



**BİRİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER  
İÇİN ULAM KARARLILIĞI**

**Nurgül ÜNAL**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**TEMMUZ 2021**

## ETİK BEYAN

Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Nurgül ÜNAL

14/07/2021

# BİRİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN ULAM KARARLILIĞI

(Yüksek Lisans Tezi)

Nurgül ÜNAL

GAZİ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2021

## ÖZET

Bu tezde gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları incelenmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıklarının tanımları verilmiş ve Hyers'ın ve Rassias'ın çalışmaları incelenmiştir. Tezimizin dördüncü bölümünde lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir. Bu bölümde Alsina ve Ger'in, Miura ve diğerlerinin, Onitsuka ve Shoji'nin ve Jung'un çalışmaları ele alınmıştır. Bu bölümde ayrıca homogen olmayan lineer diferensiyel denklemlerin ve Bernoulli diferensiyel denklemlerinin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları Wang ve diğerlerinin ve Qarawani'nin çalışmalarında incelenmiştir. Beşinci bölümde ise gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları incelenmiştir. Bu bölümde de Jung ve Brzdęk'in, Otrocol ve Ilea'nın, Tunç ve Bîçer'in, Öğrekçi'nin ve Huang ve Li'nin çalışmaları incelenmiştir.

Bilim Kodu : 20406

Anahtar Kelimeler : Gecikmeli diferensiyel denklemler, Hyers-Ulam kararlılığı, Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı

Sayfa Adedi : 85

Danışman : Prof. Dr. Adil MISIR

# ULAM STABILITY FOR FIRST ORDER DELAYED DIFFERENTIAL EQUATIONS

(M. Sc. Thesis)

Nurgül UNAL

GAZİ UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

July 2021

## ABSTRACT

In this thesis, Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of delay differential equations were investigated. In the second section, basic definitions and theorems are given. Then, the definitions of Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability are given and the articles of Hyers and Rassias are examined. In the fourth section of our thesis, Hyers-Ulam stability of linear differential equations is investigated. In this section, the works of Alsina and Ger's, Miura et al. Onitsuka and Shoji's, and Jung's are discussed. Also in this section, Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of non-homogeneous linear differential equations and Bernoulli differential equations are examined in the studies of Wang et al and Qarawani's. In the fifth chapter, Hyers-Ulam and Hyers-Ulam-Rassias stability of delay linear differential equations are examined. In this section, the articles of Jung and Brzdęk, Otrocol and Ilea, Tunç and Biçer, Öğrekçi and Huang and Li were discussed.

Science Code : 20406  
Key Words : Delay differential equations, Hyers-Ulam stability, Hyers-Ulam-Rassias stability  
Page Number : 85  
Supervisor : Prof. Dr. Adil MISIR

## TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda desteğini hiçbir zaman esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Adil MISİR'a; Prof. Dr. Mustafa Fahri AKTAŞ'a, aynı şartlara sahip olduğum yol arkadaşım Büşra AYDIN'a, hayatımın her anında yanımda olan aileme ve ailem saydığım Merve ERKAN ile Tuğba TAMİRCİ'ye teşekkür ederim.



## İÇİNDEKİLER

|                                                       | Sayfa |
|-------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                            | iv    |
| ABSTRACT.....                                         | v     |
| TEŞEKKÜR.....                                         | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                     | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR.....                          | xii   |
| 1. GİRİŞ.....                                         | 1     |
| 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR .....                     | 3     |
| 2.1. Temel Tanımlar .....                             | 3     |
| 2.1.1. Tanım .....                                    | 3     |
| 2.1.2. Tanım .....                                    | 4     |
| 2.1.3. Tanım .....                                    | 4     |
| 2.1.4. Tanım .....                                    | 5     |
| 2.1.5. Tanım .....                                    | 5     |
| 2.1.6. Tanım .....                                    | 5     |
| 2.1.7. Tanım .....                                    | 5     |
| 2.1.8. Tanım .....                                    | 6     |
| 2.1.9. Tanım .....                                    | 6     |
| 2.1.10. Tanım .....                                   | 6     |
| 2.1.11. Banach sabit nokta teoremi .....              | 6     |
| 2.1.12. Tanım .....                                   | 6     |
| 2.1.13. Tanım .....                                   | 7     |
| 3. HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM-RASSIAS KARARLILIĞI ..... | 9     |
| 3.1. Hyers-Ulam Kararlılığı .....                     | 9     |
| 3.1.1. Tanım .....                                    | 9     |

|                                                                                                   | Sayfa |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 3.1.2. Teorem .....                                                                               | 10    |
| 3.1.3. Teorem .....                                                                               | 11    |
| 3.2. Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı .....                                                         | 12    |
| 3.2.1. Teorem .....                                                                               | 12    |
| 3.2.2. Önerme .....                                                                               | 13    |
| 3.2.3. Önerme .....                                                                               | 13    |
| 3.2.4. Önerme .....                                                                               | 13    |
| 3.2.5. Önerme .....                                                                               | 14    |
| 3.3. Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı .....                                       | 14    |
| 3.3.1. Hyers-Ulam kararlılığı .....                                                               | 15    |
| 3.3.2. Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı .....                                                       | 15    |
| 4. BİRİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN<br>HYERS-ULAM ANLAMINDA KARARLILIĞI .....         | 17    |
| 4.1. $y' = y$ Formundaki Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı .....            | 17    |
| 4.1.1. Tanım .....                                                                                | 17    |
| 4.1.2. Lemma .....                                                                                | 18    |
| 4.1.3. Teorem .....                                                                               | 18    |
| 4.2. $y' = \lambda y$ Formundaki Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam<br>Kararlılığı ..... | 19    |
| 4.2.1. Tanım .....                                                                                | 19    |
| 4.2.2. Tanım .....                                                                                | 19    |
| 4.2.3. Önerme .....                                                                               | 20    |
| 4.2.4. Önerme .....                                                                               | 20    |
| 4.2.5. Teorem .....                                                                               | 20    |
| 4.2.6. Teorem .....                                                                               | 21    |
| 4.2.7. Teorem .....                                                                               | 22    |
| 4.2.8. Teorem .....                                                                               | 22    |

|                                                                                                                             | <b>Sayfa</b> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 4.2.9. Teorem .....                                                                                                         | 23           |
| 4.3. $y' - ay = 0$ Formundaki Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı.                                             | 25           |
| 4.3.1. Tanım .....                                                                                                          | 25           |
| 4.3.2. Teorem .....                                                                                                         | 26           |
| 4.4. Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığının Bir Durumu .....                         | 26           |
| 4.4.1 Tanım .....                                                                                                           | 27           |
| 4.4.2. Teorem .....                                                                                                         | 28           |
| 4.4.3. Teorem .....                                                                                                         | 28           |
| 4.5. $\varphi y' = y$ Formundaki Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı.....                                      | 30           |
| 4.5.1. Teorem .....                                                                                                         | 30           |
| 4.5.2. Teorem .....                                                                                                         | 31           |
| 4.6. Birinci Basamaktan Homogen Olmayan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı ..... | 32           |
| 4.6.1. Tanım .....                                                                                                          | 32           |
| 4.6.2. Tanım .....                                                                                                          | 32           |
| 4.6.3. Teorem .....                                                                                                         | 33           |
| 4.6.4. Tanım .....                                                                                                          | 36           |
| 4.6.5. Tanım .....                                                                                                          | 36           |
| 4.6.6. Teorem .....                                                                                                         | 36           |
| 4.6.7. Teorem .....                                                                                                         | 38           |
| 4.7. Bernoulli Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı .....                                               | 39           |
| 4.7.1. Teorem .....                                                                                                         | 39           |
| 4.7.2. Teorem .....                                                                                                         | 39           |
| 4.7.3. Teorem .....                                                                                                         | 40           |
| 4.8. Abel-Riccati Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı.....                                             | 40           |
| 4.8.1. Teorem .....                                                                                                         | 41           |

|                                                                                                                                      | Sayfa |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| 4.8.2. Teorem .....                                                                                                                  | 41    |
| 4.8.3. Teorem .....                                                                                                                  | 41    |
| 5. BİRİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL<br>DENKLEMLER İÇİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI .....                                         | 45    |
| 5.1. Gecikmeli Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Tanımı.....                                                                  | 45    |
| 5.1.1. Tanım .....                                                                                                                   | 45    |
| 5.1.2. Tanım .....                                                                                                                   | 46    |
| 5.1.3. Gecikmeli başlangıç değer problemlerinin varlığı ve tekliği.....                                                              | 47    |
| 5.1.4. Tanım .....                                                                                                                   | 48    |
| 5.2. $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$ Formundaki Gecikmeli Lineer Diferensiyel Denklemlerin<br>Hyers-Ulam Kararlılığı.....              | 48    |
| 5.2.1. Teorem .....                                                                                                                  | 49    |
| 5.2.2. Teorem .....                                                                                                                  | 53    |
| 5.3. $y'(t) = f(t, y(t), y(g(t)))$ Formundaki Gecikmeli Lineer Olmayan<br>Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı .....     | 55    |
| 5.3.1. Tanım .....                                                                                                                   | 55    |
| 5.3.2. Tanım .....                                                                                                                   | 56    |
| 5.3.3. Tanım (Picard operatörü) .....                                                                                                | 57    |
| 5.3.4. Önerme (Gronwall eşitsizliği).....                                                                                            | 57    |
| 5.3.5. Önerme (Soyut Gronwall eşitsizliği) .....                                                                                     | 58    |
| 5.3.6. Teorem .....                                                                                                                  | 58    |
| 5.3.7. Teorem .....                                                                                                                  | 62    |
| 5.3.8. Teorem .....                                                                                                                  | 64    |
| 5.3.9. Teorem .....                                                                                                                  | 65    |
| 5.3.10. Teorem .....                                                                                                                 | 65    |
| 5.3.11. Teorem .....                                                                                                                 | 66    |
| 5.4. $y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau))$ Formundaki Gecikmeli Lineer Olmayan<br>Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı ..... | 66    |

|                                                                                                                               | <b>Sayfa</b> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 5.4.1. Önerme .....                                                                                                           | 67           |
| 5.4.2. Teorem .....                                                                                                           | 67           |
| 5.4.3. Teorem .....                                                                                                           | 71           |
| 5.4.4. Teorem .....                                                                                                           | 74           |
| 5.5. $y^{(n)} = g(t)y(t - \tau) + h(t)$ Formundaki Gecikmeli Lineer Diferensiyel<br>Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı ..... | 77           |
| 5.5.1. Teorem .....                                                                                                           | 78           |
| 6. SONUÇ VE ÖNERİLER .....                                                                                                    | 81           |
| KAYNAKLAR .....                                                                                                               | 83           |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                                                | 85           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

### Simgeler

### Açıklamalar

|                |                                                      |
|----------------|------------------------------------------------------|
| $\mathbb{R}$   | Reel sayılar kümesi                                  |
| $\mathbb{R}^+$ | Negatif olmayan reel sayılar kümesi                  |
| $\mathbb{C}$   | Kompleks sayılar kümesi                              |
| $C^1(I)$       | I üzerinde sürekli türevlenebilen fonksiyonlar uzayı |
| $(X, d)$       | Metrik uzay                                          |
| $ \cdot $      | Mutlak değer                                         |
| $\ \cdot\ $    | Norm                                                 |
| $\in$          | Elemanıdır Sembolü                                   |
| $\subset$      | Alt Küme                                             |
| $\inf$         | İnfimum, Alt sınırların en büyüğü                    |
| $\sup$         | Supremum, Üst sınırların en küçüğü                   |
| $\Sigma$       | Toplam Sembolü                                       |

## 1. GİRİŞ

Çevremizdeki fiziksel olayların birçoğunu adi veya kısmi diferensiyel denklemler yardımıyla modelleyebiliriz. Adi ve kısmi diferensiyel denklemlerin analizini yaparak o fiziksel olayla ilgili sistemin gelecekteki değişimini geçmiş durumundan bağımsız kalarak hesaplarız. Gerçek hayatta fiziksel olaylar geçmiş durumundan bağımsız değildir çoğunlukla ve birçok olayda gecikmeler olmaktadır. Mesela uzaktan kontrol sistemi ile aydan ve marstan görüntüler alınmaktadır. Alınan görüntüler dünyaya gönderilmekte ve tekrar sisteme sinyal gitmektedir. Bu görüntülerin gitme ve gelmesi dünyanın uydusu ay için 2-10 saniye arasında gerçekleşirken Mars için 40 dakikada gerçekleşmektedir. Yanında sistemde 2-10 saniye veya 40 dakika gecikme olmaktadır. Gerçek hayattaki birçok olayın matematik modellemesinde bundan dolayı gecikmeli diferensiyel denklemler kullanılmaktadır. Gecikmeli diferensiyel denklemler biyolojide, ekonomide, bilgisayar ağlarında, mekanikte, nükleer reaktör fiziğinde, mühendislik sistemlerinde ve daha birçok alanda kullanılmaktadır. Gecikmeli diferensiyel denklemlerin birçok çeşidi olup bu çalışmada lineer gecikmeli diferensiyel denklemler üzerinde duracağız. Birinci basamaktan tek gecikmeli ve sabit katsayılı gecikmeli lineer diferensiyel denklemine bir örnek olarak

$$x'(t) = ax(t) + bx(t - g(t)), \quad g(t) > 0$$

denklemini verebiliriz. Gecikmeli diferensiyel denklemlere her ne kadar 18. yüzyılın ikinci yarısında rastlansa da sistematik olarak 20. yüzyılın ikinci yarısında Myshkis, Wright ve Bellman tarafından incelenmiştir.

Bu tezde gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları incelenmiştir. Hyers-Ulam kararlılığı kavramı 1940 yılında Ulam'ın Winconsin Üniversitesi Matematik Kulübünde yaptığı meşhur konuşmada sorduğu bir soruya Hyers'in bir yıl sonra pozitif bir cevap vermesi ile ortaya çıkmıştır. Bu konuşmasında Ulam birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu problemler arasında homomorfizmlerin kararlılığı ile "Bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm hangi şartlar altında vardır?" şeklinde ifade edebileceğimiz sorusu dikkat çekicidir. Bu soruyu fonksiyonel denklemlere uyarlarsak "Bir fonksiyonel denklemin yaklaşık çözümü varsa bu çözüme yakın olan denklemin tam çözümü bulanabilir mi?" şeklinde de ele alabiliriz. Bu konuşmadan bir yıl sonra 1941 yılında Hyers, bu soruya  $G_1$  ve  $G_2$ 'nin Banach

uzayı olduğu koşullarda cevap vermiştir. Hyers, her  $x, y \in E$  ( $E$  Banach uzayı) için  $f: E \rightarrow E'$  dönüşümünün  $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| < \delta$  eşitsizliği sağladığı durumda her  $\varepsilon > 0$  ve  $\delta > 0$  için  $\|f(x) - l(x)\| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan  $l(x)$  lineer dönüşümü olduğunu göstermiştir. Hyers'in bu cevabından sonra bu yaklaşım Hyers-Ulam kararlılığı olarak bilinmektedir. 1986 yılında John M. Rassias'ın Hyers-Ulam kararlılığı ile ilgili makalesinde Hyers-Ulam kararlılığını daha genişletmiş ve çalışmasındaki koşulları sağlayan denklemlere Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararludur denilmiştir.

Tezin ikinci bölümde tezde kullandığımız temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Üçüncü bölümde Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları tanımlanmış ve Hyers'in ve Rassias'ın çalışmaları incelenmiştir. Dördüncü bölümde lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir ve bu bölümde Alsina ve Ger'in, Miura ve diğerlerinin, Onitsuka ve Shoji'nin ve Jung'un çalışmaları ele alınmıştır. Beşinci bölümde ise birinci basamaktan gecikmeli lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları incelenmiştir ve bu bölümde de Jung ve Brzdek'in, Otrocol ve Ilea'nın, Tunç ve Biçer'in, Öğrekçi'nin ve Huang ve Li'nin çalışmaları incelenmiştir.

## 2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız lineer uzay, metrik uzayı, Banach uzayı, metrik grup, homomorfizma gibi temel tanım ve kavramları vereceğiz.

### 2.1. Temel Tanımlar

#### 2.1.1. Tanım

$X \neq \emptyset$  bir küme ve  $F$  reel veya kompleks sayılar cismi olmak üzere

$$(+): \quad \begin{array}{ccc} X \times X & \longrightarrow & X \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

ve

$$(\cdot): \quad \begin{array}{ccc} F \times X & \longrightarrow & X \\ (\alpha,x) & \mapsto & \alpha x \end{array}$$

fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlıyorsa,  $X$  kümesine  $F$  cismi üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir.

A.  $X, (+)$  işlemine göre değişmeli bir gruptur.

1.  $X, (+)$  işlemine göre kapalıdır yani her  $x, y \in X$  için  $x + y \in X$  dir.
2. Her  $x, y \in X$  için  $x + y = y + x$  dir.
3. Her  $x, y, z \in X$  için  $x + (y + z) = (x + y) + z$  dir.
4. Her  $x \in X$  için  $x + 0_X = 0_X + x = x$  olacak şekilde bir sıfır elemanı vardır ve bu tektir.
5. Her  $x \in X$  için  $x + (-x) = (-x) + x = 0_X$  olacak şekilde bir  $(-x)$  elemanı vardır ve bu elemana  $x$  in toplamaya göre tersi denir.

B.  $\alpha, \beta \in F$  olmak üzere

1.  $X, (\cdot)$  işlemine göre kapalıdır yani her  $x, y \in X$  için  $xy \in X$  dir.
2. Her  $x, y \in X$  için  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$  dir.
3. Her  $x \in X$  için  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$  dir.
4. Her  $x \in X$  için  $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$  dir.

5. Her  $x \in X$  için  $x1_F = 1_Fx = x$  olacak şekilde bir  $1_F$  elemanı vardır ve burada  $1_F$ ,  $F$  in birim elemanıdır (Bayraktar, 2006).

### 2.1.2. Tanım

$X$  boştan farklı bir küme olsun.  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , her  $x, y, z \in X$  için

M1.  $d$ , reel değerli, sonlu ve negatif olmayan

M2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

M3.  $d(x, y) = d(y, x)$

M4.  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

olacak şekilde tanımlanan fonksiyona  $X$  üzerinde bir metrik ve  $d$  ile birlikte  $X$  çiftine metrik uzay denir ve  $(X, d)$  veya  $X_d$  ile gösterilir (Çakar, 2002).

Eğer bu metrik tanımından sonlu ifadesini çıkartarak yeni bir metrik tanımlayabiliriz ve bu metriğe genelleştirilmiş metrik denir.

### 2.1.3. Tanım

$X$  üzerinde tanımlı, reel değerli,  $x \in X$  noktasındaki değeri  $\|x\|$  şeklinde gösterilen ve  $x$  ve  $y$ ,  $X$ 'de keyfi vektörler ve  $\alpha$  bir skaler olmak üzere

N1.  $\|x\| \geq 0$

N2.  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N3.  $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

N4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlayan fonksiyona  $X$  üzerinde bir norm ve  $(X, \|\cdot\|)$  ikilisine de normlu uzay denir (Çakar, 2002).

#### 2.1.4. Tanım

$X$  normlu uzayındaki her bir Cauchy dizisi  $X$  deki bir elemana yakınsıyorsa,  $X$  uzayı tamdır denir. Tam olan normlu uzaylara Banach uzayı denir (Çakar, 2002).

#### 2.1.5. Tanım

Aşağıdaki dört özelliği sağlayan  $(G, *)$  cebirsel yapısına bir grup denir.

$G_1)$  Her  $a, b \in G$  için  $a * b \in G$

$G_2)$  Her  $a, b, c \in G$  için  $(a * b) * c = a * (b * c)$

$G_3)$  Her  $a \in G$  için  $a * e = e * a = a$  olacak şekilde bir  $e \in G$  vardır.  $e$  elemanına  $G$  nin birim elemanı denir.

$G_4)$  Her  $a \in G$  için  $a * b = b * a = e$  olacak şekilde bir  $b \in G$  vardır.  $b$  elemanına  $a$  nın tersi denir ve  $a^{-1}$  şeklinde gösterilir.

