



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİM KÜREDE LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ

MELEK DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KIRŞEHİR / 2022



T.C.
KIRŞEHİR AHI EVRAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BİRİM KÜREDE LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ

MELEK DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK

KIRŞEHİR / 2022

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

MELEK DEMİR



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, Ahi Evran Üniversitesi’nin aboneli olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.



ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında bilgilerini benimle paylaşan, değerli zamanını ayıran, her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyip yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendiren danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK’a minnet ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca tez çalışmalarım sırasında bilgi ve tecrübesini her daim paylaşan Sayın Prof. Dr. Levent KULA ve Doç. Dr. Ufuk ÖZTÜRK hocalarıma da teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Çalışmalarım sırasında birçok fedakarlıklar göstererek beni destekleyen ve çalışma süresince tüm zorlukları benimle göğüsleyen hayatımın her evresinde bana destek olan değerli eşim Engin DEMİR ve kızım Erva Zeynep DEMİR’e en derin duygularıyla teşekkür ederim.

Ocak, 2022

MELEK DEMİR

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİL LİSTESİ	vi
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar	4
2.2. Küresel Legendre Eğriler	11
3. REGÜLER KÜRESEL FRONTLAR	14
4. ORTOGONAL-TİP LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ	18
4.1. Birinci Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri	18
4.2. İkinci Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri	24
4.3. Üçüncü Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri	28
4.4. Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri İçin Sonuçlar	32
4.5. Bazı Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çifti Örnekleri	33
5. PARALEL-TİP LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ	40
6. TARTIŞMA VE SONUÇ	44
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ	47

ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa No
Şekil 4.1. Bir küresel helis olan γ küresel frontu.	35
Şekil 4.2. γ nın sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri . .	35
Şekil 4.3. Bir küresel slant helis olan γ küresel frontalı	37
Şekil 4.4. γ nın sırasıyla hem birinci hem ikinci ortogonal-tip ve sadece ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti	37
Şekil 4.5. γ küresel frontalı	39
Şekil 4.6. γ nın sırasıyla hem birinci hem ikinci ortogonal-tip ve sadece ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti	39

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\mathbb{R}^3$	: Öklidyen 3-uzay
$\mathbb{S}^2$	: Birim küre
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: Öklid iç çarpımı
$\ \cdot\ $	: Öklid normu
$\text{sign}(\cdot)$	: İşaret fonksiyonu
$\times$	: $\mathbb{R}^3$ de vektörel çarpma
Δ	: $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ de 3-boyutlu diferensiyellenebilir manifold
(γ, ν)	: Δ üzerinde küresel Legendre eğri (veya küresel Legendre immersiyon)
γ	: $\mathbb{S}^2$ de küresel frontal (veya küresel front)
t	: $\mathbb{R}^3$ de γ nın birim teğet vektörü
n	: $\mathbb{R}^3$ de γ nın asli normal vektörü
b	: $\mathbb{R}^3$ de γ nın binormal vektörü
κ	: $\mathbb{R}^3$ de γ nın eğriliği
τ	: $\mathbb{R}^3$ de γ nın burulması
$\{t, n, b\}$	: $\mathbb{R}^3$ de γ nın Frenet çatısı
$\{\gamma, t, e\}$	: $\mathbb{S}^2$ de γ nın Sabban çatısı
κ_g	: $\mathbb{S}^2$ de γ nın geodezik eğriliği
$\{\gamma, \nu, \mu\}$	: $\mathbb{S}^2$ de γ nın Legendre çatısı
(m, n)	: (γ, ν) nin Legendre eğriliği
$\mathcal{E}v(\gamma)$	: γ küresel frontunun evolütü
$\mathcal{I}nv(\gamma, t_0)$	: γ küresel frontunun involütü
(γ_*, ν_*)	: (γ, ν) nin küresel Legendre çifti
(m_*, n_*)	: (γ_*, ν_*) nin Legendre eğriliği

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİM KÜREDE LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ

MELEK DEMİR

Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mahmut MAK

Bu tez çalışmasında, birim Öklidyen kürede front veya frontal boyunca Legendre çatısına göre küresel Legendre eğrilerinin bazı özel Legendre eğri çiftleri tanıtıldı. Bu anlamda, ortogonal-tip ve paralel-tip küresel Legendre eğri çiftleri tanımlandı. Sonra, ortogonal-tip küresel Legendre eğri çiftlerinin Legendre eğrilikleri arasında bazı karakterizasyonlar verildi. Ayrıca, küresel front'un regüler eğri olması halinde, Legendre çatısı ile Frenet çatısı veya Sabban çatısı arasında ilişkiler elde edildi. Bununla birlikte, bir küresel front'un involütü ve evolütünün, sırasıyla küresel front'un bir ikinci ve üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftine karşılık geldiği gösterildi. Daha sonra, bazı özel küresel front'ların veya frontal'ların birinci, ikinci ve üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri için örnekler verildi. Son olarak, bir küresel frontal'ın paralel-tip Legendre eğri çiftinin olmadığı gösterildi.

Ocak 2022, 47 Sayfa.

Anahtar Kelimeler: Legendre eğri, frontal, front, küresel, Legendre eğri çifti, involüt, evolüt, helis, slant helis.

ABSTRACT

M.Sc. THESIS

SOME SPECIAL LEGENDRE MATES ON UNIT SPHERE

MELEK DEMİR

**Kırşehir Ahi Evran University
Graduate School of Sciences and Engineering
Mathematics Department**

Supervisor: Asst. Prof. Mahmut MAK

In this thesis, we consider some special mates of spherical Legendre curves by using Legendre frame along spherical front or frontal on Euclidean unit sphere. In this sense, we define orthogonal-type and parallel-type spherical Legendre mates. After, we get some characterizations between Legendre curvatures of orthogonal-type Legendre mates. In particular, when spherical front is a regular curve, we give relationships between Legendre and Frenet frame or Legendre and Sabban frame. Moreover, we obtain that the evolute and the involute of spherical front correspond to a second and third orthogonal-type Legendre mate of spherical front, respectively. After, we give examples for first, second or third orthogonal-type spherical Legendre mates of some special spherical fronts or frontals. Finally, we show that there is no parallel-type Legendre mates of spherical frontal.

January 2022, 47 Pages.

Keywords: Legendre curve, frontal, front, spherical, Legendre mate, involute, evolute, helix, slant helix.

1. GİRİŞ

Matematik alanında benzer veya belli ortak özelliklere sahip matematiksel yapıları araştırmak ve incelemek her zaman merak konusudur. Özellikle, diferensiyel geometrinin eğriler teorisinde, “belli ortak özelliğe sahip olan eğri çifti aramak ve eğri çiftinin eğrilikleri arasında karakterizasyonlar elde etmek” günümüzde hala popülerliğini korumaktadır.

Bu anlamda, Öklid 3-uzayında regüler eğrilerin karşılıklı noktalarında herhangi iki Frenet vektör alanının paralel (özel olarak lineer bağımlı veya çakışık) veya ortogonal olmasına göre tanımlanan aşağıdaki eğri çiftleri iyi bilinir:

- Referans eğrinin her noktasındaki teğet çizgisi, diğer eğrinin normal çizgisiyle çakışık ve karşılıklı noktalarda teğetleri ortogonal olan eğri çiftine, involüt-evolüt eğri çifti denir. Burada referans eğri, diğer eğrinin evolütü ve diğer eğriye de referans eğrinin involütü denir. Yani bir eğrinin involütünün evolütü, kendisidir. Ayrıca, regüler uzaysal (veya düzlemsel) eğrinin oskulator kürelerinin (veya çemberlerinin) merkezlerinin geometrik yerine eğrinin evolütü denir [18, 19, 23, 25].
- Karşılıklı noktalarda asli normalleri lineer bağımlı olan eğri çiftine, Bertrand eğri çifti denir ve bu eğrilere de Bertrand eğriler adı verilir [18, 19, 23, 24].
- Karşılıklı noktalarda referans eğrinin asli normali ile diğer eğrinin binormali lineer bağımlı ise bu eğri çiftine, Mannheim eğri çifti denir ve referans eğri ye de Mannheim eğri denir [14].

Bir eğrinin "regüler" olması demek eğrinin her noktasındaki birinci türevinin sıfırdan farklı olması demektir. Eğrinin birinci türevinin sıfır olduğu noktaya "singüler nokta" denir. Ayrıca, eğrinin ikinci türevinin sıfır (veya eğriliğinin sıfır) olduğu noktaya "bükülme (dönüm) noktası" denir. Singüler noktalarda, eğrinin teğet vektörleri sürekli olmadığından eğrilik ve burulma tanımlı değildir. Dolayısıyla, singüler (tekil) noktalarda eğrinin Frenet-Serret çatısı iyi tanımlı değildir. Buna rağmen, eğri boyunca singüler noktalarda da iyi tanımlı olan bir Frenet çatısı benzeri hareketli çatı tanımlanabilir. Aşağıda Legendre eğriler perspektifinden, verilen singüler eğriler ile ilgili bazı çalışmalar özetlendi:

Eğer, $\mathbb{R}^2$ nin birim teğet demeti üzerinde $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ bir Legendre eğri (veya Legendre immersiyon) olacak şekilde birim çember üzerinde $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ düzgün dönüşümü varsa o zaman, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eğrisi Öklidyen düzlemde bir frontal (veya front) olarak adlandırılır [3]. Aynı çalışmada, Fukunaga ve Takahashi tarafından, Legendre eğrinin (veya Legendre immersiyonun) singüler noktalarında da iyi tanımlı olan frontal (veya front) boyunca bir hareketli çatı tanımlandı. Ayrıca bu çatı yardımıyla, düzgün fonksiyonlar çifti olarak verilen, bir Legendre eğrisinin eğriliğinin tanımı verildi. Bununla birlikte regüler düzlemsel eğrilere benzer olarak, Öklidyen düzlemde frontal'lar (veya front'lar) için varlık ve teklik teoremi ifade ve ispat edildi.

[4, 5] de, regüler düzlemsel eğrinin evolütü'nün ve involütü'nün bir genellemesi olarak, Öklidyen düzlemde front boyunca hareketli çatı ve Legendre immersiyonun eğriliği kullanılarak, Öklidyen düzlemde front'un evolütü ve involütü tanımlandı. Ayrıca, bükülme noktasına sahip olmayan bir düzlemsel front'un evolütü'nün veya involütü'nün de bir front olduğu gösterildi.

[6] da, Öklidyen düzlemde regüler eğrinin veya düzlemsel front'un evolüt ve involüt tanımlarının bir genellemesi olarak, Öklidyen düzlemde frontal'lar için evolüt ve involüt tanımı bazı şartlar altında verildi.

[1] de Arnold tarafından, Legendre tekillik teorisi kullanılarak, birim kürede singüler eğriler olarak front'ların küresel geometrisi tanıtıldı. Ayrıca, [13] de Uribe-Vargas da kostik (caustic) ve front'un tekillik teorisini verdi.

Özellikle, [12] de Takahashi, birim Öklidyen kürede singüler eğriler olarak, küresel front'un (veya frontal'ın) diferensiyel geometrisini daha açık olarak ifade etti. Küresel Legendre eğrinin küresel front'u boyunca Legendre çatısını tanımladı. Bu çatı yardımıyla, düzgün fonksiyon çifti olarak verilen, küresel Legendre eğrinin eğriliğini tanımladı. Ayrıca, regüler küresel eğrilerin evolütünün bir genellemesi olarak, küresel front'un (veya frontal'ın) Legendre çatısı ve küresel Legendre eğrinin eğriliği yardımıyla, küresel front'un (veya frontal'ın) evolütü tanımlandı.

Küresel front veya frontal ile ilgili dikkat çeken diğer çalışmalar da [8-11] olarak verilebilir.

Bu tezin amacı, klasik diferensiyel geometride regüler eğrilerin eğri çiftlerinden (involüt-evolüt, Bertrand, Mannheim, vs.) ilham alınarak, birim kürede front veya frontal boyunca Legendre çatısına göre bir küresel Legendre eğrinin ortogonal-tip ve paralel-tip Legendre eğri çiftlerini tanımlamak ve bu eğri çiftlerinin geometrik özelliklerini araştırmaktır.

