

39421

İSTANBUL TEKNİK ÜNİVERSİTESİ * FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

39421

**BİR UÇAK DIŞ YÜKÜ YAPISININ
DİNAMİK DAVRANIŞININ İNCELENMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Uçak Müh. Halit S. TÜRKMEN

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21 Haziran 1993

Tezin Savunulduğu Tarih : 6 Temmuz 1993

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Zahit MECİTOĞLU

Diğer Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Necla KADIOĞLU

Yrd. Doç. Dr. Temel KOTİL

TEMMUZ 1993

ÖNSÖZ

Askeri mühendislik alanındaki teknolojik gelişmeler Türkiye gibi stratejik önemi büyük olan ülkeler için oldukça önemli olmaktadır. Bu ülkeler kendi savunma sistemlerini kurmak mecburiyetindedirler. Bu sistemlerin içinde, savaş uçakları ve bu uçaklara ait teçhizatlar büyük yer tutmaktadır.

Askeri amaçlı uçaklarda kullanılan bomba adaptörleri, kullanıldığı uçağın özellikleri ile uyumlu olmalıdır. Dolayısıyla uçakların manevra kabiliyeti ve hızlarındaki gelişmeler bu yapıları da etkileyecek ve yeni adaptör yapıları geliştirilmek durumunda kalınacaktır. Söz konusu geliştirmelerin başarı ile tamamlanabilmesi için adaptör yapılarının statik ve dinamik özelliklerinin bilinmesi gerekli olacaktır.

Bir bomba adaptörü yapısı ele alınarak serbest titreşim karakteristikleri incelenen bu çalışmada yapıyı oluşturan kabuklar ve çubuklar hakkında bilgi verilmiş, yapının dinamik denklemlerinin çözümünde kullanılan sonlu elemanlar yöntemi anlatılmıştır. Yapının sonlu eleman modelinin oluşturulmasında ve çözüm aşamasında I-DEAS yazılımı kullanılmıştır.

Bu tezin hazırlanmasında beni yönlendiren Sayın Doç. Dr. Zahit MECİTOĞLU'na teşekkür ederim.

İstanbul, Haziran 1993

Halit S. Türkmen

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
NOTASYON LİSTESİ	v
ÖZET	vii
SUMMARY	viii
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. ADAPTÖR TİTREŞİMLERİNİN MATEMATİK MODELİ	3
2.1. Adaptörün Yapısı ve Temel Yaklaşımlar	3
2.2. Kabuk Denklemleri	3
2.2.1. Yerdeğiştirme Modeli	5
2.2.2. Birim Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Denklemleri	6
2.2.3. Bünye Denklemleri	8
2.2.4. Kuvvet ve Moment Bileşkeleri	8
2.3. Çubuk Denklemleri	10
2.3.1. Yerdeğiştirme Modeli	10
2.3.2. Birim Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Denklemi ..	12
2.3.3. Bünye Denklemleri	12
2.4. Kiriş Denklemleri	12
2.4.1. Yerdeğiştirme Modeli	13
2.4.2. Birim Şekildeğiştirme-Yerdeğiştirme Denklemi ...	13
2.4.3. Bünye Denklemi	13
2.5. Hamilton İlkesi	13
2.5.1. Potansiyel Enerji İfadeleri	14
2.5.2. Kinetik Enerji İfadeleri	15
BÖLÜM 3. SONLU ELEMANLAR METODU	16
3.1. Sonlu Elemanlar Metodunun Temel Kavramları	16
3.2. I-DEAS Sonlu Eleman Yazılımı	17
3.2.1. Ön-İşlem Kademesi	20
3.2.2. Çözüm Kademesi	20
3.2.3. Son İşlem Kademesi	21

3.3. Sonlu Elemanlar Metodunun Titreşim Problemlerine Uygulanması	21
3.4. Sonlu Elemanlar Formülasyonu	23
3.4.1. Kiriş Eleman	23
3.4.2. Çubuk Eleman	26
3.4.3. Üçgen Kabuk Eleman	33
3.4.4. Dörtgen Kabuk Eleman	37
BÖLÜM 4. ADAPTÖR YAPISININ MODELLENMESİ VE ÇÖZÜM	44
4.1. Adaptör Yapısının Modellenmesi	44
4.2. Çözüm Yöntemi	47
BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME	49
KAYNAKLAR	51
EKLER	53
ÖZGEÇMİŞ	60

NOTASYON LİSTESİ

ε	: Normal birim şekildeğiştirme
γ	: Kayma birim şekildeğiştirmesi
σ	: Normal gerilme
τ	: Kayma gerilmesi
E	: Young modülü
G	: Kayma modülü
ν	: Poisson oranı
q	: Yerdeğiştirme vektörü
U	: Yerdeğiştirme vektörünün x eksen yönündeki bileşeni
V	: Yerdeğiştirme vektörünün y eksen yönündeki bileşeni
W	: Yerdeğiştirme vektörünün z eksen yönündeki bileşeni
α_1, α_2	: Kabuğun parametrik eğrileri
ζ	: Kabuğun normal eğrisi
t_1, t_2	: Parametrik eğriler boyunca birim vektörler
n	: Kabuğun normali boyunca birim vektör
κ_1, κ_2	: Birim şekildeğiştirmenin eğilme bileşenleri
φ	: Kabuk referans yüzeyinin burulması
C	: Uzama rijidliği
D	: Eğilme rijidliği
h	: Kabuğun kalınlığı
u	: Bir noktanın yerdeğiştirme vektörü
U	: Rijid hareketin ötelenme bileşeni
Ω	: Dönme vektörü
r	: Konum vektörü

Π	: Potansiyel enerji
$\dot{I}$	: İç enerji
T	: Kinetik enerji
ρ	: Yoğunluk
t	: Zaman
A	: Alan
N	: Şekil fonksiyonları matrisi
Q	: Düğüm noktası yerdeğiştirmeleri vektörü
$\dot{q}$	: Hız vektörü
B	: Genleme şekil fonksiyonları matrisi
E	: Elastisite matrisi
$\dot{Q}$	: Düğüm noktası hızları vektörü
K	: Katılık matrisi
M	: Kütle matrisi
f	: Bir boyutlu elemanlar için şekil fonksiyonları matrisi
L	: Bir boyutlu elemanın uzunluğu
λ	: Dönüşüm matrisi
I_y	: Kesitin y eksenine etrafındaki atalet momenti
I_z	: Kesitin z eksenine etrafındaki atalet momenti
θ	: Burulma miktarı
J	: Kesitin polar atalet momenti
J	: Jakobiyen matris
D_G	: Şekil fonksiyonlarının global eksenlere göre türevi
D_L	: Şekil fonksiyonlarının yerel eksenlere göre türev matrisi
C_N	: Düğüm noktası koordinatları matrisi

ÖZET

Birinci bölümde adaptör yapısının titreşimlerinin öneminden bahsedilmiştir. Bu bölümde yapı genel olarak tanıtılmış ve buna benzer yapılar ile ilgili çalışmalardan örnekler verilmiştir.

İkinci bölümde adaptör yapısını meydana getiren yapı elemanları tanıtılmıştır. Bu yapı elemanlarının analizlerinin yapılabilmesi için kullanılan yaklaşımlar ele alınmıştır. Yapının büyük çoğunluğunu meydana getiren kabuklar hakkında geniş ölçüde bilgi verilmiş ve kullanılan varsayımlar anlatılmıştır. Yapının diğer kısımlarını meydana getiren çubuklar ve kirişler ele alınmış ve çubuk ve kiriş yapılar için yapılan kabuller anlatılmıştır. Yapılan kabullerin ışığı altında tüm yapı elemanları için potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri elde edilmiştir. Yapının dinamik analizi için Hamilton prensibi yazılmıştır.

Üçüncü bölümde adaptör yapısının modellenmesinde faydalanan sonlu elemanlar metodu anlatılmıştır. Yapının dinamik analizi için Hamilton prensibinden faydalanılarak sonlu eleman formülü elde edilmiştir. Adaptör yapısının modellenmesinde kullanılan sonlu elemanlardan bahsedilmiştir. Adaptör yapısının modellenmesinde ve dinamik analizinde kullanılan I-DEAS yazılımı tanıtılmıştır. Yapının modellenmesinde kullanılan elemanların katılık ve kütle matrislerinin elde edilmesinde nasıl bir yol izlendiği anlatılmıştır.

Dördüncü bölümde adaptörün temel parçalarının sonlu elemanlar ile modellenmesinde nasıl bir yol izlendiği ve sayısal çözüm tekniği anlatılmıştır.

Beşinci bölümde sonuçlar üzerinde durulmuştur. Yapının serbest titreşim frekansları ve mod şekilleri ilk altı mod için elde edilmiştir. Ara takviyelerin, gövde bağlantı ve taşıma profillerinin ve yükleme durumunun titreşim frekanslarını ne şekilde etkilediği ele alınmıştır.

DYNAMIC BEHAVIOR OF AN EXTERNAL STORAGE OF AIRCRAFT

SUMMARY

In this thesis, the free vibration of a bomb adapter structure has been reviewed in detail. The bomb adapter is a structure that consists of shells, beams and rods. This bomb adapter carries bombs and rockets as loads.

In the first chapter, the importance of the vibration of the adapter structure has been highlighted. In this chapter, the structure has been introduced briefly. Also several studies related to the cylindrical shell structures have been reviewed. Additionally, several studies about stiffened shell structures have been presented.

In the second chapter, the structural components those form the adapter have been introduced. The assumptions which are used for analyzing similar structures have been reviewed. The most of the adapter structure has been consisted of shells. Therefore, the shell structures have been reviewed.

The basic equations which describe the behavior of a thin elastic shell were originally derived by Love in 1888. These equations, together with the assumptions upon which they are based, form a theory of thin elastic shells which is commonly referred to as Love's first approximation. In this chapter, the basic differential equations of the first approximation have been derived using, as a basis, E. Reissner's version of the Love theory.

In the three dimensional theory of elasticity, the fundamental equations occur in three broad categories. Thus, it has been recalled that in elasticity we have equations of motion which are obtained from a balance of the forces acting on some fundamental element of the medium considered, that we have strain-displacement relations which are obtained from a strictly geometrical consideration of the process of deformation, and that we have the constitutive law of elasticity which is introduced in order to provide a relationship between the stresses and the strains in the elastic medium. However, the solution of problems in the three-dimensional theory of elasticity involves vast complications. Thus, a group of simplifying assumptions that provide a reasonable description of the behavior of thin elastic shells was proposed by Love and has led to the development of a subclass of the theory of elasticity known as the theory of thin elastic shells.

Love's first approximation to the theory of thin elastic shells is based upon the following postulates:

1. The shell is thin.
2. The deflections of the shell are small.
3. The transverse normal stress is negligible.
4. Normals to the reference surface of the shell remain normal to it and undergo no change in length during deformation.

The rest of the adapter structure consists of beams and rods. Beams and rods are assumed to be one dimensional structures. Therefore, the cross section of these structures moves as a rigid plate. This movement consists of a translational displacement and a rotation.

Equations of motion have been derived by using Hamilton's principle. Hamilton's principle states that the actual path followed by a dynamical process is such as to make

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\Pi - T) dt = 0$$

That is, the integral of $(\Pi - T)$ takes an extremum value which can be shown to be a minimum.

In the third chapter, the method for modeling the adapter structure has been explained in detail. The structure of adapter has been modeled by using the finite elements method. The basic structural components of adapter have been discretized using appropriate finite elements. A finite element is a subregion of a discretized continuum. It is of finite size and usually has a simpler geometry than that of the continuum. The finite-element method enables us to convert a problem with an infinite number of degrees of freedom to one with a problem with a finite number in order to simplify the solution process. Although the original applications were in the area of solid mechanics, its usage has spread to many other fields having similar mathematical bases. In any case it is a computer-oriented method that must be implemented with appropriate digital computer programs.

The finite-element approach yields an approximate analysis based upon an assumed displacement field, a stress field, or a mixture of these within each element. The assumption of displacement functions is the technique most commonly used. The following steps suffice to describe this approach:

1. The continuum is divided into a finite number of subregions of simple geometry.
2. Key points were selected on the elements to serve as nodes, where conditions of equilibrium and compatibility are to be enforced.
3. Displacement functions are assumed within each element so that the displacements at each generic point are dependent upon nodal values.

4. Strain-displacement and stress-strain relationships are satisfied within a typical element.

5. Stiffness and equivalent nodal loads were determined for a typical element using work or energy principles.

6. Equilibrium equations are determined, and these equations are solved.

It is required that, in fact, a solution technique which is numerically stable, easily programmed and can be adapted to a wide range of problem types without excessive interference by the user. From a structural viewpoint the finite element method provides the most satisfactory solution technique in this category.

The essence of the finite element method involves dividing the structure into a suitable number of small pieces called finite elements. The intersections of the sides of the elements occur at nodal points or nodes and the interfaces between element are called nodal lines and nodal planes.

For structural problems involving static or dynamic applied loads it will be defined the behavior of the structure in terms of displacements and/or stresses. Within each of the elements it is needed to select a pattern or shape for the unknown displacement or stress. In the case of a displacement field the shape function defines the behavior of displacements within an element in terms of unknown quantities specified at the element nodes. These nodal values are known as nodal connection quantities and allow the deformation behavior in one element to be communicated to adjacent elements.

For free vibration analysis of the adapter structure, the equation of motion has been obtained by using Hamilton principle. This equation has been obtained as follows;

$$M\ddot{Q} + KQ = 0.$$

For a specific element type (beam, plate, shell, etc.), the shape functions are identical for each element. Thus, a given element need only be programmed once and the computer can repeat the operations specified for one, general, element as often as required.

Finite elements which were used for modeling of adapter structure have been introduced. These are shell, beam, rod, rigid, and mass elements. Two different types shell elements have been used: Quadrilateral and triangle.

The derivation of element equations for one-dimensional structural element has been considered in this section. These elements can be used for the analysis of bar type systems like planar trusses, beams, continuous beams, planar frames, grid systems and space frames.

A rod element is a bar which can resist only axial forces (compressive or tensile) and can deform only in the axial direction. It will not be able to carry transverse loads or bending moments. In the two dimensional analysis, each of the two nodes can have components of displacement parallel to X and Y axis. In three dimensional analysis, each node can have displacement components in X, Y and Z directions.

A beam element is a bar which can resist not only axial forces but also transverse loads and bending moments. In the analysis of planar beams, each of the two nodes of an element will have two translational displacement components (parallel to X and Y axes) and a rotational displacement (in the plane XY). For a space beam element, each of the two ends is assumed to have three translational displacement components (parallel to X, Y and Z axes) and three rotational displacement components (one in each of the three planes XY, YZ and XZ).

It will be argued by many shell experts that when it is compared the exact solution of a shell approximated by flat facets to the exact solution of a truly curved shell considerable differences in the distribution of bending moments, etc., occur. This is undoubtedly true, but for simple elements the discretization error is approximately of the same order and excellent results can be obtained with the flat shell element approximation.

In a shell, the element will be subject, generally, both to bending and 'in-plane' forces. For a flat element these cause independent deformations, provided the local deformations are small, and therefore the ingredients for obtaining the necessary stiffness matrices are available.

In the division of an arbitrary shell into flat elements only triangular elements can be used. Although the concept of the use of such elements in the analysis has been suggested as early as 1961. The success of such analysis was hampered by the lack of a good stiffness matrix for triangular plate elements in bending.

Some shells, for example those with general cylindrical shapes, can be well represented by flat elements of rectangular or quadrilateral shape. With good stiffness matrices available for such elements the progress here has been more satisfactory.

For many practical purposes the flat element approximation gives very adequate answers and indeed permits an easy coupling with edge beam and rib members.

A linear shell element consists of a plate bending and a plane stress element. For a shell element, each node can have three translational displacement components in X, Y and Z directions and three rotational displacement components one in each of the three planes XY, YZ and XZ.

In the fourth chapter, modeling of the adapter structure and solution technique have been mentioned.

In the free vibration analysis of the adapter structure with finite elements method, the I-DEAS software has been used. I-DEAS software consists of drafting, solid modeling, finite element modeling and system dynamic analysis families.