#### 2.1.6. Tanım

$G$  boştan farklı bir grup olsun ve  $G$  grubu üzerinde tanımlı bir  $d$  metriği verilsin.  $(G, d)$  metrik uzayına bir metrik grup denir.

#### 2.1.7. Tanım

$(G, *)$  ve  $(H, \Delta)$  iki grup olmak üzere  $f: G \rightarrow H$  bir fonksiyon olsun. Eğer her  $a, b \in G$  için

$$f(a * b) = f(a) \Delta f(b)$$

eşitliğini sağlıyorsa  $f$  fonksiyonuna  $G$  den  $H$  ye bir homomorfizma denir.  $f$  birebir ve örten ise  $f$  fonksiyonuna izomorfizma denir.

## 2.1.8. Tanım

$F = \mathbb{R}$  veya  $F = \mathbb{C}$  olmak üzere  $X, F$  üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun.

$$f: X \rightarrow F$$

operatörüne fonksiyonel denir.

## 2.1.9. Tanım

$T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm ve  $x \in X$  olsun. Eğer  $Tx = x$  ise  $x$ 'e  $T$  dönüşümünün sabit noktası denir.

## 2.1.10. Tanım

$(X, d)$  bir metrik uzayı,  $T: X \rightarrow X$  bir dönüşüm olsun. Eğer her  $x, y \in X$  için

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $0 < \alpha < 1$  sayısı varsa  $T$  dönüşümüne büzülme (veya daralma) dönüşümü denir.

## 2.1.11. Banach sabit nokta teoremi

$(X, d)$  boş olmayan bir tam metrik uzayı ve  $T: X \rightarrow X$  bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda  $T$ 'nin  $X$ 'in içerisinde  $Tx^* = x^*$  olacak şekilde bir tek  $x^*$  sabit noktası vardır.

## 2.1.12. Tanım

$i = 1, 2, \dots$  olmak üzere  $x_i$  ve  $y_i$  standart koordinatları ile verilen  $x$  ve  $y$  gibi iki nokta veya iki vektör arasındaki Chebyshev uzaklığı  $d(x, y) := \max_i |x_i - y_i|$  şeklinde tanımlanır.

Chebyshev normu ise  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$  şeklinde tanımlanır.

### 2.1.13. Tanım

$a_0(x), \dots, a_n(x)$  ve  $b(x)$  fonksiyonları  $x \in A \subseteq \mathbb{R}$  için tanımlı herhangi sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$a_n(x)y^{(n)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

formundaki diferensiyel denklemlere  $n$ . basamaktan lineer diferensiyel denklemler denir. Eğer her  $x$  için  $b(x)$  sifıra eşit ise diferensiyel denkleme homogen lineer denklem, aksi halde homogen olmayan lineer denklem denir.

$a_n(x)$  sürekli olduğundan bir  $I \subseteq A$  vardır ki her  $x \in I$  için  $a_n(x) \neq 0$  sağlanır. Dolayısıyla  $x \in I$  için lineer diferensiyel denklemi

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

şeklinde yazabiliriz. Denklemin mertebesinin bir olması hali özel olarak

$$y' + p_1(x)y = q(x)$$

şeklinde gösterilir ve bu denklemin genel çözümü

$$y(x) = e^{-\int p_1(x)dx} \left( \int q(x)e^{\int p_1(x)dx} dx + C \right)$$

olarak yazılabilir.



### 3. HYERS-ULAM VE HYERS-ULAM-RASSIAS KARARLILIĞI

Bu bölümde Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları tanımlanacaktır.

#### 3.1. Hyers-Ulam Kararlılığı

1940 yılında Ulam, Winconsin Üniversitesi Matematik Kulübünde meşhur bir konuşma yapmıştır. Bu konuşmasında Ulam birçok çözülmemiş problem sunmuştur. Bu problemler arasında homomorfizmlerin kararlılığı ile ilgili olan şu problem fonksiyonel denklemlerin kararlılık teorisinin başlangıç noktası olmuştur:

$G_1$  bir grup ve  $G_2$ ,  $d(\cdot, \cdot)$  metriği ile tanımlı bir metrik grup olsun.  $\varepsilon > 0$  sayısı verilsin. Her  $x, y \in G_1$  için  $d(h(xy), h(x)h(y)) < \delta$  eşitsizliğini sağlayan  $h: G_1 \rightarrow G_2$  fonksiyonu varsa her  $x \in G_1$  için  $H: G_1 \rightarrow G_2$ ,  $d(h(x), H(x)) < \varepsilon$  homomorfizm olacak şekilde  $\delta > 0$  sayısı var mıdır?

Başka bir deyişle bir yaklaşım homomorfizmine yaklaşan bir homomorfizm hangi şartlar altında vardır? Veya bu soruyu fonksiyonel denklemlere uyarlırsak “Bir fonksiyonel denklemin yaklaşık çözümü varsa bu çözüme yakın olan denklemin tam çözümü bulunabilir mi?” şeklinde de ele alabiliriz.

Bu konuşmadan bir yıl sonra 1941 yılında Hyers, bu soruya  $G_1$  ve  $G_2$ 'nin Banach uzayı olduğu koşullarda cevap vermiştir. Hyers'in bu cevabından sonra bu yaklaşım Hyers-Ulam kararlılığı olarak bilinmektedir.

$E$  ve  $E'$  Banach uzayları ve  $\delta$  pozitif bir sayı olsun.

##### 3.1.1. Tanım

$f: E \rightarrow E'$  dönüşümüne eğer her  $x, y \in E$  için  $\|f(x + y) - f(x) - f(y)\| < \delta$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $\delta$ -lineer denir (Hyers 1941).

Hyers, Ulam'ın problemini şu şekilde ele almıştır: “Her  $\varepsilon > 0$  ve  $\delta > 0$  için her  $f: E \rightarrow E'$   $\delta$ -lineer dönüşümüne karşılık her  $x \in E$  için  $\|f(x) - l(x)\| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan  $l(x)$  lineer dönüşümü var mıdır?” Hyers bu soruya şu teoremi ile cevap vermiştir:

### 3.1.2. Teorem

$E$  ve  $E'$  Banach uzayları ve  $f: E \rightarrow E'$  tanımlı  $\delta$ -lineer bir dönüşüm olsun. Bu durumda her  $x \in E$  için  $l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(2^n x)/2^n$  limiti vardır,  $l(x)$  lineer bir dönüşümdür ve her  $x \in E$  için  $\|f(x) - l(x)\| \leq \varepsilon$  eşitsizliği doğrudur. Bununla birlikte  $l(x)$  bu eşitsizliği sağlayan tek lineer dönüşümdür (Hyers, 1941).

### İspat

Hyers ispatında ilk olarak  $f$  dönüşümün  $\delta$ -lineer olmasını kullanarak tümevarım ile

$$\|2^{-n}f(x) - f(2^{-n}x)\| < \delta(1 - 2^{-n})$$

eşitsizliğini ispatlamıştır. Daha sonra  $n$  pozitif bir tamsayı ve  $x \in E$  olmak üzere  $q_n(x) = f(2^n x)/2^n$  dizisini tanımlamıştır.

$$\begin{aligned} q_m(x) - q_n(x) &= \frac{f(2^m x)}{2^m} - \frac{f(2^n x)}{2^n} \\ &= \frac{f(2^{m-n} 2^n x) - 2^{m-n} f(2^n x)}{2^m} \end{aligned}$$

olur ve yukarıdaki eşitsizlikten eğer  $m > n$  olursa her  $x \in E$  için

$$\|q_m(x) - q_n(x)\| < \frac{\delta(1 - 2^{m-n})}{2^m}$$

bulunur. Bu eşitsizliğe göre  $\{q_n(x)\}$  dizisi Cauchy dizisi olur ve  $E$  uzayı tam olduğu için  $l(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n(x)$  olacak şekilde bir limit fonksiyonu vardır.  $x, y, E$  uzayının herhangi iki elemanı olsun.  $f$ ,  $\delta$ -lineer olduğu için bütün pozitif  $n$  tamsayıları için

$$\|f(2^n x + 2^n y) - f(2^n x) - f(2^n y)\| < \delta(1 - 2^{-n})$$

olur. Her tarafı  $2^n$  e bölersek ve  $n$  i sonsuza götürdüğümüzde  $l(x + y) = l(x) + l(y)$  olduğunu elde ederiz. İlk eşitsizliğimizde  $x$  ile  $2^n x$  i yer değiştirirsek

$$\left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\| < \delta(1 - 2^{-n})$$

buluruz. Buradan da  $\|l(x) - f(x)\| < \delta$  bulunur.

Hyers daha sonra her  $x \in E$  için  $\|l(x) - f(x)\| < \delta$  eşitsizliğini sağlayan başka bir lineer dönüşüm almış ve bunun olmayacağını göstererek  $l(x)$  lineer dönüşümünün tekliğini ispat etmiştir (Hyers, 1941). Aşağıdaki teoreminde  $f(x)$  in sürekli olduğu durumda  $l(x)$  in de  $E$  uzayında her yerde sürekli olduğunu gösterelim.

### 3.1.3. Teorem

Eğer Teorem 3.1.2 de  $f(x)$ ,  $E$  uzayının tek bir  $y$  noktasında sürekli ise  $l(x)$  lineer dönüşümü  $E$  uzayında her yerde süreklidir (Hyers, 1941).

#### *İspat*

Bu teoremin ispatını  $l(x)$  lineer dönüşümünün sürekli olmadığı varsayarak ispatlayalım. O zaman her  $n$  tamsayısı için öyle bir  $k$  sayısı ve  $E$ 'de sıfıra yakınsayan öyle bir  $x_n$  dizisi vardır ki  $\|l(x_n)\| > 1/k$  olur.  $m$ ,  $3k\delta$ 'dan büyük bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\|l(mx_n + y) - l(y)\| = \|l(mx_n)\| > 3\delta$$

olur. Diğer yandan yeterince büyük  $n$  ler için  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(mx_n + y) = f(y)$  olduğu için

$$\begin{aligned} \|l(mx_n + y) - l(y)\| &\leq \|l(mx_n + y) - f(mx_n + y)\| + \|f(mx_n + y) - f(y)\| + \\ &\quad \|f(y) - l(y)\| < 3\delta \end{aligned}$$

bulunur. Bu da çelişkiye sebep olur ve teorem ispatlanır (Hyers, 1941).

### 3.2. Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

1986 yılında Rassias'ın, Hyers-Ulam kararlılığı ile ilgili makalesinde Hyers-Ulam kararlılığını daha genişletmiş ve çalışmasındaki koşulları sağlayan denklemlere Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır denilmiştir. Aşağıda Rassias'ın çalışması hakkında bilgiler verilmiştir.

#### 3.2.1. Teorem

$X$ ,  $\|\cdot\|_1$  normu ile tanımlı normlu lineer bir uzay ve  $Y$ ,  $\|\cdot\|_2$  normu ile tanımlı bir Banach uzayı olsun. Buna ek olarak her sabit  $x$  değeri için  $f: X \rightarrow Y$  dönüşümü  $y$ 'de sürekli olsun. Eğer her  $x, y \in X$  için

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^a \|y\|_1^b$$

eşitsizliğini ve  $0 \leq a + b < 1$  sağlayan  $a, b$  ile  $c_2 \geq 0$  varsa o zaman  $c = \frac{c_2}{2^{-2^{a+b}}}$  olmak üzere her  $x \in X$  için

$$\|f(x+y) - L(x)\|_2 \leq c \|x\|_1^{a+b}$$

olacak şekilde eşitsizliğini sağlayan  $L: X \rightarrow Y$  lineer dönüşümü vardır (Rassias, 1989). Bu denklemde  $a = b = 0$  alınırsa Hyers'in sonucu elde edilir. Rassias, bu teoremi ispatlamak için birkaç önerme vermiştir. Bunlardan ilki

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^a \|y\|_1^b$$

eşitsizliğinin genelleştirilmiş halidir. Bu eşitsizlikte eğer  $x = y$  alırsak

$$\|f(2x) - 2f(x)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^{a+b}$$

ve

$$\|f(2x)/2 - f(x)\|_2 \leq c_2 \|x\|_1^{a+b}/2$$

bulunur.

### 3.2.2. Önerme

$X$  uzayında herhangi bir  $n$  tamsayısı ve bazı  $c_2 \geq 0$  için

$$\left\| \frac{f(2^n x)}{2^n} - f(x) \right\|_2 \leq c_2 \sum_{i=0}^{n-1} 2^{i(a+b-1)-1} \|x\|_1^{a+b}$$

eşitsizliği sağlanır.

Rassias, bu önermeyi tümevarımla ispatlamıştır (Rassias, 1989).

### 3.2.3. Önerme

$\{f(2^n x)/2^n\}$  dizisi yakınsar. Rassias bir önceki önermeyi kullanarak  $\{f(2^n x)/2^n\}$  dizisinin Cauchy dizisi olduğu göstermiştir.  $Y$  uzayı tam bir uzay olduğunu için  $\{f(2^n x)/2^n\}$  dizisi bu uzay içinde yakınsar. Rassias daha sonra  $\{f(2^n x)/2^n\}$  dizisinin limitini

$$L(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(2^n x)}{2^n}$$

olarak adlandırmış ve daha sonra da her  $x, y \in X$  için  $L(x + y) = L(x) + L(y)$  ve her  $q \in \mathbb{Q}$  için  $L(qx) = qL(x)$  olduğunu göstermiştir (Rassias, 1989).

### 3.2.4. Önerme

$Y^+$  sürekli lineer fonksiyonellerin uzayı olsun.  $g \in Y^+$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in X$  ve  $x$  sabit olmak üzere  $T: t \rightarrow g(L(tx))$  veya  $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dönüşümünü ele alalım öyle ki  $T(t) = g(L(Tx))$  olsun. Bu durumda  $T$  sürekli bir dönüşümdür (Rassias, 1989).

Önermeler 3.2.2, 3.2.3 ve 3.2.4'ü birleştirdiğimizde Teorem 3.2.1 de  $L: X \rightarrow Y$  lineer dönüşümünün varlığı ispatlanmış olur. Rassias teoremdaki lineer dönüşümün tekliğini ispat etmek için teoremdaki şartları sağlayan başka bir lineer dönüşüm oluşturmuş ve çelişki olduğunu göstermiştir.

$M: X \rightarrow Y$ ,  $0 \leq a' + b' < 1$  şartını sağlayan  $a', b'$  ve  $c' \geq 0$  sabit olmak üzere her  $x \in X$  için

$$\|f(x) - M(x)\|_2 \leq c' \|x\|_1^{a'+b'}$$

eşitsizliğini sağlayan lineer bir dönüşüm olsun. Rassias, her  $x \in X$  için  $L(x) = M(x)$  olduğunu göstermek için şu önermeyi ispatlamıştır (Rassias, 1989).

### 3.2.5. Önerme

$L: X \rightarrow Y$  lineer dönüşüm,  $M: X \rightarrow Y$ ,  $0 \leq a' + b' < 1$  şartını sağlayan  $a'$  ve  $b'$  ile  $m$  tamsayı ve  $c' \geq 0$  sabit olmak üzere her  $x \in X$  için

$$\|L(x) - M(x)\|_2 \leq m^{a+b-1} c \|x\|_1^{a+b} + m^{a'+b'-1} c' \|x\|_1^{a'+b'}$$

eşitsizliği sağlanır (Rassias, 1989).

Bu önermedeki eşitsizliğe göre her  $x \in X$  için  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|L(x) - M(x)\|_2 = 0$  olur ve buradan da  $L(x)$  lineer dönüşümünün tekliği ispatlanmış olur.

Rassias'ın buradaki çözümlerine direkt yöntem denir. Burada direkt olarak eşitsizlikler kullanarak sonuca gidilmektedir. Bu yöntem Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıklarının incelenmesinde en etkili yollardan biri olup bir çok çalışmada kullanılmıştır.

Bu tez çalışmasında kullanacağımız lineer diferensiyel denklemlerin ve gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ile ilgili tanımlar aşağıdaki alt bölümde verilmiştir.

### 3.3. Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

Bu kesimde lineer diferensiyel denklemler için Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıklarının genel tanımları verilecektir.

### 3.3.1. Hyers-Ulam kararlılığı

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  reel sayılar ve  $I$  bir aralık olsun.  $y \in C^n(I, \mathbb{R})$  olsun.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve  $t \in I$  için

$$\left| y^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t) \right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlayan her  $y \in C^n(I, \mathbb{R})$  ve  $t \in I$  için

$$z^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{(k)}(t) \quad (3.1)$$

denkleminin bir  $x \in C^n(I, \mathbb{R})$  çözümü var ve  $|y(t) - x(t)| \leq c\varepsilon$ ,  $t \in I$  eşitsizliğini sağlayan bir  $c > 0$  reel sayısı varsa (3.1) diferensiyel denklemin Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir.

### 3.3.2. Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  reel sayılar ve  $I$  bir aralık olsun.  $y \in C^n(I, \mathbb{R})$ ,  $\varepsilon > 0$  ve  $\varphi \in C(I, \mathbb{R}^+)$  olsun.

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve  $t \in I$  için

$$\left| y^{(n)}(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}(t) \right| \leq \varphi(t) \quad (3.2)$$

eşitsizliği sağlayan her  $y \in C^n(I, \mathbb{R})$  ve  $t \in I$  için

$$z^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{(k)}(t) \quad (3.3)$$

denkleminin bir  $x \in C^n(I, \mathbb{R})$  çözümü var ve  $t \in I$  için  $|y(t) - x(t)| \leq c_\varphi \varphi(t)$  eşitsizliğini sağlayan bir  $c_\varphi > 0$  reel sayısı varsa (3.3) diferensiyel denklemine  $\varphi$  fonksiyonuna göre Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır denir.



## 4. BİRİNCİ BASAMAKTAN DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN HYERS-ULAM ANLAMINDA KARARLILIĞI

Bu bölümde sırasıyla birinci basamaktan değişkenlerine ayrılabilen tipten diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını denklemleri farklı başlıklar altında kategorize ederek incelenecektir. İlk olarak Obloza çalışmasında 1993 yılında diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını incelemiş, Alsina ve Ger ise 1998 yılında bu çalışmaları geliştirmiş ve Hyers-Ulam anlamında kararlılığını  $y' = y$  lineer diferensiyel denklemleri için tanımlamışlardır (Alsina and Ger, 1998). Daha sonra homogen olmayan lineer diferensiyel denklemler ve lineer diferensiyel denkleme dönüşebilen denklemler için benzer incelemeler yapılmıştır.

### 4.1. $y' = y$ Formundaki Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

Bu bölümde  $y' = y$  formundaki lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını vereceğiz.

#### 4.1.1. Tanım

Verilen bir  $\varepsilon > 0$  sayısı için  $y: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$|y' - y| < \varepsilon$$

eşitsizliği her  $t \in A$  için sağlansın. Eğer bir  $k > 0$  sayısı için

$$|y(t) - x(t)| \leq k$$

özellikliğini sağlayacak şekilde  $y' = y$  denkleminin bir  $x(t)$  çözümü bulanabiliyor ise  $y' = y$  denklemine Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir.

$y' = y$  denkleminin basit olmayan tek çözümü  $y(t) = e^t$  olduğu için Hyers-Ulam kararlılığını ispatlamak için üstel fonksiyonları kullanarak birkaç önermeden faydalanılmaktadır. Bu lemmalar şu şekildedir.

## 4.1.2. Lemma

$g: I \rightarrow \mathbb{R}$  türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

i.  $i: I \rightarrow \mathbb{R}$  herhangi bir azalmayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,  $g(t) \leq g'(t)$  eşitsizliğinin bütün  $t$ 'ler için sağlanması için gerek ve yeter şart  $g$ 'nin  $t \in I$  için

$$g(t) = i(t)e^t$$

formunda yazılmasıdır.

ii.  $d: I \rightarrow \mathbb{R}$  herhangi bir artmayan türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere,  $g(t) \geq g'(t)$  eşitsizliğinin bütün  $t$ 'ler için sağlanması için gerek ve yeter şart  $g$ 'nin  $t \in I$  için

$$g(t) = d(t)e^t$$

formunda yazılmasıdır (Alsina ve Ger, 1998).