Buna göre, tezin bölümleri aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Bölüm 2 de, 3-boyutlu Öklidyen uzayda regüler ve singüler küresel eğrilerin kısa diferensiyel geometrisi verildi. Bu anlamda, singüler küresel eğriler olarak bir küresel Legendre eğrinin (veya Legendre immersiyonun) küresel frontal'ı (veya küresel front'u) ile ilgili temel kavramlar verildi.

Bölüm 3 te, bir küresel front'un özel olarak regüler olması halinde, sırasıyla, Legendre ve Frenet çatıları ile Legendre ve Sabban çatıları arasındaki geçiş formülleri verildi.

Bölüm 4 te, $\mathbb{S}^2$ Öklidyen birim küresi üzerinde küresel frontal veya front boyunca Legendre çatısı kullanılarak küresel Legendre eğrisinin ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri tanımlandı. Ayrıca, ortogonal-tip Legendre eğri çiftlerinin eğrilikleri arasında karakterizasyonlar verildi. Özellikle, bir küresel front'un evolütü'nün ve involütü'nün sırasıyla, bu küresel front'un bir ikinci ve üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftine karşılık geldiği sonucu elde edildi. Daha sonra, bazı özel küresel front'ların veya frontal'ların birinci, ikinci ve üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri için örnekleri, grafikleri ile birlikte verildi.

Bölüm 5 te, $\mathbb{S}^2$ üzerinde küresel frontal boyunca Legendre çatısı kullanılarak küresel Legendre eğrisinin paralel-tip Legendre eğri çiftleri tanımlandı. Fakat, $\mathbb{S}^2$ üzerinde paralel-tip Legendre eğri çiftlerinin olmadığı ispatlandı.

Son olarak, Bölüm 6 ise tartışma ve sonuç kısmına ayrıldı.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyulan bazı temel kavramlar verildi.

2.1. Öklid Uzayında Temel Kavramlar

Tanım 2.1. $\mathbb{R}^3$ de her bir $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^3 x_i y_i$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, $\mathbb{R}^3$ de Öklid iç çarpımı veya standart iç çarpım denir [18].

Tanım 2.2. $\mathbb{R}^3$ de her $x = (x_1, x_2, x_3)$ vektörü için

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, Öklid normu denir [18].

Tanım 2.3. $\mathbb{R}^3$ de her bir $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için

$$d(x, y) = \|y - x\|$$

olarak tanımlanan fonksiyona, Öklid metriği denir [18].

Tanım 2.4. Öklid metriği ile verilen $(\mathbb{R}^3, d)$ ikilisine, 3-boyutlu Öklid uzayı denir ve kısaca $\mathbb{R}^3$ ile gösterilir [18].

Tanım 2.5. $\mathbb{R}^3$ de her bir $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ vektörleri için, Öklid vektörel çarpımı

$$x \times y = (x_2 y_3 - x_3 y_2, -x_1 y_3 + x_3 y_1, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

olarak tanımlanır [18].

Tanım 2.6. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun her bir $p \in \mathbb{R}^n$ noktasında f fonksiyonunun her mertebeden kısmi türevleri var ve bu türevler sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu C^∞ sınıfındadır veya düzgün fonksiyondur denir [19].

Tanım 2.7. $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ olsun. f_i fonksiyonları düzgün fonksiyonlar ise φ fonksiyonunda düzgündür denir [19].

Tanım 2.8. $I, \mathbb{R}$ de bir açık aralık olmak üzere

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)),$$

şeklinde tanımlı düzgün fonksiyona, $\mathbb{R}^3$ de bir eğri denir [19].

Tanım 2.9. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. O zaman

$$\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt} = (\dot{\gamma}_1(t), \dot{\gamma}_2(t), \dot{\gamma}_3(t)),$$

vektörüne, γ eğrisinin $\gamma(t)$ noktasındaki teğet vektörü veya hız vektörü denir [19].

Tanım 2.10. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. Her $t \in I$ için $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ ise γ eğrisine regüler (düzenli) eğri denir [19].

Tanım 2.11. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir eğri olsun. Her $s \in I$ için $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ ise γ ya birim hızlı eğri ve s ye γ eğrisinin yay parametresi denir [21].

Tanım 2.12. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve s yay parametresi olmak üzere

$$\mathbf{t}(s) = \dot{\gamma}(s), \quad \mathbf{n}(s) = \frac{\ddot{\gamma}(s)}{\|\ddot{\gamma}(s)\|}, \quad \mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s),$$

şeklinde tanımlı vektörlere, sırasıyla, γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki birim teğet, asli normal ve binormal vektörleri denir. Ayrıca $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ ortonormal sistemine γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki Frenet çatısı ve elemanlarına da Frenet vektörleri denir [21].

Tanım 2.13. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve s yay parametresi olmak üzere

$$\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \kappa(s) = \|\ddot{\gamma}(s)\|,$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, γ nın eğrilik fonksiyonu ve $\kappa(s)$ reel sayısına da γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki eğriliği denir [22].

Tanım 2.14. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğri ve s yay parametresi olmak üzere

$$\tau : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(s) = - \left\langle \dot{\mathbf{b}}(s), \mathbf{n}(s) \right\rangle,$$

şeklinde tanımlı fonksiyona, γ nın burulma fonksiyonu ve $\tau(s)$ reel sayısına da γ nın $\gamma(s)$ noktasındaki burulması denir [22].

Tanım 2.15. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin, eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olsun. O zaman γ eğrisinin, Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

eşitlikleri ile verilir [22].

Tanım 2.16. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. O zaman γ eğrisinin $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ Frenet çatısı

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}, \quad \mathbf{b} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|},$$

şeklinde verilir [22].

Tanım 2.17. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler eğrisinin, eğriliği $\kappa > 0$ ve burulması τ olsun. O zaman γ eğrisinin, Frenet formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \|\dot{\gamma}\| \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix},$$

eşitlikleri ile verilir. Burada

$$\kappa = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}, \quad \tau = \frac{\det(\dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|^2} \quad (2.1)$$

dir [22].

Teorem 2.18. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. O zaman,

- $\kappa = 0 \iff \gamma$ bir doğrudur,
- $\kappa > 0$ ve $\tau = 0 \iff \gamma$ bir düzlemsel eğridir [22].

Tanım 2.19. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ regüler eğrisinin her noktasındaki t birim teğet vektörü, sabit bir u vektörü ile sabit açı yapıyor ise γ eğrisine bir helis denir. Burada sabit u vektörüne de helisin eksenini denir [17, 22].

Teorem 2.20. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir regüler eğri olsun. O zaman, γ eğrisi bir helistir gerek ve yeter şart $\kappa > 0$ olmak üzere τ/κ oranı sabittir. Özellikle, κ ve τ sıfırdan farklı sabitler ise dairesel helis olarak adlandırılır [17, 22].

Tanım 2.21. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi sıfırdan farklı eğriliğe ($\kappa \neq 0$) sahip olsun. O zaman, γ eğrinin her noktasındaki n aslı normal vektörü, sabit bir doğrultu ile sabit açı yapıyor ise γ eğrisine bir slant helis denir [20].

Teorem 2.22. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi sıfırdan farklı eğriliğe ($\kappa \neq 0$) sahip olsun. O zaman, γ eğrisi bir slant helistir gerek ve yeter şart

$$\sigma = \frac{\kappa^2}{(\kappa^2 + \tau^2)^{3/2}} \left(\frac{\tau}{\kappa} \right)',$$

fonksiyonu sabittir [20].

Tanım 2.23. $\mathbb{R}^3$ de γ ve γ_* birim hızlı eğrilerinin Frenet çatısı, sırasıyla, $\{t(s), n(s), b(s)\}$ ve $\{t_*(s_*), n_*(s_*), b_*(s_*)\}$ olsun. Eğer γ ve γ_* eğrilerinin her noktasındaki aslı normal vektörleri ($\{n, n_*\}$) lineer bağımlı ise (γ, γ_*) ikilisine, Bertrand eğri çifti denir ve bu eğrilere de Bertrand eğri denir [15, 23].

Teorem 2.24. $\mathbb{R}^3$ de (γ, γ_*) bir Bertrand eğri çifti olsun. Bu durumda, γ eğrisinin aslı normalini n olmak üzere

$$\gamma_*(s_*) = \gamma(s) + \lambda n(s)$$

bağıntısı vardır. Burada λ reel sabiti, Bertrand eğri çiftinin karşılıklı noktaları arasındaki uzaklığı gösterir [18].

Teorem 2.25. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olsun. O zaman, γ eğrisi bir Bertrand eğridir gerek ve yeter şart sıfırdan farklı λ ve μ reel sayıları için

$$\lambda\kappa + \mu\tau = 1,$$

eşitliği sağlanır [16].

Tanım 2.26. $\mathbb{R}^3$ de aynı aralıkta tanımlı γ ve γ_* regüler eğrileri verilsin. Eğer γ eğrisinin $\gamma(s)$ noktasındaki teğet vektörü, $\gamma_*(s_*)$ noktasından geçiyor ve bu noktadaki γ_* eğrisinin teğet vektörüne dik oluyorsa (yani $\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{t}_*(s_*) \rangle = 0$ ise), γ_* eğrisine γ eğrisinin involütü ve γ eğrisine de γ_* eğrisinin evolütü denir [18, 19, 23].

Teorem 2.27. $\mathbb{R}^3$ de γ birim hızlı ve γ_* regüler eğrisi verilsin. Eğer γ_* eğrisi, γ nın involütü ise bu durumda, γ eğrisinin birim teğeti $\mathbf{t}$ olmak üzere

$$\gamma_*(s_*) = \gamma(s) + (c - s)\mathbf{t}(s)$$

bağıntısı vardır. Burada c bir keyfi sabittir [18, 19, 23].

Tanım 2.28. $\mathbb{R}^2$ de bir α regüler düzlem eğrisinin birim normali $\mathbf{n}_\alpha$ ve eğriliği $\kappa_\alpha > 0$ olsun. Bu durumda,

$$\beta = \alpha + \frac{1}{\kappa_\alpha} \mathbf{n}_\alpha$$

şeklinde tanımlı eğriye, $\mathbb{R}^2$ de α eğrisinin evolütü denir. Burada tanımlanan β eğrisi, α regüler düzlem eğrisinin eğrilik (oskülatör) çemberlerinin geometrik yerine karşılık gelir [23, 25].

Tanım 2.29. $\mathbb{R}^3$ de sıfırdan farklı eğriliklere sahip bir γ regüler uzay eğrisinin Frenet takımı $\{\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda,

$$\gamma_* = \gamma + \frac{1}{\kappa} \mathbf{n} + \frac{1}{\|\dot{\gamma}\|} \frac{-\dot{\kappa}}{\kappa^2 \tau} \mathbf{b}$$

şeklinde tanımlı eğriye, $\mathbb{R}^3$ de γ eğrisinin evolütü denir. Burada tanımlanan γ_* eğrisi, γ regüler uzay eğrisinin eğrilik (oskülatör) kürelerinin geometrik yerine karşılık gelir [23, 25].

Tanım 2.30. $\mathbb{R}^3$ de γ ve γ_* birim hızlı eğrilerinin Frenet çatısı, sırasıyla, $\{\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\}$ ve $\{\mathbf{t}_*(s_*), \mathbf{n}_*(s_*), \mathbf{b}_*(s_*)\}$ olsun. Eğer γ eğrisinin asli normal vektörü ile γ_* eğrisinin binormal vektörü lineer bağımlı ise γ eğrisine Mannheim eğrisi, γ_* eğrisine de γ nın Mannheim eğri çifti denir. Kısaca, (γ, γ_*) ikilisi, Mannheim çifti olarak adlandırılır [14].

Teorem 2.31. $\mathbb{R}^3$ de bir eğrinin, Mannheim eğrisi olması için gerek ve yeter şart eğrinin eğrilik (κ) ve burulma (τ) fonksiyonlarının $\kappa = \lambda(\kappa^2 + \tau^2)$ denklemini sağlamalarıdır. Burada λ sıfırdan farklı bir sabittir [14].

Tanım 2.32. $\mathbb{R}^{n+1}$ de

$$\mathbb{S}^n(r) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = r\},$$

kümesine, r -yarıçaplı n -boyutlu hiperküre denir. Burada özel olarak,

- $n = 2, r = 1$ için $\mathbb{R}^3$ de birim küre denir ve kısaca $\mathbb{S}^2$ ile gösterilir,
- $n = 1, r = 1$ için $\mathbb{R}^2$ de birim çember denir ve kısaca $\mathbb{S}^1$ ile gösterilir [25].