In this thesis, solid modeling and finite element modeling families have been used. The adapter structure has been modeled as a surface in the solid modeling family. Then this surface has been divided into quadrilateral and triangle shell elements in the finite elements modeling family. One dimensional stiffening structures have been modeled by using beam and rod elements. Bombs and some connecting parts have been modeled by using mass elements. The adapter body-launcher connection points have been modeled by using rigid elements. The finite element model of adapter has been restrained at two nodes where the adapter is connected to the aircraft wing. The free vibration analysis of adapter has been done in the I-DEAS finite element modeling model solution task. The adapter structure has been analyzed for five different stiffening cases. However, adapter structure has been analyzed with various bombs and rocket loads. For each case, the first six mode shapes and frequencies have been obtained.

For the free vibration analysis of adapter structure, the simultaneous vector iteration method has been used. The vector iteration method assumes that the natural frequencies are distinct and well separated such that,

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n.$$

In the simultaneous vector iteration technique, it is applied to the eigenproblem in standard form, that is

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\omega^2} \right) \Psi = 0.$$

The method converges to the highest eigenvalue of $\mathbf{A}$. Therefore the stiffness matrix $\mathbf{K}$ is expressed in the form $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ and the mass matrix is expressed in the form $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{L}^{-T}$.

In the fifth chapter, the natural frequencies and mode shapes of adapter structure has been obtained for different stiffening and load cases. In the case of removal of some stiffeners, it has been observed decrease in the natural frequencies. In the case of removal bombs and rockets, it has been observed increase in the natural frequencies. These natural frequencies' values have been presented in a table. Mode shapes have been presented in the figures. First mode shape shows those lateral vibrations. The other mode shapes show that extensional vibrations.

The natural frequencies obtained in the result of free vibration analysis of adapter structure can be used determining the fatigue life of the structure. However, knowledge of these characteristics is necessary for the determination of structural integrity.



BÖLÜM 1. GİRİŞ

Uçak dış yapıları kanat altı ve kanat uçlarındaki harici yakıt tankları, motor beşikleri, savaş uçaklarında bazı silah sistemleri ve bomba adaptörleri olarak sıralanabilir. Bu çalışma ile bir bomba adaptörünün serbest titreşim karakteristiklerinin elde edilmesi ve adaptör yapısının çeşitli takviye durumlarının bu karakteristikler üzerindeki etkilerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bomba adaptörleri avcı uçaklarında bomba ve roketlerin uçak yapısı ile uyumlu bir şekilde entegrasyonunu sağlamak amacıyla kullanılan yapı elemanlarıdır. Ayrıca bomba adaptörleri bomba ve roketlerin emniyetli bir şekilde taşınması ve özel mekanizmaları ile bunların atılması görevini yerine getirir. Havacılıkta kullanılan tüm yapılarda olduğu gibi bomba adaptörlerinin de hafif ve sağlam olması istenir. Dolayısıyla narin yapıdadırlar. Bir ve iki boyutlu takviyelerle desteklenmiş ince kabuk yapılar kullanılarak istenilen hafiflik ve sağlamlık elde edilmektedir. Bu çalışmada serbest titreşimleri incelenecek bomba adaptörü de bu tür takviyelerle desteklenmiş ince kabuk yapısındadır. Söz konusu bomba adaptörü F4, F104 ve F5 uçaklarında kullanılan KOBRA bomba adaptörünün İ.T.Ü Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi - Uçak Mühendisliği Bölümünde geliştirilmesi ile elde edilmiştir.

Bombaların ve roketlerin güvenli bir şekilde taşınabilmesi, söz konusu bomba ve roketlerin atılmasını sağlayan mekanizma ve elektrikli devrelerin sağlıklı bir şekilde çalışması bakımından adaptör yapısının titreşimleri oldukça önemlidir. Serbest titreşim karakteristiklerinin bilinmesi adaptörün yapısal bütünlüğünün ve yapının yorulma ömrünün saptanması için gereklidir.

Havacılıkta geniş kullanım alanı olan kabuk yapıların titreşimleri hakkında şimdiye kadar bazı çalışmalar yapılmıştır. Bunlardan Koga [1] ince elastik silindirik kabukların serbest titreşimleri konusunda yapılan çalışmaları derleyerek konunun geçmişini ortaya koymuştur. Koga ve Saito [2] silindirik kabukların yanlamasına serbest titreşimlerini bir ucu serbest diğer ucu mesnetli olacak şekilde bir sınır şartı için incelemiş ve Rayleigh ve Love [3] tipi yanlamasına titreşim modu şekillerinin lineer bir kombinasyonunu elde etmişlerdir. Yine Koga [4] dairesel kabukların serbest titreşimlerini değişik sınır şartları için inceleyerek sonuçta titreşim karakteristiklerinin bir ucun mesnetli olup olmadığı ve mesnetli ucun eksenel yönde serbest olup

olmadığına bağlı olduğunu ortaya koymuştur. Mustafa ve Ali [5] enerji prensiplerini ve Rayleigh-Ritz işlemlerini kullanarak dairesel ve/veya boylamasına takviyeli silindirik kabukların serbest titreşimlerini incelemiştir.

Takviyeli kabuk yapılar konusunda yapılan çalışmalardan, Mecitoğlu ve Dökmeci [6] takviyeli ince silindirik kabukların serbest titreşimlerini bulurken collocation yöntemini kullanmış ve değişik geometri ve malzeme özellikleri için titreşim karakteristiklerini incelemiştir. Egle ve Sewall [7] takviyeli kabukların serbest titreşimlerini takviyeleri birer ayrık eleman kabul ederek incelemiştir.



BÖLÜM 2. ADAPTÖR TİTREŞİMLERİNİN MATEMATİK MODELİ

2.1. ADAPTÖRÜN YAPISI VE TEMEL YAKLAŞIMLAR

Adaptörün temel parçaları ince kabuk yapılar ve destek yapılardan meydana gelmektedir. İnce kabuk yapılar ve destek yapılar gerçekte üç boyutlu yapılardır. Analiz için bir kabuk, çubuk ya da kirişe üç boyutlu bir cisim olarak sürekli ortamlar mekaniğinin yöntemleri uygulanabilir. Ancak, bu prensiplere dayanan bir hesap genellikle çok zor ve karmaşık olacaktır. Bu sebeple kabuk yapıların bir boyutunun diğer iki boyutuna göre çok küçük olması, çubuk ve kiriş yapıların da iki boyutunun diğer boyutu yanında çok küçük olması kabukta problemi iki boyutlu hale çubuk ve kirişte de bir boyutlu hale indirgeyebilmemizi mümkün kılar. Bu indirgeme için bir takım yaklaşımlar olmakla birlikte burada, literatürde de en çok kullanılan Love'un ince elastik kabuk teorisi ve Bernoulli-Navier çubuk teorisi kullanılarak modelleme yapılacaktır.

2.2. KABUK DENKLEMLERİ

İnce elastik kabuğun davranışını tanımlayan temel denklemler 1888'de Love [8,9] tarafından türetilmiştir. Burada kabuğun temel diferansiyel denklemlerinin türetilmesinde Love'un ince elastik kabuklar teorisinin E. Reissner [10] versiyonu kullanılmıştır.

Love'un ince elastik kabuklar teorisine ilk yaklaşımı aşağıdaki kabullere dayanır:

- 1-Kabuk incedir.
- 2-Kabuğun çökme miktarları küçüktür.
- 3-Yanlamasına normal gerilme ihmal edilir.

4-Kabuğun referans yüzeyinin normalleri deformasyon sonrasında da kendisine normal kalır ve bu normal üzerinde seçilen bir hattın uzunluğunda değişik olmaz.

Şimdi bu kabullerin anlamları üzerinde durulacaktır. İncelik kabulü tüm teori için ilk ve esas basamağı oluşturur. Love'un kabullerinin diğerleri sadece ince kabuklar için uygundur. Dolayısıyla diğer kabuller incelik kabulünün sonucunda var olmaktadır. İnceliğin kesin bir tanımı olmamakla birlikte genel bir kural olarak, kalınlığı her yerde referans yüzeyin eğriliğinin yarıçapının onda birinden daha küçük olan kabuklar ince kabul edilir. Burada aynı zamanda kabuğun kalınlığı diğer boyutlarının en fazla onda biri olabilir.

Kabuğun çökme miktarlarının küçük olması kabulü kabuğun orijinal (deforme olmamış) şekline göre tüm türevleri ve hesaplamaları yapmamıza izin verir. Böylece teorisinin Hooke yasası ile birlikte lineer ve elastik olmasını sağlar.

Love teorisinin diğer iki varsayımı ince elastik kabukların bünye denklemleri ile ilgilidir. Normalin korunumu varsayımı referans düzleme normal yöndeki birim şekil değiştirme bileşenlerinin ihmal edildiğini gösterir. Bu kabullerin anlaşılması için homojen, izotropik bir malzeme için sıcaklık etkilerini içermeyen Hooke yasasını şu şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}\sigma_n \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_n \\ \varepsilon_n &= \frac{\sigma_n}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_2\end{aligned}\tag{2.1a}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G} \\ \gamma_{1n} &= \frac{\tau_{1n}}{G} \\ \gamma_{2n} &= \frac{\tau_{2n}}{G}\end{aligned}\tag{2.1b}$$

burada $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$ üç eksen yönünde normal gerilmeler, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_n$ bu yönler boyunca normal birim şekil değiştirmelerdir. $\tau_{12}, \tau_{1n}, \tau_{2n}$ ve $\gamma_{12}, \gamma_{1n}, \gamma_{2n}$ sırasıyla kayma

gerilmeleri ve kayma birim şekil değiştirmelerini gösterir. E, G ve ν sırasıyla Young modülü, kayma modülü ve Poisson oranıdır.

Üç boyutlu elastisite teorisinde problemlerin çözümü oldukça zordur. Bu nedenle ince elastik kabukların davranışını karşılayan bir grup ifade Love tarafından ileri sürülmüştür. Bu teori üç boyutlu kabuğun denge denklemlerinin her birinin indirgenmiş bir karşılığını verir. Love'un dördüncü varsayımı olan normalin korunumu varsayımı referans yüzeye normal yöndeki birim şekil değiştirme bileşenlerinin ihmal edildiğinin ifadesidir. Eşitlik 2.1b' nin de kullanımı ile aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$\varepsilon_n = \gamma_{1n} = \gamma_{2n} = 0 \quad (2.2)$$

$$\tau_{1n} = \tau_{2n} = 0$$

Love teorisinin üçüncü varsayımı yanlamasına gerilmenin sıfır olmasını gerektirmektedir. Bunun sonucunda aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\sigma_n = 0 \quad (2.3)$$

Love teorisinin üçüncü ve dördüncü varsayımlarının bir sonucu olarak, Eşitlik 2.1 ile verilen gerilme-birim şekil değiştirme denklemleri ince elastik kabuklar için aşağıdaki iki boyutlu bünye denklemlerine indirgenir [11]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_2 \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_1 \\ \gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G} \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.2.1. YERDEĞİŞTİRME MODELİ

Kabuk uzayında yerdeğiştirme vektörü

$$\mathbf{q}(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) = U(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) \mathbf{t}_1 + V(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) \mathbf{t}_2 + W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) \mathbf{n} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır. Burada α_1, α_2 ve ζ eğrisel koordinatlar, t_1, t_2, n sırasıyla α_1, α_2 ve referans yüzeyi normali (n) boyunca birim vektörler; U, V, W bu vektörlere karşılık gelen koordinat eksenleri yönlerinde yerdeğiştirme vektörünün bileşenleridir. Love'un normalin korunumu varsayımı yerdeğiştirme miktarlarının kabuğun kalınlığı boyunca lineer olarak dağıldığını ortaya koyar. Bunun sonucunda (2.5) ifadesi aşağıdaki şekle gelir:

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) &= u(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \cdot u'(\alpha_1, \alpha_2, 0) \\ V(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) &= v(\alpha_1, \alpha_2) + \zeta \cdot v'(\alpha_1, \alpha_2, 0) \\ W(\alpha_1, \alpha_2, \zeta) &= w(\alpha_1, \alpha_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

burada türev ifadeleri ζ' ya göre alınan türevlerdir. u, v ve w büyüklükleri referans yüzeyinde bir noktanın yerdeğiştirme vektörünün bileşenleridir. u' ve v' büyüklükleri sırasıyla α_1, α_2 parametrik eğrileri boyunca tanjant değerlerini gösterir. Bundan sonra u' ve v' tanjant değerleri β_1 ve β_2 ile gösterilecektir [11].

2.2.2. BİRİM ŞEKİLDEĞİŞTİRME - YERDEĞİŞTİRME DENKLEMLERİ

Normal ve kayma birim şekil değiştirmesi bileşenleri yerdeğiştirme vektörünün bileşenlerine aşağıdaki ifadeler ile bağlanır:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}} \right) + \frac{1}{2g_i} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial g_i}{\partial \alpha_k} \frac{u_k}{\sqrt{g_k}} \quad i=1,2,3 \quad (2.7)$$

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g_i g_j}} \left[g_i \frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{u_i}{\sqrt{g_i}} \right) + g_j \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \left(\frac{u_j}{\sqrt{g_j}} \right) \right] \quad i=1,2,3 \quad i \neq j \quad (2.8)$$

burada kabuklar sözkonusu olduğu için,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_1 & \alpha_2 &= \alpha_2 & \alpha_3 &= \zeta \\ u_1 &= U & u_2 &= V & u_3 &= W \\ g_1 &= A_1^2 (1 + \zeta / R_1)^2 & g_2 &= A_2^2 (1 + \zeta / R_2)^2 & g_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitlikleri geçerli olacaktır. Burada A_1 ve A_2 sırasıyla yüzeyin konum vektörünün eğrisel koordinatlarına (α_1 ve α_2) göre türevlerini, R_1 ve R_2 temel eğrilik yarıçaplarını, g_1 , g_2 ve g_3 yüzeyin temel formunun bileşenlerini göstermektedir (EK.A).

Eşitlik 2.9' u Eşitlik 2.8 içine katarsak, Love teorisine göre ihmal edilmeyen birim şekil değiştirmeler aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} (u_1 + \zeta \beta_1) + \frac{u_2 + \zeta \beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{W}{R_1} \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} (u_2 + \zeta \beta_2) + \frac{u_1 + \zeta \beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{W}{R_2} \\ \gamma_{12} &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2 + \zeta \beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1 + \zeta \beta_1}{A_1} \right)\end{aligned}\quad (2.10)$$

Birim şekil değiştirmeler referans yüzeyin birim şekil değiştirmesi ve kabuk kalınlığı boyunca dönme miktarlarından gelen katkıların toplamı şeklinde aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^0 + \zeta \kappa_1 \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_2^0 + \zeta \kappa_2 \\ \gamma_{12} &= \gamma_{12}^0 + \zeta \varphi\end{aligned}\quad (2.11)$$

burada

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^0 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{u_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + \frac{w}{R_1} \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{u_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + \frac{w}{R_2} \\ \gamma_{12}^0 &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{u_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{u_1}{A_1} \right)\end{aligned}\quad (2.12a)$$

$$\begin{aligned}
\kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial \beta_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\beta_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\
\kappa_2 &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial \beta_2}{\partial \alpha_2} + \frac{\beta_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \\
\varphi &= \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\beta_2}{A_2} \right) + \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\beta_1}{A_1} \right)
\end{aligned} \tag{2.12b}$$

eşitlikleri ile ifade edilir ve $\varepsilon_1^0, \varepsilon_2^0$ ve γ_{12}^0 büyüklükleri referans yüzeyin normal ve kayma gerilmelerini gösterir. κ_1 ve κ_2 büyüklükleri birim şekil değiştirmenin lineer olarak dağılmış eğilme bileşenini gösterir. φ büyüklüğü deformasyon sırasında referans yüzeyin burulmasını gösterir [11].

2.2.3. BÜNYE DENKLEMLERİ

Love teorisinin üçüncü varsayımı yanlamasına normal gerilmenin ihmal edildiğinin ifadesidir. Bu $\sigma_n = 0$ olduğu anlamına gelir. Dördüncü varsayımın sonucunda ise yüzeye normal yöndeki birim şekil değiştirme bileşenlerinin tümünün ihmal edildiği anlaşılır. Bu iki varsayımın neticesinde izotropik bir kabuk için gerilme-birim şekil değiştirme denklemleri aşağıdaki gibi yazılabilir [11]:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_2 \\
\varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_1 \\
\gamma_{12} &= \frac{\tau_{12}}{G}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

2.2.4. KUVVET VE MOMENT BİLEŞKELERİ

Birim şekil değiştirmelerin ve gerilmelerin ince elastik kabuğun kalınlığı boyunca lineer olarak dağıldığı daha önce ifade edilmişti. Bu kabul gerilme dağılımlarının kabuğun kalınlığı boyunca integre edilmesini ve bu gerilmelerin statik

olarak eşdeğer kuvvet ve moment bileşkeleri cinsinden ifade edilmesini sağlar. Böyle integrasyonları oluşturarak ζ 'ya göre değişkenler tamamen elimine edilebilir.