Bu lemmalardan faydalananak aşağıdaki teoremi kolayca ispatlayabiliriz.

## 4.1.3. Teorem

Verilen bir  $\varepsilon > 0$  için  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Bütün  $t$  değerleri için

$$|y' - y| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart  $\ell, J = \{e^{-t} \mid t \in I\}$  aralığında artmayan,  $2\varepsilon$ -Lipschitz ve türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere  $y$ 'nin  $t \in I$  için

$$y(t) = \varepsilon + e^t \ell(e^{-t})$$

formunda yazılabilmesidir.

#### 4.2. $y' = \lambda y$ Formundaki Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

Banach uzayında  $y' = \lambda y$  lineer diferensiyel denklemlerinin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını inceleyelim. Miura ve diğerlerinin 2001 yılında makalesi bulunmaktadır (Miura vd., 2001). Bu makalede  $y$ , bir açık aralıktan tüm sınırlı gerçekte değerli fonksiyonların olduğu reel Banach uzayına tanımlı bir diferensiyel dönüşüm alınmış ve eğer  $\|y' - \lambda y\|_\infty \leq \varepsilon$  eşitsizliği sağlanırsa  $y' = \lambda y$  diferensiyel denkleminde bu  $y$ 'ler ile yaklaşılabileceği gösterilmiştir. Şimdi  $y' = \lambda y$  lineer diferensiyel denklemlerinin Hyers-Ulam anlamında kararlılığını inceleyelim.

Kabul edelim ki  $I, \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı bir açık aralık olsun.

##### 4.2.1. Tanım

$B$  bir Banach uzayı ve  $y, I$  dan  $B$  ye tanımlı bir dönüşüm olsun.  $\|\cdot\|_B$ ,  $B$  üzerinde tanımlı normu göstermek üzere eğer her  $t \in I$  için

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left\| \frac{y(t+s) - y(t)}{s} - y'(t) \right\|_B = 0$$

eşitliğini sağlayan  $y'(t) \in B$  varsa  $y$ 'ye türevlenebilir denir.  $y': I \rightarrow B$  dönüşümüne de  $y$ 'nin türevi denir.

##### 4.2.2. Tanım

$B$  bir Banach uzayı ve  $y: I \rightarrow B$  türevlenebilir bir dönüşüm olsun.

$$\|y' - \lambda y\|_B \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan türevlenebilir  $y$  fonksiyonu ve  $t \in I$  için

$$x' = \lambda x \text{ ve } \|y(t) - x(t)\|_B \leq k\varepsilon,$$

sağlayan bir  $x \in B$  ve  $k > 0$  varsa  $y' = \lambda y$  denkleminde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir (Miura, 2002).

$y' = \lambda y$  lineer denklemleri için  $\operatorname{Re} \lambda \neq 0$  olduğu durumda Hyers-Ulam kararlılığını aşağıdaki iki önerme ve önermelerle iki ana teorem ispatlanmıştır. Şimdi bu önermeleri verelim.

#### 4.2.3. Önerme

$B$  bir Banach uzayı  $y, I$ 'dan  $B$ 'ye türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Buna göre aşağıda verilen durumlar eşdeğerdir:

- i.  $\|y' - \lambda y\|_B \leq \varepsilon$
- ii.  $I$ 'dan  $B$ 'ye öyle bir türevlenebilir  $g$  dönüşümü vardır ki her  $t \in I$  için  $y(t) = g(t)e^{\lambda t}$  ve  $\|g'(t)\|_B \leq \varepsilon e^{-(\operatorname{Re} \lambda)t}$

sağlanır (Miura, 2002).

#### 4.2.4. Önerme

$B$  bir Banach uzayı ve  $y, I$ 'dan  $B$ 'ye türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Buna göre aşağıda verilen durumlar eşdeğerdir:

- i.  $y' = \lambda y$
- ii. Öyle bir  $g \in B$  vardır ki  $t \in I$  için  $y(t) = ge^{\lambda t}$  olur (Miura vd., 2001).

İlk başta verilecek teoremin ispatı bir topolojik uzayı için verilmiştir. Ayrıca teoremlerde  $\operatorname{Re} \lambda > 0$  için verilmiş,  $\operatorname{Re} \lambda < 0$  durumu ihmal edilmiştir.

#### 4.2.5. Teorem

$\operatorname{Re} \lambda > 0$  olsun ve  $y$  fonksiyonu da  $I$ 'dan  $\mathbb{C}$ 'ye

$$|y' - \lambda y| \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda öyle bir  $\theta \in \mathbb{C}$  vardır.  $t \in I$  için

$$|y(t) - \theta e^{\lambda t}| \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\operatorname{Re} \lambda}$$

sağlanır.

#### 4.2.6. Teorem

$\operatorname{Re} \lambda > 0$  olsun ve  $y, I$ 'dan  $A$ 'ya

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir dönüşüm olsun. Eğer  $A$  sabit fonksiyonlara sahip ise öyle bir  $\theta \in A$  vardır ki,  $t \in I$  için

$$\|y(t) - \theta e^{\lambda t}\|_{\infty} \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon}{\operatorname{Re} \lambda}$$

sağlanır.  $A$  da sabit fonksiyonlar yok ise öyle bir  $\tilde{\theta} \in A$  vardır ki,  $t \in I$  için

$$\|y(t) - \tilde{\theta} e^{\lambda t}\|_{\infty} \leq \frac{2\sqrt{2}\varepsilon}{\operatorname{Re} \lambda}$$

sağlanır (Miura, 2002).

Sonuç

$\operatorname{Re} \lambda > 0$  olsun ve  $-\infty \leq a < \infty$  olmak üzere  $y: (a, \infty) \rightarrow A$  türevlenebilir,

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun.  $y$  fonksiyonuna Teorem 4.2.6 anlamında  $A$ 'daki bir fonksiyon ile tek şekilde yaklaşılabılır (Miura, 2002).

Genel olarak, eğer  $\operatorname{Re} \lambda = 0$  ise Hyers-Ulam kararlılığı sağlanmaz.

*Örnek*

$I = (0, \infty)$  ve  $y: I \rightarrow \mathbb{C}$  olsun.  $\varepsilon > 0$  ve  $t \in I$  için

$$y(t) = \varepsilon t e^{it}$$

olsun. O zaman bütün  $t \in I$  için  $|y' - iy| = \varepsilon$  eşitliği sağlanır. Bununla birlikte Hyers-Ulam kararlılığı sağlanmaz.

Bunun tersini farzedelim, yani öyle bir  $c \in \mathbb{C}$  ve  $k \geq 0$  olsun ki  $t \in I$  için

$$|y(t) - ce^{it}| \leq k\varepsilon$$

eşitsizliği sağlansın. Üçgen eşitsizliğinden her  $t \in I$  için

$$|f(t)| \leq k\varepsilon + |c|$$

eşitsizliği sağlanır.  $|y(t)| = \varepsilon t$  ve  $t \in I = (0, \infty)$  olduğu için bu da çelişkiye sebep olur.

## 4.2.7. Teorem

$-\infty < a < b < \infty$  olmak üzere  $I = (a, b)$  olsun ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  olmak üzere  $Re \lambda = 0$  olsun. Eğer  $y: I \rightarrow A$

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

şartını sağlayan türevlenebilir bir dönüşümse öyle bir  $\theta \in A$  vardır ki her  $t \in I$  için

$$\|y(t) - \theta e^{\lambda t}\|_{\infty} \leq \frac{(b-a)\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

eşitsizliği sağlanır (Miura, 2002).

## 4.2.8. Teorem

$y$  fonksiyonu  $I$ 'dan  $C(X, \mathbb{R})$ 'ya

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir bir dönüşüm olsun. O zaman öyle bir  $g \in C(X, \mathbb{R})$  vardır ki  $t \in I$  için

$$\|y(t) - e^{\lambda t} g\|_{\infty} \leq \frac{3 \varepsilon}{|\lambda|}$$

eşitsizliği sağlanır (Miura vd., 2001).

#### 4.2.9. Teorem

$y$  fonksiyonu  $I$ 'dan  $C_0(X, \mathbb{R})$ 'ya

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir bir dönüşüm olsun.  $J = \{e^{-\lambda t} : t \in I\}$  olarak tanımyalım. O zaman  $\alpha = \inf J$  olmak üzere öyle bir  $g_0 = g + \frac{\alpha \varepsilon}{\lambda} \in C_0(X, \mathbb{R})$  vardır ki  $t \in I$  için

$$\|y(t) - e^{\lambda t} g\|_{\infty} \leq \frac{4 \varepsilon}{|\lambda|}$$

eşitsizliği sağlanır (Miura vd., 2001).

#### Sonuç

$y, \mathbb{R}$  dan  $C(X, \mathbb{R})$  ya

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Farz edelim ki  $t \in \mathbb{R}$

$$\|y(t) - e^{\lambda t} h\|_{\infty} \leq k \varepsilon$$

eşitsizliği bazı  $h \in C(X, \mathbb{R})$  ve bazı  $k \geq 0$  için sağlansın. O zaman  $g = h$  olur. Özel olarak eğer  $y, \mathbb{R}$  dan  $C_0(X, \mathbb{R})$  ya bir dönüşümse o zaman  $g$  nin kendisi de  $C_0(X, \mathbb{R})$  nın bir elemanıdır ve eğer  $h \in C(X, \mathbb{R})$  ve yukarıdaki eşitsizlik sağlanırsa  $g = h$  sağlanır.

*Sonuç*

$y, I$ 'dan  $C(X, \mathbb{C})$ 'ya

$$\|y' - \lambda\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir dönüşüm olsun. O zaman öyle bir  $\tilde{g} \in C(X, \mathbb{C})$  vardır ki,  $t \in I$  için

$$\|y(t) - e^{\lambda t} \tilde{g}\|_{\infty} \leq \frac{3\sqrt{2} \varepsilon}{|\lambda|}$$

eşitsizliği sağlanır (Miura vd., 2001).

*Sonuç*

$y, I$ 'dan  $C_0(X, \mathbb{C})$ 'ya

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir dönüşüm olsun. O zaman öyle bir  $\tilde{g}_0 \in C_0(X, \mathbb{C})$  vardır ki,  $t \in I$  için

$$\|y(t) - e^{\lambda t} \tilde{g}_0\|_{\infty} \leq \frac{4\sqrt{2} \varepsilon}{|\lambda|}$$

eşitsizliği sağlanır (Miura vd., 2001).

*Sonuç*

$y, \mathbb{R}$ 'dan  $C(X, \mathbb{C})$ 'ya

$$\|y' - \lambda y\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlayan bir türevlenebilir dönüşüm olsun. O zaman öyle bir  $\tilde{g} \in C_0(X, \mathbb{C})$  vardır ki,  $t \in \mathbb{R}$  için

$$\|y(t) - e^{\lambda t} \tilde{g}\|_{\infty} \leq \frac{4\sqrt{2} \varepsilon}{|\lambda|}$$

eşitsizliği sağlanır (Miura vd., 2001).

#### 4.3. $y' - ay = 0$ Formundaki Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

$a$  sıfırdan farklı bir reel sayı olmak üzere  $y' - ay = 0$  denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını 2017 yılında çıkardıkları makalede Onitsuka ve Shoji incelemişlerdir. Bu bölümde de yukarıda yaptığımız tanımlara benzer bir tanım yapabiliriz.

##### 4.3.1. Tanım

$\varepsilon > 0$ ,  $a \neq 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  ve  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  türevlenebilir bir dönüşüm olsun. Her  $t \in I$  için

$$|y' - ay| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan türevlenebilir  $f$  fonksiyonu için

$$|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon$$

sağlayan  $y' - ay = 0$  denkleminin bir çözümü olan  $x: I \rightarrow \mathbb{R}$  varsa  $y' - ay = 0$  denkleminde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir. Buradaki  $K$  sabitine de Hyers-Ulam sabiti (HUS) diyebiliriz.

Aslında  $y' - ay = 0$  denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlı ve HUS sabiti de  $\mathbb{R}$  üzerinde  $1/|a|$ 'dir. Burada  $1/|a|$  değeri  $y' - ay = 0$  denklemi için HUS sabitlerinin minimum değeri olmaktadır.

#### 4.3.2. Teorem

$\varepsilon > 0$  keyfi bir sabit olsun. Türevlenebilir bir fonksiyon olan  $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun her  $t \in I$  için  $|\phi'(t) - a \phi(t)| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağladığını varsayalım. Bu durumda aşağıdaki durumlardan biri sağlanır:

- i. Eğer  $a > 0$  ve  $\sup I$  varsa,  $\tau = \sup I$  olmak üzere  $\lim_{t \rightarrow \tau-0} \phi(t)$  vardır ve her  $t \in I$  için  $\left| \lim_{t \rightarrow \tau-0} \phi(t) - x(\tau) \right| < \varepsilon/a$  eşitsizliğini sağlayan  $y' - ay = 0$  denkleminin herhangi bir çözümü olan  $x(t)$ ,  $|\phi(t) - x(t)| < \varepsilon/a$  durumunu sağlar.
- ii. Eğer  $a > 0$  ve  $\sup I$  yoksa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e^{-at}$  vardır ve  $y' - ay = 0$  denkleminin tam bir çözümü olan  $x(t)$  vardır ki  $x(t) = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e^{-at} \right) e^{at}$  ve her  $t \in I$  için  $|\phi(t) - x(t)| < \varepsilon/a$  sağlanır.
- iii. Eğer  $a < 0$  ve  $\inf I$  varsa,  $\sigma = \inf I$  olmak üzere  $\lim_{t \rightarrow \sigma+0} \phi(t)$  vardır ve her  $t \in I$  için  $\left| \lim_{t \rightarrow \sigma+0} \phi(t) - x(\sigma) \right| < \varepsilon/a$  eşitsizliğini sağlayan  $y' - ay = 0$  denkleminin herhangi bir çözümü olan  $x(t)$ ,  $|\phi(t) - x(t)| < \varepsilon/a$  durumunu sağlar.
- iv. Eğer  $a < 0$  ve  $\inf I$  yoksa,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e^{-at}$  vardır ve  $y' - ay = 0$  denkleminin tam bir çözümü olan  $x(t)$  vardır ki  $x(t) = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t)e^{-at} \right) e^{at}$  ve her  $t \in I$  için  $|\phi(t) - x(t)| < \varepsilon/a$  sağlanır (Onitsuka ve Shoji, 2017).

Bu teoremin bir sonucu olarak  $y' - ay = 0$  denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlı olduğunu ve HUS'nin de  $1/|a|$  olduğunu söyleyebiliriz.

#### 4.4. Birinci Basamaktan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığının Bir Durumu

2003 yılında Miura, Miyajima ve Takahasi yazdıkları makalede

$$T_h: C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X), \quad T_h u = u' + hu$$

olacak şekilde lineer türevlenebilir bir operatör tanımlamışlardır (Miura vd., 2003). Daha sonra bu operatörün Hyers-Ulam kararlılığını incelemişlerdir.

Teoremlere geçmeden önce bazı tanımları verelim.

$Y$  reel veya kompleks bir Banach uzayı olsun.  $C(I, Y)$  açık  $I \subset \mathbb{R}$  üzerinde tanımlı tüm  $Y$ -değerli sürekli fonksiyonların lineer uzayı olsun.  $C^1(I, Y)$  ise  $C(I, Y)$  uzayının alt lineer uzayı olsun öyle ki  $f \in C(I, Y)$  türevlenebilir olsun ve  $f'$  sürekli olsun.

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Lineer diferensiyel operatörümüz  $T_h: C^1(I, Y) \rightarrow C(I, Y)$  yi her  $t \in I$  ve her  $u \in C^1(I, Y)$  için

$(T_h u)(t) = u'(t) + h(t)u(t)$  şeklinde tanımlayabiliriz.

Burada  $T_h$  örtendir. Çünkü her  $v \in C(I, Y)$  için

$$u(t) = \frac{1}{\tilde{h}(t)} \left\{ y_0 + \int_0^t \tilde{h}(s) v(s) ds \right\}$$

fonksiyonu  $T_h u = v$  eşitliğini sağlar.

Diğer bölümlerde yaptığımız gibi bu bölümde de Hyers-Ulam kararlılığını tanımlayalım:

#### 4.4.1 Tanım

Her  $\varepsilon \geq 0$ , her  $v \in C(I, Y)$  ve  $\|T_h u - v\|_\infty \leq \varepsilon$  koşulunu sağlayan her  $u \in C^1(I, Y)$  için  $T_h u_0 = v$  ve  $\|u - u_0\|_\infty \leq K\varepsilon$  şartlarını sağlayan  $u_0 \in C^1(I, Y)$  ve  $K \geq 0$  varsa  $T_h$  operatörüne Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir. Buradaki  $K$  sabitine de  $T_h$  operatörü için bir HUS sabiti denir. Buradaki  $K$  sabitlerinin hepsinin minimumuna da  $T_h$  operatörünün HUS sabiti deriz.

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Her  $t \in \mathbb{R}$  için  $\tilde{g}(t) = e^{\int_0^t g(s) ds}$  olsun. Bu tanımladığımız  $g$  için  $C_g, D_g$  ve  $E_g$ 'yi şu şekilde oluşturalım:

$$C_g = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_t^\infty |\tilde{g}(s)| ds, \quad D_g = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \int_{-\infty}^t |\tilde{g}(s)| ds$$

$$E_g = \sup_{t \in \mathbb{R}} \frac{1}{|\tilde{g}(t)|} \left| \int_0^t |\tilde{g}(s)| ds \right|.$$

$C_g, D_g$  ve  $E_g$ 'nin sonlu olmaları noktasında bir kısıtlama yoktur.

#### 4.4.2. Teorem

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli bir fonksiyon olsun.

$T_h: C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ , her  $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$  ve her  $t \in \mathbb{R}$  için

$$(T_h u)(t) = u'(t) + h(t)u(t)$$

şeklinde tanımlı bir lineer operatör olsun.  $C_h, D_h$  ve  $E_h$  dan bir tanesinin sonlu olduğunu varsayalım. Bu durumda  $T_h$  operatörü HUS sabiti göreceli olarak  $C_h, D_h$  ve  $E_h$  olacak şekilde Hyers-Ulam anlamında kararlıdır. Buna ilaveten eğer  $C_h < \infty$  veya  $D_h < \infty$  olursa  $\|T_h u - v\|_\infty < \infty$  koşulunu sağlayan her  $v \in C(\mathbb{R}, X)$  ve her  $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$  için

$$T_h u_0 = v \quad \text{ve} \quad \|u - u_0\|_\infty < \infty$$

koşulunu sağlayan tek bir  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}, X)$  belirlenebilir (Miura vd., 2003).

#### 4.4.3. Teorem

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Her  $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$  ve her  $t \in \mathbb{R}$  için

$$T_h: C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$$

$$(T_h u)(t) = u'(t) + h(t)u(t)$$

şeklinde tanımlı bir lineer operatör olsun.  $T_h$  operatörünün Hyers-Ulam anlamında kararlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda aşağıda verilenler sağlanır.

- Eğer  $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)| = 0$  ise  $C_h < \infty$ . Buna ilaveten  $C_h, T_h$  operatörü için HUS olur.
- Eğer  $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| = 0$  ise  $D_h < \infty$ . Buna ilaveten  $D_h, T_h$  operatörü için HUS

olur.

c) Eğer  $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{h}(t)| > 0$  ise  $E_h < \infty$ .

d)  $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)|$  veya  $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)|$  pozitiftir (Miura vd., 2003).

