

14.50

BİR UZAY FORMUN KONVEKS HİPERYÜZEYLERİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mat. Müh. Uğur DURSUN

T. C.

**Yükseköğretim Kurulu
Dokümantasyon Merkezi**

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 4 Haziran 1990

Tezin Savunulduğu Tarih : 22 Haziran 1990

Tez Danışmanı : Prof.Dr.Abdülkadir ÖZDEĞER

Diğer Jüri Üyeleri : Prof.Dr.Cevdet KOÇAK

: Doç.Dr.Hasan ÖZEKES

ÖNSÖZ

Bu çalışmam sırasında değerli yardımlarını esirgemeyen Sayın Hocam Prof. Dr. Abdülkadir ÖZDEĞER'e teşekkürlerimi sunmayı borç bilirim.

Uğur DURSUN



İ Ç İ N D E K İ L E R

ÖZET.....	iv
SUMMARY.....	v
BÖLÜM 1. BAZI TEMEL KAVRAM ve TEOREMLER.....	1
1.1 Riemann Manifoldu ve Riemann Metriği.....	1
1.2 Riemann Konneksiyonu.....	1
1.3 Hiperyüzey, Şekil Operatörü.....	2
1.4 Eğrilik Operatörü ve Riemann Eğrilik Tensörü 2	
1.5 Kesitsel Eğrilik, Uzay Form ve Ovaloid.....	3
1.6 Gauss ve Codazzi Denklemleri.....	3
1.7 Birinci Beltrami Operatörü ve Laplasiyen.....	5
1.8 Diverjans Teoremi ve Üçüncü Esas Form.....	5
BÖLÜM 2. BİR UZAY FORMUN KONVEKS HIPERYÜZEYLERİ.....	7
2.1 Hiperyüzeyin Üçüncü Esas Formuna Göre Riemann Konneksiyonu ve Riemann Eğriliği.....	7
2.2 Esas Sonuçlar.....	17
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	22
KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ.....	24

Ö Z E T

Hasanis [2] deki çalışmasında $(n+1)$ -boyutlu Euclid uzayının konveks hiperyüzeyleri için

$$\begin{aligned} \Delta_I \log \det L - \operatorname{div}_I \lambda - \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) &= (\operatorname{Tr} L)^2 - n(\operatorname{Tr} L^2) - A \\ \text{ve} \\ \Delta_{III} \log \det L - \operatorname{div}_{III} \mu - \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \log \det L) &= \\ &= (\operatorname{Tr} L)(\operatorname{Tr} L^{-1}) - n^2 + B \end{aligned}$$

formüllerini ispatlamıştır.

Bilindiği gibi, sabit Riemann eğrilikli bir Riemann manifolduna bir uzay formu denir. Baikoussis ve Koufogiorgos, Hasanis'in elde ettiği bu formülleri bir uzay formun konveks hiperyüzeylerine genelleştirmiştir [4].

İki bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde Riemann geometrisine ait bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

İkinci bölümde, önce bir uzay formun bir hiperyüzeyinin üçüncü esas forma göre Riemann konneksiyonu tanımlanmış ve bunun yardımıyla hiperyüzeyin birinci ve üçüncü esas formlarına göre Riemann eğrilik tensörleri arasındaki ilişki elde edilmiştir. Daha sonra, [2] de Öklidiyen hiperyüzeyleri için elde edilen iki formülün bir uzay formun hiperyüzeylerindeki karşılığı elde edilmiş ve bazı özel hallere ait sonuçlar üzerinde durulmuştur.

ON CONVEX HYPERSURFACES IN A SPACE FORM

SUMMARY

In [2] Hasanis considers a convex hypersurface M in a $(n+1)$ -dimensional Euclidean space and establishes the formulae

$$\Delta_I \log \det L - \operatorname{div}_I \lambda - \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) = (\operatorname{Tr} L)^2 - n(\operatorname{Tr} L^2) - A$$

and

$$\Delta_{III} \log \det L - \operatorname{div}_{III} \mu - \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \log \det L) = (\operatorname{Tr} L)(\operatorname{Tr} L^{-1}) - n^2 + B.$$

Moreover, for an ovaloid M in E^{n+1} , he obtains the integral inequalities

$$\int_M \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) dM \geq 0 \text{ and } \int_M \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \log \det L) dM \leq 0$$

where the equality in either case holds, if and only if, M is a hypersphere.

We recall that a Riemannian manifold of constant Riemannian curvature is called a space form. The above formulae of Hasanis have been generalized by Bakoussis and Koufogiorgos [4], to a convex hypersurface of a space form.

This work consists of two parts. In the first part, some fundamental concepts of Riemannian geometry, used in this work, are given.

Let f be an isometric immersion of the n -dimensional Riemannian manifold M into the $(n+1)$ -dimensional Riemannian manifold $\bar{M}$ and let N be the unit vector field on M with respect to the immersion f . Weingarten map for a hypersurface M is defined by $LY = \bar{\nabla}_Y N$, where $\bar{\nabla}$ denotes the Riemannian connection of $\bar{M}$ and Y is a vector field on M .

Denoting the metrics of M and $\bar{M}$, respectively, by $\langle \cdot, \cdot \rangle$ and $\langle \bar{\cdot}, \bar{\cdot} \rangle$ we have the Gauss equation

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle LX, Y \rangle N.$$

This equation defines the Riemannian connection ∇ on M . On the otherhand, the curvature tensor field R of M which is defined by

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z,$$

is related to the curvature tensor $\bar{R}$ of $\bar{M}$ by Gauss curvature equation

$$R(X, Y)Z = \bar{R}(X, Y)Z - \{ \langle LX, Z \rangle LY - \langle LY, Z \rangle LX \},$$

whereas the Codazzi equation of M takes the form

$$\langle \nabla_X L \rangle Y = \nabla_X \langle LY \rangle - L \nabla_X Y.$$

The sectional curavature $\bar{K}(X \wedge Y)$ for the oriantation $X \wedge Y$ determined by the tangent vectors X and Y at $p \in \bar{M}$, is defined by

$$\bar{K}(X \wedge Y) = \frac{\langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

If $\bar{M}$ is a Riemannian manifold of constant sectional curvature c and M is an immersed hypersurface of $\bar{M}$, then there is a relation between the sectional curvatures of M and $\bar{M}$. Namely,

$$K(X \wedge Y) = c + \frac{\langle LX, X \rangle \langle LY, Y \rangle - \langle LX, Y \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Let f be an isometric immersion of a smooth, compact, connected and orientable n -dimensional Riemannian manifold M into a smooth, connected $(n+1)$ -dimensional Riemannian manifold $\bar{M}$ of constant sectional curvature c .

