

**T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

DOKTORA TEZİ

**BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE
ÖZELLİKLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN
DÜZGÜN NÜMERİK METOTLAR**

Muhammet Enes DURMAZ

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

**MATEMATİK
ANABİLİM DALI**

**ERZİNCAN
2021
Her Hakkı Saklıdır.**

ÖZET

Doktora Tezi

BİRİNCİ VE İKİNCİ MERTEBEDEN SİNGÜLER PERTÜRBE ÖZELLİKLİ İNTEGRO-DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN DÜZGÜN NÜMERİK METOTLAR

Muhammet Enes DURMAZ

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

Bu tez çalışmasında, ilk önce birinci mertebeden singüler pertürbe özellikli Fredholm integro-diferansiyel denklem için bir başlangıç değer problemi ele alınmıştır. Sürekli problemin özellikleri verilmiş, kalan terimi integral formunda olan ve baz fonksiyonu içeren kuadratür formülleri kullanılarak düzgün ve Shishkin şebekelerde fark şeması oluşturulmuştur. Yaklaşık çözümün kesin çözüme ε -parametresine göre düzgün yakınsak ve yakınsama hızının düzgün şebekede birinci mertebeden, Shishkin şebekede ise ikinci mertebeden olduğu gösterilmiştir. Ardından, ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli Fredholm integro-diferansiyel denklem için sınır değer problemi ele alınmıştır. Sürekli problemin özellikleri verilmiş, kuadratür formülleri kullanarak düzgün ve Shishkin şebekelerde fark şeması oluşturulmuştur. Yaklaşık çözümün kesin çözüme ε -parametresine göre düzgün yakınsak ve yakınsama hızının düzgün şebekede birinci ve ikinci mertebeden, Shishkin şebekede ise ikinci mertebeden olduğu gösterilmiştir. Son olarak, self-adjoint olmayan ve sıfıncı mertebeden indirgenmiş denklemlerle ikinci mertebeden singüler pertürbe özellikli Fredholm integro-diferansiyel denklem için sınır değer problemi ele alınmıştır. Sürekli problemin özellikleri verilmiş, kuadratür formülleri kullanarak Shishkin şebekede fark şeması oluşturulmuştur. Yaklaşık çözümün kesin çözüme ε -parametresine göre düzgün yakınsak ve yakınsama hızının ikinci mertebeden olduğu gösterilmiştir. Sunulan yöntemler ayrı ayrı nümerik örnekler ile desteklenmiştir.

2021, 134 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Düzgün yakınsaklık, Fredholm integro-diferansiyel denklem, Kesin fark şeması, Shishkin şebeke, Singüler pertürbasyon, Sonlu fark metodu

ABSTRACT

PhD Thesis

UNIFORM NUMERICAL METHODS FOR FIRST AND SECOND ORDER SINGULARLY PERTURBED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Muhammet Enes DURMAZ

Erzincan Binali Yıldırım University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Gabil AMİRALİ

In this thesis, firstly, the initial value problem for first order singularly perturbed Fredholm integro-differential equation is discussed. The properties of the continuous problem are given, the difference scheme using the quadrature formulas with the remainder term in integral form and containing the basis functions is created in uniform and Shishkin meshes. It has been shown that the approximate solution is uniform convergent according to ε – parameter to the exact solution and the rate of convergence is of the first order in the uniform mesh and the second order in Shishkin mesh. Next, the boundary value problem for the second order singularly perturbed Fredholm integro-differential equation is discussed. The properties of the continuous problem are given, the difference scheme using the quadrature formulas is created in uniform and Shishkin meshes. It has been shown that the approximate solution is uniform convergent according to ε – parameter of the exact solution and the rate of convergence is of the first order and the second order in the uniform mesh and the second order in Shishkin mesh. Finally, boundary value problem for second order singularly perturbed Fredholm integro-differential equation with zeroth order reduced equation and non-self-adjoint form is discussed. The properties of the continuous problem are given, the difference scheme using the quadrature formulas is created in Shishkin mesh. It has been shown that the approximate solution is uniform convergent according to ε – parameter to the exact solution and the rate of convergence is of the second order. The presented methods are supported by various numerical examples.

2021, 134 Pages

Keywords: Exact difference scheme, Finite difference method, Fredholm integro-differential equation, Shishkin mesh, Singular perturbation, Uniform convergence

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasında ve tüm çalışmalarında bana destek olup katkı sağlayan bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, kıymetli fikirlerini benimle paylaşan değerli danışman hocam Prof. Dr. Gabil AMİRALİ'ye, en içten sevgi, saygı ve sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Doktora eğitimi sürecinde önerileriyle yol gösteren, her türlü yardımlarını esirgemeyen ve sürekli bilgilerine başvurduğum Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Mustafa KUDU ve Arş. Gör. Ömer YAPMAN hocalarıma emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Doktora sürecinde ortak bilimsel çalışmalar yaptığımız, değerli bilgilerine müracaat ettiğim, Prof. Dr. İlhami AMİRALİ'ye ve Prof. Dr. Musa ÇAKIR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında olduğu gibi lisansüstü eğitimi boyunca da bana inanıp maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem Nevin DURMAZ'a, babam Muhsin DURMAZ'a, dualarını her daim hissettiğim kardeşlerim Yunus Emre ve Mekiye Nur Hayrunnisa DURMAZ'a, her türlü destekleriyle bugünlere gelmemde büyük payları olan babaanneme, amcalarım; İhsan, Yasin ve Lokman DURMAZ'a, halalarım, yengelerime, kuzenlerime ve ilk günden itibaren neşesi ile beni motive eden kıymetli eşim Habibe DURMAZ'a, ayrıca bana destek olan tüm dostlarıma sonsuz teşekkür ederim.

Muhammet Enes DURMAZ

Temmuz, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
TABLolar LİSTESİ.....	viii
SİMGELER ve KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. KURAMSAL TEMELLER	8
3.1. Pertürbasyon Teorisi	8
3.2. Fredholm İntegral Denklem	10
3.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu	10
3.4. Düzgün ve Düzgün Olmayan Şebeke	10
3.5. Şebeke Normları	11
3.6. Düzgün Şebekede Fark Türevleri	11
3.7. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Türevleri.....	12
3.8. Genelleştirilmiş Dikdörtgen Kuralı.....	13
3.9. Genelleştirilmiş Yamuk (Trapezoidal) Kuralı	13
3.10. Ayırık Maksimum Prensibi	14
3.11. İnterpolasyon Kuadratür Formülleri	14
3.12. Diferansiyelleme Formülü	15
3.13. Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık	16
3.14. Fark Şemasının Kararlılığı	16
4. MATERYAL ve YÖNTEM	18
4.1. Birinci Mertebeden Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro- Diferansiyel Denklem İçin Düzgün Yakınsak Fark Şemaları.....	18
4.1.1. Düzgün şebeke durumu.....	18
4.1.1.1. Sürekli problemin bazı özellikleri.....	18

4.1.1.2.	Fark şemasının kurulması	21
4.1.1.3.	Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi	24
4.1.1.4.	Nümerik sonuçlar.....	27
4.1.2.	Parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) durumu	29
4.1.2.1.	Sürekli problemin bazı özellikleri.....	29
4.1.2.2.	Fark şemasının kurulması	31
4.1.2.3.	Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi	36
4.1.2.4.	Nümerik sonuçlar.....	42
4.2.	İkinci Mertebeden Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Düzgün Yakınsak Fark Şemaları	44
4.2.1.	Düzgün şebekede $O(h)$ durumu	45
4.2.1.1.	Sürekli problemin bazı özellikleri.....	45
4.2.1.2.	Fark şemasının kurulması	50
4.2.1.3.	Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi	54
4.2.1.4.	Nümerik sonuçlar.....	57
4.2.2.	Düzgün şebekede $O(h^2)$ durumu	59
4.2.2.1.	Sürekli problemin bazı özellikleri.....	59
4.2.2.2.	Fark şemasının kurulması	62
4.2.2.3.	Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi	64
4.2.2.4.	Nümerik sonuçlar.....	77
4.2.3.	Parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) durumu	79
4.2.3.1.	Sürekli problemin bazı özellikleri.....	79
4.2.3.2.	Fark şemasının kurulması	79
4.2.3.3.	Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi	89
4.2.3.4.	Nümerik sonuçlar.....	98
4.3.	Konvektif Terim İçeren Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro- Diferansiyel Denklem İçin Düzgün Yakınsak Fark Şeması	99

4.3.1. Parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) durumu	100
4.3.1.1. Sürekli problemin bazı özellikleri.....	100
4.3.1.2. Fark şemasının kurulması	101
4.3.1.3. Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi	114
4.3.1.4. Nümerik sonuçlar.....	122
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	127
KAYNAKLAR	129
EKLER.....	134
Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar	134



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Singüler pertürbe özellikli problemin ε 'a göre değişimi.....	9
Şekil 4.1. $N = 16, 32, 64, 128, 256$ değerleri için hata eğrileri	126
Şekil 4.2. $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrileri ..	126



TABLÖLER LİSTESİ

Sayfa

Tablo 4.1. (4.30)-(4.31) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları	29
Tablo 4.2. (4.74)-(4.75) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N Shishkin şebekesi üzerinde e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları	44
Tablo 4.3. (4.119)-(4.120) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları	58
Tablo 4.4. (4.140)-(4.141) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları	78
Tablo 4.5. (4.203)-(4.204) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N Shishkin şebekesi üzerinde e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları	99
Tablo 4.6. (4.230)-(4.231) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N Shishkin şebekesi üzerinde e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları	125

SİMGELER ve KISALTMALAR

Simgeler

ε	Pertürbasyon Parametresi
N	Şebeke Elemanlarının Sayısı
h	Düzgün Şebekede Adım Uzunluğu
h_i	Düzgün Olmayan Şebekede Adım Uzunluğu
C	ε ve N 'den Bağımsız Sabit
$C^n[0, l]$	$[0, l]$ Bölgesinde n 'inci Mertebeden Sürekli Türevlere Sahip Fonksiyonlar Kümesi
u	Diferansiyel Problemin Çözümü
y	Sonlu Fark Probleminin Çözümü
g_i	$g(x)$ Fonksiyonunun x_i Şebeke Noktasındaki Değeri
$\sigma, \sigma_1, \sigma_2$	Parçalı Düzgün Şebekede (Shishkin Mesh) Geçiş Noktası
$O(h^p)$	Yakınsaklık Hızı
ω_N	Şebeke

Kısaltmalar

FİDD	Fredholm İntegro Diferansiyel Denklem
SPFİDD	Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem
SPP	Singüler Pertürbe Özellikli Problem
SPVİDD	Singüler Pertürbe Özellikli Volterra İntegro-Diferansiyel Denklem

1. GİRİŞ

Evrende birçok olay bazı parametrelere göre anlık değişim göstermektedir. Ortaya çıkan bu anlık değişime uygulamalı bilimlerde *pertürbasyon teorisi* denir. Teoriyi literatüre kazandıran kişi, 12 Ağustos 1904 yılında Almanya'nın Heidelberg kentinde düzenlenen 3. Uluslararası Matematik Kongresinde çok az sürtünme ile akışkanların hareketi üzerine başlıklı on altı sayfalık sunumunda sınır katman kavramını ve bunun sürüklenme ve aerodinamik hale getirmek için öneminden bahseden Ludwig Prandtl olmuştur (Prandtl, 1905). Pertürbasyon teorisi, regüler ve singüler pertürbasyon olarak ikiye ayrılır. Bu çalışmada singüler pertürbe özellikli problemler ile ilgilenilecektir. Bu tip problemler, en yüksek mertebeden türevlerin katsayılarının pozitif küçük bir parametre olduğu problemler olarak bilinmektedir. Bu problemlerin çözümü, tanım bölgesinin bazı kısımlarında hızlı ve düzensiz, bazı kısımlarda ise yavaş ve düzenli değişir. Hızlı değişimin olduğu sınır katlarında çözümün türevleri sınırsızdır (Doolan vd., 1980; Nayfeh, 1993; Barbu ve Morosanu, 2007; Shishkin ve Shishkina, 2008; O'Malley, 2013; Roos vd., 2014; Madhu, 2016). Bu nedenle klasik nümerik metotlar çözümün ani değiştiği yerlerde kararsızlık gösterir ve uygulanması objektif sonuçlar vermez, çünkü sınır katlarında çözüme daha kesinlikli yaklaşılması beklentisiyle şebeke adımları küçültülse dahi nümerik çözüm kesin çözüme genelde yakınsamaz. Bu özelliğinden dolayı bu tip problemlerin çözümü için ε -parametresine göre düzgün yakınsaklık özelliğini taşıyan nümerik metotların kullanılması büyük önem taşımaktadır.

İntegral denklemler kısaca, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak adlandırılır. Bu ifade yeterli ve kapsayıcı bir tanım değildir. Bu sebeple integral denklemlerini kendi sınıfı içinde değerlendirmek gerekir. İntegral denklemler önceleri düzensiz ve rastgele çalışılmıştır. 19. yüzyılın başlarından itibaren sistemli ve etkin bir şekilde çalışılmaktadır. Uygulamalı matematik, fizik ve mühendislik uygulamalarında geniş bir çalışma sahası mevcuttur. 1823 yılında mekanik bir problem üzerinde çalışırken integral denkleme tesadüfen rastlayan Abel, denklem ile tanışan ilk bilim insanıdır. İntegral denklem terimini ilk kullanan 1888 yılında De Bois Reymond olmuştur. Sonraki dönemler de birçok bilim insanı tarafından çalışılmıştır. İtalyan matematikçi Vito Volterra 1887 yılında yaptığı çalışmada integral denklemler teorisinin gelişimine önemli katkı sunmuştur. İntegrasyon limitlerinden en az birinin değişken olduğu yeni özel bir integral denklem tanımlamıştır. Bu denklem, literatüre Volterra

integral denklemi olarak geçmiştir. Benzer bir teori de 1903'te Eric İvan Fredholm tarafından yayınlanan bir makalede, integrasyon limitlerinin her ikisinin de sabit olduğu yeni özel bir integral denklem tanımlamıştır. Bu denklem de literatüre Fredholm integral denklem olarak geçmiştir (Aksoy, 1998).

Matematik, fizik ve mühendislikte bazen tek bir denklem ile ifade edilemeyen problemler vardır. Bu yüzden bu tip problemler birden fazla bilinmeyen fonksiyon içeren integral, diferansiyel veya bunların birleşimi ile oluşan integro-diferansiyel denklemlerin bir bütünü olarak ifade edilebilirler.

İntegro-diferansiyel denklem kısaca, $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun hem integrali hem de türevlerini içeren fonksiyondur. İntegro-diferansiyel denklemler de integrasyon limitlerine göre Volterra integro-diferansiyel ve Fredholm integro-diferansiyel denklem (FİDD) olarak sınıflandırılır.

Bu tez çalışmasında singüler pertürbe özellikli Fredholm integro-diferansiyel denklem (SPFİDD) üzerine çalışılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonraki kaynak özetleri bölümünde literatür taraması yer almaktadır.

Üçüncü bölümde tez içerisinde kullanılan temel tanım, teorem ve notasyonlar bulunmaktadır.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, birinci mertebeden lineer SPFİDD için başlangıç değer problemi

$$Lu := \varepsilon u' + a(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in (0,l],$$

$$u(0) = A,$$

ele alınmıştır. Burada $\varepsilon \in (0,1]$ pertürbasyon parametresi, λ ise reel bir parametredir.

$a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ ($x \in [0,l]$) ve $K(x,s)$ ($(x,s) \in [0,l] \times [0,l]$) yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu problemin $u(x)$ çözümü, küçük ε değerleri için $x=0$ civarında

sınır katına sahiptir. Dördüncü başlığın ilk alt başlığında ilk olarak problemin düzgün şebeke üzerinde $O(h)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik sonuçları ayrı ayrı incelenmiştir. Dördüncü başlığın ilk alt başlığında ikinci olarak problemin parçalı düzgün şebekede (Shishkin mesh) $O(N^{-2} \ln N)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik sonuçları ayrı ayrı incelenmiştir.

Daha sonra, ikinci mertebeden lineer SPFİDD için sınır değer problemi

$$Lu := -\varepsilon u'' + a(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B,$$

ele alınmıştır. Burada $\varepsilon \in (0,1]$ pertürbasyon parametresi, λ ise reel bir parametredir. $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ ($x \in [0,l]$) ve $K(x,s)$ ($(x,s) \in [0,l] \times [0,l]$) yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu problemin $u(x)$ çözümü, küçük ε değerleri için $x=0$ ve $x=l$ civarında iki sınır katına sahiptir. Dördüncü başlığın ikinci alt başlığında ilk olarak problemin düzgün şebeke üzerinde $O(h)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik sonuçları ayrı ayrı incelenmiştir. Dördüncü başlığın ikinci alt başlığında ikinci olarak problemin düzgün şebekede $a'(0) = a'(l) = 0$, $K(x,0) = K(x,l) = 0$ şartları altında $O(h^2)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik sonuçları ayrı ayrı incelenmiştir. Dördüncü başlığın ikinci alt başlığında üçüncü olarak problemin parçalı düzgün şebekede (Shishkin mesh) $O(N^{-2} \ln N)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik sonuçları ayrı ayrı incelenmiştir.

Üçüncü olarak, konvektif terim içeren ikinci mertebeden lineer SPFİDD için sınır değer problemi

$$Lu := \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x)u' - b(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in (0,l),$$

$$u(0)=0, \quad u(l)=0$$

ele alınmıştır. Burada $\varepsilon \in (0,1]$ bir pertürbasyon parametresi, λ ise reel bir parametredir. $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq \beta > 0$, $f(x)$ ($x \in [0,l]$) ve $K(x,s)$ ($(x,s) \in [0,l] \times [0,l]$) bazı düzgünlük koşullarını sağlayan yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında bu probleminin $u(x)$ çözümü, küçük ε değerleri için $x=0$ ve $x=l$ civarında iki sınır katına sahiptir. Bu problemin parçalı düzgün şebekede (Shishkin mesh) $O(N^{-2} \ln^2 N)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik sonuçları ayrı ayrı incelenmiştir.

Sonuç bölümünde tez de yapılan çalışmaları özetleyen sonuç ve öneriler kısmı yer almaktadır.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Birçok bilimsel çaba, nedenler ve sonuçlar arasındaki ilişkiye yöneliktir. Sebep küçük etki büyük olduğu zaman bu durum daha merak uyandırıcı hale gelir. Singüler pertürbe özellikli problem (SPP) de bu sebepten oldukça ilgi duyulan bir alan olmuştur. Bu problem fen bilimleri, tıp, mühendisliğin çeşitli alanları ve benzer bilim dallarında ortaya çıkmaktadır. Örneğin; reaksiyon difüzyon süreçleri, elastik kuantum mekaniği, nükleer reaktörler, aerodinamik, akışkanlar dinamiği, akışkanlar mekaniği, artırılmış gaz dinamik, plazma dinamik, manyetik dinamik, kütlenin hareketi, ışık yayan dalgalar, plastik, oşinografi, meteoroloji, iletişim hatları, yayılma teorisi, elektrik akımı, nüfus artışının birkaç modeli, kalıtsal olayların matematiksel modeli v.b. (Doolan vd., 1980; O'Malley, 2013; Skellam, 1991; Nayfeh, 1993; Kevorkian ve Cole, 1996; Farrell vd., 2000; Miller vd., 2012; Roos vd., 2014). SPP'lerin çözümünde kullanılan iki tür yaklaşım vardır. Bunlar, nümerik ve asimptotik çözüm yöntemleridir. Bu tür problemlerin çözümünde nümerik metotlar oldukça önemli yer tutar. Küçük ε parametre değerleri için bu tür problemleri çözmek için standart nümerik metotlar kararlı olmadığından kesin sonuç vermezler. Bu nedenle uygun nümerik metotlar geliştirmek önemlidir. SPP'ler ve bunların nümerik analizi hakkında daha detaylı bilgi için (Bakhvalov, 1969; Doolan vd., 1980; Farrell vd., 2000; Amiraliev ve Duru, 2002; Kadalbajoo ve Patidar, 2002; Boglaev, 2004; Shishkin ve Shishkina, 2008; Kadalbajoo ve Gupta, 2009; Roos vd., 2014) referanslarına bakılabilir. Ayrıca SPP'lerin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar (Nayfeh, 1993; Kadalbajoo ve Patidar, 2002; O'Malley, 2013) tarafından yapılmıştır.

Tek bir denklem bazı problemleri ifade edemeyebilir. Bu tür problemler, birden çok bilinmeyen fonksiyon içeren integral, diferansiyel veya bunların birleşiminden oluşan integro-diferansiyel denklemler ile ifade edilebilirler. İntegro-diferansiyel denklemler, radyasyon problemleri, buz şekillendirme işlemi, ilaç emilimi, ısı iletimi, termoelastikiyet, mekanik, ekonomi, astronomi, nüfus dinamiği, elektromanyetizma, opsiyon fiyatlama modeli, viscoelasticity, dalgaların kırınımı ve nötron difüzyonu gibi birçok bilim uygulamalarında önemli rol oynamaktadır (Bloom, 1980; Kythe ve Puri, 2002; Cont vd., 2004; Rama ve Ekaterina, 2005; Polyanin ve Manzhirov 2008; Larsson vd., 2015; Brunner, 2018). Ayrıca integro-diferansiyel denklemlerin varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar birçok bilim insanı tarafından yapılmıştır (Balachandran ve Uchiyama,

2007; Xie, 2012). İntegro-diferansiyel denklemlerin büyük bir kısmı iyi bilinen kesin yöntemlerle çözülemez. Bu nedenle literatür taraması yapıldığında bu denklemleri çözmek için yüksek kesinlikli nümerik yöntemlerin kullanıldığı görülmektedir.