Tanım 2.33. Bir küre üzerinde yatan eğriye küresel eğri denir [26].

Teorem 2.34. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için κ, κ' ve τ sıfırdan farklı olsun. O zaman γ bir $q \in \mathbb{R}^3$ merkezli r -yarıçaplı kürede yatan bir küresel eğridir gerek ve yeter şart

$$q = \gamma + \left(\frac{1}{\kappa}\right) \mathbf{n} + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right) \mathbf{b},$$

$$r^2 = \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)^2 + \left(\frac{1}{\kappa}\right)^2,$$

eşitlikleri sağlanır [23,25].

Tanım 2.35. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisi için κ, κ' ve τ sıfırdan farklı olsun. O zaman γ bir küresel eğridir gerek ve yeter şart

$$\left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)' + \frac{\tau}{\kappa} = 0,$$

diferensiyel denklemi sağlanır [23,25].

Teorem 2.36. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ birim hızlı eğrisinin eğriliği κ ve burulması τ olsun. $\gamma, \mathbb{R}^3$ de r -yarıçaplı bir çemberdir gerek ve yeter şart $\kappa = 1/r$ ve $\tau = 0$ [23,25].

Tanım 2.37. $\mathbb{R}^3$ de bir M yüzeyi içinde bir $\gamma : I \rightarrow M$ birim hızlı eğrisi verilsin. Yüzeyin, γ eğrisine kısıtlanmış birim normal vektör alanı $\mathbf{Z}|_\gamma$ ve eğrinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}$ olmak üzere, $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}|_\gamma \times \mathbf{T}$ eşitliği ile tanımlanan vektör alanı ile birlikte $\{\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}|_\gamma\}$ ortonormal sistemine, γ eğrisinin eğri-yüzey (Darboux) çatısı ve (γ, M) ye eğri-yüzey ikilisi denir [19,22].

Teorem 2.38. (γ, M) eğri-yüzey ikilisinin, $\{\mathbf{T}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}|_\gamma\}$ Darboux çatısı için türev formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{T}} \\ \dot{\mathbf{Y}} \\ \dot{\mathbf{Z}}|_\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z}|_\gamma \end{pmatrix},$$

şeklinde verilir. Burada $\kappa_g = \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{Y} \rangle$, $\kappa_n = \langle \dot{\mathbf{T}}, \mathbf{Z}|_\gamma \rangle$ ve $\tau_g = -\langle \dot{\mathbf{Z}}|_\gamma, \mathbf{Y} \rangle$ olarak verilen reel değerli fonksiyonlara, sırasıyla, (γ, M) eğri-yüzey ikilisinin geodezik eğriliği, normal eğriliği ve geodezik burulması denir [19, 22].

Uyarı 2.39. $M = \mathbb{S}^2$ için $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin birim teğeti $\mathbf{t}$ olsun. Bu durumda, $\mathbb{S}^2$ nin γ ya kısıtlanmış birim normal vektörü, γ nın konum vektörü (yani $\gamma = \mathbf{Z}|_\gamma$) olacağından $\mathbf{e} = \mathbf{Y} = \gamma \times \mathbf{t}$ şeklinde tanımlanan vektör ile birlikte γ eğrisi boyunca elde edilen $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{e}\}$ eğri-yüzey çatısına, γ eğrisinin Sabban çatısı denir. Burada

$$\kappa_g = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \times \dot{\gamma} \rangle = \det(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}),$$

$$\kappa_n = \langle \ddot{\gamma}, \gamma \rangle = -1,$$

$$\tau_g = -\langle \dot{\gamma}, \gamma \times \dot{\gamma} \rangle = 0,$$

olup γ birim hızlı küresel eğrisinin Sabban çatısının Frenet tipi formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

olarak verilir.

Tanım 2.40. $\mathbb{S}^2$ birim küresi üzerinde $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ bir regüler küresel eğri olsun. O zaman γ ya ve $\mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$ birim teğet vektörüne ortogonal olan $\mathbf{e} = \gamma \times \mathbf{t}$ birim vektörü ile birlikte elde edilen $\{\gamma, \mathbf{t}, \mathbf{e}\}$ ortonormal sistemine, γ nın $\mathbb{S}^2$ üzerindeki Sabban çatısı denir. Ayrıca γ nın Sabban çatısının Frenet tipi formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{e}} \end{pmatrix} = \|\dot{\gamma}\| \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \kappa_g \\ 0 & -\kappa_g & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \mathbf{t} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix},$$

olup burada γ nın geodezik eğriliği

$$\kappa_g = \frac{\det(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})}{\|\dot{\gamma}\|^3}. \quad (2.3)$$

olarak verilir [10].

Tanım 2.41. $\mathbb{R}^3$ de bir yüzey M olsun. O zaman $\gamma : I \rightarrow M$ bir geodezik eğri ise $\kappa_g = 0$. Tersine, $\gamma : I \rightarrow M$ eğrisinin hız vektörünün uzunluğu sabit ve $\kappa_g = 0$ ise γ bir geodezik eğridir [19].

Uyarı 2.42. $M = \mathbb{S}^2$ için $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ birim hızlı küresel eğrisinin eğriliği κ ve geodezik eğriliği κ_g olsun. O zaman (2.2) formülleri ve Teorem 2.36. dan $\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + 1}$ fonksiyonu sabittir gerek ve yeter şart γ bir çember belirtir. Buradan $\gamma, \mathbb{S}^2$ de bir büyük çemberdir (yani geodezik eğridir) gerek ve yeter şart $\kappa_g = 0$.

Tanım 2.43. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ regüler küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{\gamma, t, e\}$ olsun. Bu durumda, $\text{Ev}(\gamma) : I \rightarrow \mathbb{S}^2$,

$$\text{Ev}(\gamma)(t) = \pm \frac{\kappa_g(t)}{\sqrt{\kappa_g^2(t) + 1}} \gamma(t) \pm \frac{1}{\sqrt{\kappa_g^2(t) + 1}} e(t)$$

şeklinde tanımlanan eğriye, γ nın küresel evolütü denir [12].

Tanım 2.44. $\gamma : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ bir regüler küresel eğrisinin Sabban çatısı $\{\gamma, t, e\}$ olsun. Bu durumda, $\text{Inv}(\gamma, t_0) : I \rightarrow \mathbb{S}^2$,

$$\text{Inv}(\gamma, t_0)(t) = \cos \left(\int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right) \gamma(t) - \sin \left(\int_{t_0}^t \|\dot{\gamma}(t)\| dt \right) t(t)$$

şeklinde tanımlanan eğriye, γ nın $t_0 \in I$ noktasındaki küresel involütü denir [9].

2.2. Küresel Legendre Eğriler

Bu bölümde [9-12] kaynaklarında verilen küresel Legendre eğriler teorisi ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi. Ayrıca, Legendre tekillik teorisi ile ilgili daha detaylı içerik için [1, 2, 7, 12, 13] kaynaklarına bakılabilir.

Şimdi, bir uzay eğrisinin singüler ve bükülme noktası kavramlarını verelim.

Tanım 2.45. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\dot{\gamma}(t_0) = 0$ eşitliğini sağlayan herhangi $t_0 \in I$ noktasına, γ eğrisinin singüler (0-tip singüler) noktası denir [21, 25].

Tanım 2.46. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için $\ddot{\gamma}(t_0) = 0$ (yani $\kappa(t_0) = 0$) eşitliğini sağlayan herhangi $t_0 \in I$ noktasına, γ eğrisinin bükülme (1-tip singüler) noktası denir [21, 25]

Tanım 2.45. ve Tanım 2.46. dan bir uzay eğrisinin herhangi bir singüler veya bükülme noktasında eğrilik ve burulması tanımlı değildir. Dolayısıyla, bu noktalarda eğrinin Frenet çatısının, iyi tanımlı olmadığı görülür. Buna rağmen, eğri boyunca singüler noktalarda da iyi tanımlı olan bir Frenet çatısı benzeri hareketli çatı tanımlamak mümkündür. Bu durum singüler noktaya sahip küresel eğriler için de geçerlidir.

Şimdi, bir küresel Legendre eğrinin singüler noktaya sahip küresel frontal veya front eğrisi olarak verilen singüler küresel eğriler ile ilgili temel tanım ve teoremleri verilecek.

Tanım 2.47. $\Delta = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0\}$ bir 3-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olmak üzere $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ eğrisi verilsin. Eğer her $t \in I$ için

$$\langle \dot{\gamma}(t), \nu(t) \rangle = 0 \quad (2.4)$$

ise (γ, ν) eğrisine, küresel Legendre eğrisi denir [12].

Uyarı 2.48. Tanım 2.47. den $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta \subset \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ küresel Legendre eğrisinin var olması demek her $t \in I$ için birbirine ortogonal (yani $\langle \gamma(t), \nu(t) \rangle = 0$) olan ve (2.4) eşitliğini sağlayan $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ ve $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel eğrilerinin var olması demektir.

Tanım 2.49. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre eğri olsun. O zaman $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ eğrisine, bir küresel frontal ve $\nu : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ eğrisine de γ nın duali denir [12].

Tanım 2.50. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ küresel Legendre eğrisi bir immersiyon (yani, her $t \in I$ için $(\dot{\gamma}(t), \dot{\nu}(t)) \neq 0$) ise γ eğrisine, bir küresel front denir [10-12].

Şimdi (γ, ν) bir küresel Legendre eğri olsun. Eğer γ singüler noktaya sahip bir küresel frontal ise γ boyunca Frenet çatı benzeri hareketli bir çatı tanımlanabilir. O halde, γ küresel frontalının duali ν olmak üzere, her $t \in I$ için $\mu(t) = \gamma(t) \times \nu(t)$ şeklinde tanımlanan birim vektör ile birlikte elde edilen $\mathbb{R}^3$ ün $\{\gamma, \nu, \mu\}$ ortonormal sistemine, γ küresel frontalının $\mathbb{S}^2$ üzerindeki Legendre çatısı olarak adlandırılır. Buna göre, γ küresel frontalının Legendre çatısına göre Frenet tipi formülleri

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma}(t) \\ \dot{\nu}(t) \\ \dot{\mu}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m(t) \\ 0 & 0 & n(t) \\ -m(t) & -n(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma(t) \\ \nu(t) \\ \mu(t) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Burada,

$$m(t) = \langle \dot{\gamma}(t), \mu(t) \rangle, \quad n(t) = \langle \dot{\nu}(t), \mu(t) \rangle. \quad (2.6)$$

olmak üzere (m, n) düzgün fonksiyon çiftine, (γ, ν) küresel Legendre eğrisinin eğriliği denir [12].

Uyarı 2.51. Tanım 2.45., (2.5) ve (2.6) dan,

- t_0 , γ eğrisinin singüler noktasıdır gerek ve yeter şart $m(t_0) = 0$,
- t_0 , ν eğrisinin singüler noktasıdır gerek ve yeter şart $n(t_0) = 0$,

olduğu görülür [9, 12].

Uyarı 2.52. Tanım 2.50. ve (2.6) eşitliğinden (γ, ν) bir küresel Legendre immersiyondur gerek ve yeter şart her $t \in I$ için $(m(t), n(t)) \neq (0, 0)$ dir. Burada, eğer $n(t_0) = 0$ ise t_0 bükülme noktası olarak adlandırılır [9, 12].

Tanım 2.53. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre immersiyon olsun. O zaman γ küresel frontunun evolütü

$$\mathcal{E}v(\gamma) : I \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \mathcal{E}v(\gamma)(t) = \pm \frac{n(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}} \gamma(t) \mp \frac{m(t)}{\sqrt{m^2(t) + n^2(t)}} \nu(t)$$

olarak tanımlanır [12].

Tanım 2.54. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre immersiyon olsun. O zaman, $t_0 \in I$ için γ bükülme noktası olmayan küresel frontun involütü

$$\mathcal{I}nv(\gamma, t_0) : I \rightarrow \mathbb{S}^2, \quad \mathcal{I}nv(\gamma, t_0)(t) = \cos \left(\int_{t_0}^t m(t) dt \right) \gamma(t) - \sin \left(\int_{t_0}^t m(t) dt \right) \mu(t)$$

olarak tanımlanır [9].