In the second part of this work, the Riemannian connection ∇ with respect to the third fundamental form $\langle \cdot, \cdot \rangle_{III}$ has been defined by

$$\begin{aligned}
{}^{III} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{III} &= X\langle Y, Z \rangle_{III} + Y\langle X, Z \rangle_{III} - Z\langle X, Y \rangle_{III} \\
&\quad + \langle [Z, X], Y \rangle_{III} + \langle [Z, Y], X \rangle_{III} + \langle [X, Y], Z \rangle_{III}.
\end{aligned}$$

After doing the necessary calculations we obtain

$${}^{III} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{III} = 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle + L^{-1}(\nabla_X L)Y, Z_{III}.$$

Since this is valid for arbitrary Z , it follows that

$${}^{III} \nabla_X Y = \nabla_X Y + L^{-1}(\nabla_X L)Y.$$

Following the rule used to define the curvature tensor R of M , the curvature tensor R relative to the connection ∇ is defined by the relation

$${}^{III} R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Using the last two equations, we obtain a relation between the curvature tensors R and R as

$$\begin{aligned}
{}^{III} R(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \nabla_X(L^{-1}(\nabla_Y L)Z) - \nabla_Y(L^{-1}(\nabla_X L)Z) \\
&\quad + L^{-1}\{(\nabla_X L)\nabla_Y Z - (\nabla_Y L)\nabla_X Z + (\nabla_X L)(L^{-1}(\nabla_Y L)Z) - \\
&\quad (\nabla_Y L)(L^{-1}(\nabla_X L)Z) - (\nabla_{[X, Y]} L)Z\}.
\end{aligned}$$

A straight-forward calculation shows that

$${}^{III} R(X, Y)Z = L^{-1}R(X, Y)LZ.$$

For any $p \in M$, we choose a field of orthonormal frames $e_1, e_2, \dots, e_n$ with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle$ in a neighbourhood of p such that at p , e_i ($i=1, 2, \dots, n$) are eigenvectors of L and that $\nabla e_i = 0$. If k_i ($i=1, 2, \dots, n$) are the eigenvalues of L at p , then $Le_i = k_i e_i$. Thus, the sectional curvature K_{ij} of the 2-plane $e_i \wedge e_j$ is found as

$$K_{ij} = c + k_i k_j.$$

After taking the inner product of $R(X, Y)Y$ by X with respect to the first fundamental form and setting

$X=e_i$, $Y=e_j$ in the expression so obtained, we get

$$\begin{aligned}
 & \text{III} \\
 & \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j) e_j - R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle = \\
 & = \sum_i \langle \nabla_{e_i} (\sum_j L^{-1} (\nabla_{e_j} L) e_j), e_i \rangle - \\
 & - \sum_j \langle \nabla_{e_j} (\sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i), e_j \rangle + \\
 & + \langle \sum_j L^{-1} (\nabla_{e_j} L) e_j, \sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i \rangle - \\
 & - \sum_{i,j} \langle L^{-1} (\nabla_{e_i} L) e_j, (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_j \rangle
 \end{aligned}$$

Calculating all the terms in the above equation we find

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div}_I (\operatorname{grad}_{II} \operatorname{Tr} L) - \Delta_I (\log \det L) + \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) = \\
 = P + Q,
 \end{aligned}$$

where

$$Q = \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-1} K_{ij}$$

and

$$P = \sum_{i,j} \langle L^{-1} (\nabla_{e_i} L) e_j, (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_j \rangle.$$

This is the generalization of the first formula, obtained in [2], to a convex hypersurface of a space form.

The vectors $L^{-1} e_i (= k_i^{-1} e_i)$ ($i=1,2,\dots,n$) define an orthonormal basis in the tangent space at $p \in M$ with respect to the third fundamental form. We extend these vectors to the vector fields $\bar{e}_i$ in a neighbourhood of p such that, $\text{III} \nabla \bar{e}_i = 0$ and $\bar{e}_i = L^{-1} e_i$ at p .

III
Taking the inner product of $R(X, Y)Y$ by X with respect to the third fundamental form and setting $X=e_i$, $Y=e_j$ in the expression so obtained, we get

$$\text{III} \\
 \sum_{i,j} \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j - R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle_{\text{III}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j} \{ \langle \nabla_{\bar{e}_i} (L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_j} L) \bar{e}_j), \bar{e}_i \rangle_{\text{III}} - \\
&\quad - \langle \nabla_{\bar{e}_j} (L^{-2}(\nabla_{\bar{e}_i} L) L \bar{e}_i), \bar{e}_j \rangle_{\text{III}} - \\
&\quad - \langle (\nabla_{\bar{e}_i} L) L \bar{e}_i, L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_j} L) \bar{e}_j \rangle + \\
&\quad + \langle L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j, (\nabla_{\bar{e}_j} L) L \bar{e}_i \rangle \}
\end{aligned}$$

Calculating all the terms in the above equation we find

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_{\text{III}} (\operatorname{grad}_{\text{II}} \operatorname{Tr} L^{-1}) - \Delta_{\text{III}} (\log \det L) - \\
- \nabla_{\text{II}} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \log \det L) = \bar{P} + \bar{Q},
\end{aligned}$$

where

$$\bar{Q} = \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-2} K_{ij}$$

and

$$\bar{P} = \sum_{i,j} k_i \langle L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j, L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j \rangle_{\text{II}} \geq 0.$$

The last formula is the generalization of the second formula, obtained in [2], to a convex hypersurface of a space form.

If the sectional curvature K of M (for all 2-planes) is nonnegative when $c < 0$, or $K > c$ when $c \geq 0$, then the following integral inequalities are obtained from the formulae which are the generalization of Hasanis's formulae

$$\int_M \nabla_{\text{II}} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) dM \geq 0$$

and

$$\int_M \nabla_{\text{II}} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \det L) dM \leq 0.$$

Equality holds, if and only if, f is totally umbilical ($c \geq 0$), or, either f is totally umbilical or L has two distinct constant eigenvalues at every point ($c < 0$). Finally, some special cases are studied with the use of the above inequalities.

BÖLÜM 1. BAZI TEMEL KAVRAM ve TEOREMLER

1.1 Riemann Manifoldu ve Riemann Metriği

Bir M manifoldu üzerinde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ şeklinde gösterilen C^∞ sınıfından bilineer, simetrik ve pozitif definit bir fonksiyon tanımlanmış ise M manifolduna Riemann manifoldu ve $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonuna da Riemann metriği veya birinci esas form denir. Buna göre $p \in M$ noktasındaki teğet uzay M_p ve $X, Y, Z \in M_p$ olmak üzere,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : M_p \times M_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (X, Y) \longrightarrow \langle X, Y \rangle$$

şeklinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle$ fonksiyonu

$$i) \quad \langle X+Y, Z \rangle = \langle X, Z \rangle + \langle Y, Z \rangle,$$

$$\langle X, Y+Z \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle X, Z \rangle,$$

$$ii) \quad \langle X, Y \rangle = \langle Y, X \rangle,$$

$$iii) \quad \langle X, X \rangle > 0 \quad (X \neq 0),$$

iv) X, Y vektör alanları p noktasının bir U civarında C^∞ sınıfından iseler $\langle X, Y \rangle_p = \langle X_p, Y_p \rangle$ U civarında C^∞ sınıfındandır,

koşullarını sağlar.

1.2. Riemann Konneksiyonu

Bir M manifoldu üzerinde C^∞ sınıfından teğet vektör alanlarının cümlesi $\mathcal{X}(M)$ olmak üzere,

$$\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y) \longrightarrow \nabla_X Y \quad (X, Y \in \mathcal{X}(M))$$

şeklinde tanımlanan ∇ tasviri $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ ve $\forall f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için;

$$1) \quad \nabla_{fX+gY} Z = f \nabla_X Z + g \nabla_Y Z$$

$$2) \quad \nabla_X (fY) = f \nabla_X Y + (Xf)Y$$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir konneksiyon denir. ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki şartı da sağlarsa ∇ ya Riemann konneksiyonu denir:

$$\begin{aligned} 3) \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X &= [X, Y] \\ 4) \quad Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle. \end{aligned}$$

1.3. Hiperyüzey, Şekil Operatörü

$\bar{M}$ (n+1)-boyutlu bir manifold olsun. $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir M alt manifolduna $\bar{M}$ nin bir hiperyüzeyi denir. M nin birim normal vektör alanı N olsun. $\bar{M}$ nin konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere, $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$ için

$$L(Y) = -\bar{\nabla}_Y N$$

şeklinde tanımlanan L dönüşümüne M nin şekil operatörü veya Weingarten dönüşümü denir. $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere $\langle X, Y \rangle_{II} = \langle LX, Y \rangle$ şeklinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle_{II}$ tasvirine M nin ikinci esas formu denir. M, ikinci esas formu pozitif definit olacak şekilde yönlendirilirse $\langle \cdot, \cdot \rangle_{II}$ tasviri M üzerinde bir metrik oluşturur.