Zhao ve Corless (2006)'da farklı sınır koşullarına sahip FİDD'i çözmek için beşinci mertebeden kesinlikli kompakt sonlu fark yöntemi üzerinde çalışmışlardır. Adel vd. (2017)'de FİDD'i çözmek için uyarlanabilir bir sonlu eleman şeması sunulmuştur. Xue vd. (2018)'de FİDD'i için daha yüksek kesinlik ve yakınsak özelliklerle istenilen sonucu elde etmek için çekirdek teorisine dayanan yeni bir yöntem geliştirmişlerdir. Türkyılmazoğlu (2014)'te zayıf veya güçlü bir çekirdek fonksiyona sahip yüksek dereceli lineer FİDD'lerini çözmek için etkili bir yöntem sunmuştur. Ayrıca birçok bilim insanı, Legendre-Galerkin yöntemi (Fathy vd., 2014), Chebyshev sıralama yöntemi (Akyüz ve Sezer, 1999), dalgacık yöntemi (Danfu ve Xufeng, 2007), Adomian ayrıştırma yöntemi (Vahidi vd., 2009), Legendre sıralama yöntemi (Yalçınbaş vd., 2009), sinc sıralama yöntemi (Mohsen vd., 2007), Tau yöntemi (Hosseini ve Shahmorad, 2005) gibi FİDD'ler için etkili yöntemlerin geliştirilmesine odaklanmıştır

FİDD'ler ile ilgili yukarıda bahsedilen çalışmalar regüler durumlar için yapılmıştır. Yani; sınır tabakasının bulunmadığı denklemlerdir. SPFİDD'lerin nümerik çözümüne yönelik çalışmalar henüz yaygın değildir. SPFİDD'ler ile çözümün büyük eğimler içerdiği birçok bilimsel uygulamada yaygın olarak karşılaşılmaktadır. Yakın zamanda, (Amiraliyev vd., 2018)'de birinci mertebeden SPFİDD için düzgün şebeke üzerinde birinci mertebeden düzgün yakınsak üssel fark şeması sunulmuştur. (Amiraliyev vd., 2020)'de birinci mertebeden SPFİDD için parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) üzerinde $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli fark şeması elde etmişlerdir. (Amiraliyev vd., 2021)'de ikinci mertebeden SPFİDD için düzgün şebeke üzerinde $O(h)$ kesinlikli fark şeması sunmuşlardır. (Durmaz ve Amiraliyev, 2021)'de ikinci mertebeden SPFİDD için parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) üzerinde ikinci mertebeden düzgün yakınsak bir fark şeması elde etmişlerdir. Literatür taraması yapılırken SPFİDD'ler için çok az çalışma ile karşılaşılırken singüler pertürbe özellikli Volterra integro-diferansiyel denklem (SPVİDD) için daha çok ilgi olduğu gözlemlenmiştir. (Amiraliyev ve Şevgin, 2006)'da lineer bir SPVİDD'in nümerik çözümü için düzgün şebeke üzerinde ε parametresine göre birinci mertebeden düzgün yakınsak bir nümerik yöntem sunmuşlardır. (Sevgin, 2014)'te lineer olmayan bir

SPVİDD'in nümerik çözümü için Bakhvalov şebeke üzerinde ε parametresine göre düzgün yakınsak nümerik bir yöntem türetmiş ve maksimum normda ikinci mertebeden kesinliğe sahip olduğunu göstermiştir. (Kudu vd., 2016)'da gecikmeli SPVİDD'in nümerik çözümü parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) üzerinde kapalı sonlu fark şeması elde etmişlerdir. (Amiraliyev vd., 2019; Yapman vd., 2019)'da düzgün şebekede birinci mertebeden lineer ve lineer olmayan gecikmeli SPVİDD'i için birinci mertebeden düzgün yakınsaklığa sahip fark şemaları sunmuşlardır. (Amiraliyev ve Yapman, 2019)'da düzgün olmayan şebekede birinci mertebeden lineer gecikmeli SPVİDD'i için $O(N^{-1} \ln N)$ kesinliğine sahip üssel fark şeması sunmuşlardır. (Yapman ve Amiraliyev, 2020)'da parçalı düzgün şebekede (Shishkin mesh) birinci mertebeden lineer SPVİDD için $O(N^{-2} \ln N)$ kesinliğine sahip uygun fark şemasını kurmuşlardır. SPVİDD'ler ile ilgili detaylı olarak (Kauthen, 1997; Salama ve Evans, 2001; Bijura, 2002; Saadati vd., 2008; Iragi ve Munyakazi, 2018; Iragi ve Munyakazi, 2020; Mbroh vd., 2020) çalışmalarına ve bu çalışmaların referanslarına bakılabilir.

3. KURAMSAL TEMELLER

3.1. Pertürbasyon Teorisi

P_ε , yeterince küçük ε parametresine bağlı bir problem olmak üzere, bu problemde $\varepsilon = 0$ alındığında oluşan yeni P_0 problemine uygun *indirgenmiş problem* denir. P_ε problemi ile P_0 indirgenmiş problemi aynı mertebeden ve her iki problemde bir tek çözüme sahip ise P_ε problemine *regüler pertürbe özellikli problem* denir. Aksi durumda ise *SPP* denir (Miller vd., 2012; Amirali İ. ve Amirali G., 2018).

Örnek 3.1.

$$u'(x) + \varepsilon u(x) = 0, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$u(0) = 1$$

başlangıç değer problemi ele alınsın. Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = e^{-\varepsilon x}$$

şeklindedir. $u(x)$ çözümünü ε 'un artan pozitif kuvvetlerine göre

$$u(x) = 1 - \varepsilon x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 x^2 - \dots$$

gibi bir seri ile ifade edilmektedir. Ayrıca keyfi $x_0 \in [0, 1]$ sabiti için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 1$$

olduğu görülür. İndirgenmiş problem ana problem ile aynı mertebeden olup, çözümü $u_0(x) = 1$ şeklindedir. Dolayısıyla ele alınan bu başlangıç değer problemi regüler pertürbe özellikli problemidir.

Örnek 3.2.

$$\varepsilon u'(x) + u(x) = 0, \quad 0 < x \leq 1,$$

$$u(0) = 1$$

başlangıç değeri problemi ele alınsın. Bu problemin kesin çözümü

$$u(x) = e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

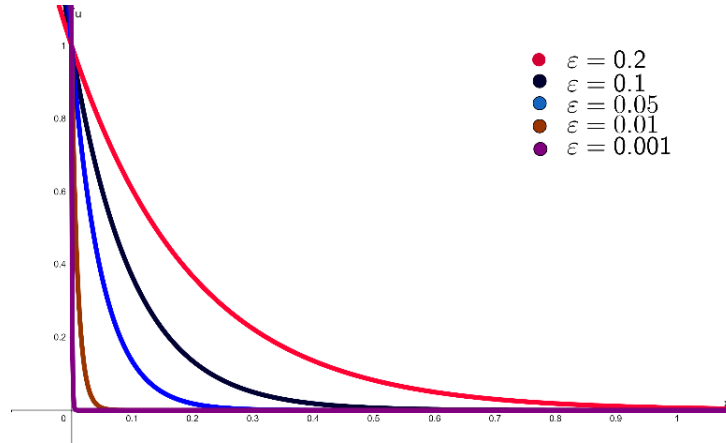
şeklindedir. Buradan ε 'a bağlı olmayan keyfi $x_0 \in (0,1]$ sabiti için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$$

olduğu görülür. Fakat tekrarlı limitlerin eşitliği $x = 0$ noktası için söz konusu değildir. Yani;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x) = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 1$$

şeklindedir. Bu tür eşitsizlikler singüler pertürbe özellikli diferansiyel denklemlere has bir özelliktir. Başlangıç ve sınır katının varlığının bir belirtisidir. Böylece problem $x = 0$ noktasında bir başlangıç katına sahiptir. Uygun indirgenmiş problemin çözümü $u_0(x) \equiv 0$ şeklindedir. Bu durum başlangıç şartını gereksiz kılmaktadır.



Şekil 3.1. SPP'in çözümünün ε 'a göre değişimi

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi ε küçüldükçe grafik eğrisi koordinat eksenlerine daha fazla yaslanmaktadır.

3.2. Fredholm İntegral Denklem

$f(x)$ ve $K(x,s)$ bilinen fonksiyonlar, x ve s $[a,b]$ aralığında değerler alabilen reel değişkenler, λ reel bir parametre ve $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere, integral sınırları sabit olan

$$u(x) - \lambda \int_a^b K(x,s)u(s)ds = f(x)$$

denkleminde *ikinci tip lineer Fredholm integral denklemi* denir (Krasnov vd., 1971). Burada $K(x,s)$ fonksiyonuna integral denklemin *çekirdeği* denir. $K(x,s)$ çekirdeği (x,s) düzleminin bir $\Omega\{a \leq x \leq b, a \leq s \leq b\}$ karesi üzerinde tanımlanmıştır. Ayrıca $K(x,s)$ çekirdeği ya sürekli ya da süreksiz noktalarında

$$\int_a^b \int_a^b |K(x,s)|^2 dx ds$$

iki katlı integralinin sonlu bir değeri vardır (Cerit, 1976).

3.3. Şebeke ve Şebeke Fonksiyonu

$[0,l]$ aralığında sonlu sayıda oluşan parçalanışa şebeke denir. Şebeke de x_i düğüm noktalarında tanımlanmış $g_i = g(x_i)$ fonksiyonuna *şebeke fonksiyonu* denir (Samarskii, 2001).

3.4. Düzgün ve Düzgün Olmayan Şebeke

$[0,l]$ aralığında düğüm noktaları eşit aralıklı ise

$$\bar{\omega}_N = \left\{ x_i = ih, i = 1, \dots, N; h = \frac{l}{N} \right\}$$

ifadesine $[0,l]$ aralığında tanımlanan *düzgün şebeke* denir. Burada h sabitine *şebeke adımı* denir. Ayrıca $[0,l]$ aralığında tanımlanan

$$\bar{\omega}_N = \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = l, h_i = x_i - x_{i-1}\}$$

ayrık noktalar kümesine ise $[0, l]$ aralığında tanımlanan *düzgün olmayan şebeke* denir.

Burada h_i ifadesine *şebeke adımı* denir (Samarskii, 2001).

3.5. Şebeke Normları

$[0, l]$ aralığında tanımlı

$$\|g\|_{\infty} \equiv \|g\|_{\infty, [0, l]} \equiv \|g\|_{C[0, l]} = \max_{0 \leq x \leq l} |g(x)|$$

ifadesine $g(x)$ fonksiyonunun $[0, l]$ aralığındaki *maksimum normu* denir (Isaacson ve Keller, 1994).

$\|g\|_{\infty, \bar{\omega}_N} = \max_{0 \leq i \leq N} |g_i|$ ifadesine *düzgün ve düzgün olmayan şebekelerde maksimum normun fark benzeri* denir (Isaacson ve Keller, 1994).

3.6. Düzgün Şebekede Fark Türevleri

$[0, l]$ aralığında tanımlı düzgün şebekede herhangi bir $g(x)$ fonksiyonu için,

$$g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h}$$

ifadesine *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$$g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h}$$

ifadesine *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$$g_{o_{x,i}} = \frac{g_{i+1} - g_{i-1}}{2h}$$

ifadesine *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$$g_{\bar{x},i} = \frac{g_{i+1} - 2g_i + g_{i-1}}{h^2}$$

ifadesine *ikinci mertebeden fark türevi* denir (Samarskii, 2001).

3.7. Düzgün Olmayan Şebekede Fark Türevleri

$[0, l]$ aralığında tanımlı düzgün olmayan şebekede herhangi bir $g(x)$ fonksiyonu için,

$$g_{x,i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{h_{i+1}}$$

ifadesine *birinci mertebeden ileri fark türevi*,

$$g_{\bar{x},i} = \frac{g_i - g_{i-1}}{h_i}$$

ifadesine *birinci mertebeden geri fark türevi*,

$$g_{\hat{x},i} = \frac{g_{i+1} - g_i}{\bar{h}_i}$$

ifadesine *birinci mertebeden fark türevi*,

$$g_{o_{x,i}} = \frac{g_{x,i} + g_{\bar{x},i}}{2}$$

ifadesine *birinci mertebeden merkezi fark türevi*,

$$g_{\bar{x}\bar{x},i} = \frac{g_{x,i} - g_{\bar{x},i}}{\bar{h}_i}$$

ifadesine *ikinci mertebeden fark türevi* denir. Burada

$$\bar{h}_i = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$$

şeklinde tanımlanmıştır (Samarskii, 2001).

3.8. Genelleştirilmiş Dikdörtgen Kuralı

$[0, l]$ aralığında yeterince düzgün $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^l f(x) dx = h \sum_{i=1}^N f\left(x_{i-\frac{1}{2}}\right) + R_N(f),$$

$$\left(x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, h = \frac{l}{N}; x_{i-\frac{1}{2}} = x_i - \frac{h}{2} \right)$$

İfadesine kalan terimi integral biçiminde olan *genelleştirilmiş dikdörtgen formülü* denir.

Burada $R_N(f)$ kalan terimi

$$R_N(f) = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi) \left[\frac{(x_i - \xi)^2}{2} - (x_i - x_{i-1}) T_1\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \xi\right) \right] d\xi$$

şeklindedir (Amirali ve Amirali, 2018). Burada $T_1\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} - \xi\right)$ terimi Eş. (3.6)'da tanımlanmıştır.

3.9. Genelleştirilmiş Yamuk (Trapezoidal) Kuralı

$[0, l]$ aralığında yeterince düzgün $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_0^l f(x) dx = \sum_{i=1}^N \frac{h_i}{2} (f_i + f_{i-1}) + R_N(f) \equiv \sum_{i=0}^N h_i f_i + R_N(f) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye kalan terimi integral biçiminde olan *genelleştirilmiş yamuk (trapezoidal) kuralı* denir. Burada $R_N(f)$ kalan terimi

$$R_N(f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - \xi)(x_{i-1} - \xi) f''(\xi) d\xi$$

ve

$$\hbar_0 = \frac{h_1}{2}, \quad \hbar_N = \frac{h_N}{2}$$

şeklindedir (Amirali ve Amirali, 2018).

3.10. Ayrık Maksimum Prensibi

$$l[y_i] = A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_0 = \mu_1, \quad y_N = \mu_2$$

sonlu fark problemi ele alınsın. Burada

$$A_i > 0, \quad B_i > 0, \quad D_i = C_i - A_i - B_i \geq 0$$

şartları her $i = 1, 2, \dots, N-1$ için gerçekleşmiş olsun. Bu durumda her $i = 1, 2, \dots, N-1$ için y_i , $y_i \neq \text{sabit}$ şebeke fonksiyonu iç düğüm noktasında $l[y_i] \geq 0$, $(l[y_i] \leq 0)$ şartını sağlasın. Bu durumda y_i , iç noktalarda yani her $i = 1, 2, \dots, N-1$ için maksimal pozitif değer (minimal negatif değer) alamaz. Bu duruma *maksimum prensibi* denir (Samarskii, 2001).

3.11. İnterpolasyon Kuadratür Formülleri

İlk olarak, $p(x) \in C[a, b]$ ağırlık fonksiyonu, $f(x)$ belirli bir fonksiyon ve σ – reel bir parametre olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) f(x) dx &= \left[\int_a^b p(x) dx \right] \{ \sigma f(b) + (1-\sigma) f(a) \} \\ &+ f[a, b] \int_a^b (x - x^{(\sigma)}) p(x) dx + R_n(f) \end{aligned} \quad (3.2)$$

eşitliği doğrudur. Burada kalan terim

$$R_n(f) = \int_a^b dx p(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n=1, 2$$

biçimindedir. Ayrıca burada

$$K_s(x, s) = T_s(x - \xi) - (b - a)^{-1}(x - a)(b - \xi)^s, \quad s = 0, 1, \quad (3.3)$$

$$x^{(\sigma)} = \sigma b + (1 - \sigma)a, \quad (3.4)$$

$$f[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad (3.5)$$

$$T_s(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^s}{s!}, & \lambda \geq 0; \\ 0, & \lambda < 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanmıştır.

İkinci olarak, $p(x) \in C^1[a, b]$ ağırlık fonksiyonu, $f(x)$ belirli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_a^b p(x) f'(x) dx = f[a, b] \int_a^b p(x) dx + R_n^*(f) \quad (3.7)$$

eşitliği doğrudur. Burada kalan terim

$$R_n^*(f) = - \int_a^b dx p'(x) \int_a^b f^{(n)}(\xi) K_{n-1}(x, \xi) d\xi, \quad f \in C^n, \quad n = 1, 2$$

biçimindedir (Amiraliyev ve Mamedov, 1995; Amirali ve Amirali, 2018).

3.12. Diferansiyelleme Formülü

Asimptotik değerlendirmelerin bulunmasında kullanılan

$$g'(x) = g[a_0, a_1] - \int_{a_0}^{a_1} K_0(\xi, x) g''(\xi) d\xi, \quad g \in C^2, \quad a_0 \leq x \leq a_1 \quad (3.8)$$

biçiminde ifade edilen eşitliğe *diferansiyelleme formülü* denir (Amirali ve Amirali, 2018).

Burada ifade edilen $g[a_0, a_1]$, Eş. (3.5)'te tanımlanmıştır.

3.13. Yakınsaklık ve Düzgün Yakınsaklık

$u(x)$ verilen problemin kesin çözümü, y_i bu probleme uygun fark probleminin çözümü olsun. $z = y - u$ ifadesine *hata fonksiyonu* denir. Ayrıca $\| \cdot \|_1$ belli bir şebekedeki herhangi bir norm olmak üzere

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \rightarrow 0$$

oluyorsa fark probleminin çözümü verilen problemin çözümüne yakınsaktır denir. Ayrıca yeterince küçük h değerleri için

$$h \rightarrow 0 \text{ iken } \|z\|_1 = \|y - u\|_1 \leq Ch^p, p > 0$$

şeklinde bir eşitsizlik söz konusu ise bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme $O(h^p)$ hızı ile yakınsar denir. Başka bir ifade ile yaklaşık çözüm $O(h^p)$ kesinliğine sahiptir denir. Eğer C sabiti h ve ε 'dan bağımsız ise bu durumda yaklaşık çözüm kesin çözüme ε 'a göre *düzgün yakınsaktır* denir (Samarskii, 2001).

3.14. Fark Şemasının Kararlılığı

L_h ve l_h , $\bar{\omega}_h$ 'da tanımlanan fonksiyonlar kümesinde etkili olan fark operatörleri, ω_h ve γ_h belli şebeke fonksiyonları olmak üzere

$$L_h y = \varphi_h, \quad x \in \omega_h,$$

$$l_h y = \chi_h, \quad x \in \gamma_h$$

fark problemi tanımlanabilir. Bu fark problemi, belli sınıflardan olan her bir ω_h ve γ_h başlangıç veri fonksiyonları ve yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için bir tek çözüme sahip olduğu varsayalım. Bu fark probleminin başlangıç veri fonksiyonları $\tilde{\varphi}_h$ ve $\tilde{\chi}_h$ olan çözümünü $\tilde{y}$ ile belirlensin. Eğer öyle, h 'dan bağımsız C_1 ve C_2 sabitleri varsa yeteri kadar küçük $h \leq h_0$ için

$$\|\tilde{y} - y\|_1 \leq C_1 \|\tilde{\phi}_k - \phi_h\|_2 + C_2 \|\tilde{\chi}_h - \chi_h\|_3$$

eşitsizliği sağlanıyor ise bu durumda fark şeması sağ tarafa ve sınır (veya başlangıç) şartına göre *kararlıdır* denir. Burada $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_3$ şebeke normlarıdır (Samarskii, 2001).



4. MATERYAL ve YÖNTEM

4.1. Birinci Mertebeden Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Düzgün Yakınsak Fark Şemaları

Bu bölümde birinci mertebeden lineer SPFİDD için başlangıç değer problemi ele alınmıştır. Bu problem için düzgün ve parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekelerde fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik özellikleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Aşağıda tanımlanan birinci mertebeden lineer SPFİDD için başlangıç değer problemi ele alınmıştır.

$$Lu := \varepsilon u' + a(x)u + \lambda \int_0^l K(x, s)u(s)ds = f(x), \quad x \in (0, l], \quad (4.1)$$

$$u(0) = A \quad (4.2)$$

problemde $\varepsilon \in (0, 1]$ pertürbasyon parametresi, λ ise reel bir parametredir. $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ ($x \in [0, l]$) ve $K(x, s)$ ($(x, s) \in [0, l] \times [0, l]$) yeterince düzgün fonksiyonlardır. (4.1)-(4.2) probleminin $u(x)$ çözümü, küçük ε değerleri için $x=0$ civarında sınır katına sahiptir.

4.1.1. Düzgün şebeke durumu

Bu bölümde (4.1)-(4.2) başlangıç değer problemi için $[0, l]$ üzerinde düzgün şebekede $O(h)$ kesinliğine sahip fark şeması elde edilmiştir. Fark şemasının kararlılığı ve pertürbasyon parametresine göre ayrık maksimum normda birinci dereceden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Sunulan metot nümerik örnek ile desteklenmiştir.

4.1.1.1. Sürekli problemin bazı özellikleri

Bu bölümde hata analizinde kullanılacak olan (4.1)-(4.2) probleminin kesin çözümü için bazı asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır.

Lemma 4.1. $v(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu

$$Lv(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$v(0) \geq 0$$

şartlarını sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

olur. Ayrıca bu durum *maksimum prensibi* olarak tanımlanır (Samarskii, 2001).

Lemma 4.2. Her $v(x) \in C^1[0, l]$ fonksiyonu için,

$$|v(x)| \leq |v(0)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l$$

değerlendirmesi doğrudur (Samarskii, 2001).

Lemma 4.3. $a, f \in C^1[0, l]$, $\frac{\partial}{\partial x} K(x, s) \in [0, l]^2$ ve

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds}$$

ise, (4.1)-(4.2) probleminin $u(x)$ çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C, \tag{4.3}$$

$$|u'(x)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq x \leq l \tag{4.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Öncelikle Eşitsizlik (4.3)'ün doğruluğu gösterilecektir.

$$\mathcal{L}v := \varepsilon v'(x) + a(x)v(x)$$

operatörü için maksimum prensibine göre (4.1)-(4.2) probleminden ve Lemma 4.1 koşulları dikkate alınır

$$\begin{aligned}\|u\|_{\infty} &\leq |A| + a^{-1} \|f\|_{\infty} + a^{-1} |\lambda| \max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| |u(s)| ds \\ &\leq |A| + a^{-1} \|f\|_{\infty} + a^{-1} |\lambda| \max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds \|u\|_{\infty} \\ &\leq C\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan Eşitsizlik (4.3)'ün doğruluğu açıktır.

Şimdi Eşitsizlik (4.4)'ün ispatı gösterilecektir.