### Sonuç

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sürekli bir fonksiyon olsun. Her  $u \in C^1(\mathbb{R}, X)$  ve her  $t \in \mathbb{R}$  için  $T_h: C^1(\mathbb{R}, X) \rightarrow C(\mathbb{R}, X)$ ,

$$(T_h u)(t) = u'(t) + h(t)u(t)$$

şeklinde tanımlı bir lineer operatör olsun.  $T_h$  operatörünün Hyers-Ulam kararlılığına sahip olması için gerek ve yeter koşul  $C_h$ ,  $D_h$  ve  $E_h$  dan birinin sonlu olmasıdır. Bunu aşağıdaki maddelerle daha açık bir şekilde ifade edebiliriz:

- i. Eğer  $\inf_{t \in [0, \infty)} |\tilde{h}(t)| = 0$  ise  $T_h$  operatörünün Hyers-Ulam kararlılığına sahip olması için gerek ve yeter koşul  $C_h < \infty$ .
- ii. Eğer  $\inf_{t \in (-\infty, 0]} |\tilde{h}(t)| = 0$  ise  $T_h$  operatörünün Hyers-Ulam kararlılığına sahip olması için gerek ve yeter koşul  $D_h < \infty$ .
- iii. Eğer  $\inf_{t \in \mathbb{R}} |\tilde{h}(t)| > 0$  ise  $T_h$  operatörünün Hyers-Ulam kararlılığına sahip olması için gerek ve yeter koşul  $E_h < \infty$  (Miura vd., 2003).

### Sonuç

$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli bir fonksiyon olsun ve  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sabit  $M > 0$  için  $\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \int_0^t \psi(s) ds \right| < M$  şartını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun.  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $Re h = \varphi + \psi$  olacak şekilde sürekli bir fonksiyon olsun.

- i. Kabul edelim ki  $t_0 > 0$  ve  $\delta_0 > 0$  vardır öyle ki  $|t| \geq t_0$  olduğunda  $\varphi(t) \leq -\delta_0$  dır. O zaman  $C_h < \infty$  ve bunun sonucunda da  $T_h$  Hyers-Ulam kararlılığını sağlar.
- ii. Kabul edelim ki  $t_1 > 0$  ve  $\delta_1 > 0$  vardır öyle ki  $|t| \geq t_1$  olduğunda  $\delta_1 \leq \varphi(t)$  dır. O zaman  $D_h < \infty$  ve bunun sonucunda da  $T_h$  Hyers-Ulam kararlılığını sağlar.
- iii. Kabul edelim ki  $t_2 > 0$  ve  $\delta_2 > 0$  vardır öyle ki  $t \leq -t_2$  olduğunda  $\varphi(t) \leq -\delta_2$  ve

$t_2 \leq t$  olduğunda  $\delta_2 \leq \varphi(t)$  dır. O zaman  $E_h < \infty$  ve bunun sonucunda da  $T_h$  Hyers-Ulam kararlılığını sağlar (Miura vd., 2003).

*Sonuç*

$h$ , sabit bir fonksiyon olsun ve  $\lambda \in \mathbb{C}$  olsun. Eğer  $Re \lambda \neq 0$  ise  $T_h$  HUS,  $1/|Re \lambda|$  olacak şekilde Hyers-Ulam kararlılığına sahiptir (Miura vd., 2003).

#### 4.5. $\varphi y' = y$ Formundaki Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

$I = (a, b)$  bir açık aralık olsun. Öyle ki  $a, b; -\infty \leq a < b \leq +\infty$  eşitsizliğini sağlasın. Bununla beraber  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$  verilen bir fonksiyon olsun öyle ki  $\int_a^t d\tau/\varphi(\tau)$  integrali her  $t \in I$  için tanımlıdır.

Eğer her  $t \in I$  için  $\varphi(t) > 0$  veya  $\varphi(t) < 0$  ise ve eğer  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  her  $t \in I$  için  $|\varphi y' - y| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon ise, o zaman öyle bir  $c \in \mathbb{R}$  vardır ki her  $t \in I$  için

$$\left| y(t) - c e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} \right| \leq \varepsilon$$

sağlanır (Jung, 2005).

##### 4.5.1. Teorem

Verilen bir  $\varepsilon > 0$ , her  $t \in I$  için türevlenebilir bir  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun

$$|\varphi y' - y| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğinin çözümü olması için gerek ve yeter şart her  $t \in I$  için

$$y(t) = \varepsilon + \alpha(t) e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} \text{ ve } 0 \leq \alpha'(t) \varphi(t) \leq 2\varepsilon e^{-\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}}$$

eşitsizliklerini sağlayan türevlenebilir bir  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu olmasıdır (Jung, 2005).

Aşağıdaki teorem Hyers-Ulam kararlılığının ispatlandığı asıl teoremdir.

#### 4.5.2. Teorem

Eğer her  $t \in I$  için  $\varphi(t) > 0$  veya  $\varphi(t) < 0$  ise ve eğer  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  her  $t \in I$  için  $|\varphi y' - y| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan türevlenebilir bir fonksiyon ise, o zaman öyle bir  $c \in \mathbb{R}$  vardır ki her  $t \in I$  için

$$\left| y(t) - c e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} \right| \leq \varepsilon$$

sağlanır (Jung, 2005).

#### Sonuç

Kabul edelim ki  $a \in \mathbb{R}$  ve her  $t \in I$  için  $\varphi > 0$  olsun.  $y: I \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  üzerinde türevlenebilir ve  $a$  nın sağ tarafında sürekli bir fonksiyon olsun. Her  $t \in I$  için ve bazı  $\varepsilon > 0$  için  $y$  fonksiyonu  $|\varphi y' - y| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlıyorsa, her  $t \in I$  için

$$(y(a) - \varepsilon) e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} + \varepsilon \leq y(t) \leq (y(a) + \varepsilon) e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} - \varepsilon$$

sağlanır (Jung, 2005).

#### Sonuç

Kabul edelim ki  $a \in \mathbb{R}$  ve her  $t \in I$  için  $\varphi < 0$  olsun.  $y: I \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  üzerinde türevlenebilir ve  $a$  nın sağ tarafında sürekli bir fonksiyon olsun. Her  $t \in I$  için ve bazı  $\varepsilon > 0$  için  $y$  fonksiyonu  $|\varphi y' - y| \leq \varepsilon$  eşitsizliğini sağlıyorsa, her  $t \in I$  için

$$(y(a) + \varepsilon) e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} - \varepsilon \leq y(t) \leq (y(a) - \varepsilon) e^{\int_a^t \frac{d\tau}{\varphi(\tau)}} + \varepsilon$$

sağlanır (Jung, 2005).

#### 4.6. Birinci Basamaktan Homogen Olmayan Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

2008 yılında Wang ve diğerleri,  $t \in (a, b), -\infty \leq a < b \leq \infty$  olmak üzere birinci basamaktan homogen olmayan lineer

$$p(t)y' - q(t)y - r(t) = 0 \quad (4.1)$$

denkleminin Hyers-Ulam kararlılığını bazı koşullar altında incelemişlerdir. Wang ispatında integral çarpanı kullanmıştır. 2014 yılında ise Qarawani yine birinci basamaktan homogen olmayan lineer

$$y' + P(t)y = Q(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.2)$$

denkleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını incelemiştir.

Kararlılıkla ilgili temel teoremlere geçmeden önce homogen olmayan lineer denklemler için Hyers-Ulam kararlılığı tanımı ve ispat için kullanacak integral çarpanı tanımlarını verelim.

##### 4.6.1. Tanım

Her  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in C^1(I)$  için

$$|p(t)y' - q(t)y - r(t)| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğin sağlandığı durumda eğer  $p(t)z' - q(t)z - r(t) = 0$  denklemini ve  $|y(t) - z(t)| \leq K\varepsilon$  eşitsizliğini sağlayan  $z \in C^1(I)$  fonksiyonu ve  $K > 0$  sabiti varsa (4.1) diferensiyel denklemin Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir (Wang vd., 2008).

##### 4.6.2. Tanım

Eğer  $\mu P dx + \mu Q dy = dR$  koşulunu sağlayan sürekli türevlenebilir bir  $R(x, y)$  fonksiyonu varsa  $\mu(x, y)$  fonksiyonuna  $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ 'nin integral çarpanı denir.

$p(t)y' - q(t)y - r(t) = 0$  diferensiyel denkleminin integral çarpanı

$$\mu(t) = \frac{1}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}}$$

olur (Wang vd., 2008).

#### 4.6.3. Teorem

$I = (a, b)$  aralığında  $p(t), q(t)$  ve  $r(t)$  sürekli reel fonksiyonlar olsun öyle ki her  $t \in I$  ve  $t \in I$  dan bağımsız bazı  $\delta > 0$  için  $p(t) \neq 0$  ve  $|q(t)| \geq \delta$  olsun. Bu durumda (4.1) diferensiyel denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlıdır (Wang vd., 2008).

*İspat*

$\varepsilon > 0$  ve  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  her  $t \in I$  için

$$|p(t)y' - q(t)y - r(t)| \leq \varepsilon \quad (4.3)$$

eşitsizliğini sağlayan sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Hyers-Ulam kararlılığını göstermek için her  $t \in I$  için  $q(t) \geq 1$  alalım.  $t \in I$  olacak şekilde  $p(t) > 0$  olduğu varsayalım.

Bu durumda (4.3)'ten

$$-\varepsilon \leq p(t)y' - q(t)y - r(t) \leq \varepsilon$$

olur.

Bu eşitsizliğin her tarafı integral faktörü  $\frac{1}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}}$  ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{1}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} &\leq y' e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} - y \frac{q(t)}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} - \frac{r(t)}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} \end{aligned}$$

elde edilir.  $q(t) > 1$  olduğu için

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \frac{q(t)}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} &\leq y' e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} - y \frac{q(t)}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} - \frac{r(t)}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} \\
&\leq \varepsilon \frac{q(t)}{p(t)} e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

olur.  $y(b_1)$ , sonlu olacak şekilde  $b_1 \in [a, b]$  seçilsin. Herhangi  $t \in (a, b_1]$  için, (4.4)'ün  $t$ 'den  $b_1$ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned}
-\varepsilon \left( e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} - e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} \right) &\leq y(b_1) e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} - y(t) e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} \\
&\quad - \int_t^{b_1} \frac{r(s)}{p(s)} e^{\left\{-\int_a^{sq(x)} dx\right\}} ds \\
&\leq \varepsilon \left( e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} - e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Devamında

$$\begin{aligned}
-\varepsilon e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} &\leq (y(b_1) - \varepsilon) e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} - y(t) e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} - \int_t^{b_1} \frac{r(s)}{p(s)} e^{\left\{-\int_a^{sq(x)} dx\right\}} ds \\
&\leq \varepsilon \left( e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}} - 2e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} \right) \leq \varepsilon e^{\left\{-\int_a^{tq(s)} ds\right\}}
\end{aligned}$$

olur ve buradan

$$-\varepsilon \leq e^{\left\{\int_a^{tq(s)} ds\right\}} \left[ (y(b_1) - \varepsilon) e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} - \int_t^{b_1} \frac{r(s)}{p(s)} e^{\left\{-\int_a^{sq(x)} dx\right\}} ds \right] - y(t) \leq \varepsilon \tag{4.5}$$

elde edilir. Benzer şekilde, herhangi  $t \in [b_1, b)$  için, (4.4)'ün  $b_1$ 'den  $t$ 'e integrali alınır

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq y(t) - e^{\left\{\int_a^{tq(s)} ds\right\}} \left[ (y(b_1) - \varepsilon) e^{\left\{-\int_a^{b_1q(s)} ds\right\}} - \int_t^{b_1} \frac{r(s)}{p(s)} e^{\left\{-\int_a^{sq(x)} dx\right\}} ds \right] \\
&\leq \varepsilon \left( 2e^{\left\{\int_{b_1}^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} - 1 \right) \leq \varepsilon \left( 2e^{\left\{\int_a^{bq(s)} ds\right\}} - 1 \right) \leq \varepsilon(2A - 1)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olur. Burada  $A = e^{\left\{\int_a^{b_1} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}}$  dir. Eğer (4.5) ve (4.6) toplanırsa

$$z_1(t) = e^{\left\{\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} \left[ (y(b_1) - \varepsilon) e^{\left\{-\int_a^{b_1} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} - \int_t^{b_1} \frac{r(s)}{p(s)} e^{\left\{-\int_a^s \frac{q(x)}{p(x)} dx\right\}} ds \right]$$

olmak üzere  $t \in I$  için

$$|y(t) - z_1(t)| \leq (2A - 1)\varepsilon$$

olur. Ayrıca  $p(t)z_1' - q(t)z_1 - r(t) = 0$ ,  $t \in I$  da sağlanır. Yukarıdaki çözümle aynı şekilde,  $p(t) < 0$  olduğu durumda,

$$z_2(t) = e^{\left\{\int_a^t \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} \left[ (y(b_1) - \varepsilon) e^{\left\{-\int_a^{b_1} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}} - \int_t^{b_1} \frac{r(s)}{p(s)} e^{\left\{-\int_a^s \frac{q(x)}{p(x)} dx\right\}} ds \right]$$

ve  $B = e^{\left\{\int_a^{b_1} \frac{q(s)}{p(s)} ds\right\}}$  olmak üzere  $t \in I$  için

$$|y(t) - z_2(t)| \leq (2B - 1)\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Aynı şekilde  $p(t)z_2' - q(t)z_2 - r(t) = 0$ ,  $t \in I$  da sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur (Wang vd., 2008).

Birinci basamaktan homogen olmayan lineer

$$y' + P(t)y = Q(t), \quad y(t_0) = y_0 \tag{4.7}$$

başlangıç değer problemi için Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılıklarını göstereceğiz. İlk önce (4.7) başlangıç değer problemi için Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılıklarını tanımlayalım.

#### 4.6.4. Tanım

Her  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in C^1(I)$  için başlangıç koşulu ile birlikte

$$|y' - P(t)y - Q(t)| \leq \varepsilon \varphi(t) \quad (4.8)$$

eşitsizliğinin sağlandığı durumda eğer (4.7) başlangıç değer probleminin çözümü olan ve  $|y(t) - z(t)| \leq K\varepsilon\varphi(t)$  eşitsizliğini sağlayan  $z \in C^1(I)$  fonksiyonu ve  $\varepsilon$  ve  $y(t)$ 'ye bağlı olmayan  $K > 0$  sabiti varsa (4.7) başlangıç değer problemine Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır denir (Qarawani, 2014).

#### 4.6.5. Tanım

Her  $\varepsilon > 0$ ,  $y \in C^1(I)$  için başlangıç koşulu ile birlikte

$$|y' - P(t)y - Q(t)| \leq \varepsilon \varphi(t)$$

eşitsizliğinin sağlandığı durumda eğer (4.7) başlangıç değer probleminin çözümü olan ve  $|y(t) - z(t)| \leq K\varepsilon\varphi(t)$  eşitsizliğini sağlayan  $z \in C^1(I)$  fonksiyonu ve  $\varepsilon$  ve  $y(t)$ 'ye bağlı olmayan  $K > 0$  sabiti varsa ve  $\lim_{t \rightarrow \infty} (y(t) - z(t)) = 0$  ise (4.7) başlangıç değer problemine  $\varphi(t) > 0$ 'a göre Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır denir (Qarawani, 2014).

#### 4.6.6. Teorem

Eğer  $y \in C^1(I)$ ,  $P(t)$  ve  $Q(t)$ ,  $I$  üzerinde sürekli fonksiyonlar ise başlangıç değer problemi (4.7) Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Qarawani, 2014).

#### *İspat*

$\varepsilon > 0$  ve  $y(t)$ , (4.7) başlangıç değer probleminin yaklaşık bir çözümü olsun. Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını göstermek için (4.7) başlangıç değer problemi ve  $|y(t) - z(t)| \leq K\varepsilon\varphi(t)$  eşitsizliğini sağlayan  $z(t) \in C^1(I)$  fonksiyonun olduğunu

ispatlayalım. Bunu ispatlamak için ilk önce Tanım 4.6.5'deki  $\varphi$  fonksiyonunu  $\varphi(t) = e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds}$  şeklinde alalım. (4.8)'den

$$-\varepsilon e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds} \leq y' - P(t)y - Q(t) \leq \varepsilon e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds}$$

olur ve eşitsizliğin her tarafı  $e^{\int_{t_0}^t P(s)ds}$  ile çarpılırsa

$$-\varepsilon \leq \left( y e^{\int_{t_0}^t P(s)ds} \right)' - e^{\int_{t_0}^t P(s)ds} Q(x) \leq \varepsilon$$

elde edilir. Her tarafın  $t$ 'e göre integrali alınırsa

$$-\varepsilon(t - t_0) \leq y e^{\int_{t_0}^t P(s)ds} - y_0 - \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(s)ds} Q(s) ds \leq \varepsilon(t - t_0)$$

$$-\varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds} \leq y - e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds} \left( y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(s)ds} Q(s) ds \right)$$

$$\leq \varepsilon(t - t_0) e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds}$$

elde edilir ve

$$\left| y - e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds} \left( y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} Q(s) ds \right) \right| \leq \varepsilon(t_1 - t_0) e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds}$$

olur. Bu sonuca göre

$$z(t) = e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds} \left( y_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^s P(\tau)d\tau} Q(s) ds \right)$$

fonksiyonu (4.7) başlangıç değer probleminin tam çözümü olur.  $\varphi(t) = e^{-\int_{t_0}^t P(s)ds}$  olmak üzere

$$\max_{t_0 \leq t \leq t_1} |y(t) - z(t)| \leq K\varepsilon\varphi(t)$$

eşitsizliği sağlanır ve buradan (4.7) probleminin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı ispatlanmış olur [30].

#### 4.6.7. Teorem

Eğer  $y \in C^1(\mathbb{R})$  ve  $P(t) \geq c > 0$  olacak şekilde  $P(t)$  ve  $Q(t)$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde sürekli fonksiyonlar ise başlangıç değer problemi (4.7) Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında karardır (Qarawani, 2014).

*Örnek*

$$y' + 2y \sin^2 t = \cos t, \quad y(0) = 1, \quad t > 0, \quad (4.9)$$

başlangıç değer problemi ele alalım.  $y(t)$ 'in

$$|y' + 2y \sin^2 t - \cos t| \leq \varepsilon e^{-2 \int_0^t \sin^2 s ds}$$

eşitsizliğinin çözümü olduğunu kabul edelim. Teorem 4.6.6'nın ispatından

$$\left| y - e^{-t + \frac{1}{2} \sin 2t} \left( 1 + \int_0^t e^{-s + \frac{1}{2} \sin 2s} \cos s ds \right) \right| \leq \varepsilon t e^{-t + \frac{1}{2} \sin 2t}$$

elde edilir. Buradan  $z(t) = e^{-t + \frac{1}{2} \sin 2t} \left( 1 + \int_0^t e^{-s + \frac{1}{2} \sin 2s} \cos s ds \right)$ , (4.9) başlangıç değer probleminin çözümü olur ve her  $t \geq 0$  için  $|y - z| \leq K\varepsilon e^{-t + \frac{1}{2} \sin 2t}$  eşitsizliği sağlanır.

Burada  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t + \frac{1}{2} \sin 2t} = 0$  olduğu için (4.9) Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında karardır (Qarawani, 2014).

#### 4.7. Bernoulli Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

Bu bölümde

$$y'(t) + p(t)y = q(t)y^n, \quad n \neq 1, \quad y(t_0) = y_0 \quad (4.10)$$

şeklindeki Bernoulli denklemleri başlangıç değer probleminin Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlılığı incelenecektir. İlk önce  $G(t, y): [t_0, t_1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , her  $t \in [t_0, t_1]$  için  $|G(t, y) - G(t, z)| \leq L|y - z|$  Lipschitz koşulunu sağlayan ve  $G(t, 0) = 0$  olan sürekli bir fonksiyon olmak üzere  $y(t_0) = y_0$  başlangıç koşuluna sahip

$$y'(t) + p(t)y = G(t, y) \quad (4.11)$$

diferensiyel denklemini ele alalım. Qarawani (Qarawani, 2014) bu diferensiyel denklem için Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlılığı ispat etmiş ve bu ispattan faydalanarak Bernoulli denklemlerinin Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlılığını göstermiştir.