Gerilme dağılımları kabuğun kalınlığı boyunca integre edilerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_{12} \\ Q_1 \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \\ \tau_{1n} \end{Bmatrix} (1 + \zeta / R_2) d\zeta \quad (2.14a)$$

$$\begin{Bmatrix} N_2 \\ N_{21} \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \\ \tau_{2n} \end{Bmatrix} (1 + \zeta / R_1) d\zeta$$

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} (1 + \zeta / R_2) \zeta d\zeta \quad (2.14b)$$

$$\begin{Bmatrix} M_2 \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{\zeta} \begin{Bmatrix} \sigma_2 \\ \tau_{21} \end{Bmatrix} (1 + \zeta / R_1) \zeta d\zeta$$

Burada N_1 , N_2 , N_{12} ve N_{21} normal kuvvet bileşkelerini, Q_1 ve Q_2 kayma kuvveti bileşkelerini, M_1 , M_2 , M_{12} ve M_{21} moment bileşkelerini göstermektedir.

İnce elastik bir kabuğun kuvvet-birim şekil değiştirme ilişkileri malzemenin izotropik kabul edilmesi ile aşağıdaki şekilde elde edilir [11]:

$$\begin{aligned}
N_1 &= C(\varepsilon_1^0 + \nu \varepsilon_2^0) \\
N_2 &= C(\varepsilon_2^0 + \nu \varepsilon_1^0) \\
N_{12} &= N_{21} = C(1 - \nu) \gamma_{12}^0 / 2 \\
M_1 &= D(\kappa_1 + \nu \kappa_2) \\
M_2 &= D(\kappa_2 + \nu \kappa_1) \\
M_{12} &= M_{21} = D(1 - \nu) \tau / 2
\end{aligned} \tag{2.15}$$

burada

$$\begin{aligned}
C &= Eh / (1 - \nu^2) \\
D &= Eh^3 / 12(1 - \nu^2)
\end{aligned} \tag{2.16}$$

şeklinde ifade edilen uzama ve eğilme rijidliğidir [11].

2.3. ÇUBUK DENKLEMLERİ

Çubuğun enine olan boyutları boyuna göre olandan çok küçük olduğu için herhangi bir düzlem kesitin üzerinde bulunan noktaların yer değiştirmeleri rijit bir levhanın küçük hareketleri gibi kabul edilecektir. Buna göre, dik kesit yer değiştirdikten sonra tekrar düzlem kalıyor demektir.

Çubukların eğilmesinde, dik kesitlerin yer değiştirmeden sonra da düzlem kalması varsayımı, ilk defa açık bir tarzda, 1705 tarihinde Bernoulli tarafından ileri sürülmüş; ondokuzuncu yüzyılın ortalarına doğru Navier ise bu varsayımı genel eğilme teorisine geniş bir tarzda uygulamıştır. Bundan ötürü bu gün, çubukların eğilme bahsinde, varsayımdan Bernoulli-Navier tarzında ortak bir adla bahsedilmektedir [12].

2.3.1. YERDEĞİŞTİRME MODELİ

Yukarıdaki varsayımın ışığı altında bir çubuk kesitinin hareketinin bir ötelenme ve bir dönme hareketinin bileştirilmesinden meydana geleceği bilinmektedir. Bu

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (2.17)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\mathbf{u}$ çubuk içindeki herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme vektörüdür ve bileşenleri cinsinden,

$$\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k} \quad (2.18)$$

şeklinde yazılır. 2.17 eşitliğinde sağ taraftaki ilk terim rijit hareketin ötelenme bileşenini, ikinci terim ise dönmeden ileri gelen kısmını gösterir. $\mathbf{U}$ yerdeğiştirme vektörünün ve $\boldsymbol{\Omega}$ dönme vektörünün ve $\mathbf{r}$ konum vektörünün vektörel bileşenleri cinsinden açık ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$\mathbf{U} = U\mathbf{i} + V\mathbf{j} + W\mathbf{k} \quad (2.19)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k} \quad (2.20)$$

Dönme vektörünün bileşenleri, yerdeğiştirme vektörünün bileşenleri cinsinden,

$$\begin{aligned} \Omega_x &= 0 \\ \Omega_y &= \frac{dw}{dx} \\ \Omega_z &= \frac{dv}{dx} \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece (2.17) denkleminde herhangi bir noktadaki yerdeğiştirme bileşenleri için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir [13]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= U(x, 0, 0) - y \frac{dV(x, 0, 0)}{dx} - z \frac{dW(x, 0, 0)}{dx} \\ v(x, y, z) &= V(x, 0, 0) \\ w(x, y, z) &= W(x, 0, 0) \end{aligned} \quad (2.22)$$

2.3.2. BİRİM ŞEKİLDEĞİŞTİRME-YERDEĞİŞTİRME DENKLEMİ

Çubuğun eksenine dik olan boyutları eksen doğrultusundaki boyutuna göre çok küçük olduğu için bu yönlerdeki birim şekil değiştirmeler ihmal edilir. Bernoulli'nin varsayımlarına göre çekme veya eğilme etkisi altında,

- 1) Çubuğun kesiti düzlem kalır
- 2) Çubuğun kesiti şekil değişiminden sonra da çubuk eksenine dik kalır
- 3) Çubuğun kesit düzleminde deformasyon olmaz

Böylece çubuğun eksen boyunca birim şekil değiştirme ifadesi şu şekilde yazılabilir [13]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y, z) &= \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \\ \varepsilon_y(x, y, z) &= \varepsilon_z(x, y, z) = 0 \\ \gamma_{xy}(x, y, z) &= \gamma_{xz}(x, y, z) = \gamma_{yz}(x, y, z) = 0\end{aligned}\tag{2.23}$$

2.3.3. BÜNYE DENKLEMLERİ

Çubuk için gerilme-birim şekil değiştirme bağıntısı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned}\sigma_x(x, y, z) &= E\varepsilon_x \\ \sigma_y(x, y, z) &= \sigma_z(x, y, z) = 0 \\ \tau_{xy} &= \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0\end{aligned}\tag{2.24}$$

2.4. KİRİŞ DENKLEMLERİ

Kiriş esasen çubuk ile aynı tarzda düşünülmeyle birlikte eğilme sebebiyle ortaya çıkan açısallık yerdeğiştirmeleri (dönmeler) içermemektedir. O halde çubuğun özel bir hali olarak düşünülebilir. Burada bahsedilen özel hal sadece eksenel yerdeğiştirmelerin olduğu bir durumdur.

2.4.1. YERDEĞİŞTİRME MODELİ

Kirişlerde açısız yerdeğıştirmeler olmadığı için eksene dik yönlerde yerdeğıştirme miktarları sıfır olacaktır. Bunun sonucunda yerdeğıştirme denklemi

$$u(x, y, z) = U(x, 0, 0) \quad (2.25)$$

şeklinde yazılabilir.

2.4.2. BİRİM ŞEKİLDEĞİŞTİRME-YERDEĞİŞTİRME DENKLEMİ

Çubuk için verilen kabullerin ışığı altında bir kirişin birim şekil değıştirmesi ile yerdeğıştirmesi arasındaki bağıntı

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} \quad (2.26)$$

şeklinde yazılır.

2.4.3. BÜNYE DENKLEMİ

Eksenel gerilme etkisi altındaki homojen, izotropik bir malzeme için gerilme-birim şekil değıştirme bağıntısı

$$\sigma_x(x, y, z) = E\epsilon_x(x, y, z) \quad (2.27)$$

şeklinde yazılabilir.

2.5. HAMILTON İLKESİ

Yapının hareket denklemlerinin çıkarılmasında Hamilton prensibinden faydalanılmıştır. Bu formülasyonun en önemli avantajı kullanılan koordinat sisteminden bağımsız olmasıdır.

Hamilton prensibine göre dinamik bir süreç tarafından takip edilen gerçek yol aşağıdaki eşitliği sağlayacaktır.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\Pi - T) dt = 0 \quad (2.28)$$

Burada Π potansiyel enerjiyi ifade etmektedir. Potansiyel enerji iç enerji ve dış kuvvetler tarafından yapılan iş cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Pi = \dot{I} - W \quad (2.29)$$

Burada $\dot{I}$ ve W sırasıyla iç enerji ve dış kuvvetlerin yaptığı işi gösterir. Bomba adaptörü yapısının doğal titreşim frekansları inceleneceğinden dış kuvvetlerin yaptığı iş sıfır olacaktır. Eşitlik 2.28 de T yapının kinetik enerjisini göstermektedir [11].

2.5.1. POTANSİYEL ENERJİ İFADELERİ

Burada bomba adaptörünü meydana getiren kabuk, çubuk ve kiriş yapılar için potansiyel enerji ifadeleri yazılacaktır.

Üzerine herhangi bir kuvvet etki etmeyen bir kabuğun potansiyel enerjisi şu şekilde yazılır [11]:

$$\Pi_k = \int \int \int_{\alpha_1 \alpha_2 \zeta} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \tau_{12} \gamma_{12}) A_1 A_2 (1 + \zeta / R_1) (1 + \zeta / R_2) d\alpha_1 d\alpha_2 d\zeta \quad (2.30)$$

Çubuk ve kiriş için potansiyel enerji ifadeleri gerilmeler ve birim şekil değiştirmeler cinsinden sırasıyla şu şekilde verilir:

$$\Pi_\varphi = \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV \quad (2.31)$$

$$\Pi_k = \int_0^l \sigma_x \varepsilon_x A dx \quad (2.32)$$

2.5.2. KİNETİK ENERJİ İFADELERİ

Kabuğun kinetik enerjisi kabuk değişkenleri cinsinden yazılacak olursa şu ifade elde edilir [11]:

$$T_k = \frac{h\rho}{2} \int \int_{\alpha_1 \alpha_2} \left[\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\beta}_1^2 + \dot{\beta}_2^2) \right] A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (2.33)$$

Burada h kabuğun kalınlığını ve ρ yoğunluğu göstermektedir.

Bir boyutlu yapıda olan çubuk ve kirişin kinetik enerji ifadeleri aşağıdaki gibi verilir:

$$T_v = \frac{1}{2} \rho \int_V \dot{u}^2 dV \quad (2.34)$$

$$T_k = \frac{1}{2} \rho A \int_0^1 \dot{u}^2 dx \quad (2.35)$$

BÖLÜM 3. SONLU ELEMANLAR METODU

3.1. SONLU ELEMANLAR METODUNUN TEMEL KAVRAMLARI

Sonlu eleman sürekli bir ortamın alt bölgesi olarak tanımlanabilir. Sonlu eleman genellikle bulunduğu sürekli ortamdan daha basit bir geometriye sahiptir. Sonlu elemanlar yöntemi çözüm işlemini kolaylaştırmak için sonsuz sayıda serbestlik dereceli bir problemi sonlu sayıda serbestlik dereceli bir probleme dönüştürmemizi sağlar. Genellikle katı cisimler mekaniği alanında kullanılmakla birlikte benzer matematiksel temelleri olan sahalarda da kullanılmaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi tamamen bilgisayara dayalı bir yöntemdir [14].

Sonlu elemanlar metodu karmaşık yapısal dizayn problemlerinin çözülmesinde ihtiyaç duyulan sayısal olarak kararlı, kolayca programlanabilen ve kullanıcı tarafından fazla müdahale gerektirmeden geniş bir aralıktaki problem tiplerine adapte edilebilen bir sayısal çözüm tekniğidir. Bu metod sağladığı çözümlerin doğruluğu bakımından , diğer sayısal çözüm tekniklerine göre, oldukça tatminkardır.

Sonlu elemanlar metodunun en önemli kısmı yapının eleman denilen uygun sayıda küçük ve geometrik olarak basit parçalara bölünmesini içerir. Elemanların kenarları düğüm noktalarında kesişirler. Elemanlar arasındaki kesişme yüzeyleri düğümsel hatlar ve düğümsel düzlemler olarak adlandırılırlar. Bir eleman içerisindeki bilinmeyenler yer değiştirmeler, gerilmeler veya hem yer değiştirmeler hem de gerilmeler olabilir. Bunlardan birincisinin formülasyonunda izlenen yol yerdeğiştirme metodu, ikincisindeki kuvvet metodu ve üçüncüsündeki yerdeğiştirme-kuvvet metodu diye bilinmektedir. Bunlardan en çok kullanılanı yer değiştirmesi metodudur. Eğer eleman içindeki bilinmeyen yerdeğiştirme alanı ise şekil fonksiyonları eleman üzerindeki yerdeğiştirmelerin değişimini düğüm noktalarında tanımlanan bilinmeyen büyüklükler cinsinden tanımlar. Düğüm noktalarına ait bu değerler düğüm noktası yer değiştirmeleri diye bilinirler ve bir elemandaki deformasyon davranışının komşu elemanlara aktarılmasına izin verirler. Elemanda gerilme alanının varsayılması halinde düğüm noktası büyüklükleri farklıdır fakat temeldeki prensip aynıdır.

Sonlu elemanlar metodunda belli bir eleman tipi için şekil fonksiyonları eşdeğerdir. Böylelikle her bir eleman tipi bir kere programlandıktan sonra bilgisayar aynı tipteki çok sayıda eleman için işlemleri tekrar edecektir [15].

Sonlu eleman yaklaşımı genel olarak aşağıdaki adımlardan ibarettir:

- 1- Sürekli ortam sonlu sayıda basit geometride alt bölgelere ayrılır.
- 2- Denge ve uygunluk şartlarının uygulandığı eleman üzerinde anahtar noktalar olarak düğüm noktaları seçilir.
- 3- Her eleman için yerdeğiştirme fonksiyonları kabul edilir.
- 4- Tipik bir eleman için birim şekil değiştirme-yerdeğiştirme ve gerilme-birim şekil değiştirme ilişkileri sağlanır.
- 5- İş veya enerji prensipleri kullanılarak tipik bir eleman için katılıklar ve eşdeğer düğüm noktası kuvvetleri saptanır.
- 6- Düğüm noktaları için denge denklemleri geliştirilir.
- 7- Bu denge denklemleri düğüm noktası yer değiştirmeleri için çözülür.
- 8- Sonuçta gerilmeler, reaksiyon kuvvetleri hesaplanır [14].

3.2. I-DEAS SONLU ELEMAN YAZILIMI

I-DEAS yazılımı sonlu eleman modelleme kısmı ile tam bir sonlu eleman model oluşturulur, fiziksel özellikler ve malzemeye ait özellikler veri olarak modele aktarılır, yükler ve sınır şartları uygulanır ve sözkonusu modelin lineer statik, dinamik, ısı transferi ve potansiyel akış davranışı için çözümü yapılabilir. Burada model fiziksel veya matematiksel bir problemi göstermektedir.

Sonlu eleman modelleme yaklaşık, fakat aynı zamanda kabul edilebilir çözümleri sağlayan sayısal yöntemleri kullanır. Model sonlu sayıda ayrık değişkenler olarak tabir edilen elemanlardan yapılır. Sözkonusu model düğüm noktası koordinatlarını, elemanları, fiziksel özellikleri ve malzeme özelliklerini, yükleri ve sınır şartlarını ihtiva eder.

Ayrıklaştırma kavramı uzun bir süreden beri devam etmekle birlikte, ancak bilgisayarların gelişimi ile birlikte kullanışlı bir hale gelmiştir.