$u'(0)$ değerlendirmesi için Denk. (4.1)'den

$$|u'(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| f(0) - a(0)A - \lambda \int_0^l K(0, s)u(s)ds \right|$$

yazılabilir. Buradan Lemma 4.1 şartları ve Eşitsizlik (4.3) birlikte ele alınır

$$|u'(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \quad (4.5)$$

olduğu açıktır. Denk. (4.1)'de bir kez türevi alınır

$$\varepsilon v'(x) + a(x)v(x) = F(x) \quad (4.6)$$

elde edilir. Burada

$$v(x) = u'(x)$$

$$F(x) = f'(x) - a'(x)u(x) - \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K(x, s)u(s)ds$$

biçimindedir. Lemma 4.3 şartları ve Eşitsizlik (4.3) birlikte düşünülürse

$$|F(x)| \leq C \quad (4.7)$$

eşitsizliği yazılabilir. Sonuç olarak Denk. (4.6) ve Eşitsizlik (4.7) dikkate alınır

$$u'(x) = u'(0)e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(s) ds} d\xi$$

elde edilir. Buradan Eşitsizlik (4.5) ve (4.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} |u'(x)| &\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{ax}{\varepsilon}} + \|F\|_\infty \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\frac{ax}{\varepsilon}} + Ca^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) \\ &\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Eşitsizlik (4.4) elde edilmiş oldu. Dolayısıyla ispat tamamlanmış oldu. $\square$

4.1.1.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde, (4.1)-(4.2) problemi için düzgün şebeke üzerinde fark şeması oluşturulacaktır. $[0, l]$ aralığında

$$\omega_N = \left\{ x_i = ih, i = 1, \dots, N, h = \frac{l}{N} \right\}, \quad \bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0\}$$

düzgün şebekesi ele alınsın. (4.1)-(4.2) problemi için fark şeması kurmaya aşağıdaki özdeşlik ile başlanacaktır.

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.8)$$

burada,

$$\varphi_i(x) = e^{-\frac{a_i}{\varepsilon}(x_i - x)}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

ve

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = \frac{1 - e^{-a_i \rho}}{a_i \rho}, \quad \rho = \frac{h}{\varepsilon}$$

biçimindedir. Ayrıca $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon \varphi'(x) + a_i \varphi(x) = 0, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

$$\varphi(x_i) = 1$$

probleminin çözümü olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. Kesin fark şemaları yöntemi (Samarskii, 2001, s. 207-214) ve Eş. (3.2), (3.7) interpolasyon kuadratur formülleri, Özdeşlik (4.8)'e uygulanırsa

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u'(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u'(x) + a(x_i)u(x)] \varphi_i(x) dx \\ &+ \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \quad (4.9) \\ &= \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i + R_i^{(1)} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i \rho}{1 - e^{-a_i \rho}} e^{-a_i \rho} \quad (4.10)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \quad (4.11)$$

şeklindedir. Ayrıca Özdeşlik (4.8)'in sağ tarafındaki terim için benzer şekilde

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx = f_i + R_i^{(2)} \quad (4.12)$$

yazılabilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx \quad (4.13)$$

biçimindedir. Özdeşlik (4.8)'de çekirdek fonksiyon içeren integral terim için Eş. (3.2) interpolasyon kuadratur formülü ve dikdörtgen kuralı ayrı ayrı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i(x) \int_0^l K(x, s) u(s) ds &= \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds + R_i^{(3)} \\ &= \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_j + R_i^{(3)} + R_i^{(4)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

elde edilir. Burada

$$R_i^{(3)} = -\chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_i} T_0(\xi - x) \left(\int_0^l \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) u(s) ds \right) d\xi \quad (4.15)$$

$$R_i^{(4)} = -\lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi - x_{j-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} [K(x_i, \xi) u(\xi)] d\xi \quad (4.16)$$

şeklindedir. Burada ifade edilen $T_0(\lambda)$, Eş. (3.6) da tanımlanmıştır.

Özdeşlik (4.8)'den Eş. (4.9), (4.12) ve (4.14) dikkate alınarak, $u(x_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}, i} + a_i u_i + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_j + R_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.17)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = \sum_{k=1}^4 R_i^{(k)}$$

biçiminde olup $R_i^{(k)}$, $(k=1, 2, 3, 4)$ kalan terimleri sırasıyla Eş. (4.11), (4.13), (4.15) ve (4.16) denklemlerinde sırasıyla ifade edilmiştir.

Sonuç olarak, Denk. (4.17) esas alınarak R_i ihmal edilirse, (4.1)-(4.2) problemi için

$$L_N y_i := \varepsilon \theta_i y_{\bar{x},i} + a_i y_i + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} y_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.18)$$

$$y_0 = A \quad (4.19)$$

fark şeması sunulur. Burada θ_i , Eş. (4.10)'da ifade edilmiştir.

4.1.1.3. Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi

Lemma 4.4.

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N h |K_{ij}|}$$

ise, (4.18)-(4.19) fark probleminin çözümü için

$$\|y\|_{\infty} \leq c_0 (|A| + \|f\|_{\infty}) \quad (4.20)$$

değerlendirmesi doğrudur. Burada

$$c_0 = \frac{1}{1 - |\lambda| \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N h |K_{ij}|}$$

şeklindedir.

İspat.

$$\mathcal{L} v_i := \varepsilon \theta_i v_{\bar{x},i} + a_i v_i, \quad 1 \leq i \leq N$$

fark operatörü için maksimum prensibi ve c_0 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \|y\|_{\infty} &\leq |A| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} + \alpha^{-1} |\lambda| \max_{0 \leq x \leq l} \sum_{j=1}^N h |K_{ij}| \|y\|_{\infty} \\ &\leq c_0 (|A| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty}) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise Eşitsizlik (4.20)'in doğruluğunu gösterir. $\square$

$z_i = y_i - u_i$ olsun. Denk. (4.17) ve (4.18)'e göre z_i yaklaşık çözüm hatası için

$$L_N z_i := \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i} + a_i z_i + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.21)$$

$$z_0 = 0 \quad (4.22)$$

problemi yazılabilir.

Eşitsizlik (4.20)'de $A=0$ ve $f=R$ olacak şekilde (4.21)-(4.22) problemine uygulanırsa

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq c_0 \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 4.5. $\frac{\partial}{\partial s} K(x, s) \in C[0, l]^2$ ve Lemma 4.3 şartları dikkate alınırsa R_i kalan terim için

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch \quad (4.23)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. Her bir $R_i^{(k)}$, $(k=1, 2, 3, 4)$ için ayrı ayrı değerlendirilecektir.

İlk olarak, $R_i^{(1)}$ kalan terimi ele alınırsa $a(x)$ için ortalama değer teoreminden

$$|a(x) - a(x_i)| \leq |a'(\xi_i)| |x - x_i| \leq Ch, \quad x_i \leq \xi_i \leq x$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik, $a \in C^1[0, l]$ ve Eşitsizlik (4.3) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |a'(\xi_i)| |x - x_i| |u(x)| \varphi_i(x) dx \\ &\leq Ch \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx \\ &= Ch \end{aligned} \quad (4.24)$$

hata değerdendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $R_i^{(2)}$ kalan terimi için yukarıdaki gibi benzer şekilde, $f(x)$ için ortalama değerd teoreminden

$$|f(x) - f(x_i)| \leq |f'(\eta_i)| |x - x_i| \leq Ch, \quad x_i \leq \eta_i \leq x$$

yazılabilir. Bu eşitsizlik ve $f \in C^1[0, l]$ dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f'(\eta_i)| |x - x_i| \varphi_i(x) dx \\ &\leq Ch \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx \\ &= Ch \end{aligned} \tag{4.25}$$

hata değerdendirmesi elde edilir.

Üçüncü olarak, $R_i^{(3)}$ kalan terimi için $\left| \frac{\partial K}{\partial \xi} \right| \leq C$ ve Eşitsizlik (4.3) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |R_i^{(3)}| &\leq |\lambda| h \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) u(s) \right| ds \\ &\leq Ch \end{aligned} \tag{4.26}$$

hata değerdendirmesi elde edilir.

Son olarak, $R_i^{(4)}$ kalan terimi için

$$\begin{aligned} |R_i^{(4)}| &\leq |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi - x_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} [K(x_i, \xi) u(\xi)] \right| d\xi \\ &\leq |\lambda| h \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial \xi} [K(x_i, \xi) u(\xi)] \right| d\xi \\ &\leq |\lambda| h \int_0^l \left\{ \left| \frac{\partial K(x_i, \xi)}{\partial \xi} \right| |u(\xi)| + |K(x_i, \xi)| |u'(\xi)| \right\} d\xi \end{aligned}$$

ifadesi yazılabilir. Bu eşitsizlikte Eşitsizlik (4.3) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|R_i^{(4)}| &\leq C |\lambda| h \int_0^l \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{a\xi}{\varepsilon}} \right) d\xi \\
&= C |\lambda| h \left\{ l + a^{-1} \left(1 - e^{-\frac{al}{\varepsilon}} \right) \right\} \\
&\leq Ch
\end{aligned} \tag{4.27}$$

hata değeriendirilmesi elde edilir. Sonuç olarak Eşitsizlik (4.24), (4.25), (4.26) ve (4.27) dikkate alınarak

$$|R_i| \leq \sum_{k=1}^4 |R_i^{(k)}|$$

yazılabilir. O halde Eşitsizlik (4.24), (4.25), (4.26) ve (4.27)'den Eşitsizlik (4.23)'ün doğruluğu ortaya çıkar. $\square$

Lemma 4.4 ve Lemma 4.5 dikkate alınır, aşağıdaki yakınsaklık sonucu elde edilir.

Teorem 4.1. Lemma 4.4 ve Lemma 4.5 şartları sağlanmış olsun. Düzgün şebekede maksimum normda (4.18)-(4.19) fark probleminin çözümü y_i , (4.1)-(4.2) probleminin çözümü $u(x)$ 'e ε 'a göre $O(h)$ hızıyla düzgün yakınsaktır (Amirali ve Amirali, 2018).

4.1.1.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için elde edilen teorik sonuçlar nümerik örnek ile gösterilecektir. Ayrıca belirtmek gerekir ki (4.18)-(4.19) fark şemasından elde edilen

$$y_i^{(n)} = \frac{f_i + \frac{\varepsilon \theta_i}{h} y_{i-1}^{(n)} - \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} y_j^{(n-1)}}{\frac{\varepsilon \theta_i}{h} + a_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \tag{4.28}$$

$$y_0^{(n)} = A, \quad n = 1, 2, \dots; \quad y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)} \text{ verilmiş} \tag{4.29}$$

iteratif tekniği bu örneği çözerken kullanılacaktır. Burada θ_i , Eş. (4.10)'da açıkça ifade edilmiştir.

Örnek 4.1.

$$\varepsilon u'(x) + u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 x u(t) dt = x + \frac{1}{2} x \left(\frac{1}{2} - \varepsilon + (1 + \varepsilon) \varepsilon \left(1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right) \right), \quad 0 < x \leq 1, \quad (4.30)$$

$$u(0) = 1 \quad (4.31)$$

probleminin kesin çözümü:

$$u(x) = x - \varepsilon + (1 + \varepsilon) e^{-\frac{x}{\varepsilon}}$$

şeklindedir. (4.30)-(4.31) problemi için yakınsaklık durumu

$$p^N = \frac{\ln \left(\frac{e^N}{e^{2N}} \right)}{\ln 2}$$

düzgün yakınsaklık oranı ile hesaplanacaktır. Burada noktasal hata

$$e_\varepsilon^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N}$$

ve ε 'a göre hesaplanan maksimum hata

$$e^N = \max_{\varepsilon} e_\varepsilon^N$$

şeklindedir. Ayrıca belirtmek gerekir ki y , u başlangıç değer probleminin farklı N ve ε değerleri için hesaplanmış fark denkleminin çözümünü ifade etmektedir.

Sonuç olarak probleminin çözümünden $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ve $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 4, 8, 12, 16$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.28)-(4.29) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.1'de gösterilmiştir. Tabloda da görüldüğü gibi N değerleri artıkça, düzgün yakınsama hızı olan p^N 'in yakınsama değerleri birinci dereceden olmuştur. Böylece teoride ifade edilen birinci dereceden ε – düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmış oldu.

Tablo 4.1. (4.30)-(4.31) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e_ε^N kesin hatalar, e^N ε ’a göre hesaplanmış hatalar ve p^N yakınsaklık oranları

ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,0318009	0,0180134	0,0099936	0,0054302	0,0027340	0,0013576
	0,82	0,85	0,88	0,99	1,01	
2^{-4}	0,0509429	0,0296675	0,0164591	0,0091313	0,0046616	0,0023308
	0,78	0,85	0,85	0,97	1,00	
2^{-8}	0,0486047	0,0285027	0,0158129	0,0087728	0,0044786	0,0022706
	0,77	0,85	0,85	0,97	0,98	
2^{-12}	0,0464832	0,0272586	0,0151227	0,0084482	0,0043429	0,0022171
	0,77	0,85	0,84	0,96	0,97	
2^{-16}	0,0459176	0,0271142	0,0151472	0,0084619	0,0043499	0,0022207
	0,76	0,84	0,84	0,96	0,97	
e^N	0,0509429	0,0296675	0,0164591	0,0091313	0,0046616	0,0023308
p^N	0,78	0,85	0,85	0,97	1,00	

4.1.2. Parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) durumu

Bu bölümde (4.1)-(4.2) başlangıç değer problemi için $[0, l]$ üzerinde parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinliğine sahip homojen tip fark şeması elde edilmiştir. Fark şemasının kararlılığı ve pertürbasyon parametresine göre ayırık maksimum normda ikinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Sunulan metot nümerik örnek ile desteklenmiştir.

4.1.2.1. Sürekli problemin bazı özellikleri

Bu bölümde hata analizinde kullanılacak olan (4.1)-(4.2) probleminin kesin çözümü için bazı asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır.

Lemma 4.6. $a, f \in C^2[0, l]$, $\frac{\partial^m}{\partial x^m} K(x, s) \in [0, l]^2$, ($m = 0, 1, 2$) ve

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds}$$

ise, (4.1)-(4.2) probleminin $u(x)$ çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C, \quad (4.32)$$

$$|u^{(k)}(x)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^k} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad k=1,2 \quad (4.33)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. Eşitsizlik (4.32) değerlendirmesi ve Eşitsizlik (4.33) için $k=1$ durumu Lemma 4.3 ispatında gösterilmiştir. $k=2$ için Eşitsizlik (4.33)'ün doğruluğunu göstermek yeterli olacaktır.

$u''(0)$ değerlendirmesi için Denk. (4.1)'den

$$|u''(0)| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left| f'(0) - a'(0)A - a(0)u'(0) - \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K(0,s)u(s)ds \right|$$

yazılabilir. Buradan Lemma 4.6 şartları ve Eşitsizlik (4.3) birlikte ele alınırsa

$$|u''(0)| \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \quad (4.34)$$

olduğu açıktır. Denk. (4.1)'de Leibniz kuralını dikkate alarak iki defa türev alınırsa

$$\varepsilon v'(x) + av(x) = F(x) \quad (4.35)$$

elde edilir. Burada

$$v(x) = u''(x),$$

$$F(x) = f''(x) - 2a'(x)u'(x) - a''(x)u(x) - \lambda \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,s)u(s)ds$$

biçimindedir. Ayrıca $a, f \in C^2[0, l]$, $\frac{\partial^m}{\partial x^m} K(x,s) \in [0, l]^2$, $(m=0,1,2)$ olduğundan ve

Eşitsizlik (4.4) dikkate alındığında

$$|F(x)| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) \quad (4.36)$$

değerlendirmesi ifade edilebilir.

Denk. (4.35) ifadesinden

$$u''(x) = u''(0) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x F(\xi) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_\xi^x a(s) ds} d\xi$$

yazılabilir. Bu ifade de Eşitsizlik (4.34) ve (4.36) dikkate alınır

$$\begin{aligned} |u''(x)| &\leq \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{1}{\varepsilon} \int_0^x a(s) ds} + \frac{C}{\varepsilon} \int_0^x \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} \right) e^{-\frac{\alpha(x-\xi)}{\varepsilon}} d\xi \\ &= \frac{C}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} + C \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) + \frac{C}{\varepsilon^2} \int_0^x e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \right) + \frac{C x}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

değerlendirmesine ulaşılır. Böylece $k = 2$ için Eşitsizlik (4.33)'in doğruluğu gösterilmiş oldu. $\square$

4.1.2.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde, (4.1)-(4.2) problemi için parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebeke üzerinde fark şeması oluşturulacaktır.

$[0, l]$ aralığında

$$\omega_N = \{0 < x_1 < \dots < x_N = l, h_i = x_i - x_{i-1}\}, \quad \bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0\}$$

herhangi bir düzgün olmayan şebeke ele alınsın. (4.1)-(4.2) problemi için fark şeması kurmaya aşağıdaki özdeşlik ile başlanacaktır.

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.37)$$

burada,

$$\varphi_i(x) = e^{-\frac{a_i(x_i-x)}{\varepsilon}}, \quad i=1,2,\dots,N$$

ve

$$\chi_i = h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) dx = \frac{1 - e^{-a_i \rho_i}}{a_i \rho_i}, \quad \rho_i = \frac{h_i}{\varepsilon}$$

biçimindedir. Ayrıca $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon \varphi'(x) + a_i \varphi(x) = 0, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i,$$

$$\varphi(x_i) = 1$$

probleminin çözümü olarak belirlenmiş üstel katsayılı baz fonksiyonudur. Kesin fark şemaları yöntemi (Samarskii, 2001) ve Eş. (3.2), (3.7) interpolasyon kuadratur formülleri Özdeşlik (4.37) özdeşliğine uygulanırsa

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u'(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx &= \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u'(x) + a(x_i)u(x)] \varphi_i(x) dx \\ &+ \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \\ &= \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i \\ &+ \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.38)$$

elde edilir. Burada

$$\theta_i = \frac{a_i \rho_i}{1 - e^{-a_i \rho_i}} e^{-a_i \rho_i} \quad (4.39)$$

şeklindedir. x_{i-1} , x_i şebeke noktalarına göre Newton interpolasyon formülü

$$a(x) - a(x_i) = (x - x_i) a_{\bar{x},i} + \frac{a''(\xi_i(x))}{2} (x - x_{i-1})(x - x_i)$$

biçiminde yazılabilir. Bu formül dikkate alınarak Eş. (4.38)'in sağ tarafındaki ikinci terim

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx &= a_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a''(\xi_i(x)) (x - x_{i-1})(x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.40)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Eş. (4.40)'ın sağ tarafındaki ilk terim için

$$u(x) = u(x_i) - \int_x^{x_i} u'(s) ds$$

formülü kullanarak yeniden hesaplanırsa, Eş. (4.40)

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx = \left(a_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \right) u_i + R_i^{(1)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} a''(\xi_i(x)) (x - x_{i-1})(x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\ &- a_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \left(\int_x^{x_i} u'(s) ds \right) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.41)$$

biçimindedir. Basit bir hesaplama ile

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i(x) dx = h_i \delta_i$$

bulunabilir. Burada

$$\delta_i = \frac{e^{-a_i \rho_i}}{1 - e^{-a_i \rho_i}} - \frac{1}{a_i \rho_i}, \quad -1 \leq \delta_i \leq 0 \quad (4.42)$$

şeklindedir. Böylece Eş. (4.38)

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\varepsilon u'(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx = \varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + \bar{a}_i u_i + R_i^{(1)} \quad (4.43)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\bar{a}_i = a_i + a_{\bar{x},i} h_i \delta_i \quad (4.44)$$

biçimindedir. Benzer şekilde Özdeşlik (4.37)'nin sağ tarafındaki integral terim için

$$\chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \varphi_i(x) dx = \bar{f}_i + R_i^{(2)} \quad (4.45)$$

yazılabilir. Burada

$$\bar{f}_i = f_i + f_{\bar{x},i} h_i \delta_i \quad (4.46)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i(x)) (x - x_{i-1})(x - x_i) \varphi_i(x) dx \quad (4.47)$$

şeklindedir. Eş. (4.44) ve (4.46)'da bulunan δ_i , Eş. (4.42)'de ifade edilmiştir. Fark şemasını oluşturmak için son olarak Özdeşlik (4.37)'de integral terim için

$$K(x, s) = K(x_i, s) + (x - x_i) \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) + \frac{(x - x_i)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi_i(x), s)$$

Taylor açılımını kullanarak

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K(x, s) u(s) ds \right) dx &= \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds \\ &+ h_i \delta_i \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) u(s) ds + R_i^{(3)} \\ &\equiv \lambda \int_0^l \kappa(x_i, s) u(s) ds + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (4.48)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\kappa(x_i, s) = K(x_i, s) + h_i \delta_i \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) \quad (4.49)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(3)} = \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^2 \varphi_i(x) \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi_i(x), s) u(s) ds \right) dx \quad (4.50)$$

şeklindedir. Şimdi Eş. (4.48) ifadesinde $\kappa(x_i, s)u(s)$ için Eş. (3.1) de ifade edilen kalan terimi integral biçiminde olan genelleştirilmiş yamuk kuralı uygulanırsa

$$\lambda \int_0^l \kappa(x_i, s) u(s) ds = \lambda \sum_{j=0}^N h_j \kappa_{ij} u_j + R_i^{(4)} \quad (4.51)$$

ifadesi elde edilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(4)} = \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (\kappa(x_i, \xi) u(\xi)) d\xi \quad (4.52)$$

şeklindedir. O halde Özdeşlik (4.37)'den Eş. (4.43), (4.45), (4.48) ve (4.51) dikkate alınarak, $u(x_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := \varepsilon \theta_i u_{\bar{x}, i} + \bar{a}_i u_i + \lambda \sum_{j=0}^N h_j \kappa_{ij} u_j + R_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.53)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = \sum_{k=1}^4 R_i^{(k)}$$

biçiminde olup $R_i^{(k)}$, ($k=1, 2, 3, 4$) kalan terimleri sırasıyla Eş. (4.41), (4.47), (4.50) ve (4.52) denklemlerinde ayrı ayrı ifade edilmiştir. Sonuç olarak, Denk. (4.53) esas alınarak R_i ihmal edilirse, (4.1)-(4.2) problemi için

$$L_N y_i := \varepsilon \theta_i y_{\bar{x},i} + \bar{a}_i y_i + \lambda \sum_{j=0}^N \bar{h}_j \kappa_{ij} y_j = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.54)$$

$$y_0 = A \quad (4.55)$$

fark şeması sunulur. Burada θ_i , $\bar{a}_i$, $\bar{f}_i$, κ_{ij} değerleri sırasıyla Eş. (4.39), (4.44), (4.46) ve (4.49)'de ayrı ayrı ifade edilmiştir.