1.4. Eğrilik Operatörü ve Riemann Eğrilik Tensörü

$\mathcal{X}(M)$, M üzerinde tanımlı teget vektör alanlarının cümlesi olmak üzere,

$$R : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$$

$$(X, Y, Z) \longrightarrow R(X, Y)Z = \nabla_X (\nabla_Y Z) - \nabla_Y (\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (1.4.1)$$

olarak tanımlanan R tasviri M üzerinde (1,3) tipinde bir tensör alanıdır. R ye M nin eğrilik tensör alanı (veya eğrilik operatörü) ve bunun bir p noktasındaki değeri olan $R(X_p, Y_p)Z_p$ tensörüne ise p noktasındaki eğrilik tensörü denir.

$$K : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M, R)$$

$$(X, Y, Z, W) \longrightarrow K(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$$

şeklinde tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensör alanının p_M noktasındaki değerine M üzerinde Riemann-Christoffel eğrilik tensörü denir.

1.5. Kesitsel Eğrilik, Uzay Form ve Ovaloid

M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. $X, Y \in T_p M$ olmak üzere, M nin p noktasında ve X, Y vektörlerinin belirlediği orientasyondaki kesitsel eğriliği $K(X \wedge Y)$ ile gösterilir ve

$$K(X \wedge Y) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \quad (1.5.1)$$

şeklinde tanımlanır. M nin herhangi bir p noktasında ve her $X \wedge Y$ orientasyonundaki kesitsel eğriliği aynı ise M ye sabit eğrilikli manifold denir. Sabit eğrilikli bir Riemann manifolduna uzay form denir.

Kompakt, irtibatlı ve her noktasındaki kesitsel eğriliği negatif olmayan bir M hiperyüzeyine ovaloid denir.

1.6. Gauss ve Codazzi Denklemleri

f, n-boyutlu bir M Riemann manifoldunun, n+1-boyutlu bir $\bar{M}$ Riemann manifoldu içine bir izometrik daldırma, M nin metriği $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ve $\bar{M}$ nin metriği de $\langle \bar{\cdot}, \bar{\cdot} \rangle$ olsun. $X, Y \in T_p M$ olmak üzere,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle LX, Y \rangle N$$

Gauss denklemi yardımıyla M üzerinde ∇ konneksiyonu tanımlanır.

R ve $\bar{R}$, sırasıyla, M ve $\bar{M}$ manifoldlarının eğrilik tensörleri olmak üzere

$$R(X, Y)Z = \bar{R}(X, Y)Z - \{ \langle LX, Z \rangle LY - \langle LY, Z \rangle LX \} \quad (1.6.1)$$

denkleminde Gauss eğrilik denklemi ve

$$(\nabla_X L)Y = (\nabla_Y L)X \quad (1.6.2)$$

denkleminde Codazzi denklemi denir. Bu denklem

$$(\nabla_X L)Y = \nabla_X (LY) - L \nabla_X Y \quad (1.6.3)$$

şeklinde yazılabilir.

L^{-1} , L ($\det L \neq 0$) şekil operatörünün tersi olmak üzere

$$L \nabla L^{-1} = -(\nabla L) L^{-1} \quad (1.6.4)$$

olduğu şu şekilde gösterilebilir: Gerçekten eşitliğin sol tarafı için,

$$\begin{aligned} (L \nabla_X L^{-1})Y &= L(\nabla_X L^{-1})Y = L\{\nabla_X (L^{-1}Z) - L^{-1}\nabla_X Z\} \\ &= L\nabla_X (L^{-1}Y) - \nabla_X Y, \end{aligned}$$

sağ tarafı için de,

$$\begin{aligned} -(\nabla_X L) L^{-1}Y &= -[\nabla_X (L L^{-1}Y) - L \nabla_X (L^{-1}Y)] \\ &= L \nabla_X (L^{-1}Y) - \nabla_X Y \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik keyfi $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ vektör alanları için geçerli olduğundan

$$L \nabla L^{-1} = -(\nabla L) L^{-1}$$

bulunur.

$\bar{M}$ manifoldu sabit kabul edilen c eğriliği ile M nin herhangi bir X/Y orientasyonundaki kesitsel eğriliği $K(X/Y)$ ise bunlar arasında

$$K(X/Y) = c + \frac{\langle LX, X \rangle \langle LY, Y \rangle - \langle LX, Y \rangle^2}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} \quad (1.6.3)$$

şeklinde bir bağıntının var olduğunu biliyoruz.

1.7. Birinci Beltrami Operatörü ve Laplasiyen

M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. p noktasının bir U civarında C^∞ sınıfından iki fonksiyon A ve B olmak üzere A ve B fonksiyonlarının birinci esas forma göre gradiyentleri $\text{grad}_I A$ ve $\text{grad}_I B$ ile gösterilise

$$\nabla_I(A, B) = \langle \text{grad}_I A, \text{grad}_I B \rangle$$

şeklinde tanımlanan ve C^∞ sınıfından olan ∇_I fonksiyonuna birinci esas forma göre hesaplanmış Beltrami operatörü denir. Benzer şekilde, ikinci esas forma göre birinci Beltrami operatörü de

$$\nabla_{II}(A,B) = \langle \text{grad}_{II} A, \text{grad}_{II} B \rangle_{II}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir A fonksiyonunun gradiyentinin diverjansına A'nın Laplasiyeni denir ve

$$\Delta A = \text{div}(\text{grad} A)$$

ile gösterilir.

1.8. Diverjans Teoremi ve Üçüncü Esas Form

Diverjans Teoremi (Stokes)

M yönlendirilmiş, kompakt bir Riemann manifoldu ve dM de M üzerinde birinci esas forma göre hacim elemanı ise, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\int_M (\text{div} X) dM = 0$$

dir [1,P.281].

M Riemann manifoldu üzerinde L'nin singüler olmadığını kabul edelim. $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere M üzerinde,

$$\langle X, Y \rangle_{III} = \langle LX, LY \rangle \quad (1.8.1)$$

şeklinde tanımlanan $\langle \cdot, \cdot \rangle_{III}$ tasvirine M'nin üçüncü esas formu denir.

Daha sonra yapılacak işlemlerde grad_{II} , grad_{III} , sırasıyla, M'nin ikinci ve üçüncü esas formuna gradiyenti; div_I , div_{III} ve Δ_I , Δ_{III} ise birinci ve üçüncü esas forma göre diverjans ve Laplasiyeni gösterecektir.

$f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere birinci, ikinci ve üçüncü forma göre gradiyentler arasında

$$\text{grad}_I f = L \text{grad}_{II} f \quad (1.8.1)$$

ve

$$\text{grad}_I f = L^2 \text{grad}_{III} f \quad (1.8.2)$$

bağıntıları mevcuttur.

M'nin birinci ve üçüncü esas forma göre hacim

elemanları, sırasıyla, dM ve dM_{III} ile gösterildiğine göre bunlar arasında

$$dM_{III} = (\det L) dM \quad (1.8.3)$$

şeklinde bir bağıntının var olduğunu biliyoruz.

BÖLÜM 2. BİR UZAY FORMUN KONVEKS HİPERYÜZEYLERİ

Hasanis [2] deki çalışmasında E^{n+1} Euclid uzayının konveks bir M hiperyüzeyi için aşağıdaki formülleri ispatlamıştır:

$$1) \Delta_I \log \det L - \operatorname{div}_I \lambda - \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) = (\operatorname{Tr} L)^2 - n(\operatorname{Tr} L^2) - A$$

ve

$$2) \Delta_{III} \log \det L - \operatorname{div}_{III} \mu - \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \log \det L) = (\operatorname{Tr} L)(\operatorname{Tr} L^{-1}) - n^2 + B$$

Burada λ ve μ M üzerinde tanımlı vektör alanları, A ve B de M üzerinde negatif olmayan fonksiyonlardır.