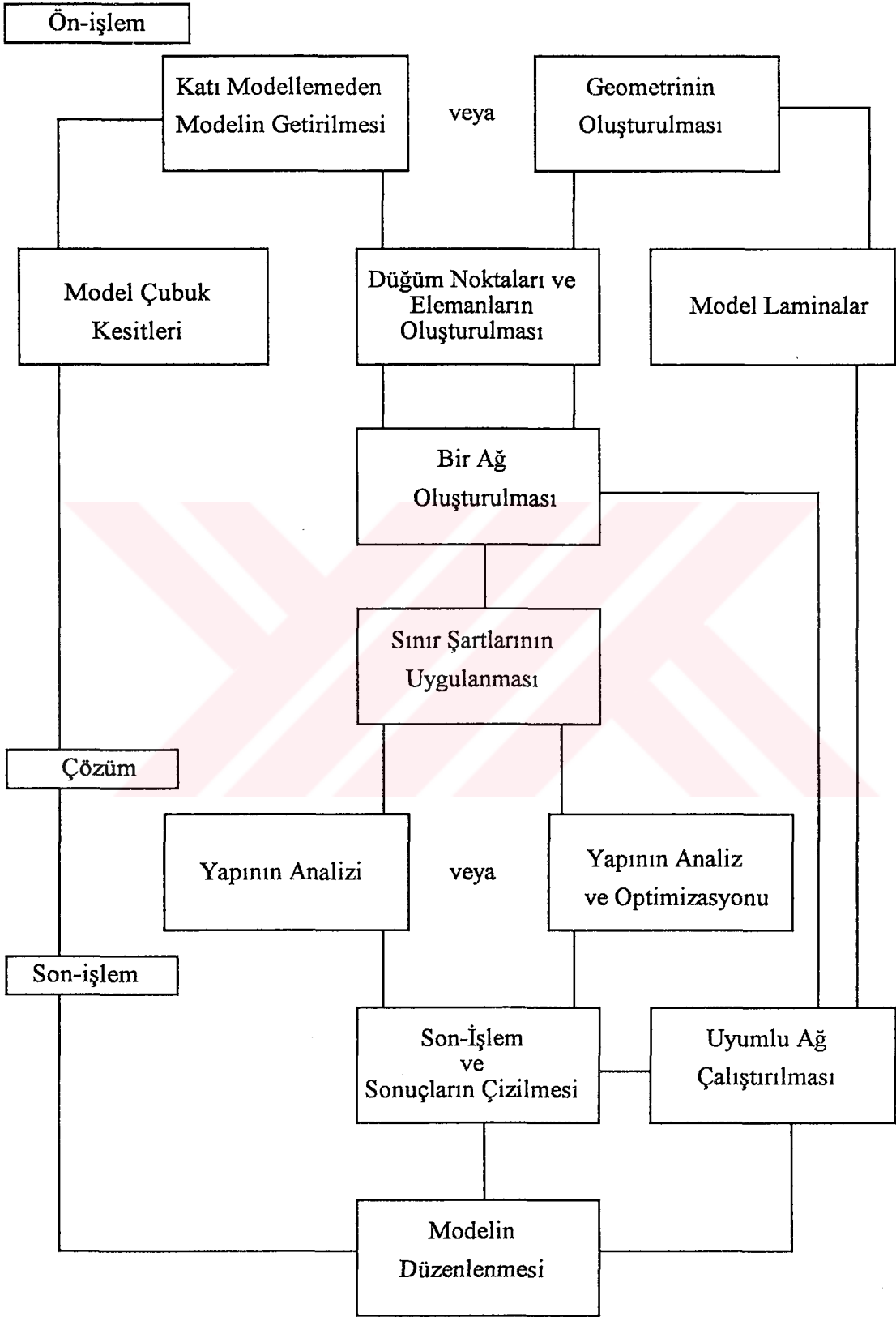
Sonlu eleman analizi mühendisin ve bilgisayarın birlikte çalıştığı iteratif bir işlemdir. Sonlu eleman analizinde temel olarak üç kademe vardır:

1- Ön-işlem kademesi: Bu kademede bir modelin geometrisi geliştirilir, fiziksel ve malzeme özellikleri tanımlanır, yükler ve sınır şartları tanımlanır ve modelin kontrolü yapılır.

2- Çözüm kademesi: Ön-işlem kademesinde oluşturulan modelin çözümü yapılır. I-DEAS çözüm kısmında modelin lineer statik, lineer dinamik, ısı transferi ve potansiyel akış davranışlarına ait çözümleri yapılabilir. Lineer olmayan analizler gibi I-DEAS yazılımında bulunmayan çözüm tipleri için ön-işlem kademesinde oluşturulan model NASTRAN, ANSYS, ABAQUS v.b. harici çözüm paketlerine yazılabilir.

3- Son-işlem kademesi: Bu kısımda sonuçlar deforme olmuş geometri üzerinde, renk bölgeleri halinde, grafiksel olarak ve sayısal sonuçlar halinde gösterilebilir.

Yukarıda bahsedilen I-DEAS yazılımındaki işlem kademelerinin şematik halde gösterimi Şekil 3.1'de sunulmuştur [16].



Şekil 3.1. İşlem Kademelerinin Şematik Gösterimi

3.2.1. ÖN-İŞLEM KADEMESİ

Burada modelin geometrisinin oluşturulması, gerekli çubuk kesitlerinin oluşturulması, kompozit malzemelerin kullanılması durumunda lamina özelliklerinin oluşturulması, düğüm noktası ve elemanların oluşturulması, sınır şartlarının oluşturulması işlemleri yapılır.

I-DEAS yazılımında modelin geometrisi üç değişik yöntemle yapılabilir. Bunlardan birincisi I-DEAS Katı Modelleme kısmında modelin oluşturulmasıdır. İkinci yol Sonlu Eleman Kısmında geometrinin modellenmesidir. Üçüncü yol ise universal bir dosyadan modelin aktarılmasıdır.

Ağ alanları veya ağ hacimleri serbest ve ölçülü ağ olarak oluşturulabilir. Serbest ağda eleman boyutları belirli ölçüler arasında değişirken ölçülü ağda herhangi bir elemanın boyutu istenildiği gibi belirlenebilir. Bir ağ alanı veya ağ hacmi elemanları ve düğüm noktalarını içerir. Eğriler ve noktalar söz konusu ağların sınırlarını oluşturur.

Bir sonlu eleman model birden fazla eleman tipinden meydana gelebilir. Bu eleman tipleri birbirine uygun olarak seçilir. Farklı eleman kullanılması halinde düğüm noktalarındaki serbestlik dereceleri eşitlenir.

I-DEAS yazılımı ile her çubuğun kesiti modellenir ve kesit özellikleri hesaplanır. Sınır şartları ve yükler uygulanır.

3.2.2. ÇÖZÜM KADEMESİ

I-DEAS modelin çözümü sırasında elemanların katılık matrislerini ve kütle matrislerini hesaplar ve bunlardan toplam katılık ve kütle matrislerini oluşturur. Bir katılık matrisi minimum potansiyel enerji prensibine göre bir elemanın malzeme ve geometrik özelliklerinden tayin edilen denge denklemlerinin katsayılarını içerir. Elastik bir cismin veya yapının potansiyel enerjisi deformasyonların sonucu olarak yüklenen iç enerji ve dış kuvvetlerin enerjisinin toplamı olarak gösterilebilir. Söz konusu cisim denge halinde ise potansiyel enerji minimum olacaktır.

3.2.3. SON İŞLEM KADEMESİ

Bu kısım analiz sonuçlarını deforme olmuş şekil halinde, renk bölgeleri ile, büyüklüklerin vektörel gösterimi ile ve grafiksel olarak gösterir [16].

3.3. SONLU ELEMANLAR METODUNUN TİTREŞİM PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Kartezyen koordinat sisteminde üç boyutlu bir sonlu elemanın yerdeğiştirme modeli

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\} \quad (3.1)$$

şeklinde kabul edilir. Burada $\mathbf{q}$ yerdeğiştirme vektörü, u, v ve w sırasıyla x, y ve z yönlerindeki yerdeğiştirmelerdir. 3.1 ifadesi genel bir eleman için şekil fonksiyonları matrisi ve zamana bağlı düğüm noktası yerdeğiştirmeleri vektörü cinsinden

$$\mathbf{q}(x, y, z, t) = [\mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{Q}^k(t)] \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{N}$ şekil fonksiyonları matrisini ve $\mathbf{Q}$ düğüm noktası yerdeğiştirmeleri vektörünü göstermektedir.

Bir yapının dinamik denklemlerinin türetilmesinde Lagrange denklemleri veya Hamilton ilkesinden faydalanılabilir. Burada Hamilton ilkesi kullanılacaktır.

Bölüm 2.4'de Hamilton ilkesi anlatıldığı için burada tekrar bahsedilmeyecek, sadece üç boyutlu genel bir eleman için Hamilton ilkesinden faydalanılarak dinamik sistemlerin serbest titreşim denklemleri türetiləcəktir. Herhangi bir kütle ve yüzey kuvveti etkisinde olmayan genel bir elemanın potansiyel enerjisi

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \quad (3.3)$$

şeklinde verilir. Burada $\boldsymbol{\sigma}$ üç boyutlu bir elemanın gerilme matrisini ve $\boldsymbol{\varepsilon}$ birim şekildeğiştirme matrisini göstermektedir ve açık bir tarzda

$$\begin{aligned}\sigma^T &= [\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}] \\ \epsilon^T &= [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \epsilon_z \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]\end{aligned}\quad (3.3a)$$

şeklinde yazılabilir.

Sözkonusu eleman için kinetik enerji ifadesi

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} dV \quad (3.4)$$

şeklinde verilir. Burada $\dot{\mathbf{q}}$ hız vektörünü göstermektedir.

Birim şekildeğiştirme ve gerilme ifadeleri şekil fonksiyonları cinsinden yazılmak suretiyle aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned}\epsilon &= \mathbf{B}\mathbf{Q} \\ \sigma &= \mathbf{E}\epsilon = \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{Q}\end{aligned}\quad (3.5)$$

Burada $\mathbf{B}$ genleme şekil fonksiyonları matrisi, $\mathbf{E}$ elastisite matrisidir. 3.1 denklemi zamana göre türetilerek hız alanı

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{Q}} \quad (3.6)$$

şeklinde elde edilir. Burada $\dot{\mathbf{Q}}$ düğüm noktası hızları vektörüdür.

3.5 ve 3.6 ifadeleri 3.2 ve 3.4 eşitliklerindeki yerlerine konularak, potansiyel ve kinetik enerji ifadeleri

$$\Pi = \sum_{k=1}^n \Pi^k = \frac{1}{2} \mathbf{Q}^T \left[\sum_{k=1}^n \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \right] \mathbf{Q} \quad (3.7a)$$

$$T = \sum_{k=1}^n T^k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{Q}}^T \left[\sum_{k=1}^n \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \right] \dot{\mathbf{Q}} \quad (3.7b)$$

şeklinde elde edilir. (3.7a) ve (3.7b) denklemlerinin (2.28) denkleminde kullanılmasıyla yapının hareketinin dinamik denklemleri elde edilir.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Q}} + \mathbf{K}\mathbf{Q} = 0 \quad (3.8)$$

İntegrallerdeki matrisler katılık ve kütle matrisleri olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi yazılabilir [17]:

$$\mathbf{K}^k = \int_{V^k} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (3.9a)$$

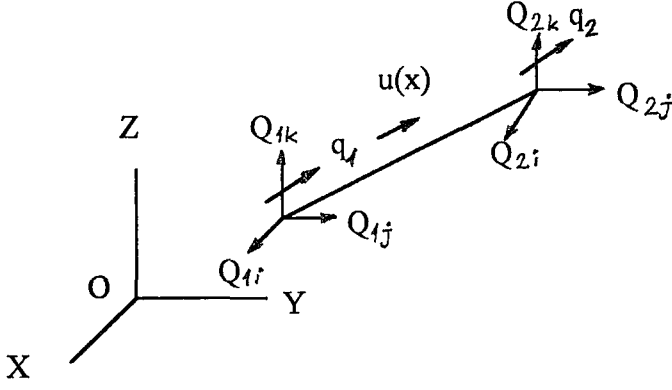
$$\mathbf{M}^k = \int_{V^k} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.9b)$$

3.4. SONLU ELEMANLAR FORMÜLASYONU

Burada adaptör yapısının modellenmesinde kullanılan sonlu elemanların katılık ve kütle matrislerinin global koordinat sisteminde elde edilmesi anlatılmıştır. Sözkonusu elemanlar kiriş, çubuk, dörtgen kabuk ve üçgen kabuk elemanlardır.

3.4.1. KİRİŞ ELEMAN

Kiriş elemanlar bir boyutlu elemanlardır. Kirişlerin modellenmesinde kullanılır. Bu tip elemanlar eksenel yönde olan basınç veya çekme kuvvetlerini taşıyabilir, yanlamasına kuvvetleri ve eğilme momentlerini taşıyamaz. Dolayısıyla kiriş elemanlar sadece eksenel yönde şekildeğişimine maruz kalır. Yerdeğiştirme modeli doğrusal kabul edilen kiriş elemanın iki düğüm noktası vardır. Bu düğüm noktalarının global koordinat sisteminde X, Y ve Z yönlerinde yerdeğiştirme serbestliği vardır. Böyle bir kiriş eleman Şekil 3.2'de görülmektedir.



Şekil.3.2. Kiriş Eleman

Şekil 3.2'de q_1 ve q_2 yerel koordinat sisteminde 1 ve 2 numaralı düğüm noktalarının yerdeğiştirme miktarlarını göstermektedir. $Q_{1i}, Q_{1j}, Q_{1k}, Q_{2i}, Q_{2j}$ ve Q_{2k} değerleri yerdeğiştirme miktarlarının global koordinat sistemindeki bileşenlerini göstermektedir.

Kiriş elemanın şekil fonksiyonu doğrusal ve yerel koordinat sisteminde x ekseni elemanın ekseni olarak kabul edilmiştir. Bu eleman için sınır şartları

$$\begin{aligned} u(0) &= q_1 \\ u(L) &= q_2 \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde verilmiştir. Yukarıdaki kabullerin ve 3.10'daki sınır şartlarının kullanılması ile şekil fonksiyonu

$$u(x) = q_1 + \frac{q_2 - q_1}{L} x \quad (3.11)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada L kiriş elemanın uzunluğunu göstermektedir. Kiriş elemanın şekil fonksiyonu matris yapısında

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{q} \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{f}$ şekil fonksiyonu matrisini ve $\mathbf{q}$ yerdeğiştirme matrisini göstermektedir. Eşitlik 2.26 kullanılarak birim şekildeğiştirme

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad (3.13)$$

şeklinde yazılabilir. Eşitlik 3.12 ve 3.13 kullanılarak **B** matrisi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

şeklinde elde edilir. Eşitlik 3.14 Eşitlik 3.9a'da yerine konularak kiriş elemanın katılık matrisi yerel koordinatlarda

$$\mathbf{k} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (3.15)$$

şeklinde yazılabilir. Kirişin kesit alanı sabit olduğu için hacim integrali x eksenini boyunca yapılarak

$$\mathbf{k} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

şeklinde elde edilir.

Kiriş elemanın katılık matrisini global koordinat sisteminde elde edebilmek için dönüşüm matrisinden yararlanılır. Dönüşüm matrisi

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{ij} & m_{ij} & n_{ij} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

şeklinde verilmiştir. Burada l_{ij} , m_{ij} , n_{ij} sırasıyla kiriş elemanın X, Y ve Z eksenleri ile yaptığı açılarının kosinüs değerleridir. Bu kosinüs değerleri bundan sonra doğrultman kosinüsleri olarak isimlendirilecektir. Dönüşüm matrisi kullanılarak katılık matrisi global koordinatlarda

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\lambda} \quad (3.18)$$

şeklinde elde edilir.

Kiriş elemanın şekildeğiştirme fonksiyonu matrisi global koordinat sisteminde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

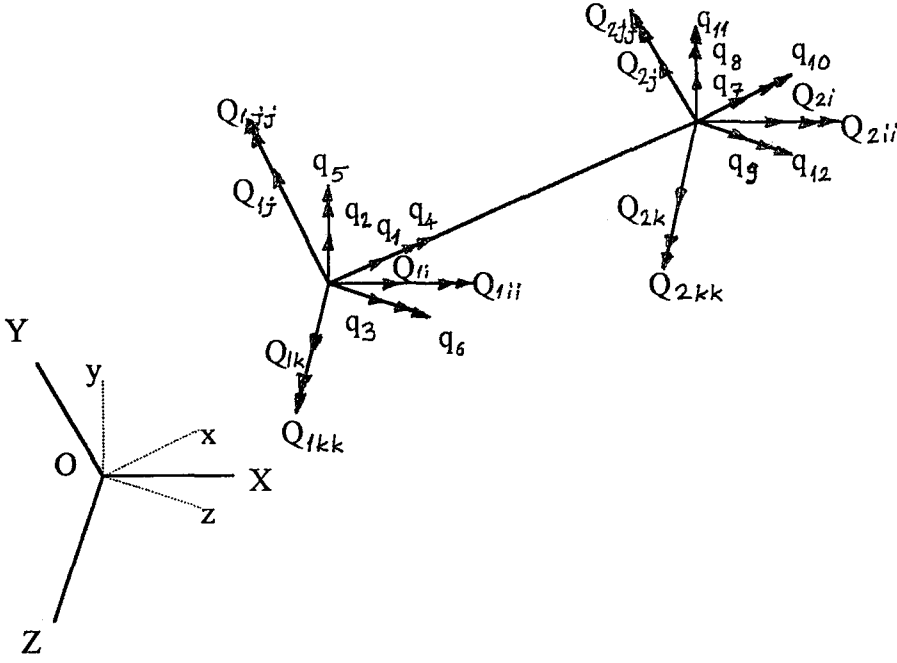
şeklinde yazılabilir. Kütle matrisi Eşitlik 3.19 Eşitlik 3.9'da kullanılarak

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.20)$$

şeklinde elde edilir [17].