4.1.2.3. Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi

Değerlendirmeye geçmeden önce parçalı düzgün şebekeyi (Shishkin mesh) ifade etmek gerekir. (4.54)-(4.55) fark şemasının ε – parametresine göre düzgün yakınsak olması için $\bar{\omega}_N$ üzerinde düzgün olmayan σ 'ya bağlı bir geçiş noktası içeren parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebeke kullanılacaktır. Bu şebeke, $x = 0$ sınır katı etrafında yoğunlaşan parçalı düzgün bir şebekedir. N çift bir sayı olmak üzere, $\bar{\omega}_N$ parçalı düzgün şebekesi $N/2$ eşit aralıkta $[0, \sigma]$ ince parsel ve $[\sigma, l]$ kalın parsel şeklinde iki alt aralığa bölünür. Burada σ geçiş noktası

$$\sigma = \min \left\{ \frac{l}{2}, \alpha^{-1} \varepsilon \ln N \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca h ve H sırasıyla $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ alt aralıkların adım uzunlukları olup, $[0, l]$ üzerinde x_i düğüm noktaları

$$\bar{\omega}_N = \begin{cases} x_i = ih, & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}, \quad h = \frac{2\sigma}{N}; \\ x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{2}\right)H, & i = \frac{N}{2} + 1, \dots, N, \quad H = \frac{2(l - \sigma)}{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.7. $a, f \in C^2[0, l]$ ve $\frac{\partial^m K}{\partial x^m}, \frac{\partial^{m+1} K}{\partial x \partial s^m} \in C^2[0, l]^2$, ($m = 0, 1, 2$) olsun. O halde R_i

kalan terim için

$$\|R\|_{\infty, \partial_N} \leq CN^{-2} \ln N \quad (4.56)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. Her bir $R_i^{(k)}$, $(k=1, 2, 3, 4)$ için ayrı ayrı değerlendirilecektir.

İlk olarak, $R_i^{(1)}$ kalan terimi ele alınırsa $a \in C^2[0, l]$, $|x - x_{i-1}| \leq h_i$ ve $|x - x_i| \leq h_i$ olduğundan ve Lemma 4.6 dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} a''(\xi_i(x))(x - x_{i-1})(x - x_i)u(x)\varphi_i(x)dx \right| \\ &\quad + a_{\bar{x},i} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \left(\int_x^{x_i} u'(s)ds \right) \varphi_i(x)dx \right| \\ &\leq Ch_i^2 + |a_{\bar{x},i} \delta_i| h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x)|dx \\ &\leq Ch_i \left(h_i + \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x)|dx \right) \end{aligned} \quad (4.57)$$

değerlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $R_i^{(2)}$ kalan terimi için yukarıdaki gibi benzer şekilde $f \in C^2[0, l]$, $|x - x_{i-1}| \leq h_i$ ve $|x - x_i| \leq h_i$ olduğundan

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} f''(\xi_i(x))(x - x_{i-1})(x - x_i)\varphi_i(x)dx \right| \\ &\leq Ch_i^2 \end{aligned} \quad (4.58)$$

değerlendirmesi elde edilir.

Üçüncü olarak, $R_i^{(3)}$ kalan terimi için $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$ sınırlı olduğu ve Lemma 4.6 dikkate alınır

$$|R_i^{(3)}| \leq \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \lambda \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)^2 \varphi_i(x) \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi_i(x), s)u(s)ds \right) dx \right| \leq Ch_i^2 \quad (4.59)$$

değerlendirmesi elde edilir.

Son olarak, $R_i^{(4)}$ kalan terimi için Lemma 4.6 şartları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |R_i^{(4)}| &\leq \left| \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (\kappa(x_i, \xi) u(\xi)) d\xi \right| \\ &\leq C \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) (1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|) d\xi \end{aligned} \quad (4.60)$$

değerlendirmesi elde edilir. Buradan

$$|R_i| \leq \sum_{k=1}^4 |R_i^{(k)}|$$

olduğundan ve Eşitsizlik (4.57), (4.58), (4.59) ve (4.60) değerlendirmeleri birlikte dikkate alınırsa

$$|R_i| \leq C \left(h_i^2 + h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u'(x)| dx + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) (1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|) d\xi \right)$$

değerlendirmesi yazılabilir. Yukarıdaki ifade de Eşitsizlik (4.32), (4.33) ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} |R_i| &\leq C \left(h_i^2 + h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx + \sum_{j=1}^N h_j^{(3)} + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \right) \\ &\quad + C \left(\sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \right) \\ &\leq C \left(h_i^2 + \sum_{j=1}^N h_j^3 + h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \right), \quad (\varepsilon \leq 1) \end{aligned} \quad (4.61)$$

değerlendirmesi elde edilir. Şimdi parçalı düzgün şebekede Eşitsizlik (4.61)'in hata değerlendirmesi yapılacaktır.

Eşitsizlik (4.61)'in sağ taraftaki ilk iki terimine göre her bir σ değeri için

$$h_i^2 = \begin{cases} h^2 = \left(\frac{\sigma}{N/2}\right)^2 \leq CN^{-2}, & 1 \leq i \leq \frac{N}{2}, \\ H^2 = \left(\frac{l-\sigma}{N/2}\right)^2 \leq CN^{-2}, & \frac{N}{2}+1 \leq i \leq N \end{cases} \quad (4.62)$$

ve

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N h_j^3 &= \sum_{j=1}^{N/2} h^3 + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N H^3 = \frac{N}{2} h^3 + \frac{N}{2} H^3 \\ &= 4\sigma^3 N^{-2} + 4(l-\sigma)^3 N^{-2} \\ &\leq CN^{-2} \end{aligned} \quad (4.63)$$

değerlendirmelerinin doğru olduğunu belirtmek gerekir. Şimdi Eşitsizlik (4.61) ifadesinin sağ taraftaki diğer iki terimi için σ değerlerine göre ayrı ayrı değerlendirilecektir.

İlk olarak, $\frac{l}{2} < \alpha^{-1} \varepsilon \ln N$ olsun. O halde $\sigma = \frac{l}{2}$ olup $h = H = lN^{-1}$ dikkate alınır

$$\begin{aligned} h_i \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi &\leq \frac{h^2}{\varepsilon} + \frac{h^2}{\varepsilon} \int_0^l e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \\ &\leq \frac{h^2}{\varepsilon} + \frac{h^2}{\varepsilon} \alpha^{-1} \left(1 - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}}\right) \\ &\leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (4.64)$$

değerlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $\alpha^{-1} \varepsilon \ln N < \frac{l}{2}$ olsun. O halde $\sigma = \alpha^{-1} \varepsilon \ln N$ şeklindedir. Eşitsizlik (4.61)

eşitsizliğinin sağ tarafındaki dördüncü terimi

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi &= \sum_{j=1}^{N/2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \\ &+ \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \end{aligned} \quad (4.65)$$

şeklinde ayrı ayrı yazılabilir. Şimdi Eşitsizlik (4.61)'in sağ tarafındaki üçüncü, dördüncü terimler ve Eş. (4.65) dikkate alınarak $[0, \sigma]$ ve $[\sigma, l]$ aralıklarında ayrı ayrı değerlendirilecektir. $[0, \sigma]$ aralığı için

$$\begin{aligned}
& h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx + \sum_{j=1}^{N/2} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \leq \frac{h^2}{\varepsilon} + h^2 \int_0^{\sigma} \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \\
& \leq \left(\frac{2\alpha^{-1}\varepsilon \ln N}{N} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon} + \frac{h^2 \alpha^{-1}}{\varepsilon} \left(1 - e^{-\frac{\alpha \sigma}{\varepsilon}} \right) \\
& \leq 4\alpha^{-2} \varepsilon N^{-2} \ln^2 N + \frac{h^2}{\varepsilon} \alpha^{-1} \\
& \leq \frac{l}{2} 4\alpha^{-2} N^{-2} \ln N + \left(\frac{2\alpha^{-1}\varepsilon \ln N}{N} \right)^2 \frac{1}{\varepsilon} \alpha^{-1} \\
& \leq CN^{-2} \ln N + 2l\alpha^{-2} N^{-2} \ln N \\
& \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{2}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

değerlendirmesi elde edilir. $[\sigma, l]$ aralığı için

$$\begin{aligned}
& h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx + \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \\
& \leq H\alpha^{-1} \left(e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha x_i}{\varepsilon}} \right) + 2\alpha^{-1} \sum_{j=\frac{N}{2}+1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(x_j - x + \frac{H}{2} \right) \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \\
& \leq H\alpha^{-1} e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} \left(1 - e^{-\frac{\alpha H}{\varepsilon}} \right) + 2\alpha^{-1} H \int_{\sigma}^l \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx \\
& \leq H\alpha^{-1} e^{-\frac{\alpha x_{i-1}}{\varepsilon}} + 2\alpha^{-2} H \left(e^{-\frac{\alpha \sigma}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\alpha l}{\varepsilon}} \right) \\
& \leq H\alpha^{-1} N^{-1} + 2\alpha^{-2} H N^{-1} \\
& \leq CN^{-2}, \quad \frac{N}{2} + 1 \leq i \leq N
\end{aligned} \tag{4.67}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece $\sigma = \alpha^{-1} \varepsilon \ln N$ için Eşitsizlik (4.66) ve (4.67) birlikte dikkate alınır

$$h_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\alpha x}{\varepsilon}} dx + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi) (\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} e^{-\frac{\alpha \xi}{\varepsilon}} d\xi \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq N \quad (4.68)$$

değerlendirmesi elde edilir.

Sonuç olarak, Eşitsizlik (4.61) ifadesi (4.62), (4.63), (4.64) ve (4.68) bağıntıları ile birlikte düşünülürse Eşitsizlik (4.56) değerlendirmesi sağlanır. $\square$

$z_i = y_i - u_i$, $(0 \leq i \leq N)$ yaklaşık çözüm hatası

$$L_N z_i := \varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i} + \bar{a}_i z_i + \lambda \sum_{j=0}^N h_j \kappa_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.69)$$

$$z_i = 0 \quad (4.70)$$

problemini sağlar.

Ayrıca, $a \in C^2[0, l]$ ve $|\delta_i| \leq 1$ olduğundan dolayı yeterince büyük N değerleri için $\bar{a}_i \geq \bar{\alpha} > 0$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha}$ sayısının olduğunu belirtmek gerekir.

Teorem 4.2. a, f, K Lemma 4.6 şartlarını sağlasın ve

$$|\lambda| < \frac{\bar{\alpha}}{\max_{0 \leq i \leq N} \sum_{j=0}^N h_j |\kappa_{ij}|} \quad (4.71)$$

olsun. O halde (4.54)-(4.55) fark probleminin y_i çözümü için

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-2} \ln N$$

hata değerlendirmesi elde edilir.

İspat. (4.69)-(4.70) problemi ele alınarak maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \bar{\alpha}^{-1} \left\| R - \lambda \sum_{j=0}^N h_j K_{ij} z_j \right\|_{\infty, \omega_N} \\ &\leq \bar{\alpha}^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |\lambda| \bar{\alpha}^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=0}^N h_j |K_{ij}| \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{\alpha}^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N}}{1 - |\lambda| \bar{\alpha}^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=0}^N \hbar_i |K_{ij}|}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N}$$

değerlendirmesi elde edilir. Bu ifade Eşitsizlik (4.56) ile birlikte ele alırsa teoremden istenilen sonuca ulaşılmış ve böylece ispat tamamlanmış olur. Burada belirtmek gerekir ki

$$|\lambda| < \frac{\bar{\alpha}}{l \left(\max_{[0,l] \times [0,l]} |K(x,s)| + l N^{-1} \max_{[0,l] \times [0,l]} \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x,s) \right| \right)}$$

şartı sağlanırsa Eşitsizlik (4.71) doğru olacaktır. $\square$

4.1.2.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.1)-(4.2) problemi için elde edilen teorik sonuçlar bir örnek ile gösterilecektir. Ayrıca belirtmek gerekir ki (4.54)-(4.55) fark şemasından elde edilen

$$y_i^{(n)} = \frac{\bar{f}_i + \frac{\varepsilon \theta_i}{h} y_{i-1}^{(n)} - \lambda \sum_{j=1}^N \hbar_j \kappa_{ij} y_j^{(n-1)}}{\frac{\varepsilon \theta_i}{\hbar_j} + \bar{a}_i}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad (4.72)$$

$$y_0^{(n)} = A, \quad n = 1, 2, \dots; \quad y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_N^{(0)} \text{ verilmiş} \quad (4.73)$$

iteratif tekniği bu örneği çözerken kullanılacaktır. Burada θ_i , $\bar{a}_i$, $\bar{f}_i$, κ_{ij} değerleri sırasıyla (4.39), (4.44), (4.46) ve (4.49)'de ayrı ayrı ifade edilmiştir.

Örnek 4.2.

$$\varepsilon u'(x) + (2 - x^2)u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-(1+xs)} u(s) ds = \frac{1}{1+x}, \quad 0 < x \leq 1, \quad (4.74)$$

$$u(0) = 1 \quad (4.75)$$

problemin kesin çözümü bilinmiyor. Bu yüzden nümerik sonuçlarda hata yaklaşımı ve yakınsama oranı hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Yani nümerik sonuçları iki kat daha ince şebeke üzerindeki sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Maksimum noktasal hata ve ε 'a göre hesaplanmış maksimum hata

$$e_{\varepsilon}^N = \max_{\bar{\omega}_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_{2i}^{\varepsilon, 2N}|, \quad e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$

$$\bar{\omega}_{2N} = \left\{ x_{\frac{i}{2}} : i = 0, 1, \dots, 2N \right\}$$

şebekesi üzerinde ilgili metodun yakınsak çözümüdür. Burada

$$x_{\frac{i}{2}+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

şeklindedir. Ayrıca düzgün yakınsama oranı ve ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama oranı

$$p_{\varepsilon}^N = \frac{\ln \left(\frac{e_{\varepsilon}^N}{e_{\varepsilon}^{2N}} \right)}{\ln 2},$$

$$p^N = \frac{\ln \left(\frac{e^N}{e^{2N}} \right)}{\ln 2}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak probleminin çözümünden $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ve $\varepsilon = 10^{-i}$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.72)-(4.73) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.2'de gösterilmiştir.

Tablo 4.2. (4.74)-(4.75) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları.

ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
10^0	0,02950938 1,983	0,00746479 1,987	0,00188309 1,992	0,00047339 1,994	0,00011884 1,998	0,00002975
10^{-2}	0,03599043 1,98	0,00912321 1,985	0,00230464 1,989	0,00058057 1,991	0,00014605 1,993	0,00003669
10^{-4}	0,03884439 1,978	0,00986032 1,98	0,00249949 1,984	0,00063184 1,986	0,0001595 1,989	0,00004018
10^{-6}	0,04134242 1,977	0,0105017 1,979	0,00266392 1,981	0,00067481 1,982	0,00017082 1,983	0,00004321
10^{-8}	0,04116806 1,976	0,01046466 1,976	0,00266005 1,977	0,0006757 1,977	0,00017164 1,978	0,00004357
e^N	0,04134242	0,0105017	0,00266392	0,0006757	0,00017164	0,00004357
p^N	1,977	1,979	1,981	1,977	1,978	

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi N değerleri artıkça, ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama hızı olan p^N 'in yakınsama değerleri ikinci dereceden olmuştur. Böylece teoride ifade edilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmış oldu.

4.2. İkinci Mertebeden Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Düzgün Yakınsak Fark Şemaları

Bu bölümde ikinci mertebeden lineer SPFİDD için sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problem için düzgün şebekede $O(h)$, düzgün şebekede $O(h^2)$ ve parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinliğe sahip fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik özellikleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Aşağıda tanımlanan ikinci mertebeden lineer SPFİDD için sınır değer problemi ele alınmıştır.

$$Lu := -\varepsilon u'' + a(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in (0,l), \quad (4.76)$$

$$u(0) = A, \quad u(l) = B, \quad (4.77)$$

problemde $\varepsilon \in (0,1]$ pertürbasyon parametresi, λ ise reel bir parametredir. $a(x) \geq \alpha > 0$, $f(x)$ ($x \in [0,l]$) ve $K(x,s)$ ($(x,s) \in [0,l] \times [0,l]$) yeterince düzgün fonksiyonlardır. (4.76)-(4.77) probleminin $u(x)$ çözümü, küçük ε değerleri için $x=0$ ve $x=l$ civarında iki sınır katına sahiptir.

4.2.1. Düzgün şebekede $O(h)$ durumu

Bu bölümde (4.76)-(4.77) sınır değer problemi için $[0,l]$ üzerinde düzgün şebekede $O(h)$ kesinliğine sahip fark şeması elde edilmiştir. Fark şemasının kararlılığı ve pertürbasyon parametresine göre ayrık maksimum normda birinci dereceden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Sunulan metot nümerik örnek ile desteklenmiştir.

4.2.1.1. Sürekli problemin bazı özellikleri

Bu bölümde hata analizinde kullanılacak olan (4.76)-(4.77) probleminin kesin çözümü için bazı asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır.

Lemma 4.8. $v(x), v(x) \in C[0,l] \cap C^2(0,l)$,

$$Lv(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l),$$

$$v(0) \geq 0, \quad v(l) \geq 0$$

eşitsizliklerini sağlayan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$v(x) \geq 0 \quad (0 \leq x \leq l)$$

olur. Ayrıca bu durum maksimum prensibi olarak tanımlanır (Samarskii, 2001).

Lemma 4.9. Her $v(x) \in C[0, l] \cap C^2(0, l)$ fonksiyonu için

$$|v(x)| \leq |v(0)| + |v(l)| + \alpha^{-1} \max_{0 \leq s \leq l} |Lv(s)|, \quad 0 \leq x \leq l$$

değerlendirmesi doğrudur (Samarskii, 2001).

Lemma 4.10. $a, f \in C^1[0, l]$, $\frac{\partial^s K}{\partial x^s} \in [0, l]^2$, ($s = 0, 1$) ve

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds} \quad (4.78)$$

ise, (4.76)-(4.77) probleminin $u(x)$ çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C, \quad (4.79)$$

$$|u'(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.80)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. İlk olarak Eşitsizlik (4.79) ifadesinin doğruluğu gösterilsin. (4.76)-(4.77) problemine maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|u\|_{\infty} &\leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} + \alpha^{-1} |\lambda| \max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| |u(s)| ds \\ &\leq |A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty} + \alpha^{-1} |\lambda| \max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds \|u\|_{\infty} \\ &= \frac{|A| + |B| + \alpha^{-1} \|f\|_{\infty}}{1 - \alpha^{-1} |\lambda| \max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds} \\ &\leq C \end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece Eşitsizlik (4.78)'de dikkate alınarak Eşitsizlik (4.79) ifadesinin doğruluğu gösterilmiş olur. Şimdi Eşitsizlik (4.80)'nin doğruluğu gösterilsin. Denk. (4.76)'da Eşitsizlik (4.79) dikkate alınır

$$\begin{aligned}
|u''(x)| &\leq \frac{1}{\varepsilon} \left| f(x) - a(x)u(x) - \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds \right| \\
&\leq \frac{|f(x)| + |a(x)||u(x)| + |\lambda| \int_0^l |K(x,s)||u(s)|ds}{\varepsilon} \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon}, \quad 0 \leq x \leq l
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi $|u'(0)|$ ve $|u'(l)|$ için değerlendirmeler yapmak gerekir. Herhangi bir $g \in C^2[0, l]$ fonksiyonu için Eş. (3.8)'de ifade edilen diferansiyelleme formülü dikkate alınırsa yani; $g(x) = u(x)$, $x = 0$, $\alpha_0 = 0$ ve $\alpha_1 = \sqrt{\varepsilon}$ değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|u'(0)| &\leq \frac{|u(\sqrt{\varepsilon}) - u(0)|}{\sqrt{\varepsilon}} - \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |K_0(\xi, 0)g''(\xi)|d\xi \\
&\leq \frac{|u(\sqrt{\varepsilon})| + |u(0)|}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_0^{\sqrt{\varepsilon}} |K_0(\xi, 0)||g''(\xi)|d\xi \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

elde edilir. Benzer şekilde Eş. (3.8) diferansiyelleme formülünde $g(x) = u(x)$, $x = l$, $\alpha_0 = l - \sqrt{\varepsilon}$ ve $\alpha_1 = l$ değerleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
|u'(l)| &\leq \frac{|u(\sqrt{l}) - u(\sqrt{\varepsilon})|}{\sqrt{\varepsilon}} - \int_{l-\sqrt{\varepsilon}}^l |K_0(\xi, l)g''(\xi)|d\xi \\
&\leq \frac{|u(\sqrt{l})| + |u(\sqrt{\varepsilon})|}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_{l-\sqrt{\varepsilon}}^l |K_0(\xi, l)||g''(\xi)|d\xi \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}
\end{aligned} \tag{4.82}$$

elde edilir. Denk. (4.76) denkleminin türevi alınır ve Eşitsizlik (4.81), (4.82) değerlendirmeleri dikkate alınırsa

$$-\varepsilon v''(x) + a(x)v(x) = F(x) \tag{4.83}$$

$$v(0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad v(l) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (4.84)$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$v(x) = u'(x),$$

$$F(x) = f'(x) - a'(x)u(x) - \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K(x, s) u(s) ds$$

şeklindedir. Buradan Eşitsizlik (4.79) ve Lemma 4.10 şartları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |F(x)| &\leq |f'(x)| - |a'(x)u(x)| - \lambda \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, s) u(s) \right| ds \\ &\leq |f'(x)| + |a'(x)| |u(x)| + \lambda \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial x} K(x, s) \right| |u(s)| ds \\ &\leq C \end{aligned} \quad (4.85)$$

değerlendirmesi kolayca elde edilir. (4.83)-(4.84) probleminin çözümü

$$v(x) = v_1(x) + v_2(x)$$

şeklinde aranabilir. Burada $v_1(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon v_1'' + a(x)v_1 = F(x), \quad 0 < x < l \quad (4.86)$$

$$v_1(0) = 0, \quad v_1(l) = 0 \quad (4.87)$$

probleminin çözümü, $v_2(x)$ fonksiyonu ise

$$-\varepsilon v_2'' + a(x)v_2 = 0, \quad 0 < x < l \quad (4.88)$$

$$v_2(0) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad v_2(l) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad (4.89)$$

probleminin çözümleridir. (4.86)-(4.87) probleminin çözümü için $F(x)$ fonksiyonunun ε 'a göre düzgün sınırlı olduğunu gösteren Eşitsizlik (4.85) ve maksimum prensibi dikkate alınır

$$\begin{aligned} |v_1(x)| &\leq \alpha^{-1} \|F\|_{\infty} \\ &\leq C, \quad 0 \leq x \leq l \end{aligned} \quad (4.90)$$

değerlendirmesi elde edilir. (4.88)-(4.89) probleminin çözümü için maksimum prensibi probleme uygulanır

$$|v_2(x)| \leq w(x) \quad (4.91)$$

yazılabilir. Burada $w(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon w'' + \alpha w = 0, \quad 0 < x < l \quad (4.92)$$

$$w(0) = |v_2(0)|, \quad w(l) = |v_2(l)| \quad (4.93)$$

probleminin çözümüdür. Sabit katsayılı (4.92)-(4.93) probleminin çözümü

$$w(x) = \frac{1}{\sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} \left\{ w(0) \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + w(l) \sinh\left(\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \right\}$$

şeklindedir. Buradan Eş. (4.89) şartları dikkate alınır

$$w(x) \leq \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}} \left\{ e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right\} \quad (4.94)$$

değerlendirmesi elde edilir. Sonuç olarak

$$|u'(x)| \leq |v_1(x)| + |v_2(x)|$$

eşitsizliğinde Eşitsizlik (4.90), (4.91) ve (4.94) ifadeleri dikkate alınır Eşitsizlik (4.80)'in sağladığı görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.2.1.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde, (4.76)-(4.77) problemi için düzgün şebeke üzerinde fark şeması oluşturulacaktır. $[0, l]$ aralığında

$$\omega_N = \left\{ x_i = ih, i = 1, \dots, N-1, h = \frac{l}{N} \right\}, \quad \bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$$

düzgün şebekesi ele alınsın. (4.76)-(4.77) problemi için fark şeması kurmaya aşağıdaki özdeşlik ile başlanacaktır.