Aynı çalışmada M nin bir ovaloid olması halinde $\int_M \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L, \log \det L) dM \geq 0$ ve $\int_M \nabla_{II} (\operatorname{Tr} L^{-1}, \log \det L) dM \leq 0$ eşitsizlikleri elde edilmiştir. Yukardaki eşitsizliklerdeki eşitlik hali M nin ancak ve ancak bir hiperküre olması durumunda mümkündür.

[2] de elde edilen sonuçları bir uzay formunun konveks hiperyüzeylerine geneleştirebilmek için hiperyüzeyin, üçüncü esas formuna göre Riemann konneksiyonunu ve Riemann eğriliğinin hesaplanması gerekmektedir.

2.1 Hiperyüzeyin Üçüncü Formuna Göre Riemann Konneksiyonu ve Riemann Eğriliği

f , n -boyutlu, düzgün, irtibatlı ve yönlendirilebilir bir M manifoldundan $(n+1)$ -boyutlu, düzgün, irtibatlı ve sabit kesirsel eğrilikli bir $\bar{M}$ manifoldu içine izometrik bir daldırma olsun. $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ olmak üzere üçüncü esas forma göre ∇ Riemann konneksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\begin{aligned}
 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{III} &= X\langle Y, Z \rangle_{III} + Y\langle X, Z \rangle_{III} - Z\langle X, Y \rangle_{III} \\
 &+ \langle [Z, X], Y \rangle_{III} + \langle [Z, Y], X \rangle_{III} + \langle [X, Y], Z \rangle_{III}.
 \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

$\langle Y, Z \rangle_{III}$ yi X 'e göre türetirsek

$$\begin{aligned}
 X\langle Y, Z \rangle_{III} &= X\langle LY, LZ \rangle = \langle \nabla_X (LY), LZ \rangle + \langle LY, \nabla_X (LZ) \rangle \\
 \text{elde edilir. (1.6.3) bağıntısı kullanılırsa} \\
 X\langle Z, Y \rangle_{III} &= \langle (\nabla_X L)Y, LZ \rangle + \langle L\nabla_X Y, LZ \rangle + \langle LY, (\nabla_X L)Z \rangle + \\
 &+ \langle LY, L\nabla_X Z \rangle
 \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 Y\langle X, Z \rangle_{III} &= \langle (\nabla_Y L)X, LZ \rangle + \langle L\nabla_Y X, LZ \rangle + \langle LX, (\nabla_Y L)Z \rangle + \\
 &+ \langle LX, L\nabla_Y Z \rangle
 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

ve

$$\begin{aligned}
 Z\langle X, Y \rangle_{III} &= \langle (\nabla_Z L)X, LY \rangle + \langle L\nabla_Z X, LY \rangle + \langle LX, (\nabla_Z L)Y \rangle + \\
 &+ \langle LX, L\nabla_Z Y \rangle
 \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

elde edilir. Şimdi de $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ olduğunu göz önüne alarak $\langle [X, Y], Z \rangle_{III}$ yi hesaplayalım. Buna göre

$$\begin{aligned}
 \langle [X, Y], Z \rangle_{III} &= \langle L[X, Y], LZ \rangle = \langle L(\nabla_X Y) - L(\nabla_Y X), LZ \rangle \\
 &= \langle L(\nabla_X Y), LZ \rangle - \langle L(\nabla_Y X), LZ \rangle.
 \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

dir.

Benzer şekilde

$$\langle [Y, Z], X \rangle_{III} = \langle L(\nabla_Z Y), LX \rangle - \langle L(\nabla_Y Z), LX \rangle \quad (2.1.6)$$

ve

$$\langle [Z, X], Y \rangle_{III} = \langle L(\nabla_Z X), LY \rangle - \langle L(\nabla_X Z), LY \rangle \quad (2.1.7)$$

bulunur. (2.1.2), (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) ve (2.1.7) ifadeleri (2.1.1) de yerine yazılır ve (1.6.2) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
 {}^{III} 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{III} &= 2\langle L(\nabla_X Y), LZ \rangle + 2\langle L(\nabla_X L)Y, LZ \rangle \\
 &= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle_{III} + 2\langle L^{-1}(\nabla_X L)Y, Z \rangle_{III}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik keyfi her $Z \in X(M)$ vektör alanı için gerçeğlendiğinden

$${}^{III} \nabla_X Y = \nabla_X Y + L^{-1}(\nabla_X L)Y \quad (2.1.8)$$

bağıntısı elde edilir ve ∇ konneksiyon olma şartlarını sağlar.

M üzerinde ∇ konneksiyonuna bağlı olarak hesaplanan ve (1.4.1) bağıntısı ile verilen R eğrilik tensörüne benzer olarak, ∇ konneksiyonuna bağlı olarak hesaplanan R eğrilik tensörü için

$${}^{III} R(X, Y)Z = \nabla_X({}^{III} \nabla_Y Z) - \nabla_Y({}^{III} \nabla_X Z) - \nabla[X, Y]Z \quad (2.1.9)$$

bulunur. (1.6.2) Codazzi denklemini ve (2.1.8) bağıntısını kullanırsak $\nabla_X({}^{III} \nabla_Y Z)$ ifadesi

$$\begin{aligned}
 {}^{III} \nabla_X({}^{III} \nabla_Y Z) &= \nabla_X({}^{III} \nabla_Y Z) + L^{-1}(\nabla L)({}^{III} \nabla_Y Z) \\
 &= \nabla_X(\nabla_Y Z) + \nabla_X(L^{-1}(\nabla_Y L)Z) + \\
 &\quad + L^{-1}\{(\nabla_X L)\nabla_Y Z + (\nabla_X L)(L^{-1}(\nabla_Y L)Z)\}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
 {}^{III} \nabla_Y({}^{III} \nabla_X Z) &= \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_Y(L^{-1}(\nabla_X L)Z) + \\
 &\quad + L^{-1}\{(\nabla_Y L)\nabla_X Z + (\nabla_Y L)(L^{-1}(\nabla_X L)Z)\}
 \end{aligned}$$

ve

$${}^{III} \nabla[X, Y]Z = \nabla[X, Y]Z + L^{-1}(\nabla[X, Y]L)Z$$

bulunur. Bu ifadeleri (2.1.9) da yerine yazarak R ve ∇ eğrilik tensörleri arasında aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \text{III} \\
 R(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \nabla_X(L^{-1}(\nabla_Y L)Z) - \nabla_Y(L^{-1}(\nabla_X L)Z) + \\
 &+ L^{-1}\{(\nabla_X L)\nabla_Y Z - (\nabla_Y L)\nabla_X Z + (\nabla_X L)(L^{-1}(\nabla_Y L)Z) - \\
 &(\nabla_Y L)(L^{-1}(\nabla_X L)Z) - \nabla_{[X,Y]}LZ\} \quad (2.1.10)
 \end{aligned}$$

(1.6.3) ve (1.6.4) bağıntılarını kullanarak doğrudan doğruya hesaplama ile

$$\text{III} \\
 R(X,Y)Z = L^{-1}R(X,Y)LZ \quad (2.1.11)$$

olduğu görülür. $\langle (\nabla_X L)Y, Z \rangle = \langle Y, (\nabla_X L)Z \rangle$ bağıntısı kullanılarak (2.1.10) dan III

$$\begin{aligned}
 \text{III} \\
 \langle R(X,Y)Y - R(X,Y)Y, X \rangle &= -\langle \nabla_X Y, (\nabla_Y L)L^{-1}X \rangle + \\
 &+ \langle \nabla_Y X, L^{-1}(\nabla_X L)Y \rangle - \langle [X,Y], (\nabla_Y L)L^{-1}X \rangle + \\
 &+ \langle \nabla_X(L^{-1}(\nabla_Y L)Y), X \rangle - \langle \nabla_Y(L^{-1}(\nabla_X L)X), Y \rangle \\
 &+ \langle L^{-1}(\nabla_Y L)Y, (\nabla_X L)L^{-1}X \rangle - \langle L^{-1}(\nabla_X L)Y, (\nabla_Y L)L^{-1}X \rangle
 \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

şeklinde elde edilir.