##### 4.7.1. Teorem

Eğer  $y \in C^1(I)$  ve  $p(t)$ ,  $I$  üzerinde sürekli fonksiyon ise başlangıç değer problemi (4.11) Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Qarawani, 2014).

Qarawani bu teoremin ispatını Teorem 4.6.6'nın ispatına benzer şekilde integral çarpanı kullanarak ispatlamıştır.

##### 4.7.2. Teorem

Eğer  $y \in C^1(\mathbb{R})$  ve  $p(t) \geq c > 0$  olmak üzere  $p(t)$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde sürekli fonksiyon ise başlangıç değer problemi (4.11) Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır (Qarawani, 2014).

#### 4.7.3. Teorem

(4.10) Bernoulli denkleminde  $n > 1$  şeklinde kabul edelim. Eğer  $y \in C^1(I)$  ve  $p(t)$  ve  $q(t)$ ,  $I$  üzerinde sürekli fonksiyonlar ise başlangıç değer problemi (4.10) Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Qarawani, 2014).

#### 4.8. Abel-Riccati Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias Kararlılığı

Bu bölümde

$$y'(t) + p(t)y(t) = \sum_{k=0}^n p_k(t)y^k(t) \quad (4.12)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (4.13)$$

başlangıç değer probleminin Hyers-Ulam, Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılıkları verilecektir. Burada  $n \geq 0$  ve  $\infty < t_0 < t_1 < \infty$  için  $I = [t_0, t_1]$ 'dir. Ayrıca  $y(t) \in C^1(I)$ ,  $p(t)$  ve  $p_k(t)$   $k = 0, 1, \dots, n$  olmak üzere  $I$  üzerinde sürekli fonksiyonlardır. Bunlara ek olarak  $p_k(t)y^k(t)$  Lipschitz koşullarını sağlamaktadır yani her  $t \in I$  ve  $k \in \{2, \dots, n\}$  için  $y, z \in \mathbb{R}$  olmak üzere

$$|p_k(t)y^k(t) - p_k(t)z^k(t)| \leq L_k|y - z|$$

eşitsizliği sağlanmaktadır.

Bu problemi 2019 yılında Başçı ve diğerleri çalışmalarında incelemişlerdir. Her ne kadar bu problem (4.11)'nin özel bir durumu  $G(t, y) = \sum_{k=0}^n p_k(t)y^k(t)$  gibi görünse de (4.11)'deki problemden farklıdır ve yeni durumları içermektedir. Mesela (4.11)'de  $G(t, 0) = 0$ 'dır ama bu problemde  $G(t, y) = 1 + ty^2$  alındığında  $G(t, 0) = 1 \neq 0$  olur ve (4.11)'den farklı bir durum elde edilir.

Bu problemle ilgili ilk olarak (4.12)- (4.13)'ün Hyers-Ulam kararlılığı gösterilecektir.

#### 4.8.1. Teorem

Eğer  $y(t) \in C^1(I)$ ,  $p(t)$  ve  $p_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) olmak üzere  $I$  üzerinde sürekli fonksiyonlar ise başlangıç değer problemi (4.12)-(4.13) Hyers-Ulam anlamında kararlıdır (Başcı vd., 2019).

Başcı ve diğerleri teoremin ispatında ilk olarak (4.13) başlangıç koşulunu sağlayan (4.12)'nin  $y(t)$  yaklaşık çözümünü ele almışlar ve  $\varepsilon > 0$  ve  $K > 0$  için (4.12)'nin

$$|y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir  $x(t) \in C^1(I)$  olduğunu göstermişlerdir (Başcı vd., 2019). Başcı ve diğerleri daha sonra benzer şekilde Hyers-Ulam-Rassias ve Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta kararlılıklarını ispatlamışlardır.

#### 4.8.2. Teorem

Eğer  $y(t) \in C^1(I)$ ,  $p(t)$  ve  $p_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) olmak üzere  $I$  üzerinde sürekli fonksiyonlar ise başlangıç değer problemi (4.12)-(4.13) Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Başcı vd., 2019).

#### 4.8.3. Teorem

Eğer  $y(t) \in C^1(I)$ ,  $p(t)$  ve  $p_k(t)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) olmak üzere  $I$  üzerinde sürekli fonksiyonlar ise başlangıç değer problemi (4.12)-(4.13) Hyers-Ulam-Rassias-Gavruta anlamında kararlıdır (Başcı vd., 2019).

Bu teoremlerle ilgili şu örnek verilebilir:

*Örnek*

Aşağıdaki başlangıç değer problemini ele alalım:

$$y'(t) + \frac{2}{t}y(t) = \frac{4}{t^2} - 4t^2y^2(t) \quad (4.14)$$

$$y(1) = 1, \quad t \in [1, t_1]. \quad (4.15)$$

$\varepsilon > 0, (t, y) \in [1, t_1] \times [-M_2, M_2], \quad M_2 = \max_{1 \leq t \leq t_1} |y(t)|$  olmak üzere  $y(t)$ 'nin

$$\left| y'(t) + \frac{2}{t}y(t) - \frac{4}{t^2} + 4t^2y^2(t) \right| \leq \varepsilon$$

eşitsizliğini sağladığını kabul edelim. Bu eşitsizlik

$$\left| y(t) - \frac{1}{t^2} \left( 1 + \int_1^t s^2 \left( \frac{4}{s^2} - 4s^2y^2(s) \right) ds \right) \right| \leq \varepsilon \left( \frac{t}{3} - \frac{1}{3t^2} \right) \leq \varepsilon \frac{t_1}{3}$$

şeklinde yazılabilir. Temel hesaplama yoluyla kolayca bulunur ki

$$x(t) = \frac{1}{t^2} \left( 4t - 3 - \int_1^t 4s^2x^2(s) ds \right)$$

fonksiyonu (4.14)-(4.15) başlangıç değer problemini sağladığı gösterilebilir. Buradan

$$|y(t) - x(t)| \leq \left| y(t) - \frac{1}{t^2} \left( 4t - 3 - \int_1^t 4s^2y^2(s) ds \right) \right| + \frac{1}{t^2} \int_1^t 4s^2|y^2(s) - x^2(s)| ds$$

$$\leq \varepsilon \frac{t_1}{3} + 4 \frac{t_1^4}{t^2} \int_1^t |y(s) - x(s)| |y(s) + x(s)| ds$$

elde edilir.  $1 \leq t \leq t_1$  için  $x, y \in [-M_2, M_2]$  olduğundan  $|y(s) + x(s)| \leq 2M_2$  elde edilir.

$1 \leq t \leq t_1$  için

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon \frac{t_1}{3} + L \int_1^t |y(s) - x(s)| ds$$

sonucu  $L = 8M_2t_1^4$  olmak üzere bulunur. Gronwall eşitsizliği kullanılarak

$$|y(t) - x(t)| \leq \varepsilon \frac{t_1}{3} e^{L \int_1^t ds} = \varepsilon \frac{t_1}{3} e^{L(t-1)} \leq \varepsilon \frac{t_1}{3} e^{Lt_1} = K\varepsilon,$$

$K = \varepsilon \frac{t_1}{3} e^{Lt_1}$  olmak üzere elde edilir. Sonuç olarak  $\max_{1 \leq t \leq t_1} |y(t) - x(t)| \leq K\varepsilon$  eşitsizliği sağlanır ve (4.14)-(4.15) başlangıç değer problemi Hyers-Ulam anlamında kararlıdır.



## 5. BİRİNCİ BASAMAKTAN GECİKMELİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER İÇİN HYERS-ULAM KARARLILIĞI

### 5.1. Gecikmeli Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Tanımı

Gerçek hayatta karşımıza çıkan birçok olayı

$$y'(t) = f(t, y(t), y(t - \tau))$$

$$y(t_0) = y_0$$

şeklinde ifade edilen başlangıç değer problemi ile ifade edebiliriz. Burada,  $t_0$  ve  $y_0$  reel sabit sayılar olmak üzere  $t_0$  başlangıç fonksiyonu,  $y_0$  başlangıç değeridir. Gerçek hayatta birçok olayda gecikme olmaktadır ama matematiksel modellerde bu gecikmeler genelde ihmal edilmektedir. Bu gecikmeler bazen büyük değişikliklere sebep olabilir. Bundan dolayı bu gecikmelerin de hesaba katıldığı gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerden faydalanılarak matematiksel modeller oluşturulur. Şimdi gecikmeli lineer diferensiyel denklemleri tanımlayalım.

#### 5.1.1. Tanım

Bilinmeyen fonksiyon  $x(t)$  ve türevlerini,  $t$  ve  $t$  anından önceki zamanlara bağlı olarak ifade eden diferensiyel denklemlere gecikmeli diferensiyel denklemler denir ve  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere birinci basamaktan bir gecikmeli diferensiyel denklem

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x_t)$$

şekilde ifade edilir. Burada  $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times C^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  bir fonksiyonel operatör olup  $\tau$  gecikme sabiti olmak üzere  $x_t = \{x(\tau): \tau \leq t\}$  başlangıç anından önceki çözümü ifade eder.

Gecikmeli diferensiyel denklemleri zaman gecikmelerin durumuna göre özel olarak şu şekilde yazabiliriz:

Sürekli gecikmeler denklemler:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f\left(t, x(t), \int_{-\infty}^0 x(t+\tau) d\mu(\tau)\right).$$

Kesikli gecikmeler denklemler:

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \dots, x(t-\tau_m)), \quad \tau_1 > \tau_2 > \dots > \tau_m \geq 0.$$

Lineer kesikli gecikmeler denklemler:

$$\frac{d}{dt}x(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau_1) + \dots + A_m x(t-\tau_m), \quad A_0, \dots, A_m \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

ile verilir.

Buna göre gecikmeli diferensiyel denklemlere şu örnekleri verebiliriz:

$$x'(t) = f\left(t, x(t), x(t-\tau(t))\right), \quad \tau(t) > 0,$$

$$x'(t) = ax(t) + bx(t-\tau(t)), \quad \tau(t) > 0.$$

### 5.1.2. Tanım

$f$  ve  $a_{ij}$  ler bilinen fonksiyonlar olmak üzere

$$x^{(n)}(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) x^{(i)}(t-\tau_j(t)) + f(t)$$

şeklindeki gecikmeli diferensiyel denklemlere  $n$ . mertebeden lineer gecikmeli diferensiyel denklem denir.  $f(t) = 0$  ise denkleme homogendir, aksi takdirde homogen olmayandır denir.

### 5.1.3. Gecikmeli başlangıç değer problemlerinin varlığı ve tekliği

Gecikmeli başlangıç değer problemlerinin varlığını ispatlamak için “Adımlar Yöntemi” ile bilinen bir yöntem kullanılmaktadır.  $\tau$  gecikme sabiti olmak üzere

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad x(t) = \varphi_0(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0$$

şeklinde verilen basit bir gecikmeli diferensiyel denklemleri problemi ele alalım. Bu problemi Adımlar Yöntemi ile çözelim. Bu yöntemle göre ilk önce

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_0(t - \tau)), \quad t_0 \leq t, \quad x(t) = \varphi_0(t_0),$$

problemi incelenir. Bu problem gecikme içermemektedir çünkü  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$  için  $t - \tau$  argümanı  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  başlangıç aralığında değişmektedir ve  $x(t - \tau) = \varphi_0(t - \tau)$  dir.  $\varphi_1(t)$  bu yeni problemin çözümü olsun ve bu çözümün  $[t_0, t_0 + \tau]$  aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim. Buna göre ikinci adımda yine gecikme içermeyen

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_1(t - \tau)), \quad t_0 + \tau \leq t, \quad x(t_0 + \tau) = \varphi_1(t_0 + \tau),$$

başlangıç değer problemi elde edilir.  $\varphi_2(t)$  de bu yeni problemin çözümü olsun ve bu çözümün  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$  aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim. Bu şekilde devam edildiğinde üçüncü adımda

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_2(t - \tau)), \quad t_0 + 2\tau \leq t, \quad x(t_0 + 2\tau) = \varphi_2(t_0 + 2\tau),$$

ve  $n$ . adımda

$$x'(t) = f(t, x(t), \varphi_{n-1}(t - \tau)), \quad t_0 + (n - 1)\tau \leq t,$$

$$x(t_0 + (n - 1)\tau) = \varphi_{n-1}(t_0 + (n - 1)\tau),$$

problemleri elde edilir.  $\varphi_n(t)$  bu son problemin çözümü olsun ve bu çözümün  $[t_0 + (n - 1)\tau, t_0 + n\tau]$  aralığında tanımlı olduğunu kabul edelim. Böylece

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau)), \quad x(t) = \varphi_0(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0$$

probleminin  $x(t)$  çözümü  $[t_0, t_0 + n\tau]$  aralığı boyunca tanımlanmış olur ve  $\varphi_0$  ve  $f$  sürekli olduğu durumda  $(t_0, \varphi_0(t_0))$  noktasının komşuluğunda bu problemin varlığı ispatlanmış olur.

Problemin çözümünün tekliğinin sağlanması için  $f$  fonksiyonunun Lipschitz koşulunu sağlaması gerekir.

#### 5.1.4. Tanım

$D$  kapalı bölgesinde  $f(x, y)$  fonksiyonu tanımlı olsun. Her  $f(t, y_1)$  ve  $f(t, y_2) \in D$  için

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|$$

eşitsizliğini sağlayan  $L > 0$  varsa  $f$  fonksiyonu  $D$  üzerinde Lipschitz koşulunu sağlıyor denir ve  $L$  sabitine de Lipschitz sabiti denir.

Gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı ile ilgili olarak 2010 yılında (Jung ve Brezdek, 2010),  $\lambda > 0$  ve  $\tau > 0$  reel sabitler olmak üzere  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  formundaki gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı gösterilmiştir. 2013 yılında  $y'(t) = F(t, y(t), y(g(t)))$  formundaki gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını  $[a, b]$  aralığında ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığı  $[a, \infty)$  aralığında gösterilmiştir (Ortrocol ve Ilea, 2013). 2015 yılında Tunç ve Biçer sabit nokta metodunu kullanarak  $y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau))$  formundaki gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Raisas kararlılığı gösterilmiştir. 2019 yılında Öğrekçi aynı denklemin sınırlı olmayan aralık için Hyers-Ulam-Raisas anlamında kararlılığı gösterilmiştir.

#### 5.2. $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$ Formundaki Gecikmeli Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

$\lambda > 0$  ve  $\tau > 0$  reel sabitler olsun.  $\mathcal{F}$ ,  $[0, \infty)$  aralığında sürekli ve türevlenebilir olan ve  $[\tau, \infty)$  aralığından  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesine tanımlı tüm sürekli fonksiyonların ailesi olsun.

$y: [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  gecikmeli diferensiyel denklemine yaklaşık sonuçlar bulunmuştur (Jung ve Brezdek, 2010).

$\lambda \neq 0$  ve  $\tau > 0$  reel sabitler ve  $y: [\tau, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  olmak üzere  $[-\tau, 0]$  aralığında sabit olan  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  gecikmeli diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$y(t) = \alpha \sum_{n=-1}^{[t/\tau]} \frac{\lambda^{n+1} (t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [-\tau, \infty]. \quad (5.1)$$

şeklinde verebiliriz. Burada  $\alpha$  herhangi bir reel sayı ve  $[t/\tau]$  simgesi  $t/\tau$  dan küçük veya eşit en büyük tamsayıyı ifade etmektedir (Jung ve Brezdek, 2010).

### 5.2.1. Teorem

$z, \phi \in \mathcal{F}$  olsun ve

$$z'(t) - \lambda z(t - \tau) \leq \phi'(t) - \lambda \phi(t - \tau), \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

$$z(t) - z(0) \leq \phi(t) - \phi(0), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (5.3)$$

olduğunu kabul edelim. O zaman  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  gecikmeli diferensiyel denkleminin

$$\hat{\phi}(t) = \phi(0), \quad t \in [-\tau, 0) \quad (5.4)$$

$$\hat{z}(t) = z(0), \quad t \in [-\tau, 0) \quad (5.5)$$

başlangıç koşullarını sağlayan  $\hat{z}, \hat{\phi} \in \mathcal{F}$  tek çözümleri vardır öyle ki

$$z(t) - \hat{z}(t) \leq \phi(t) - \hat{\phi}(t), \quad t \geq 0 \quad (5.6)$$

sağlanır ve bu çözümler tektir (Jung ve Brezdek, 2010).

*İspat*

$y, y_0$  ve  $\hat{y}$  değişkenlerini  $y := z - \phi$ ,  $y_0 := z(0) - \phi(0)$  ve

$$\hat{y}(t) = y_0 \sum_{n=-1}^{[t/\tau]} \frac{\lambda^{n+1}(t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \in [\tau, \infty) \quad (5.7)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu tanımdan  $t \in [-\tau, 0)$  olduğu durumda  $\hat{y}(t) = y_0$  olur ve teoremdeki (5.2) koşulundan dolayı da

$$y'(t) \leq \lambda y(t - \tau), \quad t \geq 0 \quad (5.8)$$

olur. Jung ve Brzdęk,  $[t/\tau]$  üzerinde tümevarım yöntemini uygulayarak her  $t \geq 0$  için

$$y(t) \leq \hat{y}(t) \quad (5.9)$$

olduğunu ispatlamışlardır (Jung ve Brezdek, 2010).

$[t/\tau] = 0$  olsun yani  $0 \leq t < \tau$  olsun. Bu durumda (5.3) ve (5.8)'den  $y'(t) \leq \lambda y_0$  olur. Burada eğer her terimin 0'dan  $t$ 'ye integrali alınırsa

$$y(t) - y_0(t) \leq \lambda y_0(t) \quad (5.10)$$

elde edilir ve  $\hat{y}$ 'nin tanımı da kullanılarak (5.9) elde edilir.

Negatif olmayan bir  $m$  alalım ve  $[t/\tau] = m$  için (5.9)'un sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$y(t) \leq y_0 \sum_{n=-1}^m \frac{\lambda^{n+1}(t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad m\tau \leq t \leq m\tau + \tau \quad (5.11)$$

olur.

$[t/\tau] = m + 1$  olsun yani  $m\tau + \tau \leq t \leq m\tau + 2\tau$  olsun. (5.8)'de integral aldığımızda

$$\int_{m\tau+\tau}^t y'(u) du \leq \lambda \int_{m\tau+\tau}^t y(u - \tau) du \quad (5.12)$$

ve dolayısıyla her  $m\tau + \tau \leq t \leq m\tau + 2\tau$  için

$$y(t) \leq \lambda \int_{m\tau}^{t-\tau} y(v)dv + y(m\tau + \tau) \quad (5.13)$$

olur.

(5.11)'de  $t$  yerine  $t - \tau$  değişkeni koyduğumuzda eşitsizlikteki her terimin  $m\tau + \tau$ 'dan  $t$ 'ye integralini aldığımızda her  $m\tau + \tau \leq t \leq m\tau + 2\tau$  için

$$\int_{m\tau}^{t-\tau} y(v)dv \leq y_0 \sum_{n=0}^{m+1} \frac{\lambda^n (t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!} - y_0 \sum_{n=0}^{m+1} \frac{\lambda^n (m\tau - n\tau + \tau)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.14)$$

elde edilir.

$y$ ,  $[0, \infty)$  aralığında sürekli olduğu için

$$\lim_{t \rightarrow m\tau + \tau} y(t) = y(m\tau + \tau) \quad (5.15)$$

olur.

Bunun sonucunda (5.11)'den

$$y(m\tau + \tau) \leq y_0 \sum_{n=-1}^m \frac{\lambda^{n+1} (t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.16)$$

elde edilir.

Bunların sonucunda da (5.16) ve (5.14)'dan her  $m\tau + \tau \leq t \leq m\tau + 2\tau$  için

$$\lambda \int_{m\tau}^{t-\tau} y(v)dv + y(m\tau + \tau) \leq y_0 \sum_{n=-1}^{m+1} \frac{\lambda^{n+1} (t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \quad (5.17)$$

elde edilir.