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} Lu(x) \varphi_i(x) dx = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.95)$$

burada $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)} \equiv \frac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h}, & x_{i-1} < x < x_i \\ \varphi_i^{(2)} \equiv \frac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h}, & x_i < x < x_{i+1} \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

şeklinde belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır. Burada

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}}$$

ve

$$\chi_i = h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \frac{2 \tanh\left(\frac{\gamma_i h}{2}\right)}{\gamma_i h}$$

biçimindedir. Ayrıca $\varphi_i^{(1)}(x)$ baz fonksiyonu

$$-\varepsilon \varphi'' + a_i \varphi(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i$$

$$\varphi(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi(x_i) = 1$$

probleminin ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ baz fonksiyonu ise

$$-\varepsilon \varphi'' + a_i \varphi(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1}$$

$$\varphi(x_i) = 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0,$$

probleminin çözümleridir. Kesin fark şemaları yöntemi (Samarskii, 2001, s. 207-214) ve Eş. (3.2), (3.7) interpolasyon kuadratur formülleri Özdeşlik (4.95)'e uygulanırsa Özdeşlik (4.95)

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx &= -\chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u''(x) dx \\ &+ \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx \\ &+ \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.96)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim için baz fonksiyonları da dikkate alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} -\chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u''(x) dx &= -\chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \left(u'(x) \varphi_i(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx \right) \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade ve Eş. (4.96)'nın sağ tarafındaki ikinci terim (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralığında

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx &+ \chi_i^{-1} h^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx + \chi_i^{-1} h^{-1} \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)'}(x) dx \end{aligned}$$

$$+\chi_i^{-1}h^{-1}a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)u(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)u(x)dx \quad (4.97)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. İlk olarak Eş. (4.97) ifadesinin sağ tarafındaki birinci ve ikinci terim için Eş. (3.7) interpolasyon kuadratr formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x)\varphi_i^{(1)'}(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)\varphi_i^{(2)'}(x)dx \\ &= \chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)dx \right) u_{\bar{x},i} + \chi_i^{-1}h^{-1}\varepsilon \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)dx \right) u_{x,i} + R_{1,i} + R_{2,i} \end{aligned} \quad (4.98)$$

ifadesi elde edilir. İkinci olarak Eş. (4.97) ifadesinin sağ tarafındaki üçüncü ve dördüncü terim için Eş. (3.2) interpolasyon kuadratr formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1}h^{-1}a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)u(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)u(x)dx \\ &= \chi_i^{-1}h^{-1}a_i u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}a_i u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_i)\varphi_i^{(1)}(x)dx \\ &+ \chi_i^{-1}h^{-1}a_i u_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)dx + \chi_i^{-1}h^{-1}a_i u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)\varphi_i^{(2)}(x)dx + R_{3,i} + R_{4,i} \end{aligned} \quad (4.99)$$

ifadesi elde edilir. Burada belirtmek gerekir ki $R_{1,i} + R_{2,i} + R_{3,i} + R_{4,i} = 0$ sonucunu vermektedir. Elde edilen bu sonuçlar yani Eş. (4.98) ve (4.99), Eş. (4.96)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x)dx \\ &= -\chi_i^{-1}\varepsilon \left(1 + a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)(x-x_i)dx \right) u_{\bar{x},i} \\ &+ a_i \chi_i^{-1} \left(h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x)dx + h^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x)dx \right) u_i \\ &+ \chi_i^{-1}h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x)dx \\ &= -\varepsilon \theta_i u_{\bar{x},i} + a_i u_i + R_i^{(1)} \end{aligned} \quad (4.100)$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\theta_i = \chi_i^{-1} \left(1 + a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) (x - x_i) dx \right) = \frac{a_i \rho^2}{4 \sinh^2 \left(\frac{\sqrt{a_i} \rho}{2} \right)}, \quad \rho = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} \quad (4.101)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(1)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \quad (4.102)$$

şeklindedir. Ayrıca Özdeşlik (4.95)'in sağ tarafındaki terim için benzer şekilde

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx &= \chi_i^{-1} h^{-1} f_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \\ &+ \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx \\ &= f_i + R_i^{(2)} \end{aligned} \quad (4.103)$$

yazılabilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(2)} = \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx \quad (4.104)$$

biçimindedir. Özdeşlik (4.95) özdeşliğinin çekirdek fonksiyon içeren integral terim için Eş. (3.2) interpolasyon kuadratr formülü kullanılarak

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l K(x, s) u(s) ds &= \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds \\ &+ \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l [K(x, s) - K(x_i, s)] u(s) ds \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifadenin sağ tarafındaki ilk terimi için dikdörtgen kuralı uygulanırsa

$$\lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds = \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_j - \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi - x_{j-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} [K(x_i, \xi) u(\xi)] d\xi$$

elde edilir. Böylece

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l K(x, s) u(s) ds = \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_j + R_i^{(3)} \quad (4.105)$$

sonucu elde edilir. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} R_i^{(3)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l [K(x, s) - K(x_i, s)] u(s) ds \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi - x_{j-1}) \frac{\partial}{\partial \xi} [K(x_i, \xi) u(\xi)] d\xi \end{aligned} \quad (4.106)$$

şeklindedir. Özdeşlik (4.95)'den Eş. (4.100), (4.103) ve (4.105) dikkate alınarak, $u(x_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := -\varepsilon \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} u_j + R_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.107)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \quad (4.108)$$

biçimindedir. Burada $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ ve $R_i^{(3)}$ değerleri sırasıyla Eş. (4.102), (4.104) ve (4.106)'da ifade edilmiştir.

Sonuç olarak Denk. (4.107) esas alınarak R_i ihmal edilirse, (4.76)-(4.77) problemi için

$$L_N y_i := -\varepsilon \theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} y_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.109)$$

$$y_0 = A, \quad y_N = B \quad (4.110)$$

fark şeması sunulur. Burada belirtilen θ_i , Eş. (4.101)'de ifade edilmiştir.

4.2.1.3. Hata değerlendirmesi ve yakınsaklık analizi

$z_i = y_i - u_i$ olsun. Denk. (4.107) ve (4.109)'a göre z_i yaklaşık çözüm hatası için

$$L_N z_i := -\varepsilon \theta_i z_{\bar{x},i} + a_i z_i + \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.111)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0 \quad (4.112)$$

problemi yazılabilir. Burada R_i yaklaşım hatası Eş. (4.108) ile belirlenmiştir.

Teorem 4.3.

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |K_{ij}|}$$

ve Lemma 4.10 şartları altında (4.109)-(4.110) probleminin çözümü, (4.76)-(4.77) probleminin çözümüne ε -parametresine göre düzgün yakınsaktır. Yaklaşık çözümün hatası için

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch \quad (4.113)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (4.111)-(4.112) problemi ele alınarak maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \bar{\alpha}^{-1} \left\| R - \lambda h \sum_{j=1}^N K_{ij} z_j \right\|_{\infty, \omega_N} \\ &\leq \bar{\alpha}^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |\lambda| h \bar{\alpha}^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |K_{ij}| \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \\ &= \frac{\bar{\alpha}^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N}}{1 - |\lambda| h \bar{\alpha}^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N |K_{ij}|} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \quad (4.114)$$

değerlendirmesi elde edilir. Şimdi $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$ ve $R_i^{(3)}$ kalan terimleri sırasıyla değerlendirilecektir.

İlk olarak, $R_i^{(1)}$ kalan terimi için ele alınsın. $a(x)$ için ortalama değer teoreminden

$$|a(x) - a(x_i)| \leq |a'(\xi_i)| |x - x_i| \leq Ch, \quad x_i \leq \xi_i \leq x$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik, $a \in C^1[0, l]$ ve Eşitsizlik (4.79) birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \chi_i^{-1} h^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \right| \\ &\leq Ch \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \\ &= Ch \end{aligned} \tag{4.115}$$

değerlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $R_i^{(2)}$ kalan terimi için, $R_i^{(1)}$ 'e benzer şekilde olacaktır. $f(x)$ için ortalama değer teoreminden

$$|f(x) - f(x_i)| \leq |f'(\xi_i)| |x - x_i| \leq Ch, \quad x_i \leq \xi_i \leq x$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik, $f \in C^1[0, l]$ ve Eşitsizlik (4.79) birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned} |R_i^{(2)}| &\leq \chi_i^{-1} h^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \right| \\ &\leq Ch \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \\ &= Ch \end{aligned} \tag{4.116}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Son olarak, $R_i^{(3)}$ kalan terimi için, Eşitsizlik (4.79), (4.80) ve $\frac{\partial K}{\partial x}$ ifadesinin sınırlılığı dikkate alınarak

$$|R_i^{(3)}| \leq \chi_i^{-1} h^{-1} |\lambda| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l |K(x_i, s) - K(x, s)| |u(x)| dx$$

$$\begin{aligned}
& + |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (\xi, x_{j-1}) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} [K(x_i, \xi) u(\xi)] \right| d\xi \\
& \leq \chi_i^{-1} h^{-1} |\lambda| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l (x - x_i) \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(\xi, s) u(s) \right| ds \\
& + |\lambda| h \int_0^l \left| \frac{\partial}{\partial \xi} K(x_i, \xi) u(\xi) \right| d\xi \\
& \leq Ch + |\lambda| h \int_0^l \left\{ \left| \frac{\partial K(x_i, \xi)}{\partial \xi} \right| |u(\xi)| + |K(x_i, \xi)| |u'(\xi)| \right\} d\xi \\
& \leq C \left\{ h + h \int_0^l \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) d\xi \right\} \\
& \leq Ch
\end{aligned} \tag{4.117}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece, Eş. (4.108)'den Eşitsizlik (4.115), (4.116) ve (4.117) dikkate alınarak

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch \tag{4.118}$$

sonucunu ortaya koyar. Sonuç olarak, Eşitsizlik (4.114) ve (4.118) birlikte düşünülürse Eşitsizlik (4.113)'ün doğruluğu gösterilmiş olur. Dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.2.1.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.76)-(4.77) problemi için elde edilen sonuçlar bir örnek ile gösterilecektir.

Örnek 4.3.

$$-\varepsilon u''(x) + u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 x u(s) ds = x - \varepsilon + \varepsilon e^{-\frac{x}{\varepsilon}}, \quad 0 < x < 1, \tag{4.119}$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 2 - \varepsilon + \varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \tag{4.120}$$

probleminin kesin çözümü

$$u(x) = \frac{e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{x-2}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{x+1}{\sqrt{\varepsilon}}}}{1 - e^{-\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}}} + x - \varepsilon + \varepsilon e^{-\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}}$$

şeklindedir. Maksimum noktasal hata ve ε 'a göre hesaplanmış maksimum hata

$$e_{\varepsilon}^N = \|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N}, \quad e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

biçimindedir. Ayrıca düzgün yakınsama oranı ve ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama oranı

$$p_{\varepsilon}^N = \frac{\ln\left(\frac{e_{\varepsilon}^N}{e_{\varepsilon}^{2N}}\right)}{\ln 2}, \quad p^N = \frac{\ln\left(\frac{e^N}{e^{2N}}\right)}{\ln 2}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak probleminin çözümünden $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ve $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 4, 8, 12, 16$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı Tablo 4.3'te gösterilmiştir.

Tablo 4.3. (4.119)-(4.120) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları.

ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
2^0	0,00343868	0,00198874	0,00110332	0,00060368	0,00030394	0,00015197
	0,79	0,85	0,87	0,99	1,00	
2^{-4}	0,01032126	0,00605257	0,00338123	0,00185003	0,00094445	0,00047551
	0,77	0,84	0,87	0,97	0,99	
2^{-8}	0,01125894	0,00660244	0,00368841	0,0020181	0,00103025	0,00051871
	0,77	0,84	0,87	0,97	0,99	
2^{-12}	0,01120098	0,00656845	0,00366942	0,00200771	0,00102495	0,00051604
	0,77	0,84	0,87	0,97	0,99	
2^{-16}	0,0112049	0,00657075	0,00367071	0,00200842	0,00102531	0,00051622
	0,77	0,84	0,87	0,97	0,99	
e^N	0,01125894	0,00660244	0,00368841	0,0020181	0,00103025	0,00051622
p^N	0,77	0,84	0,87	0,97	0,99	

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi N değerleri artıkça, ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama hızı olan p^N 'in yakınsama değerleri birinci dereceden olmuştur. Böylece

teoride ifade edilen birinci dereceden ε – düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmış oldu.

4.2.2. Düzgün şebekede $O(h^2)$ durumu

Bu bölümde (4.76)-(4.77) sınır değer problemi için $[0, l]$ üzerinde düzgün şebekede $a'(0) = a'(l) = 0$, $K(x, 0) = K(x, l) = 0$ şartları altında $O(h^2)$ kesinliğe sahip fark şeması elde edilmiştir. Fark şemasının kararlılığı ve pertürbasyon parametresine göre ayrık maksimum normda ikinci dereceden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Sunulan metot nümerik örnek ile desteklenmiştir.

4.2.2.1. Sürekli problemin bazı özellikleri

Bu kısımda hata analizinde kullanılacak olan (4.76)-(4.77) probleminin kesin çözümü için bazı asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır.

Lemma 4.11. $a, f \in C^2[0, l]$, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} \in C[0, l]^2$, $(m = 0, 1, 2)$ ve

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x, s)| ds}$$

ise, (4.76)-(4.77) probleminin $u(x)$ çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C, \quad (4.121)$$

$$|u^{(k)}(x)| \leq C \left\{ 1 + \varepsilon^{-\frac{k}{2}} \left(e^{\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}, \quad (k = 1, 2), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (4.122)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat. Eşitsizlik (4.121) ve (4.122) için $k = 1$ durumu Lemma 4.10 ispatında gösterilmiştir. $k = 2$ için Eşitsizlik (4.122)'nin doğruluğunu göstermek yeterli olacaktır.

Denk. (4.76) denkleminde Leibniz kuralını dikkate alarak iki defa türev alınırsa

$$-\varepsilon v''(x) + a(x)v(x) = F(x) \quad (4.123)$$

elde edilir. Burada

$$v(x) = u''(x),$$

$$F(x) = f''(x) - 2a'(x)u'(x) - a''(x)u(x) - \lambda \int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(x,s)u(s)ds$$

biçimindedir. Ayrıca Lemma 4.10'da hesaplanan

$$|u''(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon}$$

değerlendirmesi dikkate alınır

$$v(0) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), \quad v(l) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (4.124)$$

yazılabilir. Eşitsizlik (4.80) dikkate alınarak, (4.123)-(4.124) problemine maksimum prensibi uygulanırsa

$$|v(x)| \leq w(x)$$

elde edilir. Burada $w(x)$,

$$-\varepsilon w''(x) + a(x)w(x) = C_0 + \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right),$$

$$w(0) = |v(0)|, \quad w(l) = |v(l)|$$

probleminin çözümüdür. Bu $w(x)$ çözümü

$$w(x) = w_0(x) + w_1(x) + C_1 w_2(x)$$

biçiminde aranabilir. Burada $w_0(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon w_0''(x) + a(x)w_0(x) = 0, \quad (4.125)$$

$$w_0(0) = |v(0)|, \quad w_0(l) = |v(l)| \quad (4.126)$$

probleminin çözümüdür. $w_1(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon w_1''(x) + a(x)w_1(x) = C_0, \quad (4.127)$$

$$w_1(0) = 0, \quad w_1(l) = 0 \quad (4.128)$$

probleminin çözümüdür. $w_2(x)$ fonksiyonu ise

$$-\varepsilon w_2''(x) + a(x)w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right), \quad (4.129)$$

$$w_2(0) = 0, \quad w_2(l) = 0 \quad (4.130)$$

probleminin çözümüdür. (4.125)-(4.126) probleminin çözümü (4.92)-(4.93) probleminin çözümüne benzer olarak

$$w_0(x) = \frac{1}{\sinh \frac{\sqrt{a}l}{\sqrt{\varepsilon}}} \left\{ |v(0)| \sinh \left(e^{-\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) + |v(l)| \sinh \left(e^{-\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}$$

şeklinde bulunur. Bu ifade Eş. (4.124) ile birlikte dikkate alınır

$$|w_0(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{a}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \quad (4.131)$$

eşitsizliği elde edilir. (4.127)-(4.128) probleminin çözümü için maksimum prensibi dikkate alınır

$$|w_1(x)| \leq \alpha^{-1} C_0 \quad (4.132)$$

değerlendirmesi elde edilir. (4.129)-(4.130) problemine maksimum prensibi dikkate alınırsa

$$|w_2(x)| \leq \bar{w}_2(x)$$

elde edilir. Burada $\bar{w}_2(x)$ fonksiyonu

$$-\varepsilon w_2''(x) + \alpha w_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right),$$

$$\bar{w}_2(0) = 0, \quad \bar{w}_2(l) = 0$$

probleminin çözümüdür. Sabit katsayılı bu problemin açık çözümü

$$\bar{w}_2(x) = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\alpha}} \left\{ x e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + (l-x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} - \frac{l e^{-\frac{\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\varepsilon}}}}{\sinh \frac{\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\varepsilon}}} \left(\sinh \frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}} + \sinh \frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \right\}$$

şeklinde dir. Buradan negatif olmayan $w_2(x)$ fonksiyonu için

$$|w_2(x)| \leq \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{\alpha}} \left\{ x e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + (l-x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right\} \quad (4.133)$$

yazılabilir. Böylece Eşitsizlik (4.122) ifadesinin $k = 2$ için ispatı

$$|w(x)| \leq |w_0(x)| + |w_1(x)| + C_1 |w_2(x)|$$

ifadesinde Eşitsizlik (4.131), (4.132) ve (4.133) dikkate alınarak tamamlanmış olur. $\square$

4.2.2.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde, belirtmek gerekir ki (4.76)-(4.77) probleminin diferansiyel kısmı için oluşturulacak fark şeması bir önceki bölümde gösterildiği gibi olacaktır. Farklı olarak integral terim içeren ifade için fark şeması oluşturulacaktır. Bu bölümün en önemli özelliği fark şemasının $O(h^2)$ hızında olmasıdır.

Özdeşlik (4.95) özdeşliğinin çekirdek fonksiyon içeren integral terim için

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l K(x, s) u(s) ds &= \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds \\ &+ \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_0^l \frac{\partial^2 K(\xi, s)}{\partial \xi^2} u(s) ds \right) K_1(x, \xi) d\xi \end{aligned} \quad (4.134)$$

yazılabilir. Burada $K_1(x, \xi)$ ve $T_1(\lambda)$ sırasıyla Eş. (3.3) ve (3.4)'te ifade edilmiştir.

Bu ifadenin sağ tarafındaki ilk terim için Eş. (3.1) ile ifade edilen kalan terimi integral formunda olan genelleştirilmiş yamuk kuralı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds &= \lambda \sum_{j=1}^N \hbar_j K_{ij} u_j \\ &+ \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) (K(x_i, \xi) u(\xi))'' d\xi \end{aligned} \quad (4.135)$$

elde edilir. Burada

$$\hbar_0 = \hbar_N = \frac{h}{2}, \quad \hbar_i = h, \quad 1 \leq i \leq N-1$$

şeklindedir. Böylece integral terim için Eş. (4.134) ve (4.135) birlikte ele alınırsa

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_0^l K(x, s) u(s) ds = \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j K_{ij} u_j + R_i^{(3)} \quad (4.136)$$

sonucu elde edilir. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} R_i^{(3)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_0^l \frac{\partial^2 K(\xi, s)}{\partial \xi^2} u(s) ds \right) K_1(x, \xi) d\xi \\ &+ \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) (K(x_i, \xi) u(\xi))'' d\xi \end{aligned} \quad (4.137)$$

şeklindedir. Böylece Özdeşlik (4.95)'de Eş. (4.100), (4.103) ve (4.136) dikkate alınarak, $u(x_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := -\varepsilon \theta_i u_{\bar{x}x,i} + a_i u_i + \lambda \sum_{j=1}^N \hbar_j K_{ij} u_j + R_i = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.138)$$

biçiminde yazılabilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = R_i^{(1)} + R_i^{(2)} + R_i^{(3)} \quad (4.139)$$

şeklinde olup $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$, $R_i^{(3)}$ ifadeleri Eş. (4.102), (4.104) ve (4.137)'de ayrı ayrı belirtilmiştir.

Sonuç olarak, Denk. (4.138) esas alınarak R_i ihmal edilirse (4.76)-(4.77) problemi için

$$L_N y_i := -\varepsilon \theta_i y_{\bar{x}x,i} + a_i y_i + \lambda \sum_{j=1}^N \hbar_j K_{ij} y_j = f_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.140)$$

$$y_0 = A, \quad y_N = B \quad (4.141)$$

fark şeması sunulur. Burada belirtilen θ_i , Eş. (4.101)'de ifade edilmiştir.

4.2.2.3. Hata değerlendirme ve yakınsaklık analizi

$z_i = y_i - u_i$ olsun. Denk. (4.138) ve (4.140) özdeşliklerine göre z_i yaklaşık çözüm hatası için

$$L_N z_i := -\varepsilon \theta_i z_{\bar{x}x,i} + a_i z_i + \lambda \sum_{j=1}^N \hbar_j K_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.142)$$

$$z_0 = 0, \quad z_N = 0 \quad (4.143)$$

problemi yazılabilir. Burada R_i yaklaşım hatası Eş. (4.139) ile belirtilmiştir.