3.4.2. ÇUBUK ELEMAN

Çubuk elemanlar bir boyutlu elemanlardır. Çubuk elemanlar eksenel kuvvetleri, kesit düzleminin iki asal eksenine etrafındaki eğilme momentlerini ve kesit düzlemine dik eksen etrafındaki burulma momentlerini taşıyabilir. Çubuk yapıların modellenmesinde kullanılır. Yerdeğiştirme modeli doğrusal kabul edilen çubuk elemanın iki düğüm noktası vardır. Bu düğüm noktaları global koordinat sisteminde X, Y ve Z eksenleri yönünde yerdeğiştirme ve bu eksenler etrafında dönme serbestliğine sahiptir. Böyle bir çubuk eleman Şekil 3.3'de görülmektedir.



Şekil 3.3. Çubuk Eleman

Şekil 3.3'de q_1 ve q_7 eksenel yerdeğiştirme miktarlarını, q_2, q_8, q_3 ve q_9 sırasıyla xy ve xz düzlemindeki eğilme yerdeğiştirmelerini, q_5, q_6, q_{11} ve q_{12} bu düzlemlerdeki eğilme dolayısıyla dönme miktarlarını ve q_4, q_{10} burulma miktarlarını göstermektedir.

Burada çubuk kesitinin eksenleri ile çakışan bir koordinat sistemi seçilmiştir. Böylece yerdeğiştirme ve dönmeler birbirinden bağımsız dört eksene ayrılmıştır.

1) Eksenel Yerdeğiştirmeler

q_1 ve q_7 gibi iki düğüm noktası değişkeni olduğu için şekildeğiştirme fonksiyonu doğrusal kabul edilerek matris yapısında

$$u_e = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_7 \end{bmatrix} = f_e q_e \quad (3.21)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birim şekildeğiştirme-yerdeğiştirme ilişkileri kullanılarak

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_e}{\partial x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_7 \end{bmatrix} = B_e q_e \quad (3.22)$$

şeklinde çubuk elemanın eksenel yöndeki birim şekildeğiştirilmesi elde edilir. Buradan elde edilen B_e matrisi Eşitlik 3.9a'da yerine konulmuş ve hacim integrali sabit kesit alanı olduğu için çubuğun x-ekseni boyunca hesaplanarak katılık matrisi yerel koordinat sisteminde

$$k_e = \int_V B_e^T E B_e dV = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

şeklinde elde edilmiştir.

2) xy Düzlemindeki Eğilme Yerdeğiştirmeleri

Burada dört düğüm noktası değişkeni (q_2, q_6, q_8 ve q_{12}) mevcut olduğundan kübik yerdeğiştirme modeli kabulü yapılmıştır. Sınır şartları

$$\begin{aligned} v(0) &= q_2 \\ v(L) &= q_8 \\ \frac{dv(0)}{dx} &= q_6 \\ \frac{dv(L)}{dx} &= q_{12} \end{aligned} \quad (3.24)$$

şeklinde verilmiştir. 3.24'deki sınır şartları kullanılarak yerdeğiştirme fonksiyonu yerel koordinat sisteminde

$$v = \begin{bmatrix} \frac{(2x^3 - 3Lx^2 + L^3)}{L^3} & \frac{(x^3 - 2Lx^2 + L^2x)}{L^2} & \frac{(-2x^3 + 3Lx^2)}{L^3} & \frac{(x^3 - Lx^2)}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2 \\ q_6 \\ q_8 \\ q_{12} \end{bmatrix} = f_{xy} q_{xy} \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilmiştir. Çubuğun birim şekildeğiştirme-yerdeğiştirme ilişkilerinden birim şekildeğiştirmenin xy düzlemindeki eğilme bileşeni

$$(\epsilon_x)_{xy} = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \mathbf{B}_{xy} \mathbf{q}_{xy} \quad (3.26)$$

şeklinde yazılmıştır. $\mathbf{B}_{xy}$ ifadesi Eşitlik 3.25 ve 3.26 yardımıyla bulunmuş ve Eşitlik 3.9a'da yerine konularak çubuk elemanın xy düzlemindeki eğilme bileşeni için katılık matrisi yerel koordinat sisteminde

$$\mathbf{k}_{xy} = \int_V \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{xy} dV = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada I_z çubuk kesitinin z eksenine etrafındaki atalet momentini göstermektedir.

3) xz Düzlemindeki Eğilme Yerdeğiştirmeleri

Burada düğüm noktası değişkenleri q_3, q_5, q_9 ve q_{11} dir. Sınır şartları

$$\begin{aligned} w(0) &= q_3 \\ w(L) &= q_9 \\ \frac{dw(0)}{dx} &= q_5 \\ \frac{dw(L)}{dx} &= q_{11} \end{aligned} \quad (3.28)$$

ifadesi ile verilmiştir. Yerdeğiştirme fonksiyonu (2)'deki yöntem ile

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \frac{(2x^3 - 3Lx^2 + L^3)}{L^3} & \frac{(x^3 - 2Lx^2 + L^2x)}{L^2} & \frac{(-2x^3 + 3Lx^2)}{L^3} & \frac{(x^3 - Lx^2)}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_3 \\ q_5 \\ q_9 \\ q_{11} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_{xz} \mathbf{q}_x \quad (3.29)$$

şeklinde elde edilmiştir. Birim şekildeğiştirmenin xz düzlemindeki eğilme bileşeni için katılık matrisi yerel koordinat sisteminde

$$(\epsilon_x)_{xz} = -z \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial x^2} = \mathbf{B}_{xz} \mathbf{q}_{xz} \quad (3.30)$$

şeklinde yazılabilir. 3.29 ve 3.30 ifadelerinden yararlanılarak $\mathbf{B}_{xz}$ ifadesi elde edilmiş ve Eşitlik 3.9a'da yerine yazılarak xz düzlemindeki eğilme bileşeni için katılık matrisi yerel koordinat sisteminde

$$\mathbf{k}_{xz} = \int_V \mathbf{B}_{xz}^T \mathbf{E} \mathbf{B}_{xz} dV = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada I_y çubuk kesitinin y eksenini etrafındaki atalet momentini göstermektedir.

4) Burulma Yerdeğiştirmeleri

q_4 ve q_{10} gibi iki düğüm noktası değişkeni olduğu için yerdeğiştirme fonksiyonu doğrusal kabul edilmiştir. Burulma sonucunda kesit eksenini etrafında θ açısı kadar dönecektir. Sınır şartları

$$\begin{aligned} \theta(0) &= q_4 \\ \theta(L) &= q_{10} \end{aligned} \quad (3.32)$$

şeklinde verilmiştir. Sınır şartları kullanılarak yerdeğiştirme fonksiyonu yerel koordinat sisteminde matris yapısında

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{f}_b \mathbf{q}_b \quad (3.33)$$

şeklinde elde edilmiştir. Silindirik koordinat sisteminde birim şekildeğiştirme-yerdeğiştirme

$$\epsilon_{\theta r} = r \frac{d\theta}{dx} \quad (3.34)$$

şeklinde verilmiştir. 3.33 ve 3.34 ifadeleri kullanılarak

$$\epsilon_{\theta r} = \begin{bmatrix} -\frac{r}{L} & \frac{r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_4 \\ q_{10} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_b \mathbf{q}_b \quad (3.35)$$

ifadesi elde edilmiştir. Eşitlik 3.35'den elde edilen $\mathbf{B}_b$ matrisi Eşitlik 3.9'a'da yerine konularak katılık matrisi

$$\mathbf{k}_b = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

şeklinde elde edilir. Burada G kayma modülünü, J kesitin polar atalet momentini göstermektedir.

Çubuk elemanın toplam katılık matrisini elde etmek için birbirinden bağımsız dört yerdeğiştirme durumu için elde edilen katılık matrisleri birleştirilmiştir. Böylece yerel koordinat sisteminde toplam katılık matrisi

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix}
 \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \\
 -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{-GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\
 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & \frac{-6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L}
 \end{bmatrix}$$

Simetrik

(3.37)

şeklinde elde edilir.

Yerel koordinat sistemindeki katılık matrisini global koordinat sisteminde yazabilmek için dönüşüm matrisi kullanılır. Söz konusu dönüşüm matrisi

$$\lambda = \begin{bmatrix}
 \bar{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \bar{\lambda} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \bar{\lambda} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \bar{\lambda}
 \end{bmatrix}$$

(3.38)

şeklinde verilir. Burada

$$\bar{\lambda} = \begin{bmatrix}
 l_{ox} & m_{ox} & n_{ox} \\
 l_{oy} & m_{oy} & n_{oy} \\
 l_{oz} & m_{oz} & n_{oz}
 \end{bmatrix}$$

(3.39)

ve

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

şeklinde verilmiştir. Bu ifadelerdeki l_{ox}, m_{ox}, n_{ox} x ekseninin, l_{oy}, m_{oy}, n_{oy} y ekseninin ve l_{oz}, m_{oz}, n_{oz} z ekseninin doğrultman kosinüsleridir. Dönüşüm matrisi kullanılarak

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\lambda} \quad (3.41)$$

şeklinde yazılabilir.

Çubuk elemanın yerdeğiştirme fonksiyonları matrisi

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(2x^2 - 3Lx^2 + L^2)}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(x^3 - 2Lx^2 + L^2x)}{L^2} & 0 & -\frac{(2x^3 - 3Lx^2)}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(x^2 - Lx^2)}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{(2x^3 - 3Lx^2 + L^2)}{L^2} & 0 & -\frac{(x^3 - 2Lx^2 + L^2x)}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{(2x^3 - 3Lx^2)}{L^2} & 0 & \frac{(Lx^2 - x^3)}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

şeklinde yazılabilir. Kütle matrisi Eşitlik 3.42 Eşitlik 3.9b'de yerine yazılarak

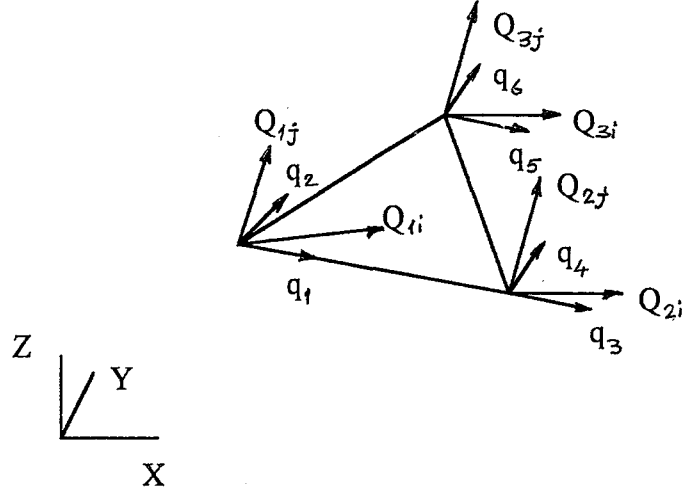
$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.43)$$

şeklinde elde edilmiştir [17].

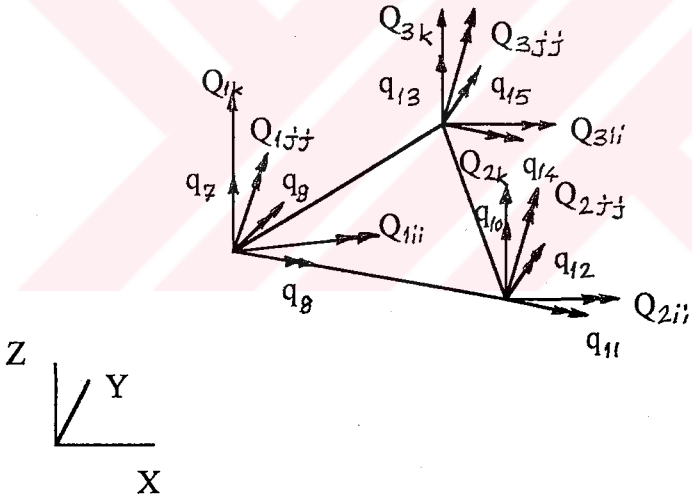
3.4.3. ÜÇGEN KABUK ELEMAN

Adaptör yapısının bazı bölgelerinde geometri kısıtlamaları sebebiyle kullanılan üçgen elemanların üç düğüm noktası vardır. Bu elemanlar doğrusal ve dolayısıyla düz yüzeylidir. Üçgen kabuk eleman düzlem gerilme etkilerini ve eğilme etkilerini içeren

üçgen elemanların ayrı ayrı incelenmesi ile ele alınmıştır. Şekil 3.4a ve Şekil 3.4b'de sözkonusu üçgen elemanlar görülmektedir.



Şekil 3.4a Üçgen Elemanda Düzlem Gerilme Sebebiyle Yerdeğiştirmeler



Şekil 3.4b Üçgen Elemanda Eğilme Sebebiyle Yerdeğiştirmeler

Üç düğüm noktalı düzlem gerilme etkilerini içeren üçgen elemanın yerdeğiştirme fonksiyonları

$$u = a_1 + a_2x + a_3y$$

$$v = a_4 + a_5x + a_6y$$

(3.44)

şeklinde yazılabilir. Burada u ve v düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme miktarlarını göstermektedir. Bu yerdeğiştirmeler düğüm noktalarında değerlendirilerek yerdeğiştirme fonksiyonları matris yapısında

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada

$$N_i = \frac{1}{2A} (A_i^0 + a_i x + b_i y) \quad i=1,2,3$$

$$A = \frac{1}{2} \det[A]$$

$$A_i^0 = x_j y_1 - x_1 y_j$$

$$a_i = y_j - y_1$$

$$b_i = x_1 - x_j$$

olarak tanımlanmıştır. **B** matrisi

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N} \quad (3.46)$$

eşitliği ile hesaplanır. **B** ve **N** matrisleri Eşitlik 3.9a ve 3.9b'de yerlerine yazılarak katılık ve kütle matrisleri yerel koordinat sisteminde

$$\mathbf{k}_m = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \quad (3.47)$$

$$\mathbf{m}_m = \int_V \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (3.48)$$

şeklinde elde edilmiştir.

Üç düğüm noktası olan eğilme etkilerini içeren üçgen elemanın yerdeğiştirme fonksiyonu

$$w = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + a_7x^3 + a_8(x^2y + xy^2) + a_9y^3 \quad (3.49)$$

şeklinde verilmiştir. Bu ifade matris yapısında

$$\mathbf{w} = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad (x^2y + xy^2) \quad y^3] \mathbf{a} = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{a} \quad (3.50)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $\mathbf{a}$ katsayılar matrisini elde edebilmek için düğüm noktalarındaki yerdeğiştirme ve dönme değerlerinden faydalanılır. Eşitlik 3.50 'nin x ve y 'ye göre türevi alınarak

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & (x^2y + xy^2) & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & (x^2 + 2xy) & 3y^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -(2xy + y^2) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{a} \quad (3.51)$$

şeklinde yerdeğiştirme modeli elde edilir. Eşitlik 3.51 elemanın düğüm noktalarının koordinatlarında değerlendirilerek

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{a} \quad (3.52)$$

düğüm noktası yerdeğiştirmeleri yazılabilir. Burada

$$\mathbf{w}_e^T = [q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11} \quad q_{12} \quad q_{13} \quad q_{14} \quad q_{15}] \quad (3.53)$$

ve A_e düğüm noktası yerdeğiştirmeleri matrisidir. Eşitlik 3.52 ve 3.53 kullanılarak

$$\mathbf{w} = \mathbf{P}(x, y) \mathbf{A}_e^{-1} \mathbf{w}_e \quad (3.54)$$

şeklinde elde edilmiştir. Eşitlik 3.51 'den faydalanılarak

$$\mathbf{B} = -z \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4(x+y) & 0 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

yazılabilir. Eşitlik 3.55 Eşitlik 3.9a'da kullanılarak katılık matrisi ve Eşitlik 3.9b'den faydalanılarak kütle matrisi

$$\mathbf{k}_b = \mathbf{A}_e^{-T} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} dV \mathbf{A}_e^{-1} \quad (3.56)$$

$$\mathbf{m}_b = \mathbf{A}_e^{-T} \int_V \rho \mathbf{P}^T \mathbf{P} dV \mathbf{A}_e^{-1} \quad (3.57)$$

şeklinde elde edilir.