Sonuç olarak (5.13) ve  $\hat{y}$ 'nin tanımından  $[t/\tau] = m + 1$  için ve her  $t \geq 0$  için (5.9) bu şekilde ispatlanmış olur.

$$\hat{\phi}(0) = \phi(0) \sum_{n=-1}^{[t/\tau]} \frac{\lambda^{n+1}(t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \geq -\tau \quad (5.18)$$

$$\hat{z}(0) = z(0) \sum_{n=-1}^{[t/\tau]} \frac{\lambda^{n+1}(t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad t \geq -\tau \quad (5.19)$$

şeklinde tanımlansın.

Bu durumda (5.4) ve (5.5) sağlanır. Bununla birlikte  $\hat{y} = \hat{z} - \hat{\phi}$  olur ve (5.6) da (5.9) eşitsizliğinden elde edilir (Jung ve Brezdek, 2010).

Bu teoreme ait birkaç sonuç aşağıda belirtilmiştir.

#### *Sonuç*

$y, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{F}$  olsun.  $\psi_1(0) = 0, \psi_2(0) = 0$  olduğunu ve aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu kabul edelim.

$$\psi'_1(t) - \lambda\psi_1(t - \tau) \leq y'(t) - \lambda y(t - \tau) \leq \psi'_2(t) - \lambda\psi_2(t - \tau), \quad t \geq 0 \quad (5.20)$$

$$\psi_1(t) \leq y(t) - y(0) \leq \psi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (5.21)$$

O zaman  $t \in [-\tau, 0]$  için  $\hat{y}(t) = y(0)$  ve  $t \leq 0$  için  $\psi_1(t) \leq y(t) - \hat{y}(t) \leq \psi_2(t)$  koşullarını sağlayan tek bir  $\hat{y} \in \mathcal{F}$  çözümü vardır (Jung ve Brezdek, 2010).

#### *İspat*

(5.21)'den

$$\psi_1(t) - \psi_1(0) \leq y(t) - y(0) \leq \psi_2(t) - \psi_2(0), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (5.22)$$

elde edilir ve  $i = 1, 2$  için

$$\widehat{\psi}_i(t) = \psi_i(0) \sum_{n=-1}^{[t/\tau]} \frac{\lambda^{n+1}(t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!} = 0, \quad t \in [-\tau, \infty) \quad (5.23)$$

olmak üzere ilk önce  $z = \psi_1, \phi = y$  olacak şekilde, daha sonra da  $z = y, \phi = \psi_2$  olacak şekilde Teorem 5.2.1 kullanıldığında sonuç ispat edilmiş olur (Jung ve Brezdek, 2010).

### *Sonuç*

$y, \psi_2 \in \mathcal{F}$  olmak üzere  $\psi_2(0) = 0$  olduğunu ve aşağıdaki eşitsizliklerin doğru olduğunu kabul edelim.

$$|y'(t) - \lambda y(t - \tau)| \leq \psi_2'(t) - \lambda \psi_2(t - \tau), \quad t \geq 0$$

$$|y(t) - y(0)| \leq \psi_2(t), \quad t \in [-\tau, 0] \text{ olsun.}$$

O zaman  $t \in [-\tau, 0]$  için  $\hat{y}(t) = y(0)$  ve  $t \geq 0$  için  $|y(t) - \hat{y}(t)| \leq \psi_2(t)$  koşullarını sağlayan tek bir  $\hat{y} \in \mathcal{F}$  çözümü vardır (Jung ve Brezdek, 2010).

### *İspat*

$$-\psi_2(t) + \psi_2(0) \leq y(t) - y(0) \leq \psi_2(t) - \psi_2(0), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (5.24)$$

olur ve  $\psi_1 := -\psi_2$  olacak şekilde Teorem 5.2.1 uygulandığında bir önceki sonucun ispatı ile aynı şekilde bu sonuç da ispatlanmış olur (Jung ve Brezdek, 2010).

Burada Hyers-Ulam kararlılığını  $\lambda > 0$  ve  $\tau > 0$  oldukları durumda  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  gecikmeli diferensiyel denklemi için ispatlanmıştır. Yaklaşık çözümlere  $[-\tau, 0]$  aralığında sabit olan denklem çözümleri ile yaklaşılabileceği gösterilmiştir. Sonucunda elde edilen çözümler Ulam'ın kararlılığına karşılık gelmektedir.

Buradaki  $y$  için koşulları değiştirerek şu teoremi verebiliriz.

### 5.2.2. Teorem

$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$  olmak üzere  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  reel sayılar olsun ve  $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{F}$ ,  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  gecikmeli diferensiyel denklemin çözümleri olsun.  $y \in \mathcal{F}$  in aşağıdaki eşitsizlikleri sağladığını kabul edelim.

$$\varepsilon_1 \leq y'(t) - \lambda y(t - \tau) \leq \varepsilon_2, \quad t \geq 0 \quad (5.25)$$

$$\xi_1(t) - \xi_1(0) \leq y(t) - y(0) \leq \xi_2(t) - \xi_2(0), \quad t \in [-\tau, 0) \text{ olsun.} \quad (5.26)$$

O zaman  $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  denkleminin  $\hat{y}, \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in \mathcal{F}$  tek çözümleri vardır öyle ki

$$\hat{y}(t) = y(0), \quad \hat{\xi}_i(t) = \xi_i(0) - \frac{\varepsilon_i}{\lambda}, \quad t \in [-\tau, 0), i = 1, 2, \quad (5.27)$$

$$\xi_1(t) - \hat{\xi}_1(t) - \frac{\varepsilon_1}{\lambda} \leq y(t) - \hat{y}(t) \leq \xi_2(t) - \hat{\xi}_2(t) - \frac{\varepsilon_2}{\lambda}, \quad t \geq 0 \quad (5.28)$$

sağlanır (Jung ve Brezdek, 2010).

*İspat*

$\psi_i := \xi_i - \frac{\varepsilon_i}{\lambda}$ ,  $i = 1, 2$ , olsun. O zaman  $\psi_i'(t) - \lambda \psi_i(t - \tau) = \varepsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ , olur. Bununla birlikte (5.2.24)'ten

$$\psi_1(t) - \psi_1(0) \leq y(t) - y(0) \leq \psi_2(t) - \psi_2(0), \quad t \in [-\tau, 0] \quad (5.29)$$

elde edilir.

Teorem 5.2.1'den öyle tek  $\hat{\psi}_1(t)$  ve  $\hat{\psi}_2(t)$  çözümleri vardır ki her  $t \in [-\tau, 0)$ ,  $i = 1, 2$  için  $\hat{\psi}_i(t) = \psi_i(0)$ ,  $\hat{y}(t) = y(0)$  ve

$$\psi_1(t) - \hat{\psi}_1(t) \leq y(t) - \hat{y}(t) \leq \psi_2(t) - \hat{\psi}_2(t), \quad t \geq 0 \quad (5.30)$$

olur.

Bu teoremin özel bir durumunu sonuç olarak verelim.

*Sonuç*

$0 \leq \varepsilon$  reel bir sabit olsun ve  $y, \xi \in \mathcal{F}$   $y'(t) = \lambda y(t - \tau)$  diferensiyel denklemin çözümleri olsun.  $t \geq 0$  için  $|y'(t) - \lambda y(t - \tau)| \leq \varepsilon$  ve  $t \in [-\tau, 0)$  için  $|y(t) - u_0| \leq \xi(t)$  eşitsizliğini sağlayan  $u_0$  reel sayısı olduğunu varsayalım. O zaman

$$\hat{y}(t) = y(0) \text{ ve } \hat{\xi}_0(t) = \xi(0) - \frac{\varepsilon}{\lambda}, \quad t \in [-\tau, 0)$$

ve her  $t \geq 0$  için,

$$|y(t) - \hat{y}(t)| \leq \xi(t) - \hat{\xi}_0(t) - \frac{\varepsilon}{\lambda} = \xi(t) - \xi(0) - \left(\xi(0) - \frac{\varepsilon}{\lambda}\right) \sum_{n=0}^{[t/\tau]} \frac{\lambda^{n+1}(t - n\tau)^{n+1}}{(n+1)!}$$

şartlarını sağlayan tek  $\hat{\xi}_0, \hat{y} \in \mathcal{F}$  çözümleri vardır (Jung ve Brezdek, 2010).

### 5.3. $y'(t) = f(t, y(t), y(g(t)))$ Formundaki Gecikmeli Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

$y'(t) = F(t, y(t), y(g(t)))$  formundaki gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığını  $[a, b]$  aralığında ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını  $[a, \infty)$  aralığında gösterelim.

$a, b \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $I = [a, b]$  olsun.  $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}), \varepsilon > 0, \varphi \in C([a - h, b], \mathbb{R}^+)$  ve  $\psi \in C([a - h, a], \mathbb{R})$  için Cauchy problemini

$$x'(t) = F(t, x(t), x(g(t))), \quad t \in I \quad (5.31)$$

$$x(t) = \psi(t), \quad t \in [a - h, a] \quad (5.32)$$

ve eşitsizlikleri  $t \in I$  için

$$|y'(t) - f(t, y(t), y(g(t)))| \leq \varepsilon, \quad (5.33)$$

$$|y'(t) - f(t, y(t), y(g(t)))| \leq \varphi(t) \quad (5.34)$$

ele alalım bu problemle ilgili Hyers-Ulam kararlılık tanımlarını verelim.

#### 5.3.1. Tanım

Eğer her  $\varepsilon > 0$  ve (5.33) eşitsizliği sağlayan her  $y \in C^1([a - h, b], \mathbb{R})$  için (5.31) denkleminin  $x \in C^1([a - h, b], \mathbb{R})$  çözümü var ve  $|y(t) - x(t)| \leq c\varepsilon, t \in [a - h, b]$

eşitsizliğini sağlayan  $c > 0$  reel sayısı varsa (5.31) diferensiyel denklemin Hyers-Ulam anlamında kararlıdır denir (Ortrocol ve Ilea, 2013).

### 5.3.2. Tanım

(5.34) eşitsizliği sağlayan her  $y \in C^1([a-h, b], \mathbb{R})$  için (5.31) denkleminin  $x \in C^1([a-h, b], \mathbb{R})$  çözümü var ve  $|y(t) - x(t)| \leq c_\varphi \varphi(t)$ ,  $t \in [a-h, b]$  eşitsizliğini sağlayan  $c_\varphi > 0$  reel sayısı varsa (5.31) diferensiyel denkleminize  $\varphi$  fonksiyonuna göre Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır denir (Ortrocol ve Ilea, 2013).

#### Sonuç

$y \in C^1(I, \mathbb{R})$  fonksiyonu (5.33)'ün bir çözümüdür ancak ve ancak öyle bir  $h \in C(I, \mathbb{R})$  ( $y$ 'e bağlı) fonksiyonu vardır ki her  $t \in I$  için

$$i) |h(t)| < \varepsilon$$

$$ii) y'(t) = f(t, y(t), y(g(t))) + h(t)$$

sağlanır.

#### Sonuç

$y \in C^1(I, \mathbb{R})$  fonksiyonu (5.34)'ün bir çözümüdür ancak ve ancak öyle bir  $\tilde{h} \in C(I, \mathbb{R})$  ( $y$ 'e bağlı) fonksiyonu vardır ki her  $t \in I$  için

$$i) |\tilde{h}(t)| < \varepsilon$$

$$ii) y'(t) = f(t, y(t), y(g(t))) + \tilde{h}(t)$$

sağlanır.

### Sonuç

Eğer  $y \in C^1(I, \mathbb{R})$  fonksiyonu (5.33)'ün bir çözümü ise her  $t \in I$  için  $y$

$$\left| y(t) - y(a) - \int_a^t f(s, y(s), y(g(s))) ds \right| \leq (t - a)\varepsilon,$$

integral eşitsizliğinin de çözümüdür.

### Sonuç

Eğer  $y \in C^1(I, \mathbb{R})$  fonksiyonu (5.34)'ün bir çözümü ise her  $t \in I$  için  $y$

$$\left| y(t) - y(a) - \int_a^t f(s, y(s), y(g(s))) ds \right| \leq \int_a^t \varphi(s) ds,$$

integral eşitsizliğinin de çözümüdür.

Bu tanımlar ve sonuçlarda eğer  $I = [a, \infty)$  alırsak  $[a - h, b]$  aralığını  $[a - h, \infty)$  aralığı ile değiştirerek aynı şekilde tanımlarımızı yapabiliriz.

#### 5.3.3. Tanım (Picard operatörü)

$(X, d)$  bir metrik uzayı ve  $A: X \rightarrow X$  bir operatör olsun. Eğer

- i)  $F_A = \{x \in X: A(x) = x\}$  kümesi  $A$ 'nın sabit nokta kümesi olmak üzere  $F_A = \{x^*\}$
- ii) her  $x_0 \in X$  için  $(A^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$  dizisi  $x^*$  a yakınsayacak

şekilde bir  $x^* \in X$  varsa  $A$  operatörüne Picard operatörü denir (Rus, 2001).

#### 5.3.4. Önerme (Gronwall eşitsizliği)

$g, h \in C([a, b], \mathbb{R}^+)$  ve  $g$  fonksiyonunun artan olduğunu kabul edelim.

Eğer  $x \in C([a, b], \mathbb{R}^+)$  ve  $t \in [a, b]$  için

$$x(t) \leq g(t) + \int_a^b h(s)x(s)ds$$

eşitsizliğinin bir çözüm kümesi ise

$$x(t) \leq g(t)\exp\left(\int_a^b h(s)ds\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

### 5.3.5. Önerme (Soyut Gronwall eşitsizliği)

$(X, d, \leq)$  sıralı bir metrik uzayı ve  $A: X \rightarrow X$  bir artan Picard operatörü olsun. O zaman,  $x \in X$  için  $x \geq A(x)$  eşitsizliği  $x \geq x_A^*$  eşitsizliğini gerektirirken  $x \leq A(x)$  eşitsizliği  $x \leq x_A^*$  eşitsizliğini gerektirir.

$x'(t) = F(t, x(t), x(g(t)))$  gecikmeli diferensiyel denklemi için Hyers-Ulam kararlılığını  $I = [a, b]$  kompakt aralığı için şu teoremden ispatlayalım.

### 5.3.6. Teorem

Aşağıda ifadelerin doğruluğunu kabul edelim.

a)  $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $g \in C([a, b], [a - h, b])$ ,  $g(t) \leq t$ ,  $h > 0$

b) Her  $t \in [a, b]$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , için

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq L_f \sum_{i=1}^2 |u_i - v_i|$$

eşitsizliğini sağlayan  $L_f > 0$  vardır.

c)  $0 < 2(b - a)L_f < 1$  olsun. O zaman

i. Yukarıda verdiğimiz Cauchy probleminin (5.31)-(5.32)  $C([a - h, b], \mathbb{R}) \cap C^1([a, b], \mathbb{R})$  da tek çözümü vardır.

ii.  $x'(t) = F(t, x(t), x(g(t)))$  denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlıdır (Ortrocol ve İlea, 2013).

*İspat*

(i) Teoremde (a) koşulu altında, (5.31)-(5.32) problemi şu integral denklemine eşittir:

$$x(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [a-h, a] \\ \psi(t) + \int_a^t f(s, x(s), x(g(s))) ds, & t \in [a, b] \end{cases}$$

$X = C([a-h, b], \mathbb{R})$  olsun ve  $B_f: X \rightarrow X$  dönüşümü

$$B_f(x)(t) = \begin{cases} \psi(t), & t \in [a-h, a] \\ \psi(t) + \int_a^t f(s, x(s), x(g(s))) ds, & t \in [a, b] \end{cases}$$

şeklinde verilsin.

Daha sonra  $B_f$  dönüşümünün Chebyshev normuna göre büzölme dönüşümü olduğunu gösterelim.

$$|B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| = 0, \quad x, y \in C([a-h, b], \mathbb{R}), \quad t \in [a-h, a]$$

$$\begin{aligned} |B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| &\leq \left| \int_a^t f(s, x(s), x(g(s))) ds - \int_a^t f(s, y(s), y(g(s))) ds \right| \\ &\leq L_f \left( \max_{a-h \leq t \leq b} |x(t) - y(t)| + \max_{a-h \leq t \leq b} |x(g(t)) - y(g(t))| \right) (b-a) \end{aligned}$$

$$\leq 2(b-a)L_f \|x - y\|, \quad x, y \in C([a-h, b], \mathbb{R}), \quad t \in [a, b].$$

Buradan  $x, y \in C([a-h, b], \mathbb{R})$  için

$$|B_f(x)(t) - B_f(y)(t)| \leq 2(b-a)L_f \|x - y\|$$

sonucuna ulaşılır ve  $X$  üzerinde tanımlı Chebysev normuna göre  $B_f$  büzülme dönüşümü olur.

İspatın ikinci bölümünde Banach sabit nokta teoremi kullanılmıştır.

(ii)  $y \in C([a - h, b], \mathbb{R}) \cap C^1([a, b], \mathbb{R})$ , (5.33)'ün bir çözümü olsun.

$$x'(t) = F(t, x(t), x(g(t))), \quad t \in [a, b]$$

$$x(t) = y(t), \quad t \in [a - h, a]$$

Cauchy probleminin tek çözümünü  $x \in C([a - h, b], \mathbb{R}) \cap C^1([a, b], \mathbb{R})$  olarak adlandıralım.

(a) koşulundan

$$x(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [a - h, a] \\ y(a) + \int_a^t f(s, x(s), x(g(s))) ds, & t \in [a, b] \end{cases}$$

sağlanır.

(5.33) şartının sonucundan,

$$\left| y(t) - y(a) - \int_a^t f(s, y(s), y(g(s))) ds \right| \leq (t - a)\varepsilon, \quad t \in [a, b]$$

sağlanır.

$t \in [a - h, a]$  için  $|y(t) - x(t)| = 0$  olur.  $t \in [a, b]$  için ise

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \left| y(t) - y(a) - \int_a^t f(s, y(s), y(g(s))) ds \right| \\ &\quad + \int_a^t \left| f(s, y(s), y(g(s))) - f(s, x(s), x(g(s))) \right| ds \end{aligned}$$

$$\leq (t - a)\varepsilon + L_f \left( \int_a^t |y(s) - x(s)| ds + \int_a^t |y(g(s)) - x(g(s))| ds \right) \text{ olur.}$$

Bu son eşitsizliğe göre,

$$u \in C([a - h, b], \mathbb{R}^+) \text{ için } A: C([a - h, b], \mathbb{R}^+) \rightarrow C([a - h, b], \mathbb{R}^+)$$

operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$A(u)(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a - h, a] \\ (t - a)\varepsilon + L_f \int_a^t u(s) ds + L_f \int_a^t u(g(s)) ds, & t \in [a, b]. \end{cases}$$

Daha sonra  $A$  operatörünün Picard operatörü olduğunu ispatlamak için  $A$ 'nın büzülme dönüşümü olduğu gösterilmiştir.  $t \in [a, b]$  ve her  $u, v \in C([a - h, b], \mathbb{R}^+)$  için

$$\begin{aligned} |A(u)(t) - A(v)(t)| &\leq L_f \left( \int_a^t |u(s) - v(s)| ds + \int_a^t |u(g(s)) - v(g(s))| ds \right) \\ &\leq L_f \left( \max_{a-h \leq t \leq b} |u(t) - v(t)| + \max_{a-h \leq t \leq b} |u(g(t)) - v(g(t))| \right) (b - a) \\ &\leq 2(b - a)L_f \|u - v\| \end{aligned}$$

sağlanır.

Sonuç olarak,  $C([a - h, b], \mathbb{R}^+)$  üzerinde Chebysev normuna göre  $A$  büzülme dönüşümü olur. Banach sabit nokta teoremine göre,  $A$  Picard operatörü ve  $F_A = \{u^*\}$  olur. Ayrıca

$$u^*(t) = (t - a)\varepsilon + L_f \int_a^t u^*(s) ds + L_f \int_a^t u^*(g(s)) ds, \quad t \in [a, b]$$

olur. Gronwall Eşitsizliğinden

$$u^*(t) \leq c\varepsilon, \quad t \in [a - h, b], \quad c = (b - a)e^{2L_f(b-a)}$$

sonucu elde edilir. Özel olarak, eğer  $u = |y - x|$  ise  $u(t) \leq A(u)(t)$  olur ve soyut Gronwall eşitsizliğini uygularsak  $A$  Picard operatörü ve artan olduğundan  $u(t) \leq u^*(t)$  sonucunu elde ederiz. Buradan da

$$|y(t) - x(t)| \leq c\varepsilon, \quad t \in [a - h, b]$$

olur ve (5.31) denkleminin Hyers-Ulam anlamında kararlı olduğu ispatlanmış olur (Ortrocol ve Ilea, 2013).