Teorem 4.4. $a, f \in C^2[0, l]$, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} \in C^2[0, l]^2$, $(m = 0, 1, 2)$, $a'(0) = a'(l) = 0$,

$K(x, 0) = K(x, l) = 0$ ve

$$|\lambda| < \frac{\alpha}{\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \hbar_j |K_{ij}|}$$

olsun. Bu durumda (4.140)-(4.141) probleminin çözümü, (4.76)-(4.77) probleminin çözümüne ε -parametresine göre düzgün yakınsaktır. Yaklaşık çözüm hatası için

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq Ch^2 \quad (4.144)$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (4.142)-(4.143) problemi ele alınarak maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq \alpha^{-1} \left\| R - \lambda \sum_{j=1}^N \hbar_j K_{ij} z_j \right\|_{\infty, \omega_N} \\ &\leq \alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |\lambda| \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \hbar_j |K_{ij}| \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \\ &= \frac{\alpha^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N}}{1 - |\lambda| \alpha^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \hbar_j |K_{ij}|} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \quad (4.145)$$

sonucu elde edilir. Şimdi $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$, $R_i^{(3)}$ kalan terimleri sırasıyla değerlendirilecektir.

İlk olarak, $R_i^{(1)}$ kalan terimi için

$$|R_i^{(1)}| \leq Ch^2 \quad (4.146)$$

doğru olduğu gösterilecektir.

$$a(x) - a(x_i) = (x - x_i) a'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} a''(\xi_i), \quad \xi_i(x_i, x),$$

eşitliği dikkate alınarak Eş. (4.102)'den

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \\
&= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca bu ifade ve

$$u(x) = u(x_i) + (x - x_i) u'(\eta_i), \quad \eta_i(x_i, x)$$

eşitliği birlikte ele alınırsa

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \\
&= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) u(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx = 0$$

ifadesi dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \\
&= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&= \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) u(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&\equiv \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned} \tag{4.147}$$

sonucuna varılır. Eş. (4.147)'nin sağ tarafındaki ikinci terim için $a \in C^2[0, l]$, $|u(x)| \leq C$ ve $|x - x_i| \leq h$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \right| &\leq Ch^2 \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \\
&= O(h^2)
\end{aligned} \tag{4.148}$$

değerlendirmesi elde edilir. Ayrıca Lemma 4.11 şartları dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|u'(\eta_i)| &\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\eta_i}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\eta_i)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} \\
&\leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\}, \quad 1 < i < N-1
\end{aligned}$$

değerlendirmesi elde edilir. Buradan, Eş. (4.147) denkleminin sağ tarafındaki ilk terim için

$$\begin{aligned}
& \chi_i^{-1} h^{-1} \left| a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \varphi_i(x) dx \right| \\
& \leq C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) dx \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \\
& \quad + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a'(x_i)| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}} dx
\end{aligned} \tag{4.149}$$

değerlendirilmesi elde edilir. $a \in C^2[0, l]$, $|x - x_i| \leq h$ ve Lemma 4.11 dikkate alınırsa Eşitsizlik (4.149) ifadesinin sağ tarafındaki ilk terim için

$$\chi_i^{-1} h^{-1} \left| a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \varphi_i(x) dx \right| \leq Ch^2 \tag{4.150}$$

şeklinde değerlendirilme mümkün olur. Eşitsizlik (4.149) ifadesinin sağ tarafındaki ikinci terim için $a'(0) = 0$ ve $te^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$, ($t \geq 0$) özelliklerinden yararlanılır ise

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} |a''(\xi_i)| e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) dx \\
& \leq Ch^2 \frac{x_i}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \\
& \leq Ch^2 \frac{x_i}{x_{i-1}} \frac{x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \\
& \leq Ch^2 \frac{i}{i-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i-1}}{2\sqrt{\varepsilon}}} \\
& \leq Ch^2, \quad i > 1
\end{aligned} \tag{4.151}$$

değerlendirmesine ulaşılır. Benzer şekilde Eşitsizlik (4.149) ifadesinin sağ tarafındaki üçüncü terim için $a'(l) = 0$ ve $te^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$, ($t \geq 0$) özelliklerinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} \left| a'(x_i) \right| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \right| \\
& \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} C \chi_i^{-1} h^{-1} \left| a''(\xi_i) \right| e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 \varphi_i(x) dx \\
& \leq Ch^2 \frac{\chi_i}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \\
& \leq Ch^2 \frac{\chi_i}{\chi_{i+1}} \frac{\chi_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \\
& \leq Ch^2 \frac{i}{i+1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x_{i+1}}{2\sqrt{\varepsilon}}} \\
& \leq Ch^2, \quad i < N-1
\end{aligned} \tag{4.152}$$

değerlendirmesine ulaşılır. Böylece Eş. (4.147) ifadesini Eşitsizlik (4.148), (4.149), (4.150), (4.151) ve (4.152) ile birlikte dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} & \equiv \chi_i^{-1} h^{-1} a'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 u'(\eta_i(x)) \varphi_i(x) dx \\
& + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2 a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \\
& \leq Ch^2, \quad i = 2, 3, \dots, N-2
\end{aligned} \tag{4.153}$$

şeklinde yeniden değerlendirmek mümkün olur. Böylece Eş. (4.147) ifadesinin $O(h^2)$ kesinliğine sahip olduğu ispatlanmış oldu. Şimdi $i=1$ için değerlendirmesi araştırılacaktır. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde

$$a(x) - a(x_1) = (x - x_1) a'(x_1) + \frac{(x - x_1)^2}{2} a''(\xi_1), \quad \xi_1(x_1, x)$$

ve

$$u(x) = u(x_0) + \int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi$$

eşitlikleri dikkate alınarak $R_1^{(1)}$ kalan terimi

$$\begin{aligned}
R_1^{(1)} &= \chi_1^{-1} h^{-1} a'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \varphi_i(x) dx \\
&+ \frac{1}{2} \chi_1^{-1} h^{-1} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 a''(\xi_1(x)) u(x) \varphi_1(x) dx
\end{aligned} \tag{4.154}$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (4.154)'ün sağ taraftaki ikinci terimi için $a \in C^2[0, l]$, $|u(x)| \leq C$ ve $|x - x_i| \leq h$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{2} \chi_1^{-1} h^{-1} \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1)^2 a''(\xi_1(x)) u(x) \varphi_1(x) dx \right| &\leq Ch^2 \chi_1^{-1} h^{-1} \int_{x_0}^{x_2} \varphi_1(x) dx \\
&= O(h^2)
\end{aligned} \tag{4.155}$$

sonucu elde edilir. Eş. (4.154)'ün sağ tarafındaki ilk terimi için Lemma 4.11 ve $a'(0) = 0$ dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
&\left| \chi_1^{-1} h^{-1} a'(x_1) \int_{x_0}^{x_2} (x - x_1) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \varphi_i(x) dx \right| \leq |a'(x_1)| h \int_{x_0}^{x_2} |u'(x)| dx \\
&\leq C x_1 h |a''(\bar{\eta}_1)| \int_{x_0}^{x_2} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} dx \\
&\leq Ch^2 \left\{ h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{x_0}^{x_2} e^{-\frac{\sqrt{\alpha} x}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \right\} \\
&\leq Ch^2 \left\{ h + \sqrt{\alpha}^{-1} \left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{\alpha} h}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} \\
&= O(h^2), \quad \eta_1 \in (0, x_1)
\end{aligned} \tag{4.156}$$

değerlendirmesine ulaşılır. Böylece Eşitsizlik (4.155) ve (4.156) birlikte ele alınırsa

$$|R_1^{(1)}| = O(h^2) \tag{4.157}$$

sonucu sağlanmış olur. Şimdi $i = N - 1$ için değerlendirmesi araştırılsın. Benzer şekilde

$$a(x) - a(x_{N-1}) = (x - x_{N-1}) a'(x_{N-1}) + \frac{(x - x_{N-1})^2}{2} a''(\xi_{N-1}), \quad \xi_{N-1}(x_{N-1}, x),$$

$$u(x) = u(x_{N-1}) + \int_{x_{N-1}}^x u'(\xi) d\xi$$

eşitlikleri dikkate alınarak $R_{N-1}^{(1)}$ kalan terimi

$$\begin{aligned} R_{N-1}^{(1)} &= \chi_{N-1}^{-1} h^{-1} a'(x_{N-1}) \int_{x_{N-2}}^{x_N} (x - x_{N-1}) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \varphi_{N-1}(x) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \chi_{N-1}^{-1} h^{-1} \int_{x_{N-2}}^{x_N} (x - x_{N-1})^2 a''(\xi_{N-1}(x)) u(x) \varphi_{N-1}(x) dx \end{aligned} \quad (4.158)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (4.158) eşitliğinin sağ taraftaki ikinci terimi için $a \in C^2[0, l]$, $|u(x)| \leq C$ ve $|x - x_i| \leq h$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2} \chi_{N-1}^{-1} h^{-1} \int_{x_{N-2}}^{x_N} (x - x_{N-1})^2 a''(\xi_{N-1}(x)) u(x) \varphi_{N-1}(x) dx \right| \\ &\leq Ch^2 \chi_{N-1}^{-1} h^{-1} \int_{x_{N-2}}^{x_N} \varphi_{N-1}(x) dx = O(h^2) \end{aligned} \quad (4.159)$$

sonucu elde edilir. Eş. (4.158)'in sağ tarafındaki ilk terimi için Lemma 4.11 ve $a'(l) = 0$ dikkate alınarak

$$\begin{aligned} &\left| \chi_{N-1}^{-1} h^{-1} a'(x_{N-1}) \int_{x_{N-2}}^{x_N} (x - x_{N-1}) \left[\int_{x_0}^x u'(\xi) d\xi \right] \varphi_{N-1}(x) dx \right| \\ &\leq |a'(x_{N-1})| h \int_{x_{N-2}}^{x_N} |u'(x)| dx \\ &\leq C x_{N-1} h |a''(\bar{\eta}_{N-1})| \int_{x_{N-2}}^{x_N} \left\{ 1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} dx \\ &\leq Ch^2 \left\{ h + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{x_{N-2}}^{x_N} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} dx \right\} \\ &\leq Ch^2 \left\{ h + \sqrt{\alpha}^{-1} \left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}h}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} = O(h^2), \quad \eta_{N-1} \in (0, x_1) \end{aligned} \quad (4.160)$$

değerlendirmesine ulaşılır. Böylece Eşitsizlik (4.159) ve (4.160) birlikte ele alınırsa

$$\left| R_{N-1}^{(1)} \right| = O(h^2) \quad (4.161)$$

sonucu sağlanmış olur. Buradan Eş. (4.153), (4.157) ve (4.161) dikkate alınırsa Eşitsizlik (4.146) gösterilmiş oldu.

İkinci olarak, ise $R_i^{(2)}$ kalan terimi için

$$\left| R_i^{(2)} \right| \leq Ch^2 \quad (4.162)$$

doğru olduğu benzer şekilde gösterilecektir.

$$f(x) - f(x_i) = (x - x_i) f'(x_i) + \frac{(x - x_i)^2}{2} f''(\xi_i), \quad \xi_i(x_i, x),$$

eşitliği dikkate alınarak Eş. (4.104) denkleminde

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} f'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx = 0$$

olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} &= \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [f(x) - f(x_i)] \varphi_i(x) dx \\ &= \chi_i^{-1} h^{-1} f'(x_i) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx + \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Buradan $f \in C^2[0, l]$ ve $|x - x_i| \leq h$ olduğundan

$$\begin{aligned}
|R_i^{(2)}| &\leq \frac{1}{2} \chi_i^{-1} h^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \right| \\
&\leq \frac{h^2}{2} \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f''(\xi_i(x))| \chi_i^{-1} h^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \\
&= \frac{h^2}{2} \max_{[x_{i-1}, x_{i+1}]} |f''(\xi_i(x))| = O(h^2), \quad 1 \leq i \leq N-1
\end{aligned}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece Eşitsizlik (4.162)'nin doğruluğu gösterilmiş oldu.

Son olarak $R_i^{(3)}$ kalan terimi için Eş. (4.137)'den

$$\begin{aligned}
|R_i^{(3)}| &\leq \left| \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_0^l \frac{\partial^2 K(\xi, s)}{\partial \xi^2} u(s) ds \right) K_1(x, \xi) d\xi \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) (K(x_i, \xi) u(\xi))'' d\xi \right|
\end{aligned} \tag{4.163}$$

yazılabilir. $|K_1(x, s)| \leq Ch$ ve Lemma 4.11 şartları dikkate alınarak Eşitsizlik (4.163) ifadesinin sağ taraftaki ilk terim için

$$\left| \chi_i^{-1} h^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_0^l \frac{\partial^2 K(\xi, s)}{\partial \xi^2} u(s) ds \right) K_1(x, \xi) d\xi \right| \leq Ch^2 \tag{4.164}$$

değerlendirmesi kolayca yapılabilir. Eşitsizlik (4.163) ifadesinin sağ taraftaki ikinci terim yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \left| (K(x_i, \xi) u(\xi))'' \right| d\xi \\
&\leq \frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K''(x_i, \xi)| |u(\xi)| d\xi \\
&\quad + |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K'(x_i, \xi)| |u'(\xi)| d\xi \\
&\quad + \frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K(x_i, \xi)| |u''(\xi)| d\xi
\end{aligned} \tag{4.165}$$

biçiminde yazılabilir. Eşitsizlik (4.165)'in sağ tarafındaki ilk terim için $|u(x)| \leq C$ ve

$\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} \in C^2[0, l]$ dikkate alınarak

$$\frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K''(x_i, \xi)| |u(\xi)| d\xi \leq Ch^2 \quad (4.166)$$

değerlendirmesi elde edilir. Eşitsizlik (4.165)'in sağ tarafındaki ikinci terim için

$$\begin{aligned} & |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K'(x_i, \xi)| |u'(\xi)| d\xi \leq |\lambda| h^2 \int_0^l |K'(x_i, \xi)| |u'(\xi)| d\xi \\ & \leq |\lambda| h^2 \int_0^l |K'(x_i, \xi)| |u(\xi)| + |K(x_i, \xi)| |u'(\xi)| d\xi \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlik ile Lemma 4.11 şartları birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned} & |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K'(x_i, \xi)| |u'(\xi)| d\xi \\ & \leq C |\lambda| h^2 \int_0^l \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) d\xi \\ & \leq Ch^2 \end{aligned} \quad (4.167)$$

değerlendirmesi elde edilir. Son olarak, Eşitsizlik (4.165)'in sağ tarafındaki üçüncü terim değerlendirmesinde Eşitsizlik (4.122)'de $k = 2$ için sağlanan özellik kullanılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K(x_i, \xi)| |u''(\xi)| d\xi \\ & \leq C \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K(x_i, \xi)| \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right\} d\xi \\ & \leq Ch^2 \left\{ 1 + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right\} \end{aligned} \quad (4.168)$$

sonucuna varılır. Ayrıca

$$K(x_i, \xi) = K(x_i, 0) + \frac{\partial K}{\partial \xi} \xi$$

özdeşliği dikkate alınırsa Eşitsizlik (4.168), (burada belirtmek gerekir ki, çizgi; kısmi türevlerin ortalama değer teoremini kullanarak ara noktalarda değerlendirildiğini göstermektedir.)

$$Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi = Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, 0)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi + Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \frac{\partial K}{\partial \xi} \xi \right| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi$$

şeklinde yeniden yazılabilir. $K(x, 0) = 0$ şartı bu özdeşlikte işleme alınırsa

$$\begin{aligned} Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi &= Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, 0)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \\ &+ Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \frac{\partial K}{\partial \xi} \xi \right| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \\ &\leq Ch^2 \int_0^l \frac{\xi}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \end{aligned} \quad (4.169)$$

değerlendirmesi elde edilir. Diğer taraftan Eşitsizlik (4.169)'da $te^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$, ($t > 0$) dikkate alınırsa bu değerlendirme

$$\begin{aligned} Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi &\leq Ch^2 \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{2\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \\ &= Ch^2 \frac{2}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \\ &\leq Ch^2 \end{aligned} \quad (4.170)$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Benzer şekilde

$$K(x_i, \xi) = K(x_i, l) + \frac{\partial K}{\partial \xi} (\xi - l)$$

özdeşliği dikkate alınırsa,

$$Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi = Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, l)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \\ + Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \frac{\partial \overline{K}}{\partial \xi}(\xi - l) \right| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi$$

şeklinde yazılabilir. $K(x, l) = 0$ şartı bu özdeşlikte işleme alınır

$$Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi = Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, l)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \\ + Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left| \frac{\partial \overline{K}}{\partial \xi}(\xi - l) \right| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \quad (4.171) \\ \leq Ch^2 \int_0^l \frac{l-\xi}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi$$

değerlendirmesi elde edilir. Diğer taraftan Eşitsizlik (4.171)'de $te^{-t} \leq e^{-\frac{t}{2}}$, ($t > 0$) dikkate alınır bu değerlendirme

$$Ch^2 \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} |K(x_i, \xi)| \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} d\xi \leq Ch^2 \quad (4.172)$$

biçiminde yeniden elde edilir. Böylece Eşitsizlik (4.170) ve (4.172) ifadeleri dikkate alınır Eşitsizlik (4.168)'in

$$\frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) |K(x_i, \xi)| |u''(\xi)| d\xi \leq Ch^2 \quad (4.173)$$

şeklinde değerlendirilmesi elde edilmiş olur. O halde Eşitsizlik (4.166), (4.167) ve (4.173) dikkate alınarak

$$\frac{1}{2} |\lambda| \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \left| (K(x_i, \xi) u(\xi))'' \right| d\xi \leq Ch^2 \quad (4.174)$$

değerlendirmesi elde edilir. Sonuç olarak $R_i^{(3)}$ kalan terimi için hata değerlendirilmesi Eşitsizlik (4.164) ve (4.174)'ten

$$\left| R_i^{(3)} \right| \leq Ch^2 \quad (4.175)$$

değerlendirmesi elde edilir. Son olarak Eşitsizlik (4.146), (4.162) ve (4.175) dikkate alınarak ve

$$\left| R_i \right| \leq \left| R_i^{(1)} \right| + \left| R_i^{(2)} \right| + \left| R_i^{(3)} \right|$$

olduğundan

$$\left| R_i \right| \leq Ch^2 \quad (4.176)$$

değerlendirmesi elde edilir. Eşitsizlik (4.145) ve (4.176) birlikte düşünülürse ispat tamamlanmış olur. Böylece (4.144)'ün doğruluğu gösterilmiş oldu. $\square$

4.2.2.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.76)-(4.77) problemi için elde edilen teorik sonuçlar bir örnek ile gösterilecektir.

Örnek 4.4.

$$-\varepsilon u''(x) + (2 - \cos^2(\pi x))u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x \sin(\pi s)} - 1)u(s)ds = \frac{1}{1+x}, \quad 0 < x < 1, \quad (4.177)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (4.178)$$

probleminin kesin çözümü bilinmiyor. Bu yüzden nümerik sonuçlarda hata yaklaşımı ve yakınsama oranı hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Yani nümerik sonuçları iki kat daha ince şebeke üzerindeki sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Maksimum noktasal hata ve ε 'a göre hesaplanmış maksimum hata

$$e_{\varepsilon}^N = \max_{\bar{\omega}_N} \left| y_i^{\varepsilon, N} - y_{2i}^{\varepsilon, 2N} \right|, \quad e^N = \max_{\varepsilon} e_{\varepsilon}^N$$

biçiminde tanımlanır. Ayrıca düzgün yakınsama oranı ve ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama oranı

$$p_{\varepsilon}^N = \frac{\ln\left(\frac{e_{\varepsilon}^N}{e_{\varepsilon}^{2N}}\right)}{\ln 2}, \quad p^N = \frac{\ln\left(\frac{e^N}{e^{2N}}\right)}{\ln 2}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak probleminin çözümünden $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ve $\varepsilon = 10^{-i}$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı Tablo 4.4'te gösterilmiştir.

Tablo 4.4. (4.177)-(4.178) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları.

ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
10^0	0,03454618 1,984	0,00873286 1,988	0,00220145 1,993	0,00055304 1,995	0,00013874 1,999	0,00003471
10^{-2}	0,04099782 1,981	0,01038533 1,986	0,00262165 1,99	0,00065997 1,992	0,00016591 1,994	0,00004165
10^{-4}	0,04378985 1,979	0,01110798 1,981	0,00281381 1,985	0,00071081 1,987	0,00017931 1,99	0,00004514
10^{-6}	0,04624543 1,978	0,01173901 1,98	0,00297572 1,982	0,00075327 1,983	0,00019055 1,984	0,00004817
10^{-8}	0,04598163 1,976	0,01168824 1,977	0,00296902 1,978	0,00075366 1,978	0,00019131 1,979	0,00004853
e^N	0,04624543	0,01173901	0,00297572	0,00075366	0,00019131	0,00004853
p^N	1,978	1,98	1,982	1,978	1,979	

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi N değerleri artıkça, ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama hızı olan p^N 'in yakınsama değerleri ikinci dereceden olmuştur. Böylece teoride ifade edilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmış oldu.

4.2.3. Parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) durumu

Bu bölümde (4.76)-(4.77) sınır değer problemi için $[0, l]$ üzerinde parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinliğine sahip homojen tip fark şeması elde edilecektir. Fark şemasının kararlılığı ve pertürbasyon parametresine göre ayırık maksimum normda ikinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Sunulan metot nümerik örnek ile desteklenmiştir.

4.2.3.1. Sürekli problemin bazı özellikleri

Lemma 4.11 şartları altında Eşitsizlik (4.121) ve (4.122) bu bölümde de kullanılacaktır. Buradan hareketle fark şeması kurulmasına geçilebilir.

4.2.3.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde (4.76)-(4.77) problemi için parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebeke üzerinde fark şeması oluşturulacaktır. $[0, l]$ aralığında

$$\omega_N = \{0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < l, h_i = x_i - x_{i-1}\}, \quad \bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$$

herhangi bir düzgün olmayan şebeke ele alınsın. (4.76)-(4.77) problemi için fark şeması kurmaya aşağıdaki özdeşlik ile başlanacaktır.