Burada düzlem gerilme ve eğilme etkileri için elde edilen katılık ve kütle matrisleri birleştirilerek üçgen elemanın katılık ve kütle matrisleri yerel koordinat sisteminde elde edilir. Bu matrisler

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \mathbf{k}_m + \mathbf{k}_b \\ \mathbf{m} &= \mathbf{m}_m + \mathbf{m}_b \end{aligned} \quad (3.58)$$

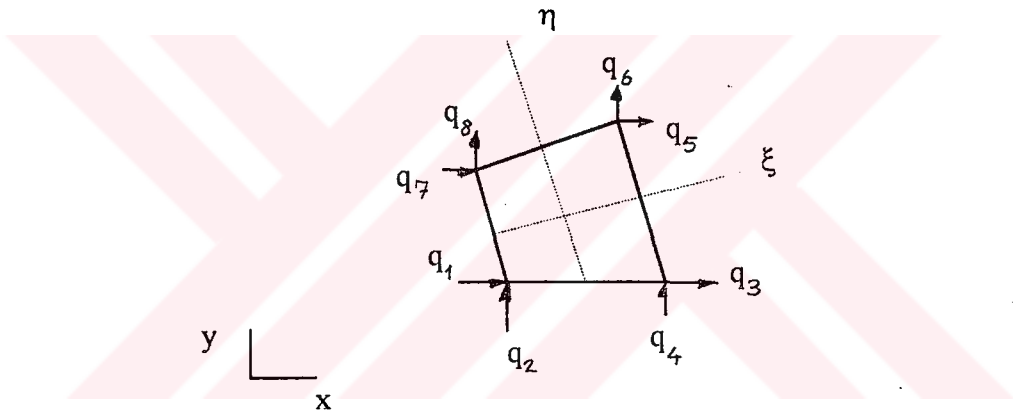
şeklinde ifade edilir. (3.58) deki matrisler dönüşüm matrisi kullanılarak global koordinat sisteminde ifade edilebilir [18].

3.4.4. DÖRTGEN KABUK ELEMAN

Kabuk yapıların modellenmesinde genellikle dörtgen kabuk elemanlar kullanılmaktadır. Kabuklar konusunda anlatıldığı gibi kabuk yapılar düzlem gerilme

ve eğilme kuvvetlerine maruz kalmaktadır. Çözüm sırasında bilgisayar kapasitesinin yeterli olabilmesi ve yaklaşık sonuçlar elde edebilmek amacıyla adaptör yapısının modellenmesinde doğrusal kabuk elemanlar kullanılmıştır. Dolayısıyla elemanın kenarları doğru, yüzeyi düz şekillidir. Kullanılan kabuk elemanın dört düğüm noktası vardır. Söz konusu elemanın her düğüm noktasında global koordinat sisteminde koordinat eksenleri yönünde üç adet ötelenme serbestliği ve koordinat eksenleri etrafında üç adet dönme serbestliği vardır. Böylece bir düğüm noktasının toplam serbestlik derecesi altı olmaktadır. Düzlem gerilme ve eğilme etkilerini içeren dörtgen elemanlar ayrı ayrı incelenmiştir. Daha sonra bu elemanlar için elde edilen katılık ve kütle matrisleri uygun bir şekilde birleştirilerek dörtgen kabuk elemanın katılık ve kütle matrisleri elde edilmiştir.

Düzlem gerilme etkilerini içeren dörtgen eleman Şekil 3.5'de görülmektedir.



Şekil 3.5 Dörtgen Kabuk Elemanda Düzlem Gerilme Etkileri

Şekilde görülen gerçek yerdeğiştirmeler

$$\mathbf{u} = \{u, v\} \quad (3.59)$$

şeklinde yazılabilir. Böylece, düğüm noktası yerdeğiştirme vektörü

$$\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\} = \{u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4\} \quad (3.60)$$

şeklinde yazılabilir. Burada q değerleri düğüm noktası yerdeğiştirme vektörünün bileşenlerini göstermektedir. Yerdeğiştirme şekil fonksiyonları

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)u_1 + (1-\xi)(1-\eta)u_2 + (1-\xi)(1-\eta)u_3 + (1-\xi)(1-\eta)u_4] \\ \mathbf{v} &= \frac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)v_1 + (1-\xi)(1-\eta)v_2 + (1-\xi)(1-\eta)v_3 + (1-\xi)(1-\eta)v_4] \end{aligned} \quad (3.61)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \\ \mathbf{v} &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \end{aligned} \quad (3.62)$$

şeklinde yazılabilir. Burada ξ ve η izoparametrik koordinatları göstermektedir. Eşitlik 3.62 matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \mathbf{N} \bar{\mathbf{u}} \quad (3.63)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

ve

$$\bar{\mathbf{u}} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4] \quad (3.65)$$

olarak verilmektedir. Birim şekildeğiştirme-yerdeğiştirme ilişkilerinden faydalanılarak

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

şeklinde $\mathbf{B}$ matrisinin i bileşeni elde edilir. $\mathbf{B}_i$ aynı zamanda

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} D_{G1i} & 0 \\ 0 & D_{G2i} \\ D_{G2i} & D_{G1i} \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.67)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$D_{G11} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [-(1-\eta)J_{22} + (1-\xi)J_{12}] \quad (3.68a)$$

$$D_{G12} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [(1-\eta)J_{22} + (1+\xi)J_{12}] \quad (3.68b)$$

$$D_{G13} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [(1+\eta)J_{22} - (1+\xi)J_{12}] \quad (3.68c)$$

$$D_{G14} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [-(1+\eta)J_{22} - (1-\xi)J_{12}] \quad (3.68d)$$

$$D_{G21} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [(1-\eta)J_{21} - (1-\xi)J_{11}] \quad (3.68e)$$

$$D_{G22} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [-(1-\eta)J_{21} - (1+\xi)J_{11}] \quad (3.68f)$$

$$D_{G23} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [-(1+\eta)J_{21} + (1+\xi)J_{11}] \quad (3.68g)$$

$$D_{G24} = \frac{1}{4|\mathbf{J}|} [(1+\eta)J_{21} + (1-\xi)J_{11}] \quad (3.68h)$$

ve

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{D}_L \mathbf{C}_N \quad (3.69)$$

$$\mathbf{D}_L = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

şeklinde verilmiştir. $\mathbf{C}_N$ matrisindeki x ve y değerleri dörtgen elemanın düğüm noktası koordinatlarını göstermektedir. Eşitlik 3.67 Eşitlik 3.9a'da yerine konularak düzlem gerilme etkilerini içeren dörtgen elemanın katılık matrisi

$$\mathbf{k}_m = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.72)$$

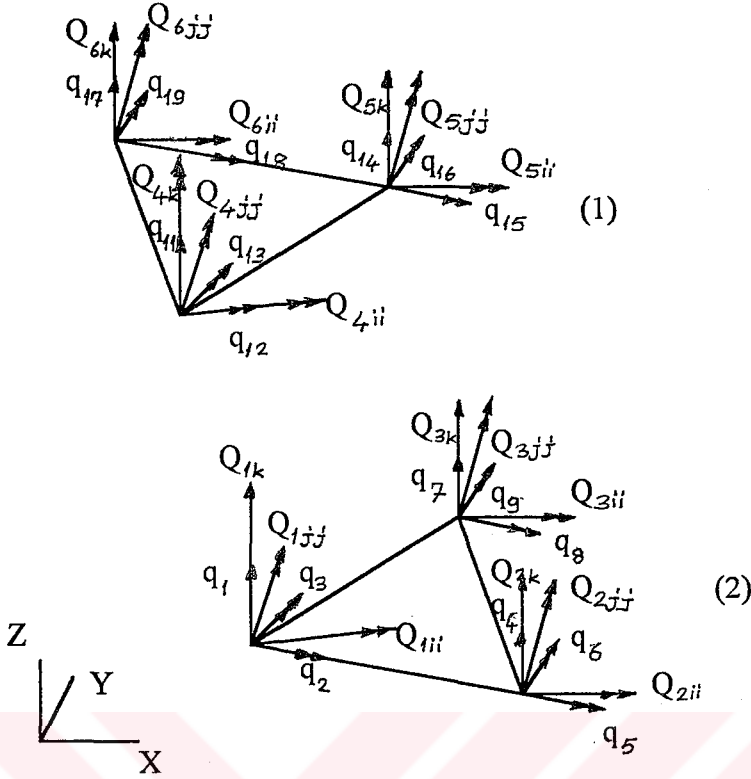
şeklinde elde edilir.

Kütle matrisi Eşitlik 3.9b'den faydalanılarak

$$\mathbf{m}_m = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} |\mathbf{J}| d\xi d\eta \quad (3.73)$$

şeklinde elde edilir [14].

Eğilme sebebiyle meydana gelen yerdeğiştirmeleri içeren dörtgen kabuk eleman iki üçgen elemanın uygun bir tarzda birleştirilmesiyle elde edilebilir [14]. Söz konusu iki üçgen eleman Şekil 3.6'da görülmektedir.



Şekil 3.6 Birleştirilen Üçgen Elemanlar

Şekil 3.6'da görülen üçgen elemanlar için katılık ve kütle matrisleri 3.4.3'de anlatıldığı şekilde yerel koordinat sisteminde elde edilmiştir. Bu matrisler dönüşüm matrisi kullanılarak

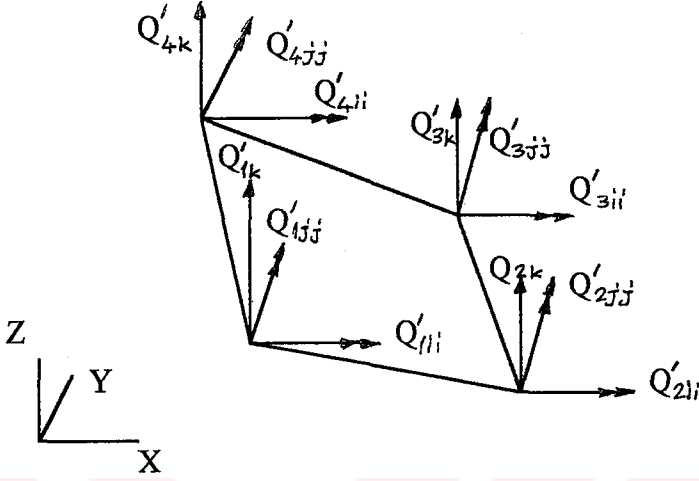
$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_b^{(1)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(1)\top} \mathbf{k}_b^{(1)} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} \\
 \mathbf{K}_b^{(2)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(2)\top} \mathbf{k}_b^{(2)} \boldsymbol{\lambda}^{(2)} \\
 \mathbf{M}_b^{(1)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(1)\top} \mathbf{m}_b^{(1)} \boldsymbol{\lambda}^{(1)} \\
 \mathbf{M}_b^{(2)} &= \boldsymbol{\lambda}^{(2)\top} \mathbf{m}_b^{(2)} \boldsymbol{\lambda}^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

şeklinde global koordinat sisteminde elde edilir. Burada $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$ ve $\boldsymbol{\lambda}^{(2)}$ sırasıyla birinci ve ikinci üçgen elemanların dönüşüm matrisleridir. Eşitlik 'deki katılık ve kütle matrisleri düğüm noktaları dikkate alınarak birleştirilir ve dörtgen elemanın katılık ve kütle matrisleri

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_b &= \mathbf{K}_b^{(1)} + \mathbf{K}_b^{(2)} \\
 \mathbf{M}_b &= \mathbf{M}_b^{(1)} + \mathbf{M}_b^{(2)}
 \end{aligned} \tag{3.75}$$

şeklinde elde edilir.

(1) ve (2) numaralı üçgen elemanların birleştirilmesi sonucu elde edilen dörtgen eleman Şekil 3.7'de görülmektedir.



Şekil 3.7 Eğilme Etkilerini İçeren Dörtgen Eleman

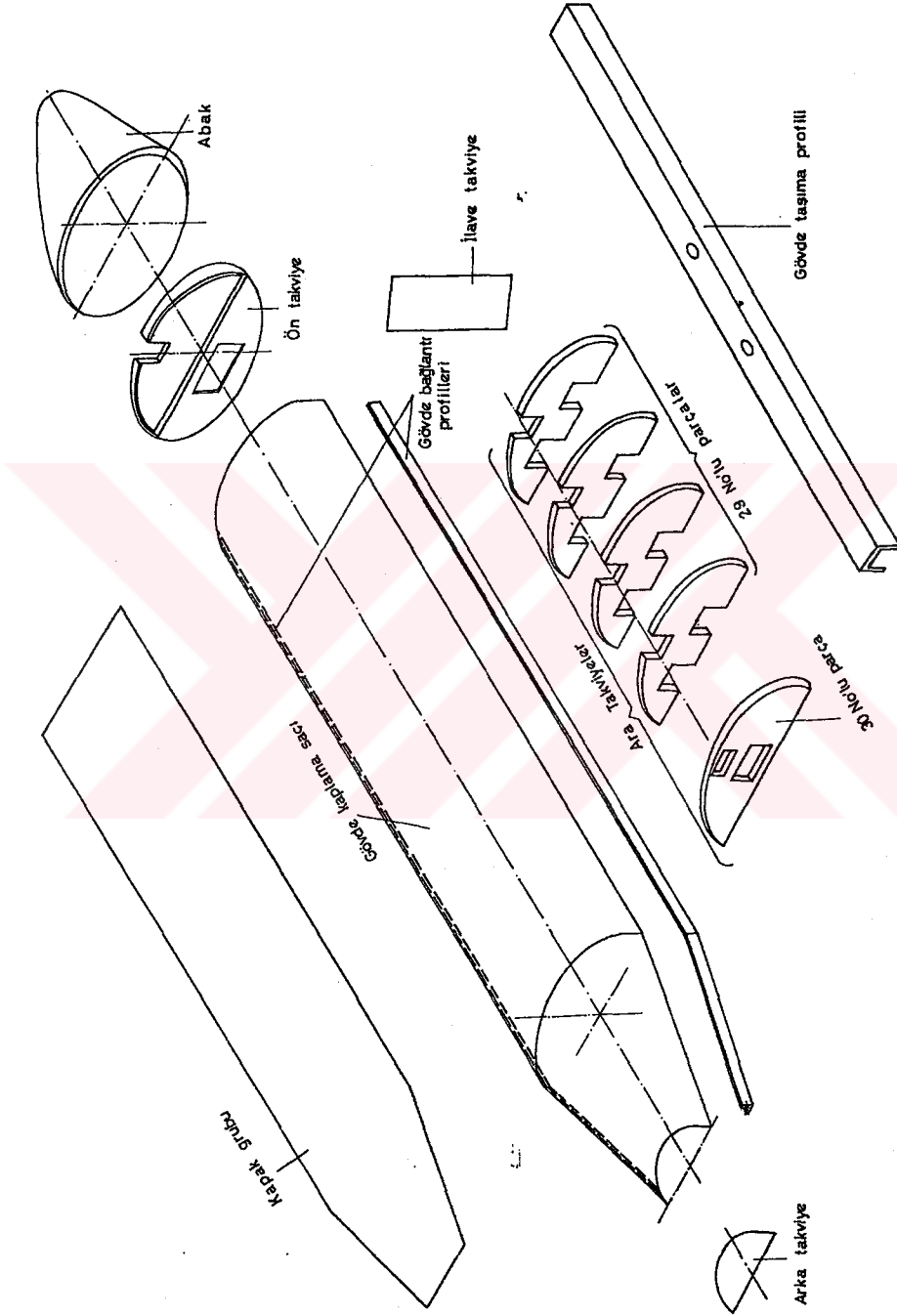
Dörtgen kabuk elemanın katılık ve kütle matrislerini elde edebilmek için, üçgen elemanda olduğu gibi, düzlem gerilme ve eğilme etkilerini içeren dörtgen elemanın matrisleri birleştirilir.