Daha sonra  $x'(t) = F(t, x(t), x(g(t)))$  gecikmeli diferensiyel denklemi için Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını  $I = [a, \infty)$  aralığı için şu teoremden ispatlayalım.

### 5.3.7. Teorem

Aşağıda ifadelerin doğruluğunu kabul edelim.

- a)  $f \in C([a, \infty) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ,  $g \in C([a, \infty), [a - h, \infty))$ ,  $g(t) \leq t$ ,  $h > 0$ ;
- b) Her  $t \in [a, \infty)$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ , için
 
$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq l_f(t)(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|),$$
 eşitsizliğini sağlayan  $l_f \in L^1([a, \infty), \mathbb{R}^+)$  vardır.
- c)  $\varphi \in C[a, \infty)$  fonksiyonu artan bir fonksiyondur.
- d)  $\int_a^t \varphi(s) ds \leq \lambda \varphi(t)$ ,  $t \in [a, \infty)$ , eşitsizliğini sağlayan  $\lambda > 0$  vardır.

O zaman yukarıda verdiğimiz (5.31)- (5.32) Cauchy probleminin  $C([a - h, \infty), \mathbb{R}) \cap C^1([a, \infty), \mathbb{R})$  da tek çözümü vardır ve  $y'(t) = F(t, y(t), y(g(t)))$  denklemi  $\varphi$  fonksiyonuna göre Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Ortrocol ve Ilea, 2013).

### İspat

Bu teoremi de bir önceki teoremle aynı şekilde ispatlarız. Kabul edelim ki  $y \in C([a - h, b], \mathbb{R}) \cap C^1([a, b], \mathbb{R})$ , (5.34)'ün bir çözümü ve  $x \in C([a - h, b], \mathbb{R}) \cap C^1([a, b], \mathbb{R})$

$$x'(t) = F\left(t, x(t), x(g(t))\right), \quad t \in [a, \infty)$$

$$x(a) = y(a), \quad t \in [a - h, a]$$

probleminin tek çözümü olsun. Dolayısıyla

$$x(t) = \begin{cases} y(t), & t \in [a - h, a] \\ y(a) + \int_a^t f\left(s, x(s), x(g(s))\right) ds, & t \in [a, \infty) \end{cases}$$

olur. (5.34) şartının sonucundan,

$$\left| y(t) - y(a) - \int_a^t f\left(s, y(s), y(g(s))\right) ds \right| \leq \int_a^t \varphi(s) ds \leq \lambda \varphi(t), \quad t \in [a, \infty)$$

sağlanır. Yukarıdaki ilişkilerden  $t \in [a - h, a]$  için  $|y(t) - x(t)| = 0$  ve  $t \in [a, \infty)$  için

$$\begin{aligned} |y(t) - x(t)| &\leq \left| y(t) - y(a) - \int_a^t f\left(s, y(s), y(g(s))\right) ds \right| \\ &\quad + \int_a^t \left| f\left(s, y(s), y(g(s))\right) - f\left(s, x(s), x(g(s))\right) \right| ds \\ &\leq \lambda \varphi(t) + \int_a^t l_f(s) |y(s) - x(s)| ds + \int_a^t l_f(s) |y(g(s)) - x(g(s))| ds, \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 5.3.6'da olduğu gibi,

$$|y(t) - x(t)| \leq \lambda \varphi(t) \exp\left(\int_a^t 2l_f(s) ds\right) = c_\varphi \varphi(t), \quad t \in [a, \infty)$$

olur.

Buna göre (5.31) denklemi Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır.

Burada  $c_\varphi = \lambda \exp(\int_a^t 2l_f(s) ds)$ 'dir.

Bu iki teoremle alakalı şu örneği verelim ve bu özel duruma göre aşağıdaki teoremleri ispatlayalım. Bu örnekte Cauchy problemini  $g(t) = t - h$  olduğu durumu ele alınmış ve bu durum için Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları gösterilmiştir.

Aşağıdaki Cauchy problemini,

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - h)), \quad t \in [a, b),$$

$$x(a) = x_0$$

ve aşağıdaki eşitsizlikleri  $t \in [a, b]$  için

$$|y'(t) - f(t, y(t), y(t - h))| \leq \varepsilon, \quad |y'(t) - f(t, y(t), y(t - h))| \leq \varphi(t),$$

teoremlerle inceleyelim.

### 5.3.8. Teorem

Aşağıda ifadelerin doğruluğunu kabul edelim.

a)  $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ ;

b) Her  $t \in [a, b]$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  için

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq L_f \sum_{i=1}^2 |u_i - v_i|,$$

eşitsizliğini sağlayan  $L_f > 0$  vardır.

O zaman

$$x'(t) = F(t, x(t), x(t - h)), \quad x(a) = x_0, \quad t \in [a, b)$$

probleminin  $C([a - h, b], \mathbb{R}) \cap C^1([a, b], \mathbb{R})$  da tek çözümü vardır ve

$x'(t) = F(t, x(t), x(t - h))$  denklemi Hyers-Ulam anlamında kararlıdır (Ortrocol ve Ilea, 2013).

### 5.3.9. Teorem

Aşağıda ifadelerin doğruluğunu kabul edelim.

- a)  $f \in C([a, \infty) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- b) Her  $t \in [a, \infty)$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  için
 
$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq l_f(t)(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)$$

eşitsizliğini sağlayan  $l_f \in L^1([a, \infty), \mathbb{R}^+)$  vardır.

- c)  $\varphi \in C[a, \infty)$  fonksiyonu artan bir fonksiyondur.
- d)  $\int_0^t \varphi(s) ds \leq \lambda \varphi(t)$ ,  $t \in [a, \infty)$ , eşitsizliğini sağlayan  $\lambda > 0$  vardır.

O zaman

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t-h)), \quad y(a) = y_0, \quad t \in [a, b),$$

probleminin  $C([a-h, \infty), \mathbb{R}) \cap C^1([a, \infty), \mathbb{R})$  da tek çözümü vardır ve  $y'(t) = F(t, y(t), y(t-h))$  denklemi  $\varphi$  fonksiyonuna göre Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Ortrocol ve Ilea, 2013).

Teorem 5.3.8 ve 5.3.9,  $g(t) = t^2$  olduğu durumda da sağlanmakta olup bununla ilgili teoremler de şu şekildedir:

### 5.3.10. Teorem

Aşağıda ifadelerin doğruluğunu kabul edelim.

- c)  $f \in C(I \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$
- d) Her  $t \in [a, b]$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  için

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq L_f \sum_{i=1}^2 |u_i - v_i|$$

eşitsizliğini sağlayan  $L_f > 0$  vardır.

O zaman

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t^2)), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, 1],$$

probleminin  $C([0, 1], \mathbb{R}) \cap C^1([0, 1], \mathbb{R})$  da tek çözümü vardır ve  $y'(t) = F(t, y(t), y(t^2))$  denklemini Hyers-Ulam anlamında kararlıdır (Ortrocol ve Ilea, 2013).

### 5.3.11. Teorem

Aşağıda ifadelerin doğruluğunu kabul edelim.

e)  $f \in C([0, \infty) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

f) Her  $t \in [0, \infty)$ ,  $u_i, v_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$  için

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq l_f(t)(|u_1 - v_1| + |u_2 - v_2|)$$

eşitsizliğini sağlayan  $l_f \in L^1([0, \infty), \mathbb{R}^+)$  vardır.

g)  $\varphi \in C[0, \infty)$  fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

h)  $\int_0^t \varphi(s) ds \leq \lambda \varphi(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ , eşitsizliğini sağlayan  $\lambda > 0$  vardır.

O zaman

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t^2)), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0, 1],$$

probleminin  $C([0, \infty), \mathbb{R}) \cap C^1([0, \infty), \mathbb{R})$  da tek çözümü vardır ve  $y'(t) = F(t, y(t), y(t-h))$  denklemini  $\varphi$  fonksiyonuna göre Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlıdır (Ortrocol ve Ilea, 2013).

### 5.4. $y'(t) = f(t, y(t), y(t-\tau))$ Formundaki Gecikmeli Lineer Olmayan Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

$F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$y'(t) = F(t, y(t), y(t-\tau))$$

formundaki gecikmeli lineer diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını, genişletilmiş halini ve sınırlı olmayan aralık için Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını inceleyeceğiz.

Şimdi ilk olarak  $y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau))$  denklemi için Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını göstereceğiz. Bu teoremi yazmadan önce bu teoremin ispatında kullanılan bir önermeyi vereceğiz.

#### 5.4.1. Önerme

$(X, d)$  genelleştirilmiş tam bir metrik uzayı olsun.  $\Lambda: X \rightarrow X$  in Lipschitz sabiti  $L < 1$  olan tam anlamıyla bir büzülme dönüşümü olduğunu kabul edelim. Eğer bazı  $x \in X$  için  $d(\Lambda^{k+1}x, \Lambda^k x) < \infty$  eşitsizliğini sağlayan negatif olmayan bir  $k$  sayısı varsa aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- a)  $\{\Lambda^n x\}$  dizisi  $x^*$  sabit noktasına yakınsar.
- b)  $x^*$  noktası  $X^* = \{y \in X: d(\Lambda^k x, y) < \infty\}$  de  $\Lambda$ 'nın tek bir sabit noktasıdır. Eğer  $y \in X^*$  ise, o zaman

$$d(y, X^*) \leq \frac{1}{1-L} d(\Lambda y, y)$$

eşitsizliği sağlanır (Jung ve Brezdek, 2010).

#### 5.4.2. Teorem

$t_0, T \in \mathbb{R}$  ve  $t_0 < T$  olsun.  $I = [t_0 - \tau, T]$  için  $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $(t, x, y), (t, z, w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  olmak üzere

$$|F(t, x, y) - F(t, z, w)| \leq L_1 |x - z| + L_2 |y - w|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.  $\phi: I \rightarrow (0, \infty)$  sürekli bir fonksiyon olsun.  $\Psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$  olduğunu ve  $K, L_1$  ve  $L_2$  nin

$$0 < K(L_1 + L_2) < 1, \text{ ve her } t \in I = [t_0 - \tau, T] \text{ için } \left| \int_{t_0}^t \phi(u) du \right| \leq K\phi(t)$$

şartlarını sağlayan pozitif sabitler olduğunu kabul edelim.

O zaman, eğer

$$|y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau))| < \varphi(t), \quad t \in [t_0, T]$$

$$|y(t) - \Psi(t)| < \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

şartlarını sağlayan sürekli bir fonksiyon varsa tek sürekli  $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned} y'_0(t) &= F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T] \\ y(t) &= \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0] \end{aligned} \tag{5.35}$$

ve her  $t \in I$  için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} K\phi(t) \tag{5.36}$$

olur (Tunç ve Biçer, 2015).

*İspat*

İlk önce,  $C, I \rightarrow \mathbb{R}$  tanımlı tüm sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere

$$S = \{\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}: \varphi \in C, \text{ eğer } t \in [t - \tau, t_0] \text{ ise } \varphi(t) = \Psi(t)\},$$

$S$  kümesini tanımlayalım ve bu küme üzerinde

$$d(\varphi, \mu) = \inf\{M \in [0, \infty): |\varphi(t) - \mu(t)| \leq M\phi(t), \forall t \in I\}, \tag{5.37}$$

genelleştirilmiş metriğini tanımlayalım. Bu tanıma göre  $(S, d)$  genelleştirilmiş tam metrik uzayı olur. Daha sonra  $\Lambda: S \rightarrow S$ ,

$$(\Lambda\varphi)(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

$$(\Lambda\varphi)(t) = \Psi(t_0) + \int_{t_0}^t F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) du, \quad t \in [t_0, T] \quad (5.38)$$

dönüşümünü ve bu dönüşümün büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim. Yani  $0 < K(L_1 + L_2) < 1$  olmak üzere  $d(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \leq K(L_1 + L_2)d(\varphi, \mu)$  olduğunu gösterelim.  $\varphi \in S, \Lambda\varphi$  sürekli olduğu için  $\Lambda\varphi \in S$  olur.  $\varphi, \mu \in S$  olsun.

$$\begin{aligned} |(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \{F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))\} du \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))| du \\ &\leq L_1 \int_{t_0}^t |\varphi(u) - \mu(u)| du + L_2 \int_{t_0}^t |\varphi(u - \tau) - \mu(u - \tau)| du \\ &\leq (L_1 + L_2)M \left| \int_{t_0}^t \phi(u) du \right|, \quad t \in [t_0, T] \end{aligned}$$

ve

$$|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| = \psi(t) - \psi(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

olur ve bu eşitsizlikler  $d(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \leq K(L_1 + L_2)d(\varphi, \mu)$  eşitsizliğini ispatlar.

$0 < K(L_1 + L_2) < 1$  olduğu için  $\Lambda, S$  üzerinde büzülme dönüşümüdür.

Herhangi bir  $\xi \in S$  ve her  $t \in I$  için  $I = [t_0 - \tau, T]$  üzerinde  $F(t, \xi(t), \xi(t - \tau))$  ve  $\xi(t)$  sınırlı olduğu ve  $\min_{t \in I} \phi(t) > 0$  için  $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$  verilmek üzere öyle bir  $0 < M < \infty$  sabiti vardır ki

$$|(\Lambda\xi)(t) - \xi(t)| = \left| \psi(t_0) + \int_{t_0}^t F(u, \xi(u), \xi(u - \tau)) du - \xi(t) \right| \leq M\varphi(t)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu sonuca göre ve (5.37)'den  $d_1(\Lambda\xi, \xi) < \infty$  olduğu gösterilebilir. Önerme 5.4.1. a) ya göre de öyle bir  $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonu vardır ki  $(S, d)$  uzayında  $\Lambda^n \xi \rightarrow y_0$  ve  $\Lambda y_0 = y_0$  olur ve buna göre  $y_0$

$$y_0'(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T]$$

$$y_0(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

eşitliklerini sağlar.

Bundan sonra,  $\{d_1(\xi, g) < \infty\} = S$  olduğunu ve Önerme 5.4.1. b) den  $y_0$  tek sürekli fonksiyon olduğunu ispat edilmiştir.

Herhangi bir  $g \in S$  için  $g$  ve  $\xi, I$  üzerinde sınırlı oldukları için öyle bir  $0 < M_g < \infty$  sabiti vardır ki her  $t \in I$  için  $|\xi(t) - g(t)| \leq M_g \varphi(t)$  olur. Buna göre de her  $g \in S$  için  $d(\xi, g) < \infty$  olur ve  $\{d_1(\xi, g) < \infty\} = S$  olur.

Ayrıca her  $t \in [t_0, T]$  için

$$-\phi(t) \leq y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau)) \leq \phi(t)$$

olur. Eğer  $t \in [t_0, T]$  için eşitsizlikteki her terimin integrali  $t_0$ 'dan  $t$ 'ye alınırsa

$$\left| y(t) - \psi(t_0) - \int_{t_0}^t F(u, y(u), y(u - \tau)) du \right| \leq \left| \int_{t_0}^t \phi(u) du \right|$$

elde edilir ve  $\Lambda$ 'nın tanımından her  $t \in I$  için

$$|y(t) - (\Lambda y)(t)| \leq \left| \int_{t_0}^t \phi(u) du \right| \leq K\phi(t)$$

sonucuna varılır.

Buradan  $d(y, \Lambda y) \leq K$  olur ve Önerme 5.4.1'den her  $t \in I$  için

$$d(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} d(y, \Lambda y) \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} K\phi(t)$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur (Tunç ve Biçer, 2015).

Şimdi aşağıdaki teorem ile  $y'(t) = F(t, y(t), y(t - \tau))$  denklemi için Hyers-Ulam kararlılığını gösterelim.

#### 5.4.3. Teorem

$F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun  $(t, x, y), (t, z, w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  olmak üzere

$$|F(t, x, y) - F(t, z, w)| \leq L_1|x - z| + L_2|y - w|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunu ve  $0 < T(L_1 + L_2) < 1$  olduğunu kabul edelim.  $\phi: I \rightarrow (0, \infty)$  sürekli bir fonksiyon ve  $\Psi \in C[t_0 - \tau, t_0]$  ve  $\varepsilon > 0$  olsun. O zaman, eğer

$$|y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau))| < \varepsilon, \quad t \in [t_0, T]$$

$$|y(t) - \Psi(t)| < \varepsilon, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

şartlarını sağlayan sürekli  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu varsa tek bir sürekli  $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned}
y'_0(t) &= F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T] \\
y(t) &= \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]
\end{aligned} \tag{5.39}$$

ve her  $t \in I$  için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{\varepsilon T}{1 - (L_1 + L_2)} \tag{5.40}$$

sağlanır (Tunç ve Biçer, 2015).

Bu teorem de benzer şekilde ispatlanır.

*İspat*

Bu teoremin ispatına da  $S$  kümesi üzerinde

$$d_1(\varphi, \mu) = \inf\{M \in [0, \infty): |\varphi(t) - \mu(t)| \leq M, \quad \forall t \in I\},$$

genelleştirilmiş metriğini tanımlayarak başlayalım. Bu tanıma göre  $(S, d_1)$  genelleştirilmiş tam metrik uzayı olur. Herhangi  $\varphi, \mu \in S$  ve  $M_{\varphi, \mu} \in \{M \in [0, \infty): |\varphi(t) - \mu(t)| \leq M, \forall t \in I\}$  için (5.38)'den

$$\begin{aligned}
|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \{F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))\} du \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^t |F(u, \varphi(u), \varphi(u - \tau)) - F(u, \mu(u), \mu(u - \tau))| du \right| \\
&\leq L_1 \int_{t_0}^t |\varphi(u) - \mu(u)| du + L_2 \int_{t_0}^t |\varphi(u - \tau) - \mu(u - \tau)| du \\
&\leq (L_1 + L_2)TM_{\varphi, \mu}, \quad t \in [t_0, T]
\end{aligned}$$

ve

$$|(\Lambda\varphi)(t) - (\Lambda\mu)(t)| = \psi(t) - \psi(t) = 0, \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

olur ve bu eşitsizlikler  $d_1(\Lambda\varphi, \Lambda\mu) \leq (L_1 + L_2)Td_1(\varphi, \mu)$  eşitsizliğini ispatlar.

$0 < T(L_1 + L_2) < 1$  olduğu için  $\Lambda, S$  üzerinde büzülme dönüşümüdür.

Herhangi bir  $\zeta \in S$ ,  $F(t, \zeta(t), \zeta(t - \tau))$  ve  $\zeta(t)$  sınırlı olması kullanılarak  $d_1(\Lambda\zeta, \zeta) < \infty$  olduğu gösterilebilir. Önerme 5.4.1. a) ya göre de öyle bir  $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  sürekli fonksiyonu vardır ki  $(S, d_1)$  uzayında  $\Lambda^n \zeta \rightarrow y_0$  ve  $\Lambda y_0 = y_0$  olur ve buna göre  $y_0$

$$y'_0(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, T]$$

$$y_0(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

eşitliklerini sağlar. Herhangi bir  $g \in S$  için  $g$  ve  $\zeta, I$  üzerinde sınırlı oldukları için her  $g \in S$  için  $d(\zeta, g) < \infty$  olur ve  $\{d_1(\zeta, g) < \infty\} = S$  olur. Önerme 5.4.1 b'ye  $y_0$ , (5.39) özelliğini sağlayan sürekli tek bir fonksiyondur. Ayrıca her  $t \in [t_0, T]$  için

$$-\varepsilon \leq y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau)) \leq \varepsilon$$

olur. Eğer eşitsizlikteki her terimin integrali  $t_0$ 'dan  $t$ 'ye alınırsa her  $t \in [t_0, T]$  için

$$-\varepsilon \int_{t_0}^t du \leq \int_{t_0}^t y'(u) du - \int_{t_0}^t F(u, y(u), y(u - \tau)) du \leq \varepsilon \int_{t_0}^t du$$

elde edilir ve  $\Lambda$ 'nın tanımından her  $t \in I$  için

$$|y(t) - (\Lambda y)(t)| \leq T\varepsilon$$

sonucuna varılır. Buradan ve Önerme 5.4.1'den her  $t \in I$  için

$$d_1(y, y_0) \leq \frac{1}{1 - T(L_1 + L_2)} d_1(y, \Lambda y) \leq \frac{T\varepsilon}{1 - T(L_1 + L_2)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur (Tunç ve Biçer, 2015).