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K(x, s) u(s) ds \right) dx \\ = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{aligned} \quad (4.179)$$

burada $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \frac{\sinh \gamma_i (x - x_{i-1})}{\sinh \gamma_i h_i}, & x_{i-1} < x < x_i, \\ \varphi_i^{(2)}(x) \equiv \frac{\sinh \gamma_i (x_{i+1} - x)}{\sinh \gamma_i h_{i+1}}, & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

şeklinde belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır. Burada

$$\gamma_i = \sqrt{\frac{a(x_i)}{\varepsilon}}$$

ve

$$\begin{aligned} \chi_i &= \left(\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx \right)^{-1} \\ &= \left(\hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh \gamma_i h_i} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \sinh \gamma_i (x - x_{i-1}) dx \right) + \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh \gamma_i h_{i+1}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \sinh \gamma_i (x_{i+1} - x) dx \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh \gamma_i h_i} \left(\frac{1}{\gamma_i} (\cosh \gamma_i (x - x_{i-1})) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right) + \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh \gamma_i h_{i+1}} \left(\frac{1}{\gamma_i} (\cosh \gamma_i (x_{i+1} - x)) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh \gamma_i h_i} \left(\frac{1}{\gamma_i} (\cosh \gamma_i h_i - 1) \right) + \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh \gamma_i h_{i+1}} \left(\frac{1}{\gamma_i} (\cosh \gamma_i h_{i+1} - 1) \right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2\hbar_i^{-1} \sinh^2 \frac{\gamma_i h_i}{2}}{\gamma_i \sinh \gamma_i h_i} + \frac{2\hbar_i^{-1} \sinh^2 \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2}}{\gamma_i \sinh \gamma_i h_{i+1}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{2\hbar_i^{-1} \sinh^2 \frac{\gamma_i h_i}{2}}{2\gamma_i \sinh \frac{\gamma_i h_i}{2} \cosh \frac{\gamma_i h_i}{2}} + \frac{2\hbar_i^{-1} \sinh^2 \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2}}{2\gamma_i \sinh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \cosh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2}} \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{\hbar_i^{-1}}{\gamma_i} \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right) \right)^{-1} \\ &= \frac{\gamma_i \hbar_i}{\tanh \left(\frac{\gamma_i h_i}{2} \right) + \tanh \left(\frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)} \end{aligned}$$

biçimindedir. Ayrıca sabit adım boyutu için

$$\chi_i = \frac{\gamma_i h}{2 \tanh \left(\frac{\gamma_i h}{2} \right)}$$

şeklindedir. $\varphi_i^{(1)}(x)$ baz fonksiyonu

$$-\varepsilon\varphi''(x) + a_i\varphi(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

$$\varphi(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi(x_i) = 1$$

probleminin ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ baz fonksiyonu ise

$$-\varepsilon\varphi''(x) + a_i\varphi(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1},$$

$$\varphi(x_i) = 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0$$

probleminin çözümleridir. Kesin fark şemaları yöntemi (Samarskii, 2001) ve Eş. (3.2), (3.7) interpolasyon kuadratr formülleri Özdeşlik (4.179)'da uygulanırsa Özdeşlik (4.179)'un diferansiyel kısmı

$$\begin{aligned} \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx &= -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u''(x) dx \\ &+ \chi_i \hbar_i^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx \\ &+ \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.180)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim için baz fonksiyonları da dikkate alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u''(x) dx &= -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \left(u'(x) \varphi_i(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx \right) \\ &= \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade ve Eş. (4.180)'in sağ tarafındaki ikinci terim (x_{i-1}, x_i) ve (x_i, x_{i+1}) aralığında

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx + \chi_i h_i^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx + \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)'}(x) dx \\
&+ \chi_i h_i^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) u(x) dx + \chi_i h_i^{-1} a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) u(x) dx
\end{aligned} \tag{4.181}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. İlk olarak Eş. (4.181) ifadesinin sağ tarafındaki birinci ve ikinci terim için Eş. (3.7) interpolasyon kuadratr formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx + \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)'}(x) dx \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx \right) u_{\bar{x},i} + \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx \right) u_{x,i} + R_{1,i} + R_{2,i} \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon u_{\bar{x},i} + \chi_i h_i^{-1} \varepsilon u_{x,i} + R_{1,i} + R_{2,i}
\end{aligned} \tag{4.182}$$

ifadesi elde edilir. İkinci olarak Eş. (4.181) ifadesinin sağ tarafındaki üçüncü ve dördüncü terim için Eş. (3.2) interpolasyon kuadratr formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) u(x) dx + \chi_i h_i^{-1} a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) u(x) dx \\
&= \chi_i h_i^{-1} a_i u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx \\
&+ \chi_i h_i^{-1} a_i u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx \\
&+ \chi_i h_i^{-1} a_i u_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx \\
&+ \chi_i h_i^{-1} a_i u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx + R_{3,i} + R_{4,i}
\end{aligned} \tag{4.183}$$

ifadesi elde edilir. Burada belirtmek gerekir ki $R_{1,i} + R_{2,i} + R_{3,i} + R_{4,i} = 0$ sonucunu vermektedir. Elde edilen bu sonuçlar, yani Eş. (4.182) ve (4.183) ifadeleri Eş. (4.180)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x) \right] \varphi_i(x) dx \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) \varphi_i^{(1)}(x) dx \right) u_{\bar{x},i} + a_i u_i \\
&\quad - \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \right) u_{x,i} \\
&\quad + \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[a(x) - a(x_i) \right] u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned} \tag{4.184}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) \varphi_i^{(1)}(x) dx \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sinh \gamma_i h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_i - x) \sinh \gamma_i (x - x_{i-1}) dx \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sinh \gamma_i h_i} (x_i - x) \frac{1}{\gamma_i} \cosh \gamma_i (x - x_{i-1}) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right) \\
&\quad - \frac{\chi_i h_i^{-1} a_i}{\gamma_i \sinh \gamma_i h_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cosh \gamma_i (x - x_{i-1}) dx \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sinh \gamma_i h_i} \left(-\frac{h_i}{\gamma_i} + \frac{1}{\gamma_i^2} \sinh \gamma_i (x - x_{i-1}) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \right) \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \left(\frac{-h_i}{\gamma_i \sinh \gamma_i h_i} + \frac{1}{\gamma_i^2} \right) \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 + \frac{a_i h_i}{\varepsilon \gamma_i \sinh \gamma_i h_i} - \frac{a_i}{\varepsilon \gamma_i^2} \right) \\
&= h_i^{-1} \varepsilon \left(\frac{\frac{\gamma_i h_i}{\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2}} + \frac{a_i h_i h_i}{\varepsilon \sinh \gamma_i h_i \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)}}{\frac{a_i h_i}{\varepsilon \gamma_i \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)}} \right) \\
&= h_i^{-1} \varepsilon \left(\frac{a_i h_i h_i}{\varepsilon \sinh \gamma_i h_i \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)} \right) = h_i^{-1} \varepsilon \theta_i^{(1)}
\end{aligned} \tag{4.185}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sinh \gamma_i h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \sinh \gamma_i (x_{i+1} - x) dx \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sinh \gamma_i h_{i+1}} (x_i - x) \frac{1}{\gamma_i} \cosh \gamma_i (x_{i+1} - x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right) \\
&\quad - \frac{\chi_i h_i^{-1} a_i}{\gamma_i \sinh \gamma_i h_{i+1}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cosh \gamma_i (x_{i+1} - x) dx \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \frac{1}{\sinh \gamma_i h_{i+1}} \left(-\frac{h_{i+1}}{\gamma_i} - \frac{1}{\gamma_i^2} \sinh \gamma_i (x_{i+1} - x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right) \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \left(\frac{-h_i}{\gamma_i \sinh \gamma_i h_i} + \frac{1}{\gamma_i^2} \right) \right) \\
&= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \left(1 + \frac{a_i h_{i+1}}{\varepsilon \gamma_i \sinh \gamma_i h_{i+1}} - \frac{a_i}{\varepsilon \gamma_i^2} \right) \\
&= h_i^{-1} \varepsilon \left(\frac{\gamma_i h_i}{\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2}} + \frac{a_i h_{i+1} h_i}{\varepsilon \sinh \gamma_i h_{i+1} \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{a_i h_i}{\varepsilon \gamma_i \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)} \right) \\
&= h_i^{-1} \varepsilon \left(\frac{a_i h_{i+1} h_i}{\varepsilon \sinh \gamma_i h_{i+1} \left(\tanh \frac{\gamma_i h_i}{2} + \tanh \frac{\gamma_i h_{i+1}}{2} \right)} \right) = h_i^{-1} \varepsilon \theta_i^{(2)}
\end{aligned} \tag{4.186}$$

şeklindedir. Eş. (4.185) ve (4.186) dikkate alınarak Eş. (4.184)

$$\begin{aligned}
& \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-\varepsilon u''(x) + a(x)u(x)] \varphi_i(x) dx = \varepsilon h_i^{-1} \theta_i^{(1)} u_{\bar{x},i} + a_i u_i - \varepsilon h_i^{-1} \theta_i^{(2)} u_{x,i} \\
& + \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx \\
&= -\varepsilon \delta^2 u_i + a_i u_i + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned} \tag{4.187}$$

biçiminde yeniden yazılabilir. Burada

$$\delta^2 u_i = \frac{\theta_i^{(2)} u_{x,i} - \theta_i^{(1)} u_{\bar{x},i}}{\hbar_i} \quad (4.188)$$

şeklindedir. Eş. (4.188)'de $\theta_i^{(1)}$ ve $\theta_i^{(2)}$ ise sırasıyla Eş. (4.185) ve (4.186)'da ayrı ayrı hesaplanmıştır. Ayrıca sabit adım boyutu için

$$\theta_i^{(1)} = \theta_i^{(2)} = \theta_i = \frac{a\rho^2}{4\sinh^2\left(\sqrt{a_i}\frac{\rho}{2}\right)}, \quad \left(\rho = \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

şeklindedir.

x_i, x_{i+1} şebeke noktalarına göre Newton interpolasyon formülü

$$a(x) - a(x_i) = (x - x_i)a_{x,i} + \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x))$$

biçiminde yazılabilir. Bu formül dikkate alınarak Eş. (4.187)'nin sağ tarafındaki üçüncü terim

$$\begin{aligned} \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx &= \chi_i \hbar_i^{-1} a_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.189)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Eş. (4.189)'un sağ tarafındaki ilk terim için

$$u(x) = u(x_i) + \int_{x_i}^x u'(s) ds$$

formülü kullanarak yeniden hesaplanırsa, Eş. (4.189)

$$\chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx = a_{\bar{x},i} \chi_i \mu_i u_i + R_i^{(1)}$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned}
\mu_i &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \\
&= \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh(\gamma_i h_i)} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \sinh \gamma_i (x - x_{i-1}) dx \\
&\quad + \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh(\gamma_i h_{i+1})} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \sinh \gamma_i (x_{i+1} - x) dx \\
&= \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh(\gamma_i h_i)} \left((x - x_i) \frac{1}{\gamma_i} \cosh \gamma_i (x - x_{i-1}) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{\gamma_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \cosh \gamma_i (x - x_{i-1}) dx \right) \\
&\quad + \frac{\hbar_i^{-1}}{\sinh(\gamma_i h_{i+1})} \left(-(x - x_i) \frac{1}{\gamma_i} \cosh \gamma_i (x_{i+1} - x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} + \frac{1}{\gamma_i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \cosh \gamma_i (x_{i+1} - x) dx \right) \quad (4.190) \\
&= \frac{\hbar_i^{-1} h_i}{\gamma_i \sinh(\gamma_i h_i)} - \frac{\hbar_i^{-1}}{\gamma_i^2 \sinh(\gamma_i h_i)} \sinh \gamma_i (x - x_{i-1}) \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} \\
&\quad - \frac{\hbar_i^{-1} h_{i+1}}{\gamma_i \sinh(\gamma_i h_{i+1})} - \frac{\hbar_i^{-1}}{\gamma_i^2 \sinh(\gamma_i h_{i+1})} \sinh \gamma_i (x_{i+1} - x) \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \\
&= \frac{\hbar_i^{-1} h_i}{\gamma_i \sinh(\gamma_i h_i)} - \frac{\hbar_i^{-1}}{\gamma_i^2} - \frac{\hbar_i^{-1} h_{i+1}}{\gamma_i \sinh(\gamma_i h_{i+1})} + \frac{\hbar_i^{-1}}{\gamma_i^2} \\
&= \hbar_i^{-1} \gamma_i^{-1} \left(\frac{h_i}{\sinh(\gamma_i h_i)} - \frac{h_{i+1}}{\sinh(\gamma_i h_{i+1})} \right)
\end{aligned}$$

ve kalan terim

$$\begin{aligned}
R_i^{(1)} &= \frac{1}{2} \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \\
&\quad + \chi_i \hbar_i^{-1} a_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \left(\int_{x_i}^x u'(s) ds \right) \varphi_i(x) dx \quad (4.191)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada belirtmek gerekir ki sabit adım boyutu için $\mu_i = 0$ 'dır.

Böylece Eş. (4.187)

$$\chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [-\varepsilon u''(x) + a(x) u(x)] \varphi_i(x) dx = \varepsilon \delta^2 u_i + \bar{a}_i u_i + R_i^{(1)} \quad (4.192)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\bar{a}_i = a_i + a_{x,i} \chi_i \mu_i \quad (4.193)$$

şeklindedir. Burada μ_i , Eş. (4.190)'da ifade edilmiştir. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde Özdeşlik (4.179)'un sağ tarafındaki integral terim için benzer şekilde

$$\chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx = \bar{f}_i + R_i^{(2)} \quad (4.194)$$

yazılabilir. Burada

$$\bar{f}_i = f_i + f_{x,i} \chi_i \mu_i \quad (4.195)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(2)} = \frac{1}{2} \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \quad (4.196)$$

şeklindedir. Belirtmek gerekir ki sabit adım boyutu için $\bar{f}_i = f_i$ olacaktır. Fark şemasını oluşturmak için son olarak Özdeşlik (4.179)'da integral terim için

$$K(x, s) = K(x_i, s) + (x - x_i) \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) + \frac{(x - x_i)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi_i(x), s)$$

Taylor açılımını kullanarak

$$\begin{aligned} \chi_i \hbar_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K(x, s) u(s) ds \right) dx &= \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds \\ &+ \mu_i \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) u(s) ds + R_i^{(3)} \\ &\equiv \lambda \int_0^l \kappa(x_i, s) u(s) ds + R_i^{(3)} \end{aligned} \quad (4.197)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\kappa(x_i, s) = K(x_i, s) + \mu_i \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) \quad (4.198)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(3)} = \frac{1}{2} \chi_i \hbar_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 \varphi_i(x) \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi_i(x), s) u(s) ds \right) dx \quad (4.199)$$

şeklindedir. Şimdi Eş. (4.197) ifadesinde $\kappa(x_i, s)u(s)$ için Eş. (3.1) ile ifade edilen kalan terimi integral biçiminde olan genelleştirilmiş yamuk kuralı uygulanırsa

$$\lambda \int_0^l \kappa(x_i, s) u(s) ds = \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} u_j + R_i^{(4)} \quad (4.200)$$

ifadesi elde edilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(4)} = \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (\kappa(x_i, \xi) u(\xi)) d\xi \quad (4.201)$$

şeklindedir. O halde Eş. (4.179)'dan Eş. (4.192), (4.194), (4.197) ve (4.200) dikkate alınarak, $u(x_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := -\varepsilon \delta^2 u_i + \bar{a}_i u_i + \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} u_j + R_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.202)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = \sum_{k=1}^4 R_i^{(k)}$$

biçiminde olup $R_i^{(k)}$, ($k=1, 2, 3, 4$) kalan terimleri sırasıyla Eş. (4.191), (4.196), (4.199) ve (4.201)'de ayrı ayrı ifade edilmiştir. Sonuç olarak, Denk. (4.202) esas alınarak R_i ihmal edilirse, (4.76)-(4.77) problemi için

$$L_N y_i := -\varepsilon \delta^2 y_i + \bar{a}_i y_i + \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} y_j = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.203)$$

$$y_0 = A, \quad y_N = B \quad (4.204)$$

fark şeması sunulur. Burada δ^2 , $\bar{a}_i$, $\bar{f}_i$, κ_{ij} değerleri sırasıyla Eş. (4.188), (4.193), (4.195) ve (4.198)'de ayrı ayrı ifade edilmiştir.

4.2.3.3. Hata değerdendirmesi ve yakınsaklık analizi

Değerdendirmeye geçmeden önce parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekeyi ifade etmek gerekir. (4.203)-(4.204) fark şemasının ε parametresine göre düzgün yakınsak olması için $\bar{\omega}_N$ üzerinde düzgün olmayan σ 'ya bağılı bir geçiş noktası içeren Shishkin tip şebeke kullanılacaktır. Bu şebeke, $x = 0$ ve $x = l$ sınır katı etrafında yoğunlaşan parçalı düzgün bir şebekedir. N çift bir sayı olmak üzere, $\bar{\omega}_N$ parçalı düzgün şebekesi $[0, l]$ aralığını $[0, \sigma]$, $[l - \sigma, l]$ ince parsel ve $[\sigma, l - \sigma]$ kalın parsel olmak üzere üç alt aralığa bölünür. Burada σ geçiş noktası

$$\sigma = \min \left\{ \frac{l}{4}, \left(\sqrt{\alpha} \right)^{-1} \sqrt{\varepsilon} \ln N \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Ayrıca $h^{(1)}$ ve $h^{(2)}$, $[0, \sigma]$, $[\sigma, l - \sigma]$ ve $[l - \sigma, l]$ alt aralıkların adım uzunlukları olup, $[0, l]$ üzerinde x_i düğüm noktaları

$$\bar{\omega}_N = \begin{cases} x_i = ih^{(1)}, & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}, & h^{(1)} = \frac{4\sigma}{N}; \\ x_i = \sigma + \left(i - \frac{N}{4} \right) h^{(2)}, & i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}, & h^{(2)} = \frac{2(l - 2\sigma)}{N}; \\ x_i = l - \sigma + \left(i - \frac{3N}{4} \right) h^{(1)}, & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N, & h^{(1)} = \frac{4\sigma}{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 4.12. $a, f \in C^2[0, l]$ ve $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} \in C^2[0, l]^2$, ($m = 0, 1, 2$) olsun. O halde R_i kalan terimi için

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-2} \ln N \quad (4.205)$$

değerdendirmesi doğrudur.

İspat. Her bir $R_i^{(k)}$, ($k = 1, 2, 3, 4$) için ayrı ayrı değerdendirilecektir.

İlk olarak, $R_i^{(1)}$ kalan terimi ele alınırsa $a \in C^2[0, l]$, $|x - x_{i-1}| \leq \max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2h_i$ ve $h^{(k)} \leq CN^{-1}$, ($k=1, 2$) olduğundan ve Lemma 4.11 dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i^{(1)}| &\leq \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_{i-1})(x - x_i) a''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \right| \\
&\quad + \chi_i h_i^{-1} a_{x,i} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \left(\int_{x_i}^x u'(s) ds \right) \varphi_i(x) dx \right| \\
&\leq C \{ \max(h_i, h_{i+1}) \}^2 + C \max(h_i, h_{i+1}) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right)
\end{aligned} \tag{4.206}$$

değerlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $R_i^{(2)}$ kalan terimi için yukarıdaki gibi benzer şekilde $f \in C^2[0, l]$, $|x - x_{i-1}| \leq \max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2h_i$ ve $h^{(k)} \leq CN^{-1}$, ($k=1, 2$) olduğundan

$$\begin{aligned}
|R_i^{(2)}| &\leq \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \right| \\
&\leq C \{ \max(h_i, h_{i+1}) \}^2 \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{4.207}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Üçüncü olarak, $R_i^{(3)}$ kalan terimi için $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$ sınırlı olduğu ve Lemma 4.11 dikkate alınır

$$\begin{aligned}
|R_i^{(3)}| &\leq \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} |\lambda| \left| \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)^2 \varphi_i(x) \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi_i(x), s) u(s) ds \right) dx \right| \\
&\leq C \{ \max(h_i, h_{i+1}) \}^2 \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{4.208}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Son olarak, $R_i^{(4)}$ kalan terimi için Lemma 4.11 şartları dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i^{(4)}| &\leq \left| \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{d^2}{d\xi^2} (\kappa(x_i, \xi) u(\xi)) d\xi \right| \\
&\leq C \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) (1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|) d\xi \\
&\leq C \left\{ \sum_{j=1}^N h_j^3 + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right\}
\end{aligned} \tag{4.209}$$

değerlendirmesi elde edilir. Buradan

$$|R_i| \leq \sum_{k=1}^4 |R_i^{(k)}|$$

olduğundan ve Eşitsizlik (4.206), (4.207), (4.208) ve (4.209) değerlendirmeleri birlikte dikkate alınırsa

$$|R_i| \leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) (1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|) d\xi \right)$$

değerlendirmesi yazılabilir. Bu ifade Eşitsizlik (4.121) ve (4.122) ile birlikte düşünülürse

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&\quad + C \left(\sum_{j=1}^N h_j^3 + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right) \\
&\quad + C \left(\sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right) \\
&\leq C \left(N^{-2} + \sum_{j=1}^N h_j^3 + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&\quad + C \left(\sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right)
\end{aligned} \tag{4.210}$$

elde edilir. Şimdi parçalı düzgün şebeke üzerinde hata değerlendirmesi yapılacaktır.

İlk olarak, $\frac{l}{4} < (\sqrt{\alpha})^{-1} \sqrt{\varepsilon} \ln N$ olsun. O halde $\sigma = \frac{l}{4}$ olup $h^{(1)} = h^{(2)} \leq CN^{-1}$ dikkate alınır (4.210)'dan

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left(N^{-2} + \sum_{j=1}^N h_j^3 + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&\quad + C \left(+ \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right) \\
&\leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \frac{4h^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}} + |h^{(1)}|^2 \int_0^\sigma \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \right) \\
&\leq C \left(N^{-2} + \frac{4lN^{-2}}{\sqrt{\varepsilon}} + |h^{(1)}|^2 \frac{2(\sqrt{\alpha})^{-1}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \leq CN^{-2}, \quad 1 \leq i \leq N-1
\end{aligned} \tag{4.211}$$

değerlendirmesi elde edilir.