BÖLÜM 4. ADAPTÖR YAPISININ MODELLENMESİ VE ÇÖZÜM

4.1. ADAPTÖR YAPISININ MODELLENMESİ

Bu çalışmada serbest titreşimleri incelenen bomba adaptörünün temel parçalarını ihtiva eden resim Şekil 4.1'de görülmektedir. Adaptörün temel yapı elemanları gövde kaplama sacı, kapak gurubu, abak, ön arka, ve ara takviyeler, gövde taşıma ve bağlantı profilleri ve roketatarlardır. Gövde kaplama sacı, kapak grubu, gövde taşıma profili ve roketatarlar 2024-T4 alüminyum alaşımı malzemeden, ön, arka ve ara takviyeler 356-T6 döküm alüminyum malzemeden, abak 3003 alüminyum alaşımı malzemeden ve bağlantı profilleri 6061-T6 alüminyum alaşımı malzemeden imal edilmiştir. Bu malzemelere ait mekanik özellikler Tablo 4.1'de sunulmuştur. Bu yapı elemanlarından gövde kaplama sacı, roketatarlar, ön, arka ve ara takviyeler 3 mm., abak 2 mm., kapak grubu 6 mm. kalınlıktadır.

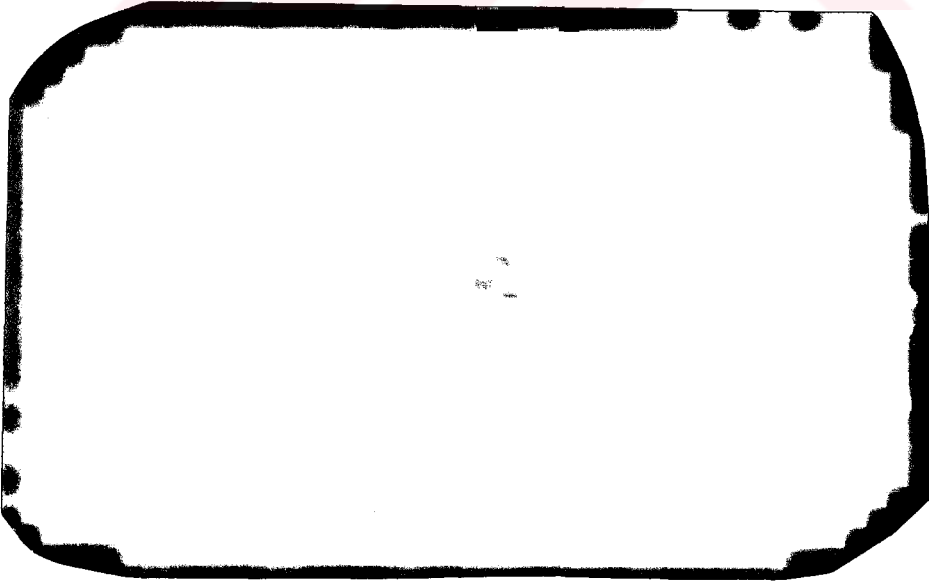
Yapı I-DEAS katı modelleme kısmında yüzey olarak elde edilmiştir. Sonra bu model sonlu elemanlar kısmına aktarılmıştır. Burada kabuk elemanlar kullanılarak yüzey sonlu eleman model haline getirilmiştir. Böylece gövde kaplama sacı, kapak gurubu, abak, roketatarlar, ön, arka ve ara takviyelerin kabuk elemanlar kullanmak suretiyle sonlu eleman modeli elde edilmiştir. Ön, arka ve ara takviyelerin kıvrımlı olan kenarları kiriş elemanlar kullanılarak modellenmiştir. Gövde taşıma ve bağlantı profilleri çubuk elemanlar kullanılarak modellenmiştir. Adaptör yapısının sonlu eleman modelinin izometrik görünüşü Şekil.4.2'de görülmektedir.



Şekil 4.1 Adaptörün Temel Yapı Elemanları

Tablo 4.1 Malzemelerin Mekanik Özellikleri

MALZEME	ELASTİSİTE MODÜLÜ (MPa)	POISSON ORANI	YOĞUNLUK (kg / m ³)
2024-T4	72400	0,33	2770
356-T6	72400	0,33	2685
3003	70000	0,33	2730
6061-T6	68900	0,33	2700



Şekil 4.2 Adaptör yapısının sonlu eleman modeli

4.2. ÇÖZÜM YÖNTEMİ

I-DEAS sonlu eleman yazılımı ile bir yapının serbest titreşim analizi yapılırken simultane vektör iterasyon (SVI) veya Guyan indirgeme yöntemlerinden birisi seçilir. Yöntemin seçilmesinde modelin büyüklüğü önemli bir rol oynamaktadır. Guyan indirgeme yönteminde temel serbestlik derecelerinin seçilmesi gerekmektedir. Orta büyüklükteki modeller için uygun temel serbestlik derecelerinin seçilmesi durumunda çözüm zamanı oldukça az olacaktır. Büyük modeller için simultane vektör iterasyon metodu bilgisayar kapasitesinin yeterli olması bakımından daha uygundur. Simultane vektör iterasyon metodunda çözüm kontrol değişkenlerinin belirlenmesi gereklidir. Bunlar:

1. Rijid cisim modlarının sayısı
2. Bükülebilir modların sayısı
3. İterasyon vektörlerinin sayısı

olarak sıralanabilir.

Burada modelin büyüklüğü ve bilgisayar kapasitesinin sınırlı olması gözönünde bulundurularak simultane vektör iterasyon yöntemi seçilmiştir.

Burada özdeğer problemi

$$\left(\mathbf{A} - \frac{1}{\omega^2} \mathbf{I} \right) \mathbf{\Psi} = 0 \quad (4.1)$$

şeklinde standart formda düşünülür. Burada $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{L}^{-T}$ ve $\mathbf{I}$ birim, çapraz matris olarak tanımlanmıştır. $\mathbf{L}$ alt üçgen matrisi göstermektedir. Bu yöntemdeki işlemler aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

İterasyon bir deneme vektörünün ($\mathbf{X}_1$) seçilmesi ile başlatılır. Bu deneme vektörü

$$\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1 = \mathbf{I} \quad (4.2)$$

şartını sağlamalıdır.

Aşağıdaki işlemler $k=1,2,3,\dots$ için oluşturulur:

$$\mathbf{A}\mathbf{X}_k = \mathbf{V}_{k+1} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{X}_k^T \mathbf{V}_{k+1} = \mathbf{B}_{k+1} \quad (4.4)$$

Aşağıdaki indirgenmiş özdeğer problemi çözülür:

$$\mathbf{B}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{Q}_{k+1} \mathbf{\Lambda}_{k+1} \quad (4.5)$$

Çarpım yapılarak

$$\mathbf{V}_{k+1} \mathbf{Q}_{k+1} = \mathbf{W}_{k+1} \quad (4.6)$$

ve ortanormalize işlemi uygulanarak $\mathbf{X}_{k+1}$ elde edilir.

$\mathbf{\Lambda}_{k+1}$ özdeğerleri ve $\mathbf{X}_{k+1}$ özvektörleri Eşitlik 4.1'in en büyük özdeğer ve özvektörlerine yakınsar.

Daha sonraki özdeğerlerin bulunabilmesi için işlem aynı şekilde devam ettirilir [18].

BÖLÜM 5. SONUÇLAR VE DEĞERLENDİRME

Adaptör yapısının iki noktasından uçağa takılı olması durumunda serbest titreşim analizi I-DEAS yazılımı kullanılarak yapılmıştır. Bu analizin sonucunda ilk altı mod şekli ve titreşim frekansı elde edilmiştir. Yapının ilk altı serbest titreşim mod şekli Şekil B.1 - Şekil B.6'da sunulmuştur [EK B].

Birinci titreşim modunun yanlamasına olduğu bulunmuştur. Bu yapının ilk kararsızlık durumunun yanlamasına olabileceğini ortaya koymaktadır. İkinci titreşim modu boylamasına olarak elde edilmiştir. Diğer mod şekilleri de boylamasına titreşimleri göstermektedir.

Mod şekillerine bakılarak titreşim sonucunda yerdeğişimine maruz kalan bölgelere hareketlerden etkilenecek cihazların takılmaması gerektiği söylenebilir. Bunun sebebi hareketlerin sözkonusu cihazları etkileyecek olmasıdır. Ayrıca bu bölgelerdeki bağlantılardan da mümkün olduğu kadar kaçınılmalıdır.

Adaptör yapısında mevcut olan takviyelerden bazıları yapıdan ayrılarak değişik takviye durumları elde edilmiştir. Elde edilen değişik takviye durumları için analizler yapılarak, bu değişikliklerin frekans üzerindeki etkileri incelenmiştir. Ayrıca KOBRA bomba adaptörünün de bomba ve roketler yüklü durumda iken serbest titreşim analizi yapılmıştır. Bu analizlerin sonunda Tablo B.1'de görülen frekans değerleri elde edilmiştir.

Takviyelerin adaptör yapısından ayrılması halinde, beklenildiği gibi, frekanslarda düşme meydana gelmektedir. Buradan yapıda uygun yerlerde daha fazla takviye elemanları kullanılması halinde doğal frekansların yükselebileceği söylenebilir. Ancak burada ilave edilen takviyenin yapıya kazandırdığı katılık nisbeti ile yapının kütlelerini artırma nisbetlerine göre frekanslarda yükselmenin yanında düşmenin de olabileceğine dikkat edilmelidir. Doğal frekansların yükseltilmesi yapının dinamik dış yüklere karşı davranışı, rezonans problemleri ve aeroelastik etkilerin ortaya çıkması bakımlarından oldukça önemli olmaktadır. Bilindiği gibi bu tür dinamik zorlamalar yapının yorulma ömrü bakımından da önemlidir.

Burada yapının aerotermal ısınmasından kaynaklanan sıcaklık etkileri, hesaba katılmamış, bu etkilerin incelenmesi sonraki çalışmalara bırakılmıştır. Ayrıca roketlerin atılması sırasında ortaya çıkan anlık (impulsive) yüklere karşı yapının dinamik cevabının, iniş sırasında gelen yüksek ve anlık atalet yüklerine karşı davranışının ve yorulma ömrünün incelenmesi önemli olacaktır. Adaptör yapısının aeroelastik davranışının belirlenmesi de bir diğer araştırma konusu olabilir.



KAYNAKLAR

- [1] KOGA, Tatsuzo., Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, JSME International Journal, Series I, Vol.32, No.3, pp.311-319 (1989).
- [2] KOGA, Tatsuzo., Inextensional Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol.26, No.12, pp.1499-1505 (1988).
- [3] Leissa, A.W., Vibration of Shells, NASA SP-288, 1973.
- [4] Effects of Boundary Conditions on the Free Vibrations of Circular Cylindrical Shells, AIAA Journal, Vol.26, No.11, pp.1387-1394 (1988).
- [5] Mustafa, B.A.J. and Ali, R., An Energy Method For Free Vibration Analysis of Stiffened Circular Cylindrical Shells, Computers and Structures, Vol.32, No.2, pp.355-363 (1989).
- [6] MECİTOĞLU, Z. and DÖKMECİ, M. Cengiz., Free Vibrations of a Thin , Stiffened, Cylindrical Shallow Shell, AIAA Journal, Vol.30, No.3, pp.848-852 (1990).
- [7] EGGLE, D.M. and SEWALL, J.L., An Analysis of Free Vibrations of Orthogonally Stiffened Cylindrical Shells with Stiffeners Treated as Discrete Elements, AIAA Journal, Vol.6, No.3, pp.518-526 (1967).
- [8] LOVE, A.E.H., On The Small Free Vibrations and Deformations of Thin Elastic Shells, Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 17A, 491-546 (1888).

- [9] LOVE, A.E.H., A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, 4th ed., New York: Dover Publications, Chapter 24, 1944.
- [10] Reissner, E., A New Derivation of the Equations for the Deformation of Elastic Shells, Amer. J. Math., 63, 177-184 (1941).
- [11] KRAUSS, Prof. Harry., Thin Elastic Shells, New York, 1967.
- [12] İNAN, M., Cisimlerin Mukavemeti, İstanbul, 1984.
- [13] ZYCZKOWSKI, Michal., Strength of Structural Elements, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1991.
- [14] William Weaver, Jr., Finite Elements for Structural Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1984.
- [15] MORRIS, A.J., Introduction to Finite Element Basics, AGARD, No.147, pp.1-35 (1986).
- [16] I-DEAS Finite Element Modeling, SDRC (1990).
- [17] RAO, S.S., The Finite Element Method In Engineering, Pergamon Press, 1989.
- [18] PETYT, Maurice., Introduction to Finite Element Vibration Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1984.

EKLER

Ek A Bir Yüzeyin Parametrik Eğrileri

Ek B Mod Şekilleri ve Doğal Frekans Değerleri Tablosu



Ek A Bir Yüzeyin Parametrik Eğrileri

Her S yüzeyi (Şekil A.1) dikdörtgensel koordinat sisteminde α_1 ve α_2 gibi iki değişkenin bir fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$x_1 = f_1(\alpha_1, \alpha_2) \quad x_2 = f_2(\alpha_1, \alpha_2) \quad x_3 = f_3(\alpha_1, \alpha_2) \quad (\text{Ek.A1})$$

Burada α_1 ve α_2 değişkenleri yüzeyin eğrisel koordinatları olarak isimlendirilir. Bu yüzey üzerindeki bir P noktasının konum vektörü aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\mathbf{r}(\alpha_1, \alpha_2) = f_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_1 + f_2(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_2 + f_3(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{e}_3 \quad (\text{Ek.A2})$$

Yüzey üzerindeki bir P noktasından çok yakınındaki bir P' noktasına hareket ederken r vektöründeki dr diferansiyel değişimi

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_{,1} d\alpha_1 + \mathbf{r}_{,2} d\alpha_2 \quad (\text{Ek.A3})$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\mathbf{r}_{,i} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha_i} \quad i = 1, 2 \quad (\text{Ek.A4})$$

olarak vektörlerin kısmi türevini göstermektedir. Diferansiyel dr vektörünün büyüklüğünün karesi vektörün kendisi ile skalar çarpımı yapılarak elde edilir. Bu çarpım

$$(ds)^2 = O(d\alpha_1)^2 + 2P(d\alpha_1 d\alpha_2) + R(d\alpha_2)^2 \quad (\text{Ek.A5})$$

şeklinde ifade edilir. Burada

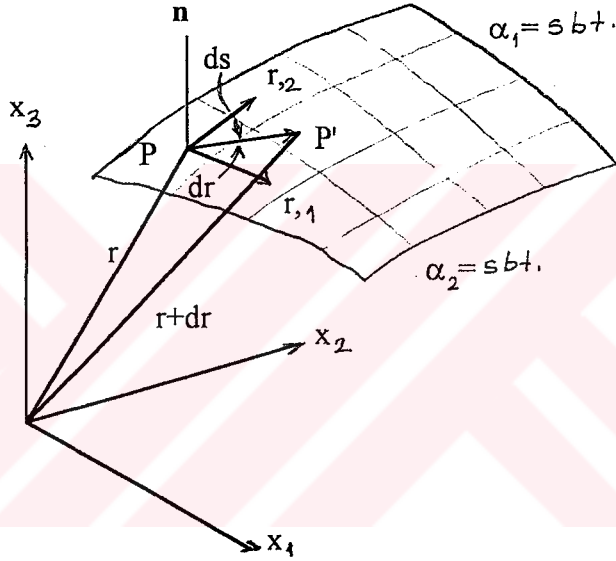
$$O = \mathbf{r}_{,1} \mathbf{r}_{,1} \quad P = \mathbf{r}_{,1} \mathbf{r}_{,2} \quad R = \mathbf{r}_{,2} \mathbf{r}_{,2} \quad (\text{Ek.A6})$$

olarak tanımlanmıştır. Eşitlik (Ek.A5) yüzeyin birinci temel formu ve O, P ve R değerleri birinci temel büyüklükler olarak bilinir.