3. REGÜLER KÜRESEL FRONTLAR

Bu bölümde, özel olarak (γ, ν) küresel Legendre immersiyonunun γ küresel frontunun regüler olması halinde, γ eğrisinin $\{\gamma, \nu, \mu\}$ Legendre çatısı ile $\{t, n, b\}$ Frenet çatısı veya $\{\gamma, t, e\}$ Sabban çatısı arasındaki ilişkiler elde edildi. Ayrıca, regüler eğriler için iyi bilinen bazı karakterizasyonlar, Legendre eğriliği cinsinden verildi.

Teorem 3.1. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre immersiyon olsun. Bu durumda, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ regüler küresel frontunun Frenet takımı $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ ve $\varepsilon = \det(\gamma, \nu, t)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} t = \varepsilon \mu, \\ n = -\varepsilon \left(\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \gamma + \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \nu \right), \\ b = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \gamma - \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}} \nu, \end{cases} \quad (3.1)$$

ve

$$\begin{cases} \kappa = \frac{\sqrt{m^2+n^2}}{|m|} = \sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2} \\ \tau = \frac{m\dot{n} - \dot{m}n}{m(m^2+n^2)} = \frac{\left(\frac{n}{m}\right)'}{m \left(1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2\right)} \end{cases} \quad (3.2)$$

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ bir regüler küresel frontunun Legendre çatısı $\{\gamma, \nu, \mu\}$ ve Frenet takımı $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda, (2.5) den

$$\dot{\gamma} = m\mu \quad (3.3)$$

ve buradan $\|\dot{\gamma}\|^2 = m^2$ olup Tanım 2.10. göz önüne alınırsa

$$\|\dot{\gamma}\| = |m| \neq 0 \quad (3.4)$$

olur. Şimdi, (3.3) ün türevi alınıp (2.5) Legendre Frenet tipi formülleri uygulanırsa

$$\ddot{\gamma} = -m^2\gamma - mn\nu + \dot{m}\mu \quad (3.5)$$

olur. (3.3) ve (3.5) in vektörel çarpımı alınır

$$\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = m^2 n \gamma - m^3 \nu \quad (3.6)$$

ve buradan

$$\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = m^2 \sqrt{m^2 + n^2} \quad (3.7)$$

bulunur. Ayrıca, (3.5) in türevi alınıp (2.5) formülleri uygulanırsa

$$\ddot{\gamma} = (-3m\dot{m})\gamma + (-2\dot{m}n - m\dot{n})\nu + (\ddot{m} - m^3 - mn^2)\mu \quad (3.8)$$

bulunur. (3.6) ile (3.8) in de iç çarpımı sonucunda

$$\langle \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}, \ddot{\gamma} \rangle = m^3 (m\dot{n} - \dot{m}n) \quad (3.9)$$

elde edilir. O halde, $\varepsilon = \det(\gamma, \nu, t)$ olmak üzere (3.3), (3.4), (3.6), (3.7) eşitlikleri göz önüne alınarak, Tanım 2.16. dan γ nın Frenet vektörlerinin, $\{\gamma, \nu, \mu\}$ Legendre çatısına göre yazılışları olan (3.1) eşitlikleri kolayca elde edilir. Son olarak, (3.4), (3.7) ve (3.9) eşitlikleri göz önüne alınarak, (2.1) den γ nın eğrilik ve burulmasının (m, n) Legendre eğrilik fonksiyonu cinsinden ifadeleri olan (3.2) eşitlikleri kolayca bulunur.

Teorem 3.2. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre immersiyon olsun. Bu durumda, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ regüler küresel frontunun Sabban takımı $\{\gamma, t, e, \kappa_g\}$ ve $\varepsilon = \det(\gamma, \nu, t)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\begin{cases} \gamma = \gamma, \\ t = \varepsilon \mu, \\ e = -\varepsilon \nu, \end{cases}$$

ve

$$\kappa_g = \frac{n}{|m|}.$$

İspat. $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ bir regüler küresel frontunun Legendre çatısı $\{\gamma, \nu, \mu\}$ ve Sabban takımı $\{\gamma, t, e, \kappa_g\}$ olsun. Bu durumda, (2.5) ve Tanım 2.10. dan (3.3) ve (3.4) eşitlikleri vardır. Buna göre $\varepsilon = \det(\gamma, \nu, t)$ olmak üzere Tanım 2.40. dan γ nın Sabban çatısının, $\{\gamma, \nu, \mu\}$ Legendre

çatısına göre yazılışları olan

$$\begin{cases} \gamma = \gamma, \\ \mathbf{t} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} = \frac{1}{|m|} (m\boldsymbol{\mu}) = \varepsilon\boldsymbol{\mu}, \\ \mathbf{e} = \gamma \times \mathbf{t} = \gamma \times (\varepsilon\boldsymbol{\mu}) = -\varepsilon\boldsymbol{\nu}, \end{cases}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca (3.3), (3.4) ve (3.5) eşitlikleri göz önüne alınarak, (2.3) ten γ nın geodezik eğriliğinin, (m, n) Legendre eğrilik fonksiyonu cinsinden ifadesi

$$\kappa_g = \frac{\langle \ddot{\gamma}, \gamma \times \dot{\gamma} \rangle}{\|\dot{\gamma}\|^3} = \frac{\langle -m^2\gamma - mn\boldsymbol{\nu} + \dot{m}\boldsymbol{\mu}, \gamma \times m\boldsymbol{\mu} \rangle}{|m|^3} = \frac{m^2n}{|m|^3} = \frac{n}{|m|}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç 3.3. $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre eğri olsun. γ , $\mathbb{S}^2$ üzerinde bir nokta belirtir gerek ve yeter şart $m = 0$ dır.

İspat. Kabul edelim ki, $\mathbb{S}^2$ üzerinde γ küresel frontalı için her noktada $m = 0$ olsun. Bu durumda, (2.5) ten $\dot{\gamma} = m\boldsymbol{\mu}$ olup kabulümüzden $\dot{\gamma} = 0$ elde edilir. O halde γ , $\mathbb{S}^2$ de sabit bir nokta belirtir. Tersine, her noktada $\dot{\gamma} = 0$ olsun. Bu durumda, (2.6) dan $m = \langle \dot{\gamma}, \boldsymbol{\mu} \rangle$ olup buradan $m = 0$ elde edilir.

Sonuç 3.4. $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre immersiyon olsun. Bu durumda γ regüler küresel frontu, $\mathbb{S}^2$ üzerinde bir geodeziktir ($\kappa_g = 0$) gerek ve yeter şart $n = 0$ dır.

İspat. Uyarı 2.42. ve Teorem 3.2. den açıktır.

Sonuç 3.5. $(\gamma, \boldsymbol{\nu}) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre immersiyon olsun. Bu durumda γ regüler küresel frontu, $\mathbb{S}^2$ üzerinde $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ -yarıçaplı bir çemberdir gerek ve yeter şart $\frac{n}{|m|} = \lambda$ oranı sabittir.

İspat. Kabul edelim ki, $\mathbb{S}^2$ üzerinde γ küresel frontu $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ -yarıçaplı bir çember olsun. Bu durumda, Teorem 2.36. dan γ nın eğriliği $\kappa = \sqrt{1+\lambda^2}$ sabitidir. Ayrıca, Uyarı 2.42. den $\kappa = \sqrt{\kappa_g^2 + 1}$ olup buradan $\kappa_g = \lambda$ sabiti olur. O halde, Teorem 3.2. den $\frac{n}{|m|} = \lambda$ elde edilir. Ters de açık olup ispat tamamdır.

Sonuç 3.6. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre immersiyon olsun. Bu durumda γ regüler küresel frontu, $\mathbb{S}^2$ üzerinde bir küresel helistir gerek ve yeter şart $\frac{m^2(\frac{n}{m})}{(m^2+n^2)^{3/2}}$ fonksiyonu sıfırdan farklı bir sabittir.

İspat. Teorem 2.20. ve (3.2) eşitliklerinden açıktır.



4. ORTOGONAL-TİP LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde, bir (γ, ν) küresel Legendre eğrisinin (veya immersiyonunun) γ küresel frontalının (veya frontunun) Legendre çatısı yardımıyla, ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri tanımlandı. Ayrıca, bu eğri çiftlerinin Legendre eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edildi.

Tanım 4.1. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğrilerinin (veya immersiyonlarının) sırasıyla, γ ve γ_* küresel frontallarının (veya frontlarının) Legendre çatıları, $\{\gamma, \nu, \mu\}$ ve $\{\gamma_*, \nu_*, \mu_*\}$ olsun. Bu durumda, Legendre çatılarının karşılıklı iki bileşeni, γ ve γ_* eğrilerinin karşılıklı noktalarında ortogonal ise γ_* küresel frontalına (veya frontuna), γ küresel frontalının (veya frontunun) ortogonal-tip Legendre eğri çifti denir ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ da ortogonal-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Uyarı 4.2. Bir $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel frontalın (veya frontun) Legendre çatısının γ, ν, μ bileşenleri için vektör kavramı kullanıldığı zaman, herhangi $t \in I$ noktasındaki $\gamma(t), \nu(t), \mu(t)$ konum vektörleri anlaşılacaktır.

Şimdi, üç çeşit olarak tanımlanan ortogonal-tip Legendre eğri çiftlerini verelim.

4.1. Birinci Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri

Tanım 4.3. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğriler olsun. Eğer γ ve γ_* küresel frontallarının (veya frontlarının) karşılıklı noktalarındaki Legendre çatılarına göre γ ve γ_* vektörleri ortogonal ise γ_* , γ nın birinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ da birinci ortogonal-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Teorem 4.4. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla, (m, n) ve (m_*, n_*) olsun. Bu durumda γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun birinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir gerek ve yeter şart

$$(\gamma_*, \nu_*) = (\pm \nu, \mp \gamma)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = (\mp n, \mp m),$$

veya

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\pm \mu, -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \right)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\sqrt{m^2 + n^2}, \pm \frac{m\dot{n} - n\dot{m}}{m^2 + n^2} \right),$$

veya $\theta : I \rightarrow \mathbb{R} - \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve γ küresel frontu, $\mathbb{S}^2$ de bir büyük çember (yani $n = 0$) olmak üzere

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\cos \theta \nu + \sin \theta \mu, \frac{-\dot{\theta} \gamma + m \sin^2 \theta \nu - m \sin \theta \cos \theta \mu}{\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2}} \right)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2}, \frac{\left(m \sin \theta (\ddot{\theta}) - \dot{m} \sin \theta (\dot{\theta}) - 2m \cos \theta (\dot{\theta})^2 - m^3 \sin^2 \theta \cos \theta \right)}{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2} \right)$$

olarak verilir.

İspat. Kabul edelim ki, γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun birinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olsun. Bu durumda, Tanım 4.3. ten bir $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır öyle ki her $t, t_* \in I$ için

$$\gamma_*(t_*) = \cos \theta(t) \nu(t) + \sin \theta(t) \mu(t) \quad (4.1)$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi, (4.1) in t ye göre türevi alınıp (2.5) Legendre Frenet tipi formülleri kullanılırsa,

$$m_* \mu_* \frac{dt_*}{dt} = (-m \sin \theta) \gamma - \sin \theta (n + \dot{\theta}) \nu - \cos \theta (n - \dot{\theta}) \mu \quad (4.2)$$

bulunur. (4.2) eşitliğinin γ_* vektörü ile iç çarpımı alınıp Tanım 4.3. ten $\gamma_* \perp \gamma$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$n \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (4.3)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

Durum 1. (4.3) eşitliğinde $\sin \theta = 0$ ise $\cos \theta = \pm 1$ olur. Buna göre, (4.1) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma_{\star} = \pm \nu, \quad (4.4)$$

$$m_{\star} \frac{dt_{\star}}{dt} \mu_{\star} = \mp n \mu, \quad (4.5)$$

bulunur. Şimdi, (4.5) eşitliğinin kendisi ile iç çarpımı alınırsa, genelliği bozmadan

$$m_{\star} \frac{dt_{\star}}{dt} = \mp n \quad (4.6)$$

ve

$$\mu_{\star} = \mu \quad (4.7)$$

elde edilir. O halde, (4.4) ve (4.7) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\nu_{\star} = \mu_{\star} \times \gamma_{\star} = \mp \gamma \quad (4.8)$$

elde edilir. Ayrıca, (2.6) dan $n_{\star} = \left\langle \frac{d}{dt_{\star}}(\nu_{\star}), \mu_{\star} \right\rangle$ olup (4.7) ve (4.8) eşitlikleri kullanılırsa,

$$n_{\star} \frac{dt_{\star}}{dt} = \mp m \quad (4.9)$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.4), (4.7) ve (4.8) kullanılıp (2.5) formülleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{\star}, \nu_{\star} \rangle &= \langle \pm \nu, \mp \gamma \rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_{\star}}(\gamma_{\star}), \nu_{\star} \right\rangle &= \frac{dt}{dt_{\star}} \langle \pm n \mu, \mp \gamma \rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (γ, ν) bir Legendre immersiyon olup (4.6) ve (4.9) dan

$$\left(m_{\star} \frac{dt_{\star}}{dt}, n_{\star} \frac{dt_{\star}}{dt} \right) = (\mp n, \mp m) \neq (0, 0),$$

bulunur. Böylece,

$$(\gamma_{\star}, \nu_{\star}) = (\pm \nu, \mp \gamma) \quad (4.10)$$

bir Legendre immersiyondur.