Her $p \in M$ için, $\langle , \rangle$ metriğine göre, p nin bir U civarında ortonormal bir $e_1, e_2, \dots, e_n$ baz alanı seçebiliriz, öyle ki e_i ($i=1,2,3,\dots,n$) p noktasında L nin özvektörleri ve $\nabla e_i = 0$ olsun. p noktasında L nin özdeğerleri k_i ($i=1,2,\dots,n$) ise, p noktasında $Le_i = k_i e_i$ olacağından (1.6.3) denkleminde $e_i \wedge e_j$ 2-düzleminin K_{ij} kesitsel eğriliği için

$$K_{ij} = \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = c + k_i k_j \quad (2.1.13)$$

bulunur. (2.1.11) de $X=e_i$, $Y=e_j$ konursa p noktasında

$$\begin{aligned}
 \text{III} \\
 \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j)e_j - R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle &= \\
 &= \sum_i \langle \nabla_{e_i}(\sum_j L^{-1}(\nabla_{e_j} L)e_j), e_i \rangle - \\
 &- \sum_j \langle \nabla_{e_j}(\sum_i (\nabla_{e_i} L)L^{-1}e_i), e_j \rangle + \\
 &+ \langle \sum_j L^{-1}(\nabla_{e_j} L)e_j, \sum_i (\nabla_{e_i} L)L^{-1}e_i \rangle - \\
 &- \sum_{i,j} \langle L^{-1}(\nabla_{e_i} L)e_j, (\nabla_{e_i} L)L^{-1}e_j \rangle
 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

elde edilir. Şimdi (2.1.13) ifadesinin sağ ve sol taraflarını ayrı ayrı hesaplayalım. (2.1.11) eşitliği kullanılırsa (2.1.13) ün sol tarafı

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i,j} \langle R(e_i, e_j) e_j - R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle = \\
 & = \sum_{i,j} (\langle L^{-1} R(e_i, e_j) L e_j, e_i \rangle - \langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle) = \\
 & = \sum_{i,j} (\langle k_j R(e_i, e_j) e_j, L^{-1} e_i - K_{ij} \rangle = \\
 & = \sum_{i,j} (\frac{k_j}{k_i} K_{ij} - K_{ij}) = \sum_{i,j} \frac{(k_j - k_i)}{k_i} (c + k_i k_j) = \\
 & = \sum_{i,j} [c(k_j - k_i) k_i^{-1} + k_i (k_i k_j^2 - k_j k_i^2)] \\
 & = \{c(\text{Tr} L)(\text{Tr} L^{-1}) - nc + (n-1) \text{Tr} L^2\} - \\
 & - \{n(n-1)c + (\text{Tr} L)^2 - \text{Tr} L^2\} = \\
 & = c\{(\text{Tr} L)(\text{Tr} L^{-1}) - n\} + n \text{Tr} L^2 - (\text{Tr} L)^2 \\
 & = \sum_{i < j} \{c(k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-1} + (k_i - k_j)^2\} = \\
 & = \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-1} K_{ij}
 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi de sağ tarafı hesaplayalım. Herhangi bir $Z \in \mathcal{X}(M)$ için

$$\begin{aligned}
 \langle \sum_i (\nabla_{e_i} L) e_i, Z \rangle &= \sum_i \langle e_i, (\nabla_{e_i} L) Z \rangle = \sum_i \langle e_i, (\nabla_Z L) e_i \rangle \\
 &= \text{Tr}(\nabla_Z L) = \langle \text{grad}_I(\text{Tr} L), Z \rangle
 \end{aligned}$$

ve dolayısıyla $\sum_i (\nabla_{e_i} L) e_i = \text{grad}_I(\text{Tr} L)$ elde edilir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
 \sum_i \langle \nabla_{e_i} (\sum_j L^{-1} (\nabla_{e_j} L) e_j), e_i \rangle &= \\
 = \sum_i \langle \nabla_{e_i} (L^{-1} (\sum_j \nabla_{e_j} L) e_j), e_i \rangle &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} (L^{-1} \text{grad}_I(\text{Tr} L)), e_i \rangle = \\
 &= \text{div}_I (L^{-1} \text{grad}_I(\text{Tr} L))
 \end{aligned}$$

dir. $Le_i = \sum_j \ell_{ij} e_j$ şeklinde yazalım. L_{ij} , ℓ_{ij} nin kofaktörleri olmak üzere, p noktasında $\sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i$ yi hesaplayalım. Bunun için

$$\begin{aligned}
 \langle \sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i, Z \rangle &= \sum_i \langle L^{-1} e_i, (\nabla_{e_i} L) Z \rangle = \\
 &= \sum_i \langle L^{-1} e_i, (\nabla_Z L) e_i \rangle = \sum_i \langle L^{-1} (\nabla_Z L) e_i, e_i \rangle = \\
 &= \sum_{i,j} \langle L^{-1} (\nabla_Z (Le_i)), e_i \rangle = \sum_{i,j} \langle L^{-1} \nabla_Z (\sum_j \ell_{ij} e_j), e_i \rangle = \\
 &= \sum_{i,j} \langle L^{-1} ((Z\ell_{ij}) e_j), e_i \rangle = \sum_{i,j} (Z\ell_{ij}) \langle L^{-1} e_j, e_i \rangle
 \end{aligned}$$

bulunur. $L^{-1} e_j = (\det L)^{-1} L_{jk} e_k$ olduğundan $\langle L^{-1} e_i, e_j \rangle$ için

$$\begin{aligned}
 \langle L^{-1} e_j, e_i \rangle &= \langle (\det L)^{-1} L_{jk} e_k, e_i \rangle = (\det L)^{-1} L_{jk} \delta_{ki} \\
 &= (\det L)^{-1} L_{ji}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadeyi kullanarak son eşitlikten

$$\begin{aligned}
 \langle \sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i, Z \rangle &= (\det L)^{-1} \sum_{i,j} L_{ij} (Z\ell_{ij}) \\
 &= (\det L)^{-1} (Z \det L) = \langle (\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L, Z \rangle
 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i = (\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L$$

dir. Buradan da

$$\begin{aligned}
 \sum_j \langle \nabla_{e_j} (\sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i), e_j \rangle &= \\
 &= \sum_i \langle \nabla_{e_i} ((\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L), e_i \rangle \\
 &= \text{div}_I ((\det L)^{-1} \text{grad}_I (\det L))
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \langle \sum_j L^{-1}(\nabla_{e_j} L)e_j, \sum_i (\nabla_{e_i} L)L^{-1}e_i \rangle &= \\ &= \langle L^{-1} \text{grad}_I \text{Tr} L, (\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L \rangle \end{aligned}$$

olduğu görülmüş. Bu bağıntılar yardımıyla (2.1.13) den

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-1} K_{ij} &= \\ &= \text{div}_I (L^{-1} \text{grad}_I \text{Tr} L) - \text{div}_I ((\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L) + \\ &+ \langle L^{-1} \text{grad}_I \text{Tr} L, (\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L \rangle - \\ &- \sum_{i,j} \langle L^{-1}(\nabla_{e_i} L)e_j, (\nabla_{e_i} L)L^{-1}e_j \rangle \end{aligned}$$

elde edilir.