Burada $r_{,1}$ ve $r_{,2}$ sırasıyla sabit α_2 ve α_1 eğrilerinin tanjantı olduğu için P büyüklüğü sıfır olur ve parametrik eğriler bir dikgen ağ oluşturur. Bu durumda birinci temel form

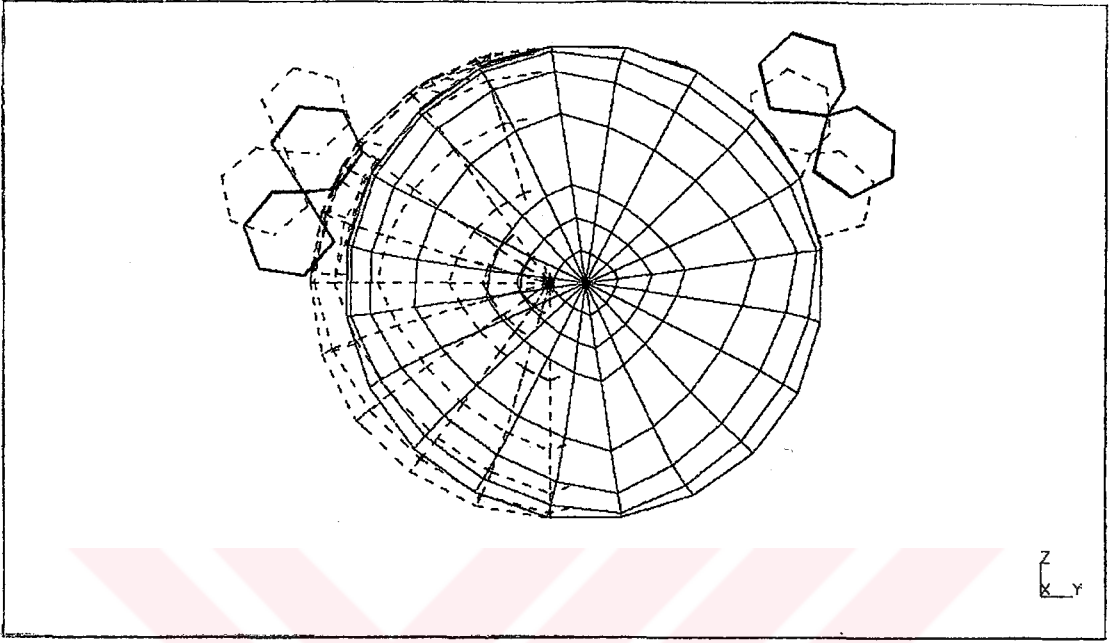
$$(ds)^2 = A_1^2 (d\alpha_1)^2 + A_2^2 (d\alpha_2)^2 \quad (\text{Ek.A7})$$

şeklinde ifade edilir. Burada $A_1 = \sqrt{O}$ $A_2 = \sqrt{R}$ $F = 0$ şeklinde ifade edilen konum vektörünün parametrik eğrilere göre kısmi türevlerini göstermektedir [11].

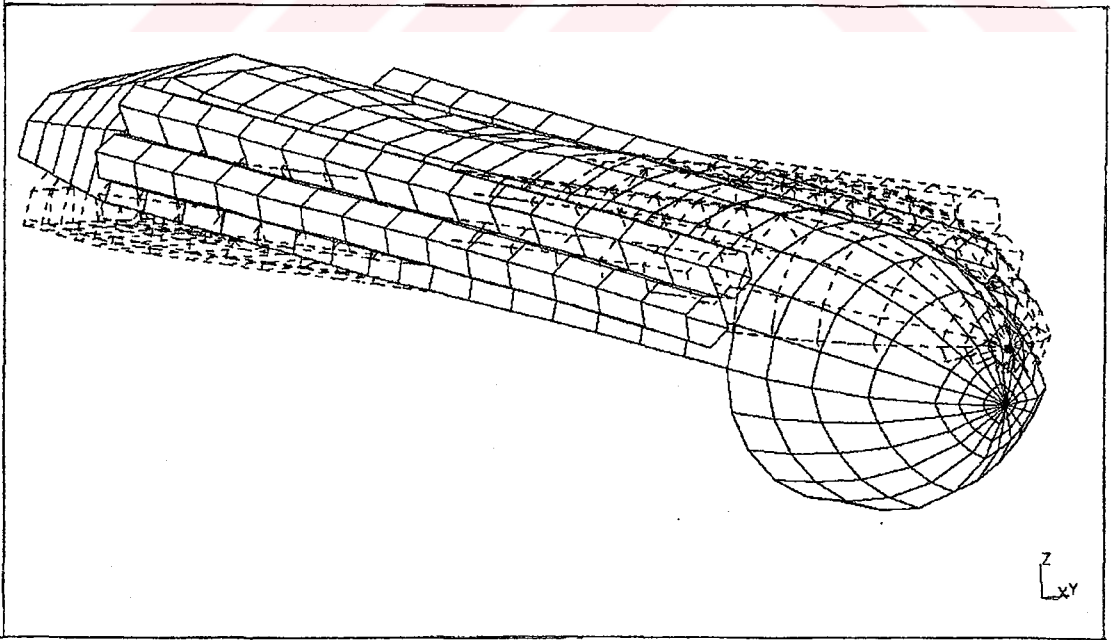


Şekil A.1 Dikdörtgensel koordinatlarda yüzey

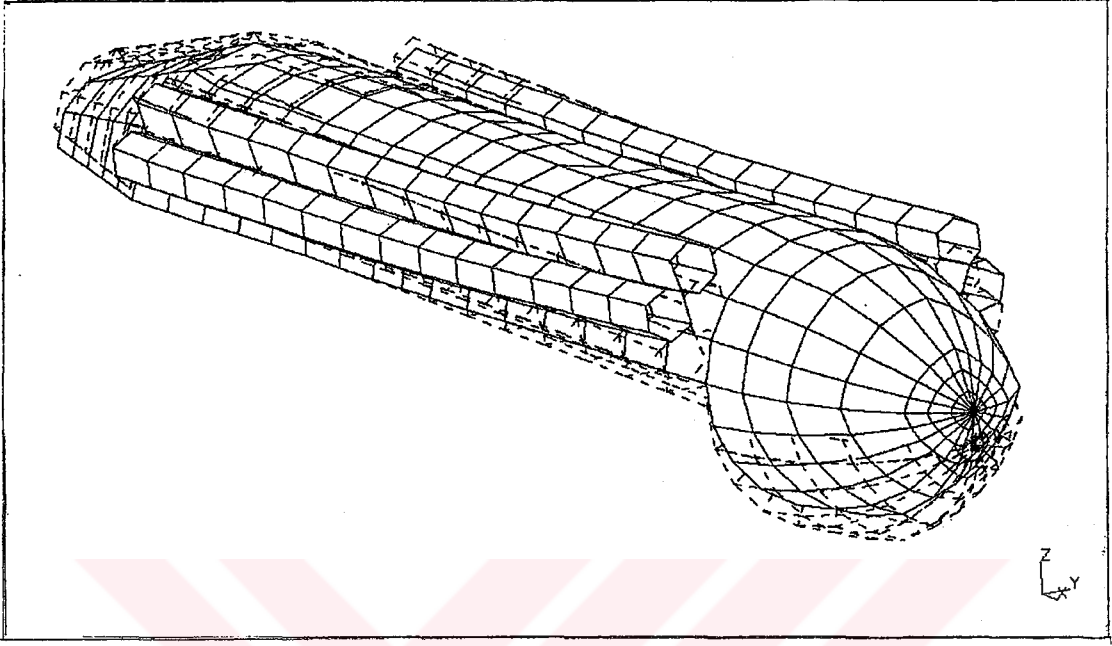
Ek B Mod Şekilleri ve Doğal Frekans Değerleri Tablosu



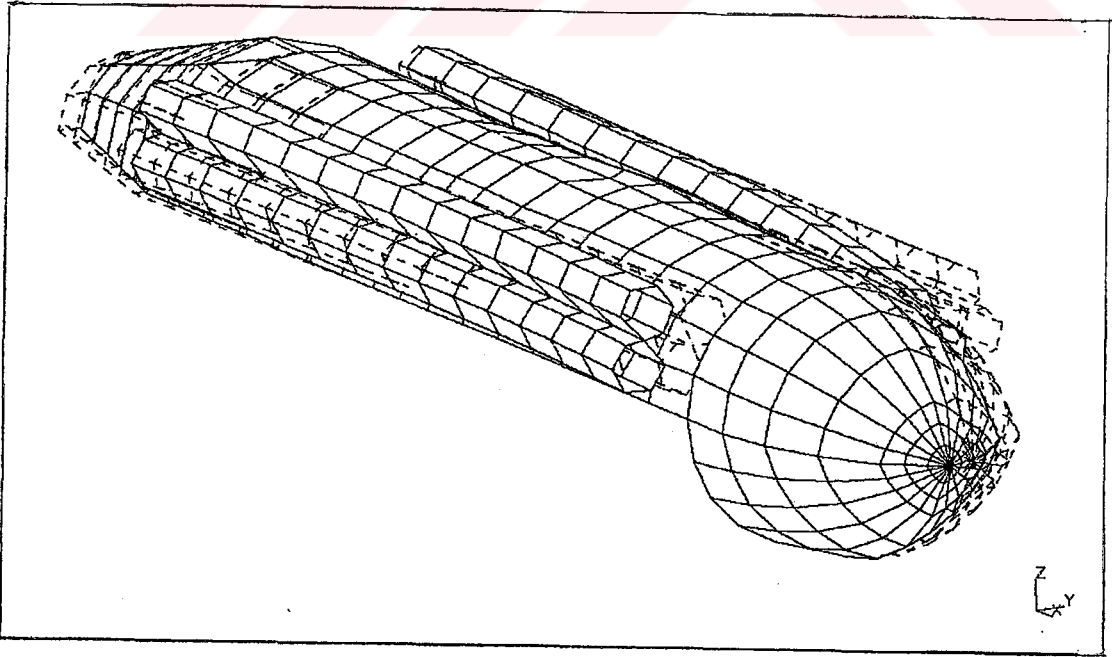
Şekil B.1 Birinci mod şekli



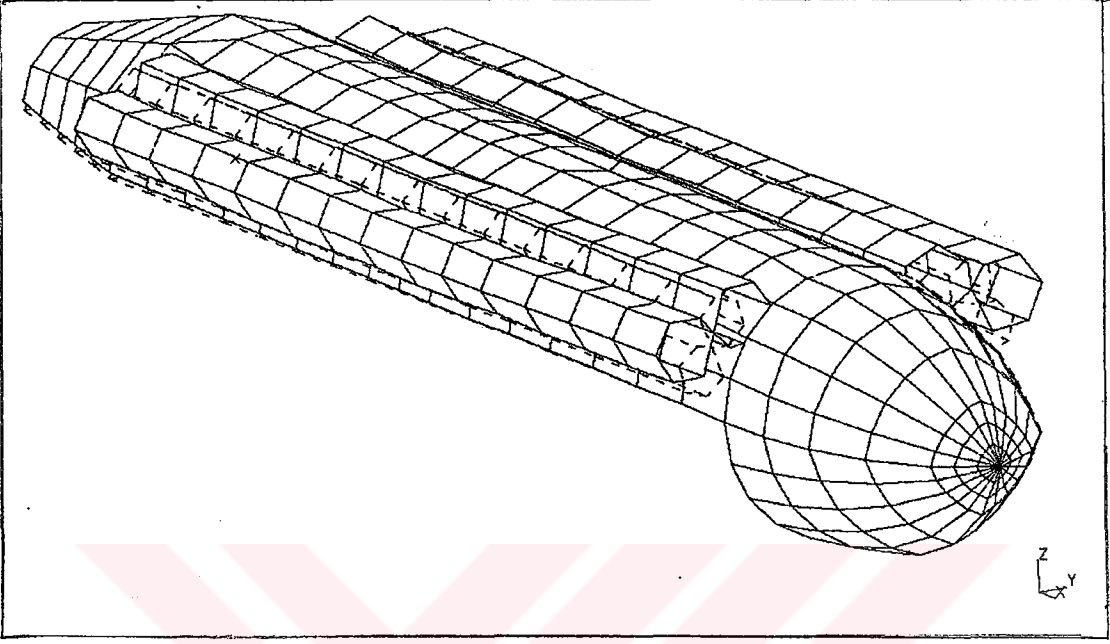
Şekil B.2 İkinci mod şekli



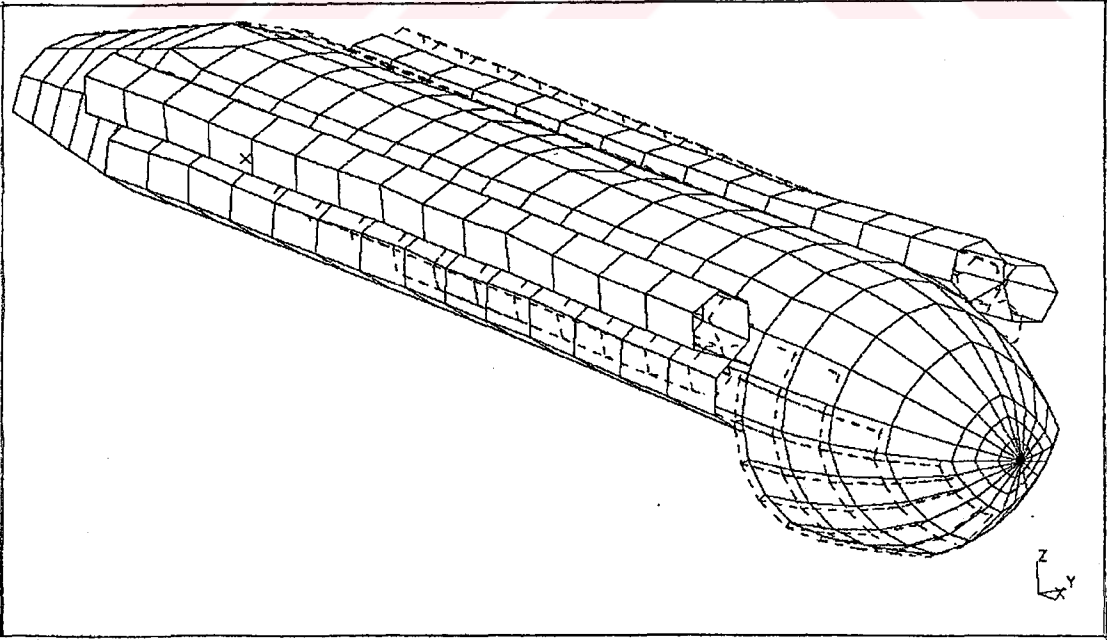
Şekil B.3 Üçüncü mod şekli



Şekil B.4 Dördüncü mod şekli



Şekil B.5 Beşinci mod şekli



Şekil B.6 Altıncı mod şekli

Tablo B.1 Değişik Takviye ve Yükleme Durumları İçin Serbest Titreşim Frekansları

Ayrılan Eleman	SERBEST TİTREŞİM FREKANSLARI					
	1. Mod	2. Mod	3. Mod	4. Mod	5. Mod	6. Mod
Geliştirilen yapı	17,98	44,91	65,72	73,28	75,13	75,87
3. Ara takviye	16,10	44,70	63,91	69,68	70,31	71,10
1. ve 3. Ara takviye	15,61	32,63	54,05	59,27	59,42	66,14
1., 3. ve 4. Ara takviye	13,54	25,70	36,52	46,32	47,22	53,93
Gövde taşıma ve bağlantı profili	6,42	17,58	53,32	59,82	72,99	74,39
Bombalar	21,46	53,51	74,99	75,66	79,96	90,57
Bomba ve roketler	27,85	62,39	105,16	133,41	140,02	144,28
Orijinal yapı	16,69	37,74	58,73	71,42	72,69	75,18

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Kütahyada doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini orada tamamladı. 1985 yılında İ.T.Ü Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi' nde Uçak Mühendisliği öğrenimine başladı. 1989 yılında mezun oldu. Aynı yıl İ.T.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Uçak Mühendisliği Ana Bilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 1990-1992 yıllarında birer yıl özel sektörde ve E.İ.B.M' nde görev yaptıktan sonra Haziran 1992' de İ.T.Ü Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi Uçak İnşaatı Ana Bilim Dalı' nda araştırma görevlisi oldu. Halen bu göreve devam etmektedir.