Durum 2. (4.3) te $\cos \theta = 0$ ise $\sin \theta = \pm 1$ olur. Buna göre, (4.1) ve (4.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma_* = \pm \mu, \quad (4.11)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = \mp m \gamma \mp n \nu \quad (4.12)$$

bulunur. Şimdi, (4.12) eşitliğinin kendisi ile iç çarpımı alınırsa, genelliği bozmadan

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad (4.13)$$

ve

$$\mu_* = \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{\mp n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \quad (4.14)$$

elde edilir. O halde, (4.11) ve (4.14) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\nu_* = \mu_* \times \gamma_* = -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu, \quad (4.15)$$

elde edilir. Ayrıca, (2.6) dan $n_* = \left\langle \frac{d}{dt_*}(\nu_*), \mu_* \right\rangle$ olup (4.14) ve (4.15) eşitlikleri kullanılırsa,

$$n_* \frac{dt_*}{dt} = \pm \frac{m\dot{n} - n\dot{m}}{m^2 + n^2} \quad (4.16)$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.11), (4.14), (4.15) kullanılıp (2.5) formülleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_*, \nu_* \rangle &= \left\langle \pm \mu, -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\gamma_*), \nu_* \right\rangle &= \frac{dt}{dt_*} \left\langle \mp m \gamma \mp n \nu, -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \right\rangle = 0. \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (γ, ν) bir Legendre immersiyon olup (4.13) ve (4.16) dan

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\sqrt{m^2 + n^2}, \pm \frac{m\dot{n} - n\dot{m}}{m^2 + n^2} \right) \neq (0, 0),$$

bulunur. Böylece,

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\pm \mu, -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \right) \quad (4.17)$$

bir Legendre immersiyondur.

Durum 3. (4.3) te $n = 0$ (yani γ küresel frontu, $\mathbb{S}^2$ de bir geodezik) olmak üzere (4.2) eşitliğinden,

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = (-m \sin \theta) \gamma - \sin \theta \left(\dot{\theta} \right) \nu - \cos \theta \left(\dot{\theta} \right) \mu \quad (4.18)$$

bulunur. Şimdi, (4.1) ile (4.18) eşitliklerinin vektörel çarpımı alınırsa

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \nu_* = -\dot{\theta} \gamma + m \sin^2 \theta \nu - m \sin \theta \cos \theta \mu,$$

elde edilir. Buradan, $\sin \theta \neq 0$ şartı altında,

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = \sqrt{m^2 \sin^2 \theta + \left(\dot{\theta} \right)^2} \quad (4.19)$$

olup

$$\mu_* = \frac{1}{\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + \left(\dot{\theta} \right)^2}} \left((-m \sin \theta) \gamma - \sin \theta \left(\dot{\theta} \right) \nu - \cos \theta \left(\dot{\theta} \right) \mu \right), \quad (4.20)$$

ve

$$\nu_* = \frac{1}{\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + \left(\dot{\theta} \right)^2}} \left(-\dot{\theta} \gamma + m \sin^2 \theta \nu - m \sin \theta \cos \theta \mu \right), \quad (4.21)$$

olarak elde edilir. Ayrıca, (2.6) dan $n_* = \left\langle \frac{d}{dt_*}(\nu_*), \mu_* \right\rangle$ olup (4.20) ve (4.21) eşitlikleri kullanılırsa,

$$n_* \frac{dt_*}{dt} = \frac{\left(m \sin \theta \left(\ddot{\theta} \right) - \dot{m} \sin \theta \left(\dot{\theta} \right) - 2m \cos \theta \left(\dot{\theta} \right)^2 - m^3 \sin^2 \theta \cos \theta \right)}{m^2 \sin^2 \theta + \left(\dot{\theta} \right)^2} \quad (4.22)$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.1), (4.20) ve (4.21) kullanılıp (2.5) formülleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_*, \nu_* \rangle &= 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\gamma_*), \nu_* \right\rangle &= 0, \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca, (γ, ν) bir Legendre immersiyon olup $\sin \theta \neq 0$ için (4.19) ve (4.22) den

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt}\right) \neq (0, 0),$$

bulunur. Böylece, $\sin \theta \neq 0$ ve $n = 0$ şartları altında,

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\cos \theta \nu + \sin \theta \mu, \frac{-\dot{\theta} \gamma + m \sin^2 \theta \nu - m \sin \theta \cos \theta \mu}{\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2}} \right) \quad (4.23)$$

bir Legendre immersiyondur.

Tersine, (γ_*, ν_*) küresel Legendre immersiyonu, (4.10), (4.17) veya (4.23) eşitlikleri ile tanımlansın. Bu durumda, Tanım 4.3. ten ispat tamamdır.

O halde, γ bir küresel frontal olması halinde, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.5. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla, (m, n) ve (m_*, n_*) olsun. Bu durumda γ_* küresel frontalı, γ küresel frontalının birinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir gerek ve yeter şart

$$(\gamma_*, \nu_*) = (\pm \nu, \mp \gamma)$$

bir Legendre eğridir ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt}\right) = (\mp n, \mp m),$$

veya $\theta : I \rightarrow \mathbb{R} - \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve γ küresel frontalı, $\mathbb{S}^2$ de bir büyük çember (yani $n = 0$) olmak üzere

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\cos \theta \nu + \sin \theta \mu, \frac{-\dot{\theta} \gamma + m \sin^2 \theta \nu - m \sin \theta \cos \theta \mu}{\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2}} \right)$$

bir Legendre eğridir ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt}\right) = \left(\sqrt{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2}, \frac{(m \sin \theta (\ddot{\theta}) - \dot{m} \sin \theta (\dot{\theta}) - 2m \cos \theta (\dot{\theta})^2 - m^3 \sin^2 \theta \cos \theta)}{m^2 \sin^2 \theta + (\dot{\theta})^2} \right)$$

olarak verilir.

4.2. İkinci Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri

Tanım 4.6. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğriler olsun. Eğer γ ve γ_* küresel frontal-larının (veya frontlarının) karşılıklı noktalarındaki Legendre çatılarına göre ν ve ν_* vektörleri ortogonal ise γ_*, γ nın ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ ikilisi de ikinci ortogonal-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Teorem 4.7. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla, (m, n) ve (m_*, n_*) olsun. Bu durumda γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir gerek ve yeter şart

$$(\gamma_*, \nu_*) = (\pm \nu, -\gamma)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = (n, \mp m),$$

veya $n \neq 0$ için,

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\frac{\pm n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu, \mu \right)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\frac{\left(\frac{m}{n}\right)'}{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2}, \pm \sqrt{m^2 + n^2} \right)$$

olarak verilir.

İspat. Kabul edelim ki, γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olsun. Bu durumda Tanım 4.6. dan bir $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır öyle ki her $t, t_* \in I$ için

$$\gamma_*(t_*) = \cos \theta(t) \gamma(t) + \sin \theta(t) \nu(t), \quad (4.24)$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi, (4.24) ün t ye göre türevi alınıp (2.5) formülleri kullanılırsa,

$$m_* \mu_* \frac{dt_*}{dt} = - \left(\dot{\theta} \sin \theta \right) \gamma + \left(\dot{\theta} \cos \theta \right) \nu + (m \cos \theta + n \sin \theta) \mu \quad (4.25)$$

bulunur. (4.25) in γ_* vektörü ile vektörel çarpımı alınıp (4.24) uygulanırsa

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \nu_* = - \sin \theta (m \cos \theta + n \sin \theta) \gamma + \cos \theta (m \cos \theta + n \sin \theta) \nu - \dot{\theta} \mu \quad (4.26)$$

elde edilir. Şimdi (4.26) nın ν vektörü ile iç çarpımı alınıp Tanım 4.6. dan $\nu_* \perp \nu$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\cos \theta (m \cos \theta + n \sin \theta) = 0 \quad (4.27)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

Durum 1. (4.27) de $\cos \theta = 0$ ise $\sin \theta = \pm 1$ olur. Buna göre, (4.24), (4.25) ve (4.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma_* = \pm \nu, \quad (4.28)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = \pm n \mu, \quad (4.29)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \nu_* = -n \gamma, \quad (4.30)$$

bulunur. Şimdi (4.29) ve (4.30) eşitliklerinin kendisi ile iç çarpımı alınırsa, genelliği bozmadan

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = n, \quad (4.31)$$

ve buradan

$$\nu_* = -\gamma, \quad (4.32)$$

$$\mu_* = \pm \mu, \quad (4.33)$$

elde edilir. Ayrıca, gerekli hesaplardan sonra,

$$n_* \frac{dt_*}{dt} = \mp m \quad (4.34)$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.28), (4.32) ve (4.33) kullanılıp (2.5) formülleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\langle \gamma_*, \nu_* \rangle &= \langle \pm \nu, -\gamma \rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\gamma_*), \nu_* \right\rangle &= \frac{dt}{dt_*} \langle \pm n \mu, -\gamma \rangle = 0\end{aligned}$$

dır. Ayrıca (γ, ν) bir Legendre immersiyon olup (4.31) ve (4.34) ten

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = (n, \mp m) \neq (0, 0)$$

bulunur. Böylece,

$$(\gamma_*, \nu_*) = (\pm \nu, -\gamma) \quad (4.35)$$

bir Legendre immersiyondur.

Durum 2. Eğer (4.27) de $m \cos \theta + n \sin \theta = 0$ ise $n \neq 0$ (yani γ küresel frontu bükülme noktasına sahip değildir) şartı altında

$$\tan \theta = -\frac{m}{n}, \quad \cos \theta = \frac{\pm n}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \quad (4.36)$$

olarak seçilebilir. Buna göre, (4.24), (4.25) ve (4.26) kullanılarak

$$\gamma_* = \frac{\pm n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu, \quad (4.37)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = -\dot{\theta} (\sin \theta \gamma - \cos \theta \nu), \quad (4.38)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \nu_* = -\dot{\theta} \mu \quad (4.39)$$

elde edilir. (4.38) ve (4.39) eşitliklerinin kendisiyle iç çarpımı alınıp (4.36) göz önüne alınırsa, genelliği bozmadan

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = -\dot{\theta} = \frac{\left(\frac{m}{n}\right)'}{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2} \quad (4.40)$$

ve buradan

$$\boldsymbol{\nu}_* = \boldsymbol{\mu}, \quad (4.41)$$

$$\boldsymbol{\mu}_* = \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \boldsymbol{\gamma} + \frac{\mp n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \boldsymbol{\nu} \quad (4.42)$$

elde edilir. Ayrıca gerekli hesaplardan sonra,

$$n_* \frac{dt_*}{dt} = \pm \sqrt{m^2 + n^2} \quad (4.43)$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.37), (4.41) ve (4.42) kullanılıp (2.5) formülleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_* \rangle &= \left\langle \frac{\pm n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \boldsymbol{\gamma} + \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\boldsymbol{\gamma}_*), \boldsymbol{\nu}_* \right\rangle &= \frac{dt}{dt_*} \frac{n^2 \left(\frac{m}{n}\right)^{\cdot}}{(m^2 + n^2)^{3/2}} \langle \mp m \boldsymbol{\gamma} \mp n \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu} \rangle = 0 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ bir Legendre immersiyon olup (4.40) ve (4.43) ten

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\frac{\left(\frac{m}{n}\right)^{\cdot}}{1 + \left(\frac{m}{n}\right)^2}, \pm \sqrt{m^2 + n^2} \right) \neq (0, 0)$$

elde edilir. Böylece, $n \neq 0$ şartı altında

$$(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*) = \left(\frac{\pm n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \boldsymbol{\gamma} + \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\mu} \right) \quad (4.44)$$

bir Legendre immersiyondur.

