0) & -\frac{1}{\beta}T_\alpha(\psi_2)(0^+, \lambda_0)
\end{vmatrix} = 0$$

bulunur. Bunun sonucunda da

$$\begin{aligned} -\beta \frac{1}{\beta} [W_{\alpha}(\phi_2(x, \lambda_0), \psi_2(x, \lambda_0))] |_{x=0^+} &= -\beta \frac{1}{\beta} \mu_2(\lambda_0) = 0 \\ &= -\mu(\lambda_0) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda $\mu_2(\lambda_0) \neq 0$ kabulümüzle çelişmektedir.

Lemma 3.3.6. (3.3.1)-(3.3.5) uyumlu kesirli Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. $\lambda = \lambda_0$ sayısının (3.3.1)-(3.3.5) probleminin özdeğeri olduğunu kabul edelim. O halde bu sayı (3.3.4)-(3.3.5) eşitlikleriyle tanımlı A operatörünün özdeğeri olacaktır. Teorem (3.2.1)'den A operatörü simetriktir. Buna göre y_0 , A operatörünün λ_0 özdeğerine uygun herhangi bir özfonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_0 \langle y_0, y_0 \rangle_{\alpha} &= \langle \lambda_0 y_0, y_0 \rangle_{\alpha} \\ &= \langle A y_0, y_0 \rangle_{\alpha} \\ &= \langle y_0, A y_0 \rangle_{\alpha} \\ &= \langle y_0, \lambda_0 y_0 \rangle_{\alpha} \\ &= \overline{\lambda_0} \langle y_0, y_0 \rangle_{\alpha} \end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. $\langle y_0, y_0 \rangle_{\alpha} \neq 0$ olduğundan $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ bulunur. Böylece bütün özdeğerlerin reel olduğu gösterilmiş oldu.

4. TARTIşMA ve SONUÇ

Buz tez çalışmasında, denkleminde özdeğer parametresi olan ve süreksizlik noktasında geçiş şartları ile verilmiş bir uyumlu kesirli sınır değer geçiş probleminin operatör tanımlı yorumu verildi. Operatörün simetrikliği gösterildi. Problemin çözümünün varlığı ve özdeğerlerinin reelliği verildi.

Benzer alışmalar, sınır şartlarına özdeğer parametreleri eklenerek ayrıca geçiş şartlarına özdeğer parametreleri eklenerek yapılabilir.



KAYNAKLAR

- Abdeljawad, T., 2015. On Conformable Fractional Calculus. J. Math. Anal. Appl., **279**, 57-56.
- Allahverdiev, B.P., Tuna, H. ve Yalçınkaya, Y., 2018. Conformable fractional Sturm-Liouville equation. Math. Meth. in the Appl. Sci., **42**, 3508-3526.
- Akdaş, F. U., 2019. Uyumlu Kesirli Türev ve İntegral Uygulamaları. (Yüksek Lisans Tezi), Uşak Üniversitesi, Fen Bil. Enst., Matematik Böl., Uşak.
- Akdoğan, Z., Demirci, M. ve Mukhtarov, O. Sh., 2005. Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Eigendependent Boundary and Transmissions Conditions. Acta Applicandae Mathematicae, **86**, 329-344.
- Akdoğan, Z., Demirci, M. ve Mukhtarov, O. Sh., 2005. Sturm-Liouville Problems with Eigendependent Boundary and Transmissions Conditions. Acta Math. Sci., **25(4)**, 731-740.
- Akdoğan Z., Demirci M. ve O. Sh. Mukhtarov, 2007. Normalized Eigenfunctions of Discontinuous Sturm-Liouville Type Problem with Transmission Conditions. Appl. Math. Sci., **1**, 2573-2591.
- Akdoğan, Z., Yakar, A. ve Demirci, M., 2019. Discontinuous fractional Sturm-Liouville problems with transmission conditions. Appl. Math. and Compt., **350**, 1-10.
- Al-Gwaiz M.A., 2007. Sturm-Liouville Theory and its Applications. Springer, Londra.
- Al-Refai, M.ve Abdeljawad, T., 2017. Fundamental Results of Conformable Sturm-Liouville Eigenvalue Problems. Complexity, **2017**.
- Amirov, R. Kh., 2006. On Sturm-Liouville operators with discontinuity conditions inside an interval. J. Math. Anal. Appl., **317**, 163-176.
- Anderson, D. R., Ulness, D. J., 2016. Results for Conformable Differential Equations. Preprint.
- Boyce, W. E. ve DiPrima, R. C., 2017. Elementary Differential Equation and Boundary Value Problems. John Wiley and Sons, New York, 544-554.
- Çelik U., (2018). Bir sınıf süreksiz Sturm-Liouville operatörü için düz ve ters problem üzerine. Mersin Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.
- Değerli K., 2018. Kesirli Mertebeden Türeve Uygulamalarla Genel Bakış. Yıldız Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, İstanbul.
- Demirci M., Akdoğan Z. ve Mukhtarov, O.Sh., 2004. Asymptotic Behavior of Eigenvalues and Eigenfunctions of One Discontinuous Value Problem. International Journal of Computational Cognition, **2**, 101-113.
- Gasimov, M. G. ve Levitan, B. M.(1964). About Sturm-Liouville differential operators., Math. Sborn., **63(3)**, 105.