Şimdi Tunç ve Biçer'in sonuçlarını 2019 yılında sınırlı olmayan aralıklar için gösterelim (Öğrekçi, 2019).

#### 5.4.4. Teorem

Verilen bir  $t_0$  reel sayısı için  $I := [t_0 - \tau, \infty)$  olsun.  $K, L_1$  ve  $L_2$ ,  $0 < K(L_1 + L_2) < 1$  eşitsizliğini sağlayan pozitif sabitler olsun.  $F: I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunun her  $(t, x, y), (t, z, w) \in I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  için

$$|F(t, x, y) - F(t, z, w)| \leq L_1|x - z| + L_2|y - w|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olduğunu kabul edelim.  $\varphi: I \rightarrow (0, \infty)$  her  $t \in I$  için  $\left| \int_{t_0}^t \varphi(u) du \right| \leq K\varphi(t)$  koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olmak üzere eğer

$$|y'(t) - F(t, y(t), y(t - \tau))| < \varphi(t), \quad t \in [t_0, \infty) \quad (5.41)$$

$$|y(t) - \Psi(t)| < \varphi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

şartlarını sağlayan sürekli türevlenebilir  $y: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu varsa tek sürekli  $y_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu vardır öyle ki

$$y'_0(t) = F(t, y_0(t), y_0(t - \tau)), \quad t \in [t_0, \infty) \quad (5.42)$$

$$y_0(t) = \Psi(t), \quad t \in [t_0 - \tau, t_0]$$

ve her  $t \in I$  için

$$|y(t) - y_0(t)| \leq \frac{1}{1 - K(L_1 + L_2)} K\varphi(t) \quad (5.43)$$

sağlanır (Öğrekçi, 2019).

*İspat*

Herhangi bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $I_n := [t_0, t_0 + n]$  kümeleri tanımlayalım. Teorem 5.4.2 den (Tunç ve Biçer, 2015), her  $n$  için tek sürekli bir  $y_n: I_n \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu vardır öyle ki

$$y_n(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, y_n(s), y_n(s - \tau)) ds, \quad (5.44)$$

ve her  $t \in I_n$  için

$$|y(t) - y_n(t)| \leq \frac{K}{1 - K(L_1 + L_2)} \varphi(t), \quad (5.45)$$

eşitsizliklerinin sağlandığını göstermiştir. Teoremin koşullarından her  $t \in [t_0 - \tau, t_0]$  için  $y(t) = y_0(t) = \psi(t)$  olur. Eğer  $t \in I_n$ ,  $y_n$  fonksiyonların tek olmalarından dolayı

$$y_n(t) = y_{n+1}(t) = y_{n+2}(t) = \dots \quad (5.46)$$

Herhangi bir  $t \in \mathbb{R}$  için  $n(t) \in \mathbb{N}$  sayısını

$$n(t) := \min\{n \in \mathbb{N} : t \in I_n\}$$

olarak ve  $y_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonunu da

$$y_0(t) = y_{n(t)}(t) \quad (5.47)$$

olarak tanımlayalım.

Daha sonra  $y_0$  fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için herhangi  $t_1 \in \mathbb{R}$  için  $n_1 := n(t_1)$  sayısı seçebiliriz. Böylece  $n_1$  sayısı  $I_{n_1}$  aralığındadır ve her  $t \in (t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon)$  için öyle bir  $\varepsilon > 0$  vardır ki  $y_0(t) = y_{n_1}(t)$  sağlanır.  $y_{n_1}$ ,  $t_1$  noktasında sürekli olduğu için  $y_0$  da sürekli olur yani her  $t_1 \in \mathbb{R}$  için  $y_0$ ,  $t_1$  noktasında sürekli olur.

Herhangi bir  $t \in I$  için  $n(t)$  sayısını seçelim. Sonrasında  $t \in I_{n(t)}$  olur ve (5.46) ve (5.47)'ten

$$\begin{aligned} y_0(t) = y_{n(t)}(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, y_{n(t)}(s), y_{n(t)}(s - \tau)) ds \\ &= y(t_0) + \int_{t_0}^t F(s, y_0(s), y_0(s - \tau)) ds \end{aligned} \quad (5.48)$$

olur. Buradaki eşitsizlik her  $s \in I_{n(t)}$  için  $n(s) \leq n(t)$  olduğu için geçerlidir ve (5.46) ve (5.47)'ten

$$y_{n(t)}(t)(s) = y_{n(s)}(s) = y_0(s),$$

bulunur. (5.48)'te eşitlikten  $y_0$  fonksiyonu (5.42)'i sağlar. Her  $t \in I$  için  $t \in I_{n(t)}$  olduğu için (5.45) ve (5.47)'ten her  $t \in I_n$  için

$$|y(t) - y_0(t)| = |y(t) - y_{n(t)}(t)| \leq \frac{K}{1 - K(L_1 + L_2)} \varphi(t), \quad (5.49)$$

sağlanır. Son olarak  $y_0$  fonksiyonunun tek olduğunu gösterelim. Her  $t \in I$  için  $u_0: I \rightarrow \mathbb{R}$  fonksiyonu  $y_0$ 'dan farklı olarak (5.42) ve (5.43) koşullarını sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir  $t \in I$  için bu fonksiyonların  $I_{n(t)}$ 'deki değerleri her  $t \in I_{n(t)}$  için kısıtlanışları  $y_0|_{I_{n(t)}} (= y_{n(t)})$  ve  $u_0|_{I_{n(t)}}$ , (5.42) ve (5.43) koşullarını sağlar.  $y_{n(t)} = y_0|_{I_{n(t)}}$  'ın tek olmasından  $y_0(t) = y_0|_{I_{n(t)}} = u_0|_{I_{n(t)}} = u_0(t)$  olur ve ispat tamamlanmış olur.

Şimdi bunu örnekle inceleyelim.

### Örnek

Herhangi  $\lambda_1, \lambda_2 > 0$  için  $t_0$  ve  $\tau$  herhangi reel sayılar olmak üzere  $I := [t_0 - \tau, \infty]$  üzerinde

$$y'(t) + \lambda_1 y(t) + \lambda_2 y(t - \tau) = q(t)$$

gecikmeli diferensiyel denklemini ele alalım.

$$F(t, y(t), y(t - \tau)) = y(t) + y(t - \tau) - q(t)$$

olduğu için, her  $t \in I$  için

$$\begin{aligned} |F(t, x_1, y_1) - F(t, x_2, y_2)| &= |\lambda_1 x_1 + \lambda_2 y_1 - q(t) - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 y_2 + q(t)| \\ &= |\lambda_1(x_1 - x_2) + \lambda_2(y_1 - y_2)| \\ &\leq \lambda_1|x_1 - x_2| + \lambda_2|y_1 - y_2| \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 5.4.4 deki tüm koşullar sağlandığından bu denklem Hyers-Ulam anlamında karardır diyebiliriz. Eğer  $\varphi(t) := e^{\lambda t}$  ( $K = \frac{1}{\lambda} > 0$ ) şeklinde tanımlanırsa her  $t \in I$  için

$$\left| \int_{t_0}^t \varphi(s) ds \right| = \int_0^t e^{\lambda s} ds = \frac{1}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \leq \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} = \frac{1}{\lambda} \varphi(t)$$

sağlanır. Buradan da bu örnekteki gecikmeli diferensiyel denklemin Hyers-Ulam-Rassias anlamında kararlı olduğunu söyleyebiliriz.

### 5.5. $y^{(n)} = g(t)y(t - \tau) + h(t)$ Formundaki Gecikmeli Lineer Diferensiyel Denklemlerin Hyers-Ulam Kararlılığı

2015 yılında Huang ve Li (Huang ve Li, 2016),  $y^{(n)} = g(t)y(t - \tau) + h(t)$  formundaki gecikmeli diferensiyel denklemin Hyers-Ulam anlamında kararlı olduğu üç farklı metot ile ispatlamışlardır. Huang ve Li ilk olarak açık dönüşüm teoremini kullanarak ispatlamışlar, daha sonra doğrudan bir ispat yapmışlar, en son da ispatlarında sabit nokta metodunu kullanmışlardır. Biz tezimizde bu ispatlardan sadece doğrudan ispata değineceğiz.

$\Gamma^n[a, b; \tau]$  ile  $[a - \tau, b]$  aralığından  $\mathbb{R}$ 'ye tanımlı ve  $[a, b]$  aralığında  $n$  kez sürekli ve türevlenebilir fonksiyonların ailesini adlandıralım.

## 5.5.1. Teorem

Eğer,  $m$  pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $t \in [0, m\tau]$  için  $f \in \Gamma^n(0, m\tau; \tau)$

$$|f^{(n)}(t) - g(t)f(t - \tau) - h(t)| \leq \varepsilon$$

koşulunu sağlıyorsa, o zaman  $y^{(n)} = g(t)y(t - \tau) + h(t)$  diferensiyel denkleminin öyle bir  $f_0 \in \Gamma^n(0, m\tau; \tau)$  çözümü vardır ki her  $t \in [-\tau, m\tau]$  için,  $K$  sadece  $g(t)$  ve  $[-\tau, m\tau]$  aralığına bağlı pozitif bir sabit olmak üzere,

$$|f(t) - f_0(t)| \leq K\varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar (Huang ve Li, 2016).

*İspat*

$f_0 \in \Gamma(0, \tau; \tau)$  fonksiyonunu her  $k \in \{0, 1, \dots, m - 1\}$  için

$$f_0(t) = f(t), \quad t \in [-\tau, 0]$$

$$f_0(t) = \int_{k\tau}^t \left[ \dots \int_{k\tau}^{v_3} \left[ \int_{k\tau}^{v_2} (g(v_1)f_0(v_1 - \tau) + h(v_1)) dv_1 + f^{(n-1)}(k\tau) \right] dv_2 \dots + f'_0(k\tau) \right] dv_n \\ + f_0(k\tau), \quad t \in [k\tau, (k+1)\tau]$$

olarak tanımlayalım.

Bu eşitlikteki  $f_0$  fonksiyonu, her  $0 \leq i \leq n - 1$  için  $f_0^{(i)}(0) = f_0^{(i)}(0^+)$  ve her  $k \geq 0$ ,  $0 \leq i \leq n - 1$  için  $f_0^{(i)}(k\tau) = f_0^{(i)}(k\tau^-)$  şartlarını sağlamaktadır.

Burada tanımlanan  $f_0$  fonksiyonu iyi-tanımlıdır ve  $y^{(n)} = g(t)y(t - \tau) + h(t)$  denkleminin bir çözümüdür.  $f_0$  fonksiyonu için şu ifadeler yazılabilir:

$$[-\tau, 0] \text{ aralığında } |f_0(t) - f(t)| = 0,$$

$[(j-1)\tau, j\tau]$  aralığında her  $1 \leq j \leq m$  için

$$\left| f_0^{(n)}(t) - f^{(n)}(t) \right| \leq |f_0(t-\tau) - f(t-\tau)| \sup_{t \in [(j-1)\tau, j\tau]} |g(t)| + \varepsilon,$$

ve her  $0 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq m$  için

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [(j-1)\tau, j\tau]} \left| f_0^{(i)}(t) - f^{(i)}(t) \right| \\ & \leq \sup_{t \in [(j-1)\tau, j\tau]} \left| f_0^{(i+1)}(t) - f^{(i+1)}(t) \right| \tau + \left| f_0^{(i)}((j-1)\tau) - f^{(i)}((j-1)\tau) \right| \text{ olur.} \end{aligned}$$

Daha sonra  $\{a_{i,j}\}_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m}$  dizisini şu şekilde tanımlayalım.

$$a_{i,0} = 0, \quad \forall 0 \leq i \leq n;$$

$$a_{n,j} = a_{0,j-1} \sup_{t \in [(j-1)\tau, j\tau]} |g(t)| + 1, \quad \forall 1 \leq j \leq m;$$

$$a_{i,j} = \tau a_{i+1,j} + a_{i,j-1}, \quad \forall 0 \leq i \leq n-1.$$

$[(j-1)\tau, j\tau]$  aralığında her  $1 \leq j \leq m$  ve her  $0 \leq i \leq n$  için

$$\left| f_0^{(i)}(t) - f^{(i)}(t) \right| \leq a_{i,j} \varepsilon$$

bulunur.

Her  $a_{i,j}$  negatif olmadığı için her  $1 \leq j \leq m$  için  $a_{0,m} \geq a_{0,j}$  olur.

Buradan da her  $t \in [-\tau, m\tau]$  için

$$|f_0(t) - f(t)| \leq a_{0,m} \varepsilon$$

bulunur ve  $K = a_{0,m}$  alabilir ve ispat tamamlanmış olur (Huang ve Li, 2016).



## 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada ilk olarak birinci basamaktan diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı incelenmiştir. Sonrasında ise gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları incelenmiştir.

Birinci Basamaktan Gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları üzerine çalışmalar özellikle 2010 yılından sonra artmıştır. Bu konu ile alakalı olarak çalışmamızda de Jung ve Brzdęk'in, Otrocol ve Ilea'nın, Tunç ve Biçer'in, Öğrekçi'nin ve Huang ve Li'nin çalışmaları incelenmiştir. Bu çalışmaların dışında gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılıkları üzerine çalışmalar mevcuttur. Bu çalışmalarda birinci basamaktan lineer ve lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin, ikinci ve yüksek basamaktan lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam ve Hyers-Ulam-Rassias kararlılıkları incelenmektedir. Zada, Faisal ve Li'nin 2017 yılında lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılıkları üzerine, 2016 yılında birinci basamaktan impulsive gecikmeli diferensiyel denklemler üzerine çalışmaları vardır. Zada ve Shah, 2018 yılında birinci basamaktan lineer olmayan gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılığı ve 2019 yılında lineer olmayan implicit kesirli diferensiyel denklemlerin üzerine çalışmalar yapmıştır. 2018 yılında Biçer ikinci basamaktan gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam-Rassias kararlılığını incelemiştir. Bunların haricinde yine kesirli gecikmeli diferensiyel denklemlerin Hyers-Ulam kararlılıkları üzerine çeşitli çalışmalar mevcuttur. Bu açıklamaların ışığında bundan sonra bu çalışmalar genişletilebilir ve teoremlerin koşulları iyileştirilebilir. Ayrıca son yıllarda popülerliğini kazanan ve giderek artan bir şekilde çalışmaların yapıldığı zaman skalası üzerinde dinamik denklemlerin gecikmeli formlarında bu kararlılıklar çalışabilir.



## KAYNAKLAR

- Alsina, C. and Ger, R. (1998). On some inequalities and stability results related to the exponential function. *Journal Inequality Applications*, 2(4), 373-380.
- Başcı, Y., Öğrekçi, S. and Mısır, A. (2019). Hyers-Ulam-Rassias stability for Abel-Riccati type first order differential equations. *Gazi University Journal Of Science*, 32, 1238-1252.
- Bayraktar, M. (2006). *Fonksiyonel analiz* (Üçüncü Baskı). Ankara: Gazi Kitabevi.
- Biçer, E. (2018). İkinci mertebeden gecikmeli bir diferansiyel denklemin Hyers-Ulam Rassias kararlılığı. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 8(2), 249-254.
- Çakar, Ö. (2002). *Fonksiyonel analize giriş*. Ankara: Ankara Üniversitesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları.
- Huang, J. and Li, Y. (2016). Hyers-Ulam stability of delay differential equations of first order. *Mathematische Nachrichten*, 289(1), 60–66.
- Hyers, D. H. (1941). On the stability of the linear functional equation. *Proceedings of the National Academy of Science of the United States America*, 27, 222-224.
- Jung, S. M. (2005). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Journal of Mathematics Analysis and Application*, 311, 139-146.
- Jung, S. M. (2010). A fixed point approach to the stability of differential equations  $y'=F(x,y)$ . *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. Second Series*, 33, 47-56.
- Jung, S. M. and Brzdek, J. (2010). Hyers-Ulam stability of the delay equation  $y'(t)=\lambda y(t-\tau)$ . *Abstract and Applied Analysis*, 1-10.
- Miura, T. (2002). On the Hyers-Ulam stability of a differentiable map. *Science Mathematics Japon*, 55, 17–24.
- Miura, T., Jung, S. M. and Takahasi, S. E. (2003). A characterization of Hyers-Ulam stability of first order linear differential operators. *Journal of Mathematical Analysis and Application*, 286(1), 136-146.
- Miura, T., Jung, S. M. and Takahasi, S. E. (2004). Hyers-Ulam-Rassias stability of the Banach space valued linear differential equations  $y' = \lambda y$ . *Journal of the Korean Mathematical Society*, 41(6), 995-1005.
- Miura, T., Takahasi, S. E. and Choda, H. (2001). On the Hyers-Ulam stability of real continuous function valued differentiable map. *Tokyo Journal of Mathematics*, 24, 467-476.
- Obłozza, M. (1993). Hyers stability of the linear differential equation. *Rocznik Naukowo Dydaktyczny Prace Matematyczne*, 13, 259-270.

- Onitsuka, M. and Shoji, T. (2017). Hyers-Ulam stability of first-order homogeneous linear differential equations with a real-valued coefficient. *Applied Mathematics Letters*, 63, 102-108.
- Otrocol, D. and Ilea, V. (2013). Ulam stability for a delay differential equation. *Central European Journal of Mathematics*, 7, 1296-1303.
- Öğrekçi, S. (2019). Stability of delay differential equations in the sense of Ulam on unbounded intervals. *An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications*, 9(2), 125-131.
- Qarawani, M. N. (2014). On Hyers-Ulam-Rassias stability for Bernoulli's and first order linear and nonlinear differential equations. *British Journal of Mathematics and Computer Science*, 4(11), 1615-1628.
- Rassias, J. M. (1989). Solution of a problem Ulam. *Journal Of Approximation Theory*, 57, 268-273.
- Rus, I. A. (2001). *Generalized contractions and applications*. Cluj-Napoca: Cluj University Press.
- Tunç, C. and Biçer, E., (2015). Hyers-Ulam-Rassias stability for a first order functional differential equation. *Journal of Mathematical and Fundamental Science*, 47, 143–153.
- Wang, J., Zada, A. and Li, W. (2018). Ulams-type stability of first-order impulsive differential equations with variable delay in Quasi-Banach spaces. *Advances in Difference Equations, International Journal of Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(5), 553–560.
- Wang J. R. and Zhang Y. (2014). Ulam-Hyers-Mittag-Leffler stability of fractional-order delay differential equations. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Optimization Research*, 63(8), 1181-1190.
- Wang, J. R., Zhou, Y. and Feckan, M. (2012). Nonlinear impulsive problems for fractional differential equations and Ulam stability. *Computers and Mathematics with Applications*, 64, 3389-3405.
- Wang, G., Zhou, M. and Sun, L. (2008). Hyers-Ulam stability of linear differential equations of first order. *Applied Mathematics Letters*, 21(10), 1024-1028.
- Zada, A., Faisal, S. and Li, Y. (2016). Hyers-Ulam-Rassias stability of non-linear delay differential equations. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 4713-4721.
- Zada, A. and Shah, S. (2018). Hyers-Ulam stability of first-order non-linear delay differential equations with fractional integrable impulses. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 47(5), 1196-1205.



*GAZİ GELECEKTİR..*