Tersine, $(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*)$ küresel Legendre immersiyonu, (4.35) veya (4.44) eşitlikleri ile tanımlansın. Bu durumda, Tanım 4.6. dan ispat tamamdır.

O halde, $\boldsymbol{\gamma}$ bir küresel frontal olması halinde, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.8. $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ ve $(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*)$ küresel Legendre eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla, (m, n) ve (m_*, n_*) olsun. Bu durumda $\boldsymbol{\gamma}_*$ küresel frontalı, $\boldsymbol{\gamma}$ küresel frontalının ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir gerek ve yeter şart

$$(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*) = (\pm \boldsymbol{\nu}, -\boldsymbol{\gamma})$$

bir Legendre eğridir ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt}\right) = (n, \mp m),$$

veya $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere

$$(\gamma_*, \nu_*) = (\cos \theta \gamma + \sin \theta \nu, \mu)$$

bir Legendre eğridir ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt}\right) = (-\dot{\theta}, m \cos \theta - n \sin \theta)$$

olarak verilir.

4.3. Üçüncü Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri

Tanım 4.9. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğriler olsun. Eğer γ ve γ_* küresel frontal-larının (veya frontlarının) karşılıklı noktalarındaki Legendre çatılarına göre μ ve μ_* vektörleri ortogonal ise γ_*, γ nın üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çifti ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ ikilisi de üçüncü ortogonal-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Teorem 4.10. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla, (m, n) ve (m_*, n_*) olsun. Bu durumda γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir gerek ve yeter şart

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\pm \mu, \frac{-n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu\right)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt}\right) = \left(\sqrt{m^2 + n^2}, \pm \frac{m\dot{n} - n\dot{m}}{m^2 + n^2}\right),$$

veya $n \neq 0$ için

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\cos \left(\int m dt\right) \gamma - \sin \left(\int m dt\right) \mu, \mp \sin \left(\int m dt\right) \gamma \mp \cos \left(\int m dt\right) \mu\right)$$

bir Legendre immersiyondur ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\pm n \sin \left(\int m dt \right), n \cos \left(\int m dt \right) \right)$$

olarak verilir.

İspat. Kabul edelim ki, γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çifti olsun. Bu durumda Tanım 4.9. dan, bir $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır öyle ki her $t, t_* \in I$ için

$$\gamma_*(t_*) = \cos \theta(t) \gamma(t) + \sin \theta(t) \mu(t), \quad (4.45)$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi, (4.45) in t ye göre türevi alınıp (2.5) formülleri kullanılırsa,

$$m_* \mu_* \frac{dt_*}{dt} = -\sin \theta (m + \dot{\theta}) \gamma - n \sin \theta \nu + \cos \theta (m + \dot{\theta}) \mu \quad (4.46)$$

bulunur. Buna göre, (4.46) eşitliğininin μ vektörü ile iç çarpımı alınıp Tanım 4.9. dan $\mu_* \perp \mu$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\cos \theta (m + \dot{\theta}) = 0 \quad (4.47)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

Durum 1. (4.47) de $\cos \theta = 0$ ise $\sin \theta = \pm 1$ olur. Buna göre, (4.45) ve (4.46) eşitlikleri kullanılırsa

$$\gamma_* = \pm \mu, \quad (4.48)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = \mp m \gamma \mp n \nu \quad (4.49)$$

bulunur. (4.49) un kendisi ile iç çarpımı alınırsa, genelliği bozmadan

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = \sqrt{m^2 + n^2}, \quad (4.50)$$

ve buradan

$$\mu_* = \frac{\mp m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{\mp n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \quad (4.51)$$

elde edilir. Böylece $\nu_* = \mu_* \times \gamma_*$ olup (4.48) ve (4.51) eşitlikleri kullanılırsa

$$\nu_* = -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\nu \quad (4.52)$$

bulunur. Ayrıca, gerekli hesaplardan sonra,

$$n_* \frac{dt_*}{dt} = \pm \frac{m\dot{n} - n\dot{m}}{m^2 + n^2} \quad (4.53)$$

olarak bulunur. Son olarak, (4.48), (4.51) ve (4.52) kullanılıp (2.5) formülleri göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \gamma_*, \nu_* \rangle &= \left\langle \pm \mu, -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\nu \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\gamma_*), \nu_* \right\rangle &= \frac{dt}{dt_*} \left\langle \mp m\gamma \mp n\nu, -\frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\nu \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca (γ, ν) bir Legendre immersiyon olup (4.50) ve (4.53) ten

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\sqrt{m^2 + n^2}, \pm \frac{m\dot{n} - n\dot{m}}{m^2 + n^2} \right) \neq (0, 0)$$

bulunur. Böylece,

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\pm \mu, \frac{-n}{\sqrt{m^2 + n^2}}\gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}\nu \right) \quad (4.54)$$

bir Legendre immersiyondur.

Durum 2. Eğer (4.47) de $m + \dot{\theta} = 0$ ise

$$\theta = - \int m dt$$

olur. Buna göre, (4.45) ve (4.46) eşitlikleri kullanılarak

$$\gamma_* = \cos \left(\int m dt \right) \gamma - \sin \left(\int m dt \right) \mu, \quad (4.55)$$

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = n \sin \left(\int m dt \right) \nu. \quad (4.56)$$

elde edilir. (4.56) eşitliğinin kendisi ile iç çarpımı alınırsa, genelliği bozmadan

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = \pm n \sin \left(\int m dt \right), \quad (4.57)$$

ve buradan

$$\boldsymbol{\mu}_* = \pm \boldsymbol{\nu} \quad (4.58)$$

olarak bulunur. O halde, (4.55) ve (4.58) eşitlikleri kullanılırsa,

$$\boldsymbol{\nu}_* = \boldsymbol{\mu}_* \times \boldsymbol{\gamma}_* = \mp \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\gamma} \mp \cos \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\mu}, \quad (4.59)$$

elde edilir. Ayrıca, gerekli hesaplardan sonra,

$$n_* \frac{dt_*}{dt} = n \cos \left(\int m dt \right) \quad (4.60)$$

şeklinde bulunur. Son olarak, (4.55), (4.58) ve (4.59) kullanılıp (2.5) formülleri gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_* \rangle &= \left\langle \cos \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\gamma} - \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\mu}, \mp \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\gamma} \mp \cos \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\mu} \right\rangle = 0, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\boldsymbol{\gamma}_*), \boldsymbol{\nu}_* \right\rangle &= \left\langle n \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\nu}, \mp \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\gamma} \mp \cos \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\mu} \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

dır. Ayrıca $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ bir Legendre immersiyon olup $n \neq 0$ şartı altında (4.57) ve (4.60) dan

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\pm n \sin \left(\int m dt \right), n \cos \left(\int m dt \right) \right) \neq (0, 0)$$

elde edilir. Buna göre, $n \neq 0$ olmak üzere,

$$(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*) = \left(\cos \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\gamma} - \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\mu}, \mp \sin \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\gamma} \mp \cos \left(\int m dt \right) \boldsymbol{\mu} \right) \quad (4.61)$$

bir Legendre immersiyondur.

Tersine, $(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*)$ küresel Legendre immersiyonu, (4.54) veya (4.61) eşitlikleri ile tanımlansın. Bu durumda, Tanım 4.9. dan ispat tamamdır.

O halde, $\boldsymbol{\gamma}$ bir küresel frontal olması halinde, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 4.11. $(\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\nu})$ ve $(\boldsymbol{\gamma}_*, \boldsymbol{\nu}_*)$ küresel Legendre eğrilerinin eğrilikleri sırasıyla, (m, n) ve (m_*, n_*) olsun. Bu durumda $\boldsymbol{\gamma}_*$ küresel frontalı, $\boldsymbol{\gamma}$ küresel frontalının üçüncü ortogonal-tip

Legendre eğri çiftidir gerek ve yeter şart

$$(\gamma_*, \nu_*) = \left(\cos \left(\int m dt \right) \gamma - \sin \left(\int m dt \right) \mu, \mp \sin \left(\int m dt \right) \gamma \mp \cos \left(\int m dt \right) \mu \right)$$

bir Legendre eğridir ve eğriliği

$$\left(m_* \frac{dt_*}{dt}, n_* \frac{dt_*}{dt} \right) = \left(\pm n \sin \left(\int m dt \right), n \cos \left(\int m dt \right) \right)$$

olarak verilir.

4.4. Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çiftleri İçin Sonuçlar

Sonuç 4.12. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre immersiyon olsun. O zaman, γ küresel frontunun evolütü, γ nın bir ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir.

İspat. Tanım 2.53. ve Teorem 4.7. den açıktır.

Sonuç 4.13. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre immersiyon olsun. O zaman, γ küresel frontunun involütü, γ nın bir üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir.

İspat. Tanım 2.54. ve Teorem 4.10. dan açıktır.

Sonuç 4.14. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre eğri (veya Legendre immersiyon) olsun. Bu durumda,

$$(\gamma_*, \nu_*) : I \rightarrow \Delta, \quad (\gamma_*, \nu_*) = (\nu, \gamma)$$

ise γ_* küresel frontalı (veya küresel frontu), γ frontalının (veya frontunun) hem birinci hem de ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir.

İspat. Teorem 4.4. ve Teorem 4.7. ile Teorem 4.5. ve Teorem 4.8. den açıktır.

Sonuç 4.15. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ bir küresel Legendre immersiyon olsun. Bu durumda,

$$(\gamma_*, \nu_*) : I \rightarrow \Delta, \quad (\gamma_*, \nu_*) = \left(\mu, \frac{-n}{\sqrt{m^2 + n^2}} \gamma + \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}} \nu \right)$$

ise γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun hem birinci hem de üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir.

İspat. Teorem 4.4. ve Teorem 4.10. dan açıktır.

Sonuç 4.16. $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$, Legendre eğriliği (m, n) olan bir küresel Legendre immersiyon ve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ regüler küresel frontunun Frenet takımı $\{t, n, b, \kappa, \tau\}$ olsun. Bu durumda,

- (i) Eğer $(\gamma_*, \nu_*) = (\pm t, -b)$ ise γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun hem birinci hem de üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir ve

$$\frac{n_*}{m_*} = \pm \frac{\tau}{\kappa}$$

eşitliği sağlanır.

- (ii) Eğer $(\gamma_*, \nu_*) = (b, \pm t)$ ise γ_* küresel frontu, γ küresel frontunun ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çiftidir ve

$$\frac{m_*}{n_*} = \mp \frac{\tau}{\kappa}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (i) Teorem 3.1. ve Sonuç 4.15. ten açıktır. (ii) Teorem 3.1. ve Teorem 4.7. den açıktır.

4.5. Bazı Ortogonal-Tip Legendre Eğri Çifti Örnekleri

Bu alt bölümde, $\mathbb{S}^2$ de bir küresel front veya frontalın ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri için bazı örnekler verildi.

Örnek 4.17. $\mathbb{S}^2$ de bir küresel helis olan

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{5}(-3 \cos 4t - 2 \cos 6t), \frac{1}{5}(-3 \sin 4t - 2 \sin 6t), \frac{2}{5}\sqrt{6} \sin t \right)$$

küresel frontu (Şekil 4.1) ve yine bir küresel helis olan

$$\nu(t) = \left(\frac{1}{5}(2 \sin 6t - 3 \sin 4t), \frac{1}{5}(3 \cos 4t - 2 \cos 6t), \frac{2}{5}\sqrt{6} \cos t \right)$$

duali ile birlikte tanımlanan (γ, ν) , Legendre eğriliği

$$(m(t), n(t)) = (-2\sqrt{6} \cos t, 2\sqrt{6} \sin t),$$

olan Δ üzerinde bir küresel Legendre immersiyondur. Ayrıca,

$$\mu(t) = \gamma(t) \times \nu(t) = \left(\frac{-2\sqrt{6}}{5} \sin(5t), \frac{2\sqrt{6}}{5} \cos(5t), -\frac{1}{5} \right)$$

parametrizasyonu ile belli olan μ bir çemberdir. Bu durumda,

- $(\gamma_*, \nu_*) = (\nu, \gamma)$ küresel Legendre immersiyonu, (γ, ν) nin hem birinci hem de ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

$$(m_*(t), n_*(t)) = (-2\sqrt{6} \sin t, 2\sqrt{6} \cos t)$$

dir. Burada, γ_* küresel frontu da bir küresel helistir (Şekil 4.2(a)).