$$Q = \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-1} K_{ij}$$

ve

$$P = \sum_{i,j} \langle L^{-1}(\nabla_{e_i} L)e_j, (\nabla_{e_i} L)L^{-1}e_j \rangle$$

olmak üzere, (2.1.8) kullanılırsa yukardaki ifade

$$\begin{aligned} \text{div}_I (\text{grad}_{II} \text{Tr} L) - \text{div}_I (\text{grad}_I \log \det L) + \\ + \langle \text{grad}_{II} \text{Tr} L, \text{grad}_{II} \log \det L \rangle_{II} = P + Q \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Δ_I birinci esas forma göre diverjansı göstermek üzere,

$$\begin{aligned} \text{div}_I (\text{grad}_{II} \text{Tr} L) - \Delta_I (\log \det L) + \nabla_{II} (\text{Tr} L, \log \det L) &= \\ &= P + Q \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

dir. M manifoldu ikinci esas form pozitif definit olacak şekilde yönlendirilirse

$$P = \sum_{i,j} k_j^{-1} \langle L^{-1}(\nabla_{e_i} L)e_j, L^{-1}(\nabla_{e_i} L)e_j \rangle_{III} \geq 0$$

dir. Eger $\bar{M} = E^{n+1}$ alınırca $c = 0$ olur ve Hasanis [2] tarafından verilen formüllerden birincisi elde edilir.

Eger, (2.1.8) bağıntısı kullanılarak, önceki işlemlere benzer işlemler yapılırsa (2.1.10) dan

$$\begin{aligned} & \langle R(X,Y)Y - R(X,Y)Y,X \rangle_{III} = -\langle \nabla_X Y, (\nabla_Y L)LX \rangle + \\ & + \langle \nabla_Y X, L(\nabla_X L)Y \rangle - \langle [X,Y], (\nabla_Y L)LX \rangle + \\ & + \langle \nabla_X (L^{-1}(\nabla_Y L)Y), X \rangle_{III} - \langle \nabla_Y (L^{-2}(\nabla_X L)LX), Y \rangle_{III} - \\ & - \langle L^{-1}(\nabla_Y L)Y, (\nabla_X L)LX \rangle - \langle L^{-1}(\nabla_X L)Y, (\nabla_Y L)LX \rangle \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

elde edilir.

$L^{-1}e_i = k_i^{-1}e_i$ ($i=1,2,\dots,n$) vektörleri $T_p(M)$ de üçüncü esas forma göre ortonormal baz teşkil ederler. Gerçekten

$$\langle L^{-1}e_i, L^{-1}e_j \rangle_{III} = \langle LL^{-1}e_i, LL^{-1}e_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

dir. $L^{-1}e_i$ vektörleri p noktasında $\nabla \bar{e}_i = 0$ olacak şekilde p noktası civarında $\bar{e}_i$ vektör alanlarına genişletilebilirler. p noktasında $\bar{e}_i = L^{-1}e_i$ dir. (2.1.15) de $X = \bar{e}_i$, $Y = \bar{e}_j$ alınarak p noktasında

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j)\bar{e}_j - R(\bar{e}_i, \bar{e}_j)\bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle_{III} = \\ & = \sum_{i,j} \{ \langle \nabla_{\bar{e}_i} (L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_j} L)\bar{e}_j), \bar{e}_i \rangle_{III} - \\ & - \langle \nabla_{\bar{e}_j} (L^{-2}(\nabla_{\bar{e}_i} L)L\bar{e}_i), \bar{e}_j \rangle_{III} - \\ & - \langle (\nabla_{\bar{e}_i} L)L\bar{e}_i, L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_j} L)\bar{e}_j \rangle + \\ & + \langle L^{-1}(\nabla_{\bar{e}_i} L)\bar{e}_j, (\nabla_{\bar{e}_j} L)L\bar{e}_i \rangle \} \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

elde edilir. (2.1.11) i kullanarak (2.1.16) ifadesinin

sol tarafını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j}^{III} \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j - R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle_{III} &= \\
 &= \sum_{i,j} \langle L^{-1} R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) L \bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle_{III} - \sum_{i,j} \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle_{III} = \\
 &= \sum_{i,j} \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) L \bar{e}_j, L \bar{e}_i \rangle - \sum_{i,j} \langle L R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j, L \bar{e}_i \rangle
 \end{aligned}$$

olup, p noktasında $\bar{e}_i = L^{-1} e_i$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) L \bar{e}_j, L \bar{e}_i \rangle &= \langle R(L^{-1} e_i, L^{-1} e_j) L L^{-1} e_j, L L^{-1} e_i \rangle = \\
 &= k_i^{-1} k_j^{-1} \langle R(e_i, e_j) e_j, e_i \rangle = K_{ij} (k_i k_j)^{-1}
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \langle L R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j, L \bar{e}_i \rangle &= \langle L R(L^{-1} e_i, L^{-1} e_j) L^{-1} e_j, L L^{-1} e_i \rangle = \\
 &= k_i^{-1} k_j^{-2} \langle R(e_i, e_j) e_j, L e_i \rangle = K_{ij} k_j^{-2}
 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}
 \sum_{i,j}^{III} \langle R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j - R(\bar{e}_i, \bar{e}_j) \bar{e}_j, \bar{e}_i \rangle_{III} &= \\
 &= \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-2} K_{ij}
 \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi de (2.1.16) nın sağ tarafını hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
 \sum_i (\nabla_{\bar{e}_i} L) L \bar{e}_i &= \sum_i (\nabla_{L^{-1} e_i} L) L L^{-1} e_i = \sum_i (\nabla_{e_i} L) L^{-1} e_i = \\
 &= (\det L)^{-1} \text{grad}_I \det L = \text{grad}_I \log \det L
 \end{aligned}$$

olup, ayrıca (1.6.4) kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \langle \sum_i (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_i, Z \rangle &= \langle \sum_i L^{-1} (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_i, L^{-1} Z \rangle_{III} = \\
 &= - \langle \sum_i L (\nabla_{\bar{e}_i} L^{-1}) \bar{e}_i, L^{-1} Z \rangle_{III} = \\
 &= - \langle \sum_i (\nabla_Z L^{-1}) \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle_{III} = - \text{Tr} (\nabla_Z L^{-1}) = \\
 &= -Z (\text{Tr} L^{-1}) = \langle -\text{grad}_I \text{Tr} L^{-1}, Z \rangle
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $\sum_i (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_i = -\text{grad}_I \text{Tr} L^{-1}$ elde edilir. Bu bağıntılar (2.1.16) da kullanılırsa

$$\begin{aligned} & - \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-2} K_{ij} = \\ & = \sum_i \langle \nabla_{\bar{e}_i} (-L^{-1} \text{grad}_I \text{Tr} L^{-1}), \bar{e}_i \rangle_{III} - \\ & - \sum_j \langle \nabla_{\bar{e}_j} (L^{-2} \text{grad}_I \log \det L), \bar{e}_j \rangle_{II} - \\ & - \langle \text{grad}_I \log \det L, -L^{-1} \text{grad}_I (\text{Tr} L^{-1}) \rangle + \\ & + \sum_{i,j} k_i \langle L^{-1} (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j, L^{-1} (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j \rangle_{II} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\bar{Q} = \sum_{i < j} (k_i - k_j)^2 (k_i k_j)^{-2} K_{ij}$$

ve

$$\bar{P} = \sum_{i,j} k_i \langle L^{-1} (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j, L^{-1} (\nabla_{\bar{e}_i} L) \bar{e}_j \rangle_{II} \geq 0$$

olmak üzere, (1.8.1) ve (1.8.2) kullanılırsa yukardaki ifade

$$\begin{aligned} & \text{div}_{III} (\text{grad}_{II} \text{Tr} L^{-1}) + \text{div}_{III} (\text{grad}_{III} \log \det L) - \\ & - \langle \text{grad}_{II} \text{Tr} L^{-1}, \text{grad}_{II} \log \det L \rangle_{II} = \bar{P} + \bar{Q} \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Δ_{III} üçüncü esas forma göre laplasiyenin göstermek üzere, son eşitlikten

$$\begin{aligned} & \text{div}_{III} (\text{grad}_{II} \text{Tr} L^{-1}) - \Delta_{III} (\log \det L) - \\ & - \nabla_{II} (\text{Tr} L^{-1}, \log \det L) = \bar{P} + \bar{Q} \quad (2.1.17) \end{aligned}$$

bulunur. Eğer $\bar{M} = E^{n+1}$ alınırsa $c = 0$ elde edilir ve Hasanis [2] tarafından verilen formüllerden ikincisi elde edilir.