- Gulşen, T., Yılmaz, E.ve Kemalöğlu, H., 2018. Conformable fractional sturm-liouville equation and some existence results on time scales. Turkish Journal of Mathematics, **42**, 1348-1360.
- Hammad, M. ve A., Khalil, R., 2014. Conformable fractional heat differential equation. J. Math. Anal. Appl., **94**, 215-221.
- Hammad, M. ve A., Khalil, R., 2014a. Abel's Formula and Wronskian for Conformable Fractional Differential Equation.Int. J. of Dif. Eq. and Appl., **13**, 177-183.
- Kadalkal, M., 2000. Sınır Şartlarının Birinde Özdeğer Parametresi Bulunduran Regüler Sınır-Değer-Geçiş Problemi. (Doktora Tezi), Ondokuz Mayıs Üniversitesi. Matematik Anabilim Dalı, Samsun.
- Kandemir, M., 2021. Diferensiyel Denklemler. Pegem Akademi, Ankara.
- Khalil, R., Al Horani M., Yousef A. ve Sababheh M., 2014. A new definition of fractional derivative, **264**, 65–70.
- Khalil, R., Abu-Shaab, H. 2015. Solution of some conformable fractional differential equations. International journal of pure and applied mathematics, **103**, 667-673.
- Kuzu Y., 2012. Sturm-Liouville Probleminin Bazı Özellikleri Ve Green Fonksiyonu. Ahi Evran Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Kırşehir.
- Menteş N., 2013. Bir Süreksiz Strum-Liouville Probleminin Bazı Özellikleri. Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Tokat.
- Miller, K. S., 1993. Introduction to Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. J. Wiley and Sons, New York.
- Mukhtarov, O. Sh., 1994. Discontinuous boundary-value problem with spectral parameter in boundary conditions. Turkish Journal of Mathematics, **18**, 183-192.
- Mukhtarov, O. S., Kadalkal, M. ve Altımsık, N., 2003. Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions. Indian J. of P. and Appl. Math., **34(3)**, 501-516.
- Mukhtarov, O. Sh., Kadalkal, M. and Muhtarov, F. S., 2004. On discontinuous Sturm-Liouville problems with transmission conditions. J. Math. Kyoto Univ., **44(4)**, 779-798.
- Part I, II: Linear differential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Company.
- Oldham, K. B. ve Spanier, J. 1974. The Fractional Calculus, Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order. Academic Press, New York.
- Yang Q. ve Wanyi W. (2010). A discontinuous sturm-liouville operator with indefinite weight. Journal of mathematics research, **2(3)**, 161-168.
- Yakar A. ve Akdoğan Z., 2017. On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem. Advances in Difference Equations, **2017(1)**, 1-15.
- Akdoğan, Z. ve Kunduracı, S., 2015. Numerical methods for discontinuous Sturm-Liouville problems. Journal of New Theory, **2**, 33-42.