- $(\gamma_*, \nu_*) = \left(\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} \gamma + \frac{-m}{\sqrt{m^2+n^2}} \nu, \mu \right)$ küresel Legendre immersiyonu, (γ, ν) nin ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

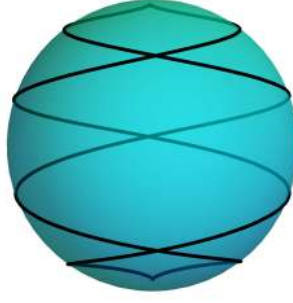
$$(m_*(t), n_*(t)) = (1, 2\sqrt{6})$$

dir. Burada, γ_* küresel frontu bir çemberdir (Şekil 4.2(b)).

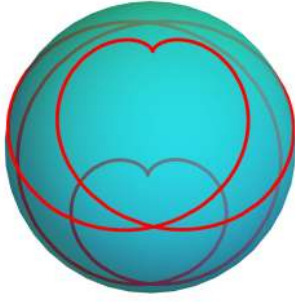
- $(\gamma_*, \nu_*) = (\cos(\int m dt) \gamma - \sin(\int m dt) \mu, \sin(\int m dt) \gamma + \cos(\int m dt) \mu)$ küresel Legendre eğrisi, (γ, ν) nin üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

$$(m_*(t), n_*(t)) = (2\sqrt{6} \sin(2\sqrt{6} \sin t) \sin t, 2\sqrt{6} \cos(2\sqrt{6} \sin t) \sin t)$$

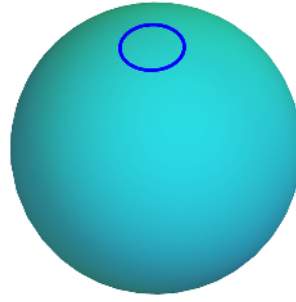
dir. Burada, γ_* küresel frontalı bir küresel slant helistir (Şekil 4.2(c)).



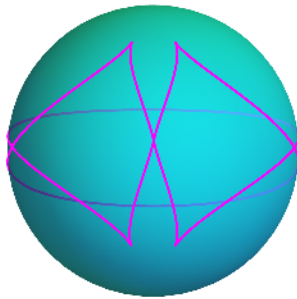
Şekil 4.1: Bir küresel helis olan γ küresel frontu



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.2: γ nın sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü ortogonal-tip Legendre eğri çiftleri

Örnek 4.18. $\mathbb{S}^2$ de bir küresel slant helis olan

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (-2 \sin(\sqrt{2}t) \sin(\sin t) \cos t + \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \sin(\sin t) \sin t - \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \cos(\sin t)) \\ \frac{1}{2} (\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \sin(\sin t) \sin t + 2 \cos(\sqrt{2}t) \sin(\sin t) \cos t - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \cos(\sin t)) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\sin t) \sin t + \cos(\sin t)) \end{pmatrix}$$

küresel frontalı (Şekil 4.3) ve yine bir küresel slant helis olan

$$\nu(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (2 \sin(\sqrt{2}t) \cos(\sin t) \cos t - \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \sin(\sin t) - \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \cos(\sin t) \sin t) \\ -\frac{1}{2} \cos(\sin t) (\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \sin t + 2 \cos(\sqrt{2}t) \cos t + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \tan(\sin t)) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos(\sin t) \sin t - \sin(\sin t)) \end{pmatrix}$$

duali ile birlikte tanımlanan (γ, ν) , Legendre eğriliği

$$(m(t), n(t)) = (-\cos(\sin t) \sin t, -\sin(\sin t) \sin t),$$

olan Δ üzerinde bir küresel Legendre eğrisidir. Ayrıca,

$$\mu(t) = \gamma(t) \times \nu(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (-\sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) \cos t - 2 \sin(\sqrt{2}t) \sin t) \\ \frac{1}{2} (2 \cos(\sqrt{2}t) \sin t - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) \cos t) \\ \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

parametrizasyonu ile belli olan μ bir küresel helistir. Bu durumda,

- $(\gamma_*, \nu_*) = (\nu, \gamma)$ küresel Legendre eğrisi, (γ, ν) nin hem birinci hem de ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

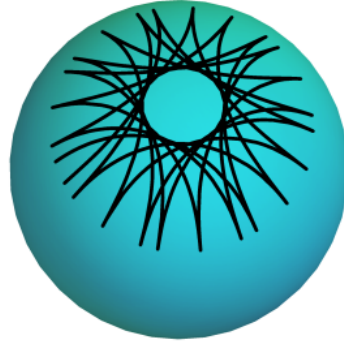
$$(m_*(t), n_*(t)) = (\sin(\sin t) \sin t, \cos(\sin t) \sin t)$$

dır (Şekil 4.4(a)).

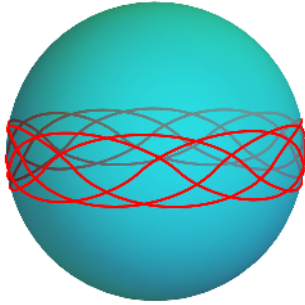
- $\theta(t) = \cos t$ için $(\gamma_*, \nu_*) = (\cos \theta \gamma + \sin \theta \nu, \mu)$ küresel Legendre eğrisi, (γ, ν) nin ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

$$(m_*(t), n_*(t)) = (-\sin t, -\cos(\sin t + \cos t) \sin t)$$

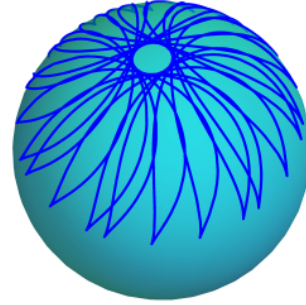
dır (Şekil 4.4(b)).



Şekil 4.3: Bir küresel slant helis olan γ küresel frontalı



(a)



(b)

Şekil 4.4: γ nın sırasıyla hem birinci hem ikinci ortogonal-tip ve sadece ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti

Örnek 4.19. $\mathbb{S}^2$ de $t = 0$ noktasında singüler olan

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{10} + t^8 + 1}} (1, t^4, t^5),$$

küresel frontalı (Şekil 4.5) ve onun

$$\nu(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{10} + 25t^2 + 16}} (t^5, -5t, 4)$$

duali ile birlikte tanımlanan (γ, ν) , Legendre eğriliği

$$(m(t), n(t)) = \left(-\frac{t^3 \sqrt{t^{10} + 25t^2 + 16}}{t^{10} + t^8 + 1}, \frac{20\sqrt{t^{10} + t^8 + 1}}{t^{10} + 25t^2 + 16} \right),$$

olan Δ üzerinde bir küresel Legendre eğrisidir. Ayrıca,

$$\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{(t^{10} + 25t^2 + 16)(t^{10} + t^8 + 1)}} (t^4(5t^2 + 4), -4 + t^{10}, -t(t^8 + 5))$$

olarak verilir. Bu durumda,

- $(\gamma_*, \nu_*) = (\nu, \gamma)$ küresel Legendre eğrisi, (γ, ν) nin hem birinci hem de ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

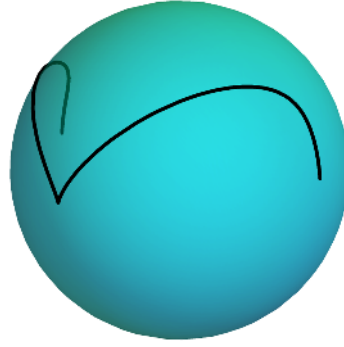
$$(m_*(t), n_*(t)) = \left(-\frac{20\sqrt{t^{10} + t^8 + 1}}{t^{10} + 25t^2 + 16}, \frac{t^3 \sqrt{t^{10} + 25t^2 + 16}}{t^{10} + t^8 + 1} \right)$$

dır (Şekil 4.6(a)).

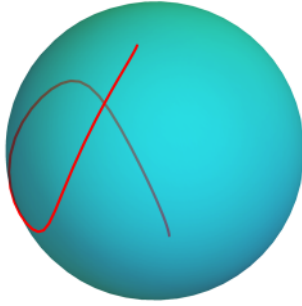
- $\theta(t) = \arctan t$ için $(\gamma_*, \nu_*) = (\cos \theta \gamma + \sin \theta \nu, \mu)$ küresel Legendre eğrisi, (γ, ν) nin ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti olup Legendre eğriliği

$$(m_*(t), n_*(t)) = \left(\frac{1}{t^2 + 1}, \frac{-t}{\sqrt{t^2 + 1}} \left(\frac{\sqrt{t^{10} + 25t^2 + 16}t^2}{t^{10} + t^8 + 1} + \frac{20\sqrt{t^{10} + t^8 + 1}}{t^{10} + 25t^2 + 16} \right) \right)$$

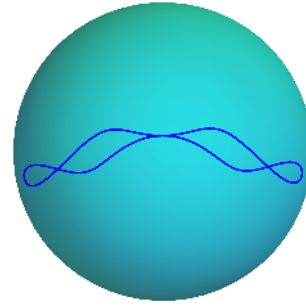
dır (Şekil 4.6(b)).



Şekil 4.5: γ küresel frontalı



(a)



(b)

Şekil 4.6: γ nın sırasıyla hem birinci hem ikinci ortogonal-tip ve sadece ikinci ortogonal-tip Legendre eğri çifti

5. PARALEL-TİP LEGENDRE EĞRİ ÇİFTLERİ

Bu bölümde, bir $(\gamma, \nu) : I \rightarrow \Delta$ küresel Legendre eğrisinin $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^2$ küresel frontalının Legendre çatısı yardımıyla, (γ, ν) nin paralel-tip Legendre eğri çiftleri tanımlandı. Fakat, Δ üzerinde (γ, ν) küresel Legendre eğrisinin ve dolayısıyla $\mathbb{S}^2$ de γ küresel frontalının Legendre çatısına göre paralel-tip Legendre eğri çiftinin olmadığı gösterildi.

Tanım 5.1. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğrilerinin sırasıyla, γ ve γ_* küresel frontalının Legendre çatıları, $\{\gamma, \nu, \mu\}$ ve $\{\gamma_*, \nu_*, \mu_*\}$ olsun. Bu durumda, Legendre çatılarının karşılıklı iki bileşeni, γ ve γ_* eğrilerinin karşılıklı noktalarında paralel ise γ_* küresel frontalına, γ küresel frontalının paralel-tip Legendre eğri çifti denir ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ da paralel-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Şimdi, üç çeşit olarak tanımlanan paralel-tip Legendre eğri çiftlerini verelim.

Tanım 5.2. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğriler olsun. Eğer γ ve γ_* küresel frontallarının karşılıklı noktalarındaki Legendre çatılarına göre γ ve γ_* vektörleri paralel ise γ_* , γ nin birinci paralel-tip Legendre eğri çifti ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ da birinci paralel-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Teorem 5.3. γ küresel frontalının, birinci paralel-tip Legendre eğri çifti yoktur.

İspat. Kabul edelim ki, γ_* küresel frontalı, γ nin birinci paralel-tip Legendre eğri çifti olsun. Bu durumda, Tanım 5.2. den bir sıfırdan farklı λ sabiti vardır öyle ki her $t, t_* \in I$ için

$$\gamma_*(t_*) = \lambda \gamma(t), \quad (5.1)$$

dir. Şimdi, (5.1) in kendisi ile iç çarpımı alınıp γ_* ve γ nin $\mathbb{S}^2$ de olduğu göz önüne alınırsa

$$\lambda = \pm 1,$$

elde edilir. O halde $\gamma_* = \pm \gamma$ olup ispat tamamdır.