2.2. Esas Sonuçlar:

Teorem: f , n -boyutlu, düzgün, irtibatlı, kompakt ve yönlendirilebilir bir M manifoldundan, $(n+1)$ -boyutlu, düzgün, irtibatlı ve sabit c kesitsel eğrilikli bir $\bar{M}$ manifoldu içine izometrik bir daldırma olsun. M nin bütün 2-li düzlemlerdeki K kesitsel eğriligi, $c < 0$ durumunda veya $c \geq 0$ iken $K > c$ durumunda negatif değilse

$$i) \quad \int_M \nabla_{II} (\text{Tr} L, \log \det L) dM \geq 0, \quad \} \quad (2.2.1)$$

$$ii) \quad \int_M \nabla_{II} (\text{Tr} L^{-1}, \det L) dM \leq 0$$

dir. (i) ve (ii) eşitsizliklerinin eşitlik haline dönüşmesi, ancak ve ancak, $c \geq 0$ iken f 'nin total ombilik olması veya $c < 0$ iken f nin ya total ombilik ya da M nin her noktasında L nin farklı sabit iki özdeğerinin olması halinde mümkündür.

İspat: Hiptezden dolayı her i, j için $k_i k_j > 0$ dir. Bunun doğru olduğunu şu şekilde gösterebiliriz;

i) $c < 0$ olması durumu:

$$K_{ij} = c + k_i k_j \geq 0 \Rightarrow k_i k_j \geq -c > 0,$$

dolayısıyla $k_i k_j > 0$ dir.

ii) $c \geq 0$ ve $K_{ij} > 0$ olması durumu:

$$K_{ij} = c + k_i k_j > 0 \Rightarrow k_i k_j > 0 \text{ dir.}$$

Böylece $k_i \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) olduğu görüldü. Dolayısıyla $\det L \neq 0$ olup, üçüncü esas form M manifoldu üzerinde bir metrik tanımlar. Ayrıca M manifoldu $k_i > 0$ olacak şekilde yönlendirilirse ikinci esas form bir metrik tanımlar. (2.1.14) ü M üzerinde birinci esas forma göre integre edelim. Buna göre,

$$\int_M \{ \text{div}_I (\text{grad}_{II} \text{Tr} L) - \Delta_I (\log \det L) + \nabla_{II} (\text{Tr} L, \log \det L) \} dM = \int_M (P + Q) dM.$$

$P \geq 0$ ve $Q \geq 0$ dir. Diverjans teoremi kullanılırsa

$$\int_M \text{div}_I \{ (\text{grad}_{II} \text{Tr} L) - \text{grad}_I (\log \det L) \} dM = 0$$

bulunur. Dolayısıyla

$$\int_M \nabla_{II} \langle \text{Tr} L, \log \det L \rangle_{II} dM = \int_M (P + Q) dM \geq 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\int_M \nabla_{II} \langle \text{Tr} L, \log \det L \rangle dM \geq 0 \quad (2.2.2)$$

sonucuna varılır. Benzer şekilde (2.1.17) M üzerinde üçüncü forma göre integre edelidse

$$\begin{aligned} \int_M \{ \text{div}_{III} (\text{grad}_{II} \text{Tr} L^{-1}) - \Delta_{III} (\log \det L) - \\ - \nabla_{II} \langle \text{Tr} L^{-1}, \log \det L \rangle \} dM_{III} = \int_M (\bar{P} + \bar{Q}) dM_{III}. \end{aligned}$$

$\bar{P} \geq 0$ ve $\bar{Q} \geq 0$ elde edilir. Diverjans teoremi ve (1.8.3) kullanılırsa

$$-\int_M \nabla_{II} \langle \text{Tr} L^{-1}, \log \det L \rangle \det L dM = \int_M (\bar{P} + \bar{Q}) dM_{III} \geq 0$$

ve buradan da

$$\int_M \nabla_{II} \langle \text{Tr} L^{-1}, \log \det L \rangle dM \leq 0 \quad (2.2.3)$$

elde edilir. (2.2.1) deki eşitsizliğin eşitliğe dönüşmesi durumunda

$$\int_M (P + Q) dM = 0 \quad \text{ve} \quad \int_M (\bar{P} + \bar{Q}) dM = 0$$

bulunur. Buradan da $P = 0$, $\bar{P} = 0$, $Q = 0$ ve $\bar{Q} = 0$ sonucu çıkar. $P = 0$ ve $\bar{P} = 0$ olması için $\nabla L = 0$ olmalıdır. $\nabla L = 0$ olması L'nin özdeğerlerinin sabit olduğunu gösterir. $Q = 0$ ve $\bar{Q} = 0$ olmasından $\forall i, j$ için

$$(k_i - k_j)^2 K_{ij} = 0 \quad (2.2.4)$$

elde edilir.

Eğer $c \geq 0$ ise, $k_i k_j > 0$ olduğundan $K_{ij} = c + k_i k_j > 0$ ve (2.2.4) den $\det(k_i - k_j)^2 = 0$ elde edilir. Buradan da $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = k$ =sabit olduğu görülür. $\forall x \in M$ için $L = kI$ (I : birim matris) olduğundan f total ombiliktir. ($c = 0$ ise M, E^{n+1} için de bir hiperküredir [2]) Eğer $c < 0$ ise, [3] ye göre, f ya total ombiliktir, ya da M nin her noktasında L nin farklı sabit iki özdeğeri vardır. $c < 0$ olması durumunda $K_{ij} = c + k_i k_j = 0$ olabilir. (2.2.4) den bütün i, j 'ler için $(k_i - k_j)^2 = 0$ ise $k_1 = k_2 = k_3 = \dots = k_n = k$ =sabit elde edilir ki, bu da f nin total ombilik olduğunu ifade eder. En az bir $i \neq j$ için $k_i \neq k_j$ ise f total ombilik değildir. Şimdi de f total ombilik değilse L nin farklı iki sabit özdeğerinin varlığını gösterelim. M nin her x noktasında L nin özdeğerleri $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq \dots \geq k_n$ şeklinde olsun.

$$K_{1j} = k_1 k_j + c \Rightarrow k_j = \frac{K_{1j} - c}{k_1} > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

k_i ler büyüklük sırasına göre yazılırsa

$$\frac{K_{12} - c}{k_1} \geq \frac{K_{13} - c}{k_1} \geq \dots \geq \frac{K_{1n} - c}{k_1} > 0$$

ve $K_{12} \geq K_{13} \geq \dots \geq K_{1n}$ elde edilir. Farzedelim ki $p, K_{1p} > 0$ ve $K_{1p+1} = 0$ olacak şekilde en büyük tamsayı olsun. (2.2.4) de

$$(k_1 - k_j)^2 K_{1j} = 0 \quad 1 \leq j \leq p$$

alınırsa $k_1 = k_2 = \dots = k_p = k$ elde edilir. x noktası ombilik olmadığından $p \neq n$ dir. Ayrıca yine (2.2.4) de

$$K_{1p+1} = K_{1p+2} = \dots = K_{1n} = 0 \text{ yani } c + k_1 k_{p+1} = 0$$

bulunur. Buradan

$$k_{p+1} = k_{p+2} = \dots = k_n = -c/k_1 \text{ bulunur. Bu da } L \text{ nin,}$$

her $x \in M$ noktası civarında birbirinden farklı sabit iki özdeğerinin var olduğunu ispatlar[4].