Tanım 5.4. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğriler olsun. Eğer γ ve γ_* küresel frontallarının karşılıklı noktalarındaki Legendre çatılarına göre ν ve ν_* vektörleri paralel ise γ_* , γ nin ikinci paralel-tip Legendre eğri çifti ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ da ikinci paralel-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Teorem 5.5. γ küresel frontalının, ikinci paralel-tip Legendre eğri çifti yoktur.

İspat. Kabul edelim ki, γ_* küresel frontalı, γ nın ikinci paralel-tip Legendre eğri çifti olsun. Bu durumda, Tanım 5.4. ten bir $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır öyle ki her $t, t_* \in I$ için

$$\gamma_*(t_*) = \cos \theta(t) \gamma(t) + \sin \theta(t) \nu(t), \quad (5.2)$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi, (5.2) nin t ye göre türevi alınıp (2.5) Legendre Frenet tipi formülleri kullanılırsa

$$m_* \mu_* \frac{dt_*}{dt} = -(\dot{\theta} \sin \theta) \gamma + (\dot{\theta} \cos \theta) \nu + (m \cos \theta + n \sin \theta) \mu \quad (5.3)$$

bulunur. Ayrıca kabulümüzden, $\mathbb{S}^2$ de ν_* ve ν vektörleri paralel olduğundan

$$\nu_* = \pm \nu \quad (5.4)$$

elde edilir. Bu durumda, (5.3) eşitliğinin ν ile iç çarpımı alınıp (5.4) göz önüne alınırsa

$$\dot{\theta} \cos \theta = 0 \quad (5.5)$$

bulunur. Ayrıca, (5.2), (5.4) ve (5.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle \gamma_*, \nu_* \rangle &= \sin \theta, \\ \left\langle \frac{d}{dt_*}(\gamma_*), \nu_* \right\rangle &= \frac{dt}{dt_*} (\dot{\theta} \cos \theta) = 0, \end{aligned}$$

elde edilir. O halde, (γ_*, ν_*) bir küresel Legendre eğrisi olduğundan $\sin \theta = 0$ ve böylece $\cos \theta = \pm 1$ olmalıdır. Sonuç olarak, (5.2) eşitliğinden $\gamma_* = \pm \gamma$ olup ispat tamamdır.

Tanım 5.6. (γ, ν) ve (γ_*, ν_*) küresel Legendre eğriler olsun. Eğer γ ve γ_* küresel frontallarının karşılıklı noktalarındaki Legendre çatılarına göre μ ve μ_* vektörleri paralel ise γ_* , γ nın üçüncü paralel-tip Legendre eğri çifti ve $\{(\gamma, \nu), (\gamma_*, \nu_*)\}$ da üçüncü paralel-tip küresel Legendre çifti olarak adlandırılır.

Teorem 5.7. γ küresel frontalının, üçüncü paralel-tip Legendre eğri çifti yoktur.

İspat. Kabul edelim ki, γ_* küresel frontalı, γ nın üçüncü paralel-tip Legendre eğri çifti olsun. Bu durumda, Tanım 5.6. dan bir $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu vardır öyle ki her $t, t_* \in I$ için

$$\gamma_*(t_*) = \cos \theta(t) \gamma(t) + \sin \theta(t) \mu(t), \quad (5.6)$$

eşitliği yazılabilir. Şimdi, (5.6) nın t ye göre türevi alınıp (2.5) Legendre Frenet tipi formülleri kullanılırsa

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \mu_* = -\sin \theta (m + \dot{\theta}) \gamma - n \sin \theta \nu + \cos \theta (m + \dot{\theta}) \mu \quad (5.7)$$

elde edilir. (5.7) eşitliğinin γ_* vektörü ile vektörel çarpımı alınıp (5.6) kullanılırsa

$$m_* \frac{dt_*}{dt} \nu_* = (-n \sin^2 \theta) \gamma + (m + \dot{\theta}) \nu + (n \sin \theta \cos \theta) \mu \quad (5.8)$$

bulunur. Ayrıca kabulümüzden, $\mathbb{S}^2$ de μ_* ve μ vektörleri paralel olduğundan

$$\mu_* = \pm \mu \quad (5.9)$$

elde edilir. Bu durumda, (5.8) eşitliğinin μ vektörü ile iç çarpımı alınıp (5.9) göz önüne alınırsa

$$n \sin \theta \cos \theta = 0 \quad (5.10)$$

eşitliği elde edilir. Bu durumda;

Durum 1. Eğer (5.10) da $n = 0$ ise (5.7) ve (5.8) den

$$m_* \frac{dt_*}{dt} = m + \dot{\theta}$$

ve buradan

$$\mu_* = -\sin \theta \gamma + \cos \theta \mu, \quad (5.11)$$

$$\nu_* = \nu$$

bulunur. O halde, (5.9) ve (5.11) eşitliklerinden $\cos \theta = \pm 1$ ve $\sin \theta = 0$ olmalıdır. Böylece, (5.6) eşitliğinden $\gamma_* = \pm \gamma$ elde edilir. Bu durum kabulümüz ile bir çelişkidir.

Durum 2. Eğer (5.10) da $\sin \theta = 0$ ise $\cos \theta = \pm 1$ olur. O halde, (5.6) eşitliğinden $\gamma_* = \pm \gamma$ elde edilir. Bu durum kabulümüz ile bir çelişkidir.

Durum 3. Eğer (5.10) da $\cos \theta = 0$ ise $\sin \theta = \pm 1$ olur. Buna göre, (5.6) eşitliğinden

$$\gamma_* = \pm \mu \quad (5.12)$$

elde edilir. Buna göre, (5.12) nin μ_* vektörü ile iç çarpımından

$$\langle \mu_*, \mu \rangle = 0$$

elde edilir. Bu durum, (5.9) ile bir çelişkidir.

Sonuç olarak, Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 den ispat tamamdır.

6. TARTIŞMA VE SONUÇ

Üç boyutlu Öklidyen uzayda eğrilerin singüler noktalarında, eğrilik ve burulma fonksiyonları tanımsız olup Frenet çatısı da iyi tanımlı değildir. Bu durum doğal olarak, birim küre üzerinde singüler noktalara sahip küresel eğriler içinde geçerlidir. Yani bir küresel eğrinin singüler noktasında geodezik eğrilik fonksiyonu tanımsızdır. Buna rağmen, küresel eğri boyunca singüler noktalarda da iyi tanımlı olan bir hareketli çatı elde etmek mümkündür. Bu çatı, bir küresel Legendre eğrinin (veya Legendre immersiyonun) küresel frontalı (veya küresel frontu) boyunca tanımlanan Legendre çatısıdır.

Bu anlamda regüler veya singüler küresel eğriler olarak küresel frontal veya küresel frontların Legendre çatısına göre yeni eğriler tanımlamak ve araştırmak ilk akla gelen problemdir. Bu tezde, klasik diferensiyel geometride regüler eğrilerin eğri çiftlerinden (involüt-evolüt, Bertrand, Mannheim, vs.) ilham alınarak, singüler küresel eğriler olarak birim kürede front veya frontal boyunca Legendre çatısına göre bir küresel Legendre eğrinin ortogonal-tip ve paralel-tip Legendre eğri çiftleri tanımlandı. Özellikle, ortogonal-tip Legendre eğri çiftlerinin Legendre eğrilğine göre karakterizasyonlar elde edildi. Ayrıca, paralel-tip Legendre eğri çiftlerinin olmadığı ispatlandı. Böylece literatüre, singüler küresel eğrilerin yeni eğri çiftleri kazandırıldı.

Tezde kullanılan teknik rahatlıkla, iki boyutlu hiperbolik uzay veya de-Sitter uzay üzerindeki singüler eğrilere de uygulanabilir. Dahası, yüksek boyutlu uzaylarda genelleştirilmiş ortogonal-tip Legendre eğri çiftlerini tanımlamak ve geometrik özelliklerini incelemek de ayrı bir araştırma konusu olacaktır.

KAYNAKLAR

- [1]. Arnold, V. I., 1995, The geometry of spherical curves and quaternion algebra, *Russian Math. Surveys*, 50(1), 1-68.
- [2]. Bruce, J.W., Giblin, P.J., 1992, *Curves and singularities. A geometrical introduction to singularity theory*, Second edition, Cambridge University Press, Cambridge.
- [3]. Fukunaga, T., Takahashi, M., 2013, Existence and uniqueness for Legendre curves, *J. Geom*, 104, 297-307.
- [4]. Fukunaga, T., Takahashi, M., 2014, Evolutes of fronts in the Euclidean plane, *J.Singularity*, 10, 92-107.
- [5]. Fukunaga, T., Takahashi, M., 2016, Involutes of fronts in the Euclidean plane, *Beitr Algebra Geom*, 57, 637-653.
- [6]. Fukunaga, T., Takahashi, M., 2015, Evolutes and involutes of frontals in the Euclidean plane, *Demonstratio Mathematica*, 48(2), 147-166.
- [7]. Gibson, C.G., 1979, *Singular points of smooth mappings*, *Research Notes in Mathematics*, 25, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, London.
- [8]. Kahraman, T., 2020, Frontal partner curves on unit sphere S^2 , *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 36(8), 961-968.
- [9]. Li, E., Pei, D., 2020, Involute-evolute and pedal-contrapedal curve pairs on S^2 , *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 1-15.
- [10]. Yu, H., Pei, D., Cui, X., 2015, Evolutes of fronts on Euclidean 2-sphere, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 8, 678-686.
- [11]. Li, Y., Pei, D., 2016, Pedal curves of fronts in the sphere, *J. Nonlinear Sci. Appl.*, 9, 836-844.
- [12]. Takahashi, M., 2016, Legendre curves in the unit spherical bundle over the unit sphere and evolutes, *Contemporary Mathematics*, 675, 337-355.

- [13]. Uribe-Vargas, R., 2005, Theory of fronts on the 2-sphere and the theory of space curves, *J. Math. Sci.*, 126, 1344-1353.
- [14]. Liu, H., Wang, F., 2008, Mannheim partner curve in 3-space, *Journal of Geometry*, 88 (2008), 120-126.
- [15]. Bertrand, J., 1850, Mémoire sur la theories de courbes a double courbure, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 15 (1850), 332-350.
- [16]. Hsiung, C. C., 1981, *A First Course in Differential Geometry*, International Press.
- [17]. Lancret, M. A., 1806, Memoire sur less courbes a double courbure, *Memoires presentes a l'Institut*, 1, 416-454.
- [18]. Hacısalihoğlu, H., 2000, *Diferensiyel Geometri (1. Cilt)*, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Ankara.
- [19]. Sabuncuoğlu, A., 2010, *Diferensiyel Geometri (4.Baskı)*, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
- [20]. Izumiya, S., Takeuchi, N., 2004, New special curves and developable surfaces, *Turkish J. Math.*, 28, 153-163.
- [21]. Do Carmo, M.P., 2016, *Differential geometry of curves and surfaces: revised and updated second edition*, Courier Dover Publications.
- [22]. O'Neill, B., 2006, Elementary Differential Geometry (Revised Second Edition), *Elsevier Academic Press*, USA.
- [23]. Millman, R.S., Parker G.D., 1977, *Elements of Differential Geometry*, Prentice-Hall Inc.
- [24]. Struik, D. J., 1988, *Lectures on Classical Differential Geometry (2nd Edition)*, Dover Publications Inc.
- [25]. Gray, A., Abbena, E., Salamon, S., 2006, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica (3rd. Edition)*, Taylor-Francis Inc.
- [26]. Karger, A., Novak, J., 1985, *Space Kinematics and Lie Groups*, Gordon and Breach Science Publishers.
- [27]. Camci, C., Kula, L., Altınok, M., 2013, On spherical slant helices in Euclidean 3-space, *arXiv preprint arXiv:1308.5532*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Melek DEMİR
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Gazi Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölüm	Matematik
Mezuniyet Yılı	2013

Yüksek Lisans	
Üniversite	Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi
Enstitü	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik
Programı	Tezli Yüksek Lisans
Mezuniyet Yılı	2022

Doktora	
Üniversite	
Enstitü	
Anabilim Dalı	
Programı	
Mezuniyet Yılı	

Makale ve Bildiriler
Mak, M. and Demir, M., <i>Some Special Legendre Mates of Spherical Legendre Curves</i> , 8th International Geometry Symposium, Malatya-Turkey, July 12-13, 2021.