İspatlananan bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuc 1: $f : M \longrightarrow \bar{M}(c)$ tasviri bir M ovaloidinden $(n+1)$ boyutlu bir $\bar{M}(c)$ uzay formuna bir izometrik daldırma olsun. Eğer $\text{Tr}L$, $\text{Tr}L^{-1}$ ve $\det L$ fonksiyonlarından biri sabit ise $c \geq 0$ için $f(M)$ total ombiliktir veya $c < 0$ için $f(M)$ ya total ombiliktir, ya da L nin farklı sabit iki özdeğeri vardır.

İspat: $\text{Tr}L$ veya $\det L$ den herhangi biri sabit ise $\nabla_{II}(\text{Tr}L, \log \det L) dM = 0$ dir. Dolayısıyla $\int_M (P + Q) dM = 0$ elde edilir. Buradan da $P = 0$, $Q = 0$ olur. Eğer $\text{Tr}L^{-1}$ sabit olursa $\nabla_{II}(\text{Tr}L^{-1}, \det L) dM = 0$ ve dolayısıyla $\int_M (\bar{P} + \bar{Q}) dM = 0$ elde edilir. Buradan da $\bar{P} = 0$, $\bar{Q} = 0$ bulunur ki, yukardaki teorem gereğince, teoremin doğru olduğu hemen görülür.

Sonuc 2: $f : M \longrightarrow \bar{M}(c)$ bir M ovaloidinden $\bar{M}(c)$ manifoldu içine bir izometrik daldırma olsun. $A_\rho = \text{Tr}L^\rho$ ($\rho = -1, 1$) ve $B = \det L$ fonksiyonları, $\partial \mathbb{F} / \partial A_\rho$ ve $\partial \mathbb{F} / \partial B$ den en az biri her yerde sıfırdan farklı ve $\rho (\partial \mathbb{F} / \partial A_\rho) (\partial \mathbb{F} / \partial B) \geq 0$ şartı altında $\mathbb{F}(A_\rho, B) = 0$ şeklinde bir fonksiyonel bağıntıyı gerçeklerse $c \geq 0$ için $f(M)$ total ombiliktir veya $c < 0$ için $f(M)$ ya total ombiliktir ya da L nin farklı, sabit iki özdeğeri vardır.

İspat: $\mathbb{F}(A_\rho, B) = 0$ dan diferansiyel alınır

$$(\partial \mathbb{F} / \partial A_\rho) \text{grad}_{II} A_\rho + (\partial \mathbb{F} / \partial B) \text{grad}_{II} B = 0$$

elde edilir. $(\partial \mathbb{F} / \partial A_\rho) \neq 0$ kabul edersek (benzer şekilde $(\partial \mathbb{F} / \partial B) \neq 0$ alınarak da ispat yapılabilir)

$$\text{grad}_{II} A_\rho = - ((\partial \mathbb{F} / \partial B) / (\partial \mathbb{F} / \partial A_\rho)) \text{grad}_{II} B \text{ yazılabilir.}$$

$$\nabla_{II}(A_\rho, A_\rho) \geq 0 \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq \nabla_{II}(A_\rho, A_\rho) &= \langle \text{grad}_{II} A_\rho, \text{grad}_{II} A_\rho \rangle_{II} = \\ &= \langle \text{grad}_{II} A_\rho, - ((\partial \mathbb{F} / \partial B) / (\partial \mathbb{F} / \partial A_\rho)) \text{grad}_{II} B \rangle_{II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - ((\partial \mathbb{I} / \partial B) / (\partial \mathbb{I} / \partial A_\rho)) \nabla_{\mathbb{I}} (A_\rho, B) \\
 &= -\rho ((\partial \mathbb{I} / \partial B) / (\partial \mathbb{I} / \partial A_\rho)) \rho \nabla_{\mathbb{I}} (A_\rho, B)
 \end{aligned}$$

elde edilir. $\rho ((\partial \mathbb{I} / \partial B) / (\partial \mathbb{I} / \partial A_\rho)) \geq 0$ olduğundan

$$\rho \nabla_{\mathbb{I}} (A_\rho, B) \leq 0 \quad (2.2.5)$$

sonucuna varılır. $\rho = -1$ ve $\rho = 1$ için ayrı ayrı yazılır ve (2.2.1) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$\int_M \nabla_{\mathbb{I}} (\text{Tr} L, \log \det L) dM = 0$$

ve

$$\int_M \nabla_{\mathbb{I}} (\text{Tr} L^{-1}, \det L) dM = 0$$

bulunur. Yukarıda ispatlanan teorem gereğince ispat tamamlanmış olur.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Hasanis [2] tarafından $(n+1)$ -boyutlu Euclid uzayının konveks hiperyüzeyleri için vermiş olduğu formüllerin, bir uzay formun konveks hiperyüzeylerine genelleştirilmesi yapılmıştır.

Uzay formun bir M konveks hiperyüzeyinin üçüncü esas formuna göre Riemann konneksiyonu; bu konneksiyona bağlı eğrilik tensör alanı ve birinci ve üçüncü esas formlara göre eğrilik tensörleri arasındaki ilişki elde edilmiştir.

f , n -boyutlu, düzgün, irtibatlı, kompakt ve yönlendirilebilir bir M Riemann manifoldundan, $(n+1)$ -boyutlu, düzgün, irtibatlı ve sabit c kesitsel eğrilikli bir $\bar{M}$ Riemann manifoldu içine izometrik bir daldırma olsun. M nin herhangi bir 2-düzlemdeki K kesitsel eğriliği, $c < 0$ olması durumunda veya $c \geq 0$ iken $K > c$ olması durumunda negatif değilse

$$\int_M \nabla_{II} (\text{Tr} L, \log \det L) dM \geq 0, \quad \int_M \nabla_{II} (\text{Tr} L^{-1}, \det L) dM \leq 0$$

dir. Bu eşitsizliklerinin eşitlik haline dönüşmesi, ancak ve ancak, $c \geq 0$ iken f 'nin total ombilik olması veya $c < 0$ iken f 'nin ya total ombilik ya da M nin her noktasında L nin farklı sabit iki özdeğerinin var olması halinde mümkündür.

Özel olarak, $\text{Tr} L$, $\text{Tr} L^{-1}$ ve $\det L$ fonksiyonlarından herhangi birinin sabit olması halinde yukarıdaki integral eşitsizliklerin eşitlik haline dönüştüğü görülmüştür.

Sabit eğrilikli Riemann manifoldlarının aynı zamanda bir Einstein manifoldu olduğu bilinmektedir. Buna göre çalışmada ele alınan problem sabit eğrilikli Einstein manifoldları için doğrudur. Çalışmada ele alınan problemin Einstein manifoldlarının konveks hiperyüzeyleri için geçerli olup olmadığı araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] NOMIZU, K., KOBAYASHI, S.: Foundation of differential geometry volume I, volume II.

[2] HASANIS, T.: On convex hypersurface in E^{n+1} .
Colloq. Math. 48, 49-55 (1984)

[3] NOMIZU, K., SMITH, B.: A formula of Simons type and hypersurface with constant mean curvature. J. Diff. Geom. 3, 367-377 (1969)

[4] Baikoussis, B., Koufogiorgos, Th.: On convex hypersurfaces in a space form. Mh. Math. 106, 257-264 (1988).

ÖZGEÇMİŞ

1964'de Doğubayazıt'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Doğubayazıt'da tamamladı. 1982 yılında İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Mühendisliği Bölümüne girdi. 1987'de mezun olduğu bölümde araştırma görevliliğine ve lisansüstü eğitimine başladı.