$(\sqrt{\alpha})^{-1} \sqrt{\varepsilon} \ln N < \frac{l}{4}$ olsun. O halde $\sigma = (\sqrt{\alpha})^{-1} \sqrt{\varepsilon} \ln N$ olup $h^{(k)} \leq CN^{-1}$, ($k=1,2$) şeklindedir. Şimdi $[0, \sigma]$, $[\sigma, l-\sigma]$, $[l-\sigma, \sigma]$ aralıklarında ve $i = \frac{N}{4}$ ve $i = \frac{3N}{4}$ noktalarında değerlendirme yapılacaktır. $R_i^{(2)}$ ve $R_i^{(3)}$ değerlendirmeleri Eşitsizlik (4.207) ve (4.208) değerlendirmesi gibi olacaktır. Burada sadece $R_i^{(1)}$ ve $R_i^{(4)}$ değerlendirmeleri için ayrı ayrı bakılacaktır. $[0, \sigma]$ aralığında $R_i^{(1)}$ değerlendirmesi Eşitsizlik (4.206) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i^{(1)}| &\leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \frac{2h^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\
&= CN^{-1} \left(N^{-1} + 4(\sqrt{\alpha})^{-1} N^{-1} \ln N \right) \\
&\leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq \frac{N}{4} - 1
\end{aligned} \tag{4.212}$$

elde edilir. $[\sigma, l - \sigma]$ aralığında $R_i^{(1)}$ değeri değerlendirilmesi Eşitsizlik (4.206) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i^{(1)}| &\leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&= CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i+1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) + (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i-1})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} \left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}h_i^{(2)}}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} \left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{\alpha}h_i^{(2)}}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_{i-1}}{\sqrt{\varepsilon}}} + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{i+1})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_N}{\sqrt{\varepsilon}}} + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_{3N/4})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \\
&\leq CN^{-2}, \quad \frac{N}{4} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{4} - 1
\end{aligned} \tag{4.213}$$

elde edilir. $[l - \sigma, l]$ aralığında $R_i^{(1)}$ değeri değerlendirilmesi Eşitsizlik (4.206) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i^{(1)}| &\leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + \frac{2h^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\
&= CN^{-1} \left(N^{-1} + 4(\sqrt{\alpha})^{-1} N^{-1} \ln N \right) \\
&\leq CN^{-2} \ln N, \quad \frac{3N}{4} + 1 \leq i \leq N - 1
\end{aligned} \tag{4.214}$$

elde edilir. Son olarak, $i = \frac{N}{4}$ ve $i = \frac{3N}{4}$ noktaları için $R_i^{(1)}$ değeri değerlendirilmesine

bakılacaktır. $i = \frac{N}{4}$ için Eşitsizlik (4.206) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\left| R_{\frac{N}{4}}^{(1)} \right| &\leq C \left(N^{-2} + N^{-1} \int_{\frac{x_N}{4}-1}^{\frac{x_N}{4}+1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) dx \right) \\
&= CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_N}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_N}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_N)}{\sqrt{\varepsilon}}} - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_N)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&= CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_N}{\sqrt{\varepsilon}}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(x_N - h^{(1)} - h^{(2)})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&\quad + CN^{-1} \left((\sqrt{\alpha})^{-1} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_N)}{\sqrt{\varepsilon}}} \left(1 - e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-x_N - h^{(1)} - h^{(2)})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_N}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}h^{(1)}}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-h^{(2)})}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} + (\sqrt{\alpha})^{-1} \left(e^{-\frac{4 \ln N}{N}} e^{-\frac{\sqrt{\alpha}x_N}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \right) \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{4.215}$$

elde edilir. $i = \frac{3N}{4}$ için Eşitsizlik (4.206) dikkate alınırsa yukarıdaki değerlendirmeye benzer şekilde

$$\left| R_{\frac{3N}{4}}^{(1)} \right| \leq CN^{-2} \tag{4.216}$$

şeklindedir. Böylece Eşitsizlik (4.212), (4.213), (4.214), (4.215) ve (4.216) dikkate alınarak

$$\left| R_i^{(1)} \right| \leq CN^{-2}, \quad 1 \leq i \leq N-1 \tag{4.217}$$

sonucuna varılır.

Şimdi $R_i^{(4)}$ değerlendirmesine bakılacaktır. Eşitsizlik (4.209)'un sağ tarafındaki ilk terim için

$$\sum_{j=1}^N h_j^3 = \frac{N}{2} |h^{(1)}|^3 + \frac{N}{2} |h^{(2)}|^3 \leq CN^{-2} \quad (4.218)$$

değerlendirmesi elde edilir. Eşitsizlik (4.209)'un sağ tarafındaki diğer terim ayrı ayrı ele alınacak olursa

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\ &= \sum_{j=1}^{\frac{N}{4}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\ &+ \sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\ &+ \sum_{j=\frac{3N}{4}+1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.219)$$

şeklinde yazılabilir. Eş. (4.219)'un sağ tarafındaki ilk toplam için gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\frac{N}{4}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi &\leq |h^{(1)}|^2 \int_0^{\sigma} \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\ &\leq |h^{(1)}|^2 \frac{2(\sqrt{\alpha})^{-1} \ln N}{\sqrt{\varepsilon}} \\ &\leq CN^{-2} \ln N \end{aligned} \quad (4.220)$$

değerlendirmesi elde edilir. Eş. (4.219)'un sağ tarafındaki ikinci toplam için gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=\frac{3N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\
&= 2(\sqrt{\alpha})^{-1} \sum_{j=\frac{3N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \left(x_j - \xi - \frac{h^{(2)}}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\
&\leq 2(\sqrt{\alpha})^{-1} h^{(2)} \int_{\sigma}^{l-\sigma} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \\
&= 4(\sqrt{\alpha})^{-2} h^{(2)} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\sigma}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\sigma)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \\
&\leq 4(\sqrt{\alpha})^{-2} h^{(2)} N^{-1} \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{4.221}$$

değerlendirmesi elde edilir. Eş. (4.219)'un sağ tarafındaki üçüncü toplam için ise Eşitsizlik (4.220) değerlendirmesine benzer şekilde

$$\sum_{j=\frac{3N}{4}+1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon} \left(e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\xi}{\sqrt{\varepsilon}}} + e^{-\frac{\sqrt{\alpha}(l-\xi)}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) d\xi \leq CN^{-2} \ln N \tag{4.222}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece Eşitsizlik (4.218), (4.219), (4.220), (4.221) ve (4.222) dikkate alınarak

$$\left| R_i^{(4)} \right| \leq CN^{-2} \ln N, \quad 1 \leq i \leq N-1 \tag{4.223}$$

sonucuna varılır.

Sonuç olarak, Eşitsizlik (4.207), (4.208), (4.211), (4.217) ve (4.223) dikkate alınırsa Eşitsizlik (4.205) değerlendirmesi sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

$z_i = y_i - u_i$, $(0 \leq i \leq N)$ yaklaşık çözüm hatası

$$L_N z_i := -\varepsilon \delta^2 z_i + \bar{a}_i z_i + \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \tag{4.224}$$

$$z_0 = A, \quad z_N = B \tag{4.225}$$

problemini sağlar.

Ayrıca, $a \in C^2[0, l]$ olduğundan dolayı yeterince büyük N değerleri için $\bar{a}_i \geq \bar{\alpha} > 0$ olacak şekilde bir $\bar{\alpha}$ sayısının olduğunu belirtmek gerekir.

Teorem 4.5. $a, f \in C^2[0, l]$, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} \in C^2[0, l]^2, (m = 0, 1, 2)$ ve

$$|\lambda| < \frac{\bar{\alpha}}{\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \bar{h}_j |\kappa_{ij}|}$$

olsun. Bu durumda (4.203)-(4.204) fark probleminin y_i çözümü için

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-2} \ln N \quad (4.226)$$

hata değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (4.224)-(4.225) problemi ele alınarak maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq (\bar{\alpha})^{-1} \left\| R - \lambda \sum_{j=1}^N \bar{h}_j \kappa_{ij} z_j \right\|_{\infty, \omega_N} \\ &\leq (\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |\lambda| (\bar{\alpha})^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \bar{h}_j |\kappa_{ij}| \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \\ &= \frac{(\bar{\alpha})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N}}{1 - |\lambda| (\bar{\alpha})^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \bar{h}_j |\kappa_{ij}|} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \quad (4.227)$$

sonucu elde edilir. Eşitsizlik (4.205) ve (4.227) değerlendirmeleri ile birlikte ele alınırsa (4.226)'da ki istenilen sonuca ulaşılmış ve böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.2.3.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.76)-(4.77) problemi için elde edilen teorik sonuçlar bir örnek ile gösterilecektir.

Örnek 4.5.

$$-\varepsilon u''(x) + (2 - e^{-x})u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 (e^{x \cos(\pi s)} - 1)u(s)ds = \frac{1}{1+x}, \quad 0 < x < 1, \quad (4.228)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (4.229)$$

probleminin kesin çözümü bilinmiyor. Bu yüzden nümerik sonuçlarda hata yaklaşımı ve yakınsama oranı hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Yani nümerik sonuçları iki kat daha ince şebeke üzerindeki sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Maksimum noktasal hata ve ε 'a göre hesaplanmış maksimum hata

$$e_\varepsilon^N = \max_{\bar{\omega}_N} |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_{2i}^{\varepsilon, 2N}|, \quad e^N = \max_\varepsilon e_\varepsilon^N$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$

$$\bar{\omega}_{2N} = \left\{ x_{\frac{i}{2}} : i = 0, 1, \dots, 2N \right\}$$

şebekesi üzerinde ilgili metodun yakınsak çözümüdür. Burada

$$x_{\frac{i}{2}+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

şeklindedir. Ayrıca düzgün yakınsama oranı ve ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama oranı

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln\left(\frac{e_\varepsilon^N}{e_\varepsilon^{2N}}\right)}{\ln 2}, \quad p^N = \frac{\ln\left(\frac{e^N}{e^{2N}}\right)}{\ln 2}$$

şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak probleminin çözümünden $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ve $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 0, 2, 4, 6, 8$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı Tablo 4.5'te gösterilmiştir.

Tablo 4.5. (4.228)-(4.229) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları.

ε	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$	$N = 1024$
10^0	0,03454618 1,984	0,00873286 1,988	0,00220145 1,993	0,00055304 1,995	0,00013874 1,999	0,00003471
10^{-2}	0,04099782 1,981	0,01038533 1,986	0,00262165 1,99	0,00065997 1,992	0,00016591 1,994	0,00004165
10^{-4}	0,04378985 1,979	0,01110798 1,981	0,00281381 1,985	0,00071081 1,987	0,00017931 1,99	0,00004514
10^{-6}	0,04624543 1,978	0,01173901 1,98	0,00297572 1,982	0,00075327 1,983	0,00019055 1,984	0,00004817
10^{-8}	0,04598163 1,976	0,01168824 1,977	0,00296902 1,978	0,00075366 1,978	0,00019131 1,979	0,00004853
e^N	0,04624543	0,01173901	0,00297572	0,00075366	0,00019131	0,00004853
p^N	1,978	1,98	1,982	1,978	1,979	

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi N değerleri artıkça, ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama hızı olan p^N 'in yakınsama değerleri ikinci dereceden olmuştur. Böylece teoride ifade edilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmış oldu.

4.3. Konvektif Terim İçeren Singüler Pertürbe Özellikli Fredholm İntegro-Diferansiyel Denklem İçin Düzgün Yakınsak Fark Şeması

Bu bölümde self adjoint olmayan ve sıfırıncı mertebeden indirgenmiş denklemlerle ikinci mertebeden lineer SPFİDD için sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problem için parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekede fark şemasının oluşturulması, kararlılık, yakınsaklık ve nümerik özellikleri ayrı ayrı incelenmiştir.

Aşağıda tanımlanan ikinci mertebeden lineer SPFİDD için sınır değer problemi ele alınmıştır.

$$Lu := \varepsilon^2 u'' + \varepsilon a(x)u' - b(x)u + \lambda \int_0^l K(x,s)u(s)ds = f(x), \quad x \in (0,l), \quad (4.230)$$

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0 \quad (4.231)$$

problemde $\varepsilon \in (0,1]$ bir pertürbasyon parametresi, λ ise reel bir parametredir. $a(x) \geq 0$, $b(x) \geq \beta > 0$, $f(x)$ ($x \in [0,l]$) ve $K(x,s)$ ($(x,s) \in [0,l] \times [0,l]$) bazı düzgünlük koşullarını sağlayan yeterince düzgün fonksiyonlardır. Bu şartlar altında (4.230)-(4.231) probleminin $u(x)$ çözümü, küçük ε değerleri için $x=0$ ve $x=l$ civarında iki sınır katına sahiptir.

4.3.1. Parçalı düzgün şebeke (Shishkin mesh) durumu

4.3.1.1. Sürekli problemin bazı özellikleri

Bu bölümde hata analizinde kullanılacak olan (4.230)-(4.231) probleminin kesin çözümü için bazı asimptotik değerlendirmeler ele alınacaktır.

Lemma 4.13. $a, b, f \in C^2[0,l]$, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} \in [0,l]^2$, ($m=0,1,2$) ve

$$|\lambda| < \frac{\beta}{\max_{0 \leq x \leq l} \int_0^l |K(x,s)| ds} \quad (4.232)$$

ise bu durumda (4.230)-(4.231) probleminin $u(x)$ çözümü için

$$\|u\|_{\infty} \leq C, \quad (4.233)$$

$$|u^{(k)}(x)| \leq C \left\{ 1 + \frac{1}{\varepsilon^k} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) \right\}, \quad (k=1,2), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.234)$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2(0)4b(0)} + a(0) \right),$$

$$\mu_2 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{a^2(l)4b(l)} - a(l) \right),$$

şeklindedir.

İspat. Eşitsizlik (4.233) ve (4.234) değerlendirmelerinin ispatı için (Amiraliyev ve Çakır, 2000; Amirali ve Amirali, 2018;) referanslarına bakılabilir.

4.3.1.2. Fark şemasının kurulması

Bu bölümde (4.230)-(4.231) problemi için parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebeke üzerinde fark şeması oluşturulacaktır. $[0, l]$ aralığında

$$\omega_N = \{0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < l, h_i = x_i - x_{i-1}\}, \quad \bar{\omega}_N = \omega_N \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}$$

herhangi bir düzgün olmayan şebeke ele alınsın. (4.230)-(4.231) problemi için fark şeması kurmaya aşağıdaki özdeşlik ile başlanacaktır.

$$\begin{aligned} & \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon a(x) u'(x) - b(x) u(x) \right] \varphi_i(x) dx \\ & + \chi_i^{-1} h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K(x, s) u(s) ds \right) dx \\ & = \chi_i^{-1} h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx, \quad 1 \leq i \leq N-1 \end{aligned} \quad (4.235)$$

burada $\varphi_i(x)$ fonksiyonu

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \varphi_i^{(1)}(x) \equiv \frac{e^{\lambda_{1,i}(x-x_{i-1})} - e^{\lambda_{2,i}(x-x_{i-1})}}{e^{\lambda_{1,i}h_i} - e^{\lambda_{2,i}h_i}}, & x_{i-1} < x < x_i, \\ \varphi_i^{(2)}(x) \equiv \frac{e^{\lambda_{2,i}(x_{i+1}-x)} - e^{\lambda_{1,i}(x_{i+1}-x)}}{e^{-\lambda_{2,i}h_{i+1}} - e^{-\lambda_{1,i}h_{i+1}}}, & x_i < x < x_{i+1}, \\ 0, & x \notin (x_{i-1}, x_{i+1}) \end{cases}$$

şeklinde belirlenmiş baz fonksiyonlarıdır. Burada

$$\lambda_{1,i} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(a_i + \sqrt{a_i^2 + 4b_i} \right), \quad \lambda_{2,i} = \frac{1}{2\varepsilon} \left(a_i - \sqrt{a_i^2 + 4b_i} \right) \quad (4.236)$$

ve

$$\begin{aligned} \chi_i^{-1} &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) dx = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{\lambda_{1,i}h_i} - e^{\lambda_{2,i}h_i}} \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{\lambda_{1,i}(x-x_{i-1})} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{\lambda_{2,i}(x-x_{i-1})} dx \right) \\ &\quad + \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{-\lambda_{2,i}h_{i+1}} - e^{-\lambda_{1,i}h_{i+1}}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\lambda_{2,i}(x_{i+1}-x)} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\lambda_{1,i}(x_{i+1}-x)} dx \right) \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{\lambda_{1,i}h_i} - e^{\lambda_{2,i}h_i}} \left(\frac{1}{\lambda_{2,i}} - \frac{1}{\lambda_{1,i}} + \frac{1}{\lambda_{1,i}} e^{\lambda_{1,i}h_i} - \frac{1}{\lambda_{2,i}} e^{\lambda_{2,i}h_i} \right) \\ &\quad + \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{-\lambda_{2,i}h_{i+1}} - e^{-\lambda_{1,i}h_{i+1}}} \left(\frac{1}{\lambda_{2,i}} - \frac{1}{\lambda_{1,i}} + \frac{1}{\lambda_{1,i}} e^{-\lambda_{1,i}h_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_{2,i}} e^{-\lambda_{2,i}h_{i+1}} \right) \\ &= \frac{\hbar_i^{-1} \left(e^{-\lambda_{1,i}h_i} + e^{-\lambda_{2,i}h_i} \right) \left(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i} + \lambda_{2,i} e^{\lambda_{1,i}h_i} - \lambda_{1,i} e^{\lambda_{2,i}h_i} \right)}{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \left(e^{(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_i} - e^{-(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_i} \right)} \\ &\quad + \frac{\hbar_i^{-1} \left(e^{\lambda_{2,i}h_{i+1}} + e^{\lambda_{1,i}h_{i+1}} \right) \left(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i} + \lambda_{2,i} e^{-\lambda_{1,i}h_{i+1}} - \lambda_{1,i} e^{-\lambda_{2,i}h_{i+1}} \right)}{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \left(e^{(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_{i+1}} - e^{-(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_{i+1}} \right)} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplama yapılır. Burada

$$P_i = \left(e^{-\lambda_{1,i}h_i} + e^{-\lambda_{2,i}h_i} \right) \left(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i} + \lambda_{2,i} e^{\lambda_{1,i}h_i} - \lambda_{1,i} e^{\lambda_{2,i}h_i} \right),$$

$$Q_i = \left(e^{\lambda_{2,i}h_{i+1}} + e^{\lambda_{1,i}h_{i+1}} \right) \left(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i} + \lambda_{2,i} e^{-\lambda_{1,i}h_{i+1}} - \lambda_{1,i} e^{-\lambda_{2,i}h_{i+1}} \right)$$

ifade edilirse

$$\chi_i^{-1} = \frac{\hbar_i^{-1} P_i}{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \left(e^{(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_i} - e^{-(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_i} \right)} + \frac{\hbar_i^{-1} Q_i}{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \left(e^{(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_{i+1}} - e^{-(\lambda_{1,i}-\lambda_{2,i})h_{i+1}} \right)} \quad (4.237)$$

biçimindedir.

$\varphi_i^{(1)}(x)$ baz fonksiyonu

$$\varepsilon^2 \varphi''(x) - \varepsilon a_i \varphi'(x) - b_i \varphi_i(x) = 0, \quad x_{i-1} < x < x_i,$$

$$\varphi(x_{i-1}) = 0, \quad \varphi(x_i) = 1$$

probleminin ve $\varphi_i^{(2)}(x)$ baz fonksiyonu ise

$$\varepsilon^2 \varphi''(x) - \varepsilon a_i \varphi'(x) - b_i \varphi_i(x) = 0, \quad x_i < x < x_{i+1},$$

$$\varphi(x_i) = 1, \quad \varphi(x_{i+1}) = 0$$

probleminin çözümleridir. Eş. (4.235)'in diferansiyel kısmı

$$\begin{aligned} & \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon a(x) u'(x) - b(x) u(x) \right] \varphi_i(x) dx \\ &= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u''(x) dx + \chi_i h_i^{-1} \varepsilon a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u'(x) dx \\ & \quad - \chi_i h_i^{-1} b_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u(x) dx + \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[a(x) - a(x_i) \right] u'(x) \varphi_i(x) dx \\ & \quad - \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[b(x) - b(x_i) \right] u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.238)$$

şeklinde düzenlenebilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim için baz fonksiyonları da dikkate alınarak kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \chi_i h_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) u''(x) dx &= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon^2 \left(u'(x) \varphi_i(x) \Big|_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} - \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx \right) \\ &= -\chi_i h_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ifade, Eş. (4.238)'in sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terim (x_{i-1}, x_i)

ve (x_i, x_{i+1}) aralığında

$$\begin{aligned}
& -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i'(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i(x) dx - \chi_i \hbar_i^{-1} b_i \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u(x) \varphi_i(x) dx \\
& = -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx - \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)'}(x) dx \\
& + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)}(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)}(x) dx \\
& + \chi_i \hbar_i^{-1} b_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i^{(1)}(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} b_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) \varphi_i^{(2)}(x) dx
\end{aligned} \tag{4.239}$$

biçiminde yeniden yazılabilir.

İlk olarak, Eş. (4.239)'un sağ tarafındaki birinci ve ikinci terim için Eş. (3.7) interpolasyon kuadratur formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)'}(x) dx - \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)'}(x) dx \\
& = -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)'}(x) dx \right) u_{\bar{x},i} - \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)'}(x) dx \right) u_{x,i} + R_{1,i} + R_{2,i} \\
& = -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 u_{\bar{x},i} + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 u_{x,i} + R_{1,i} + R_{2,i}
\end{aligned} \tag{4.240}$$

ifadesi elde edilir.

İkinci olarak, Eş. (4.239)'un sağ tarafındaki üçüncü ve dördüncü terim için Eş. (3.7) interpolasyon kuadratur formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'(x) \varphi_i^{(1)}(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x) \varphi_i^{(2)}(x) dx \\
& = \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \left(\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx \right) u_{\bar{x},i} + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon a_i \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx \right) u_{x,i} + R_{3,i} + R_{4,i}
\end{aligned} \tag{4.241}$$

ifadesi elde edilir.

Üçüncü olarak, Eş. (4.239)'un sağ tarafındaki beşinci ve altıncı terim için Eş. (3.2) interpolasyon kuadratur formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_i \hbar_i^{-1} b_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u(x) \varphi_i^{(1)}(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} b_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x) \varphi_i^{(2)}(x) dx \\
&= \chi_i \hbar_i^{-1} b_i u_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} b_i u_{\bar{x},i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx \\
&+ \chi_i \hbar_i^{-1} b_i u_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx + \chi_i \hbar_i^{-1} b_i u_{x,i} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx + R_{5,i} + R_{6,i}
\end{aligned} \tag{4.242}$$

ifadesi elde edilir. Burada belirtmek gerekir ki $R_{1,i} + R_{2,i} + R_{3,i} + R_{4,i} + R_{5,i} + R_{6,i} = 0$ sonucunu vermektedir. Elde edilen bu sonuçlar yani Eş. (4.240), (4.241) ve (4.242) ifadeleri Eş. (4.238)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon a(x) u'(x) - b(x) u(x) \right] \varphi_i(x) dx \\
&= -\chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \left(1 - a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)}(x) dx + b_i \varepsilon^{-2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)}(x) dx \right) u_{\bar{x},i} - b_i u_i \\
&+ \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon^2 \left(1 + a_i \varepsilon^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)}(x) dx - b_i \varepsilon^{-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)}(x) dx \right) u_{x,i} \\
&+ \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[a(x) - a(x_i) \right] u'(x) \varphi_i(x) dx \\
&- \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[b(x) - b(x_i) \right] u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki bu eşitlik düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \chi_i \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon a(x) u'(x) - b(x) u(x) \right] \varphi_i(x) dx \\
&= \varepsilon^2 \delta^2 u_i - b_i u_i + \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[a(x) - a(x_i) \right] u'(x) \varphi_i(x) dx \\
&- \chi_i \hbar_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left[b(x) - b(x_i) \right] u(x) \varphi_i(x) dx
\end{aligned} \tag{4.243}$$

sonucu elde edilir. Burada

$$\delta^2 u_i = \frac{\theta_i^{(2)} u_{x,i} - \theta_i^{(1)} u_{\bar{x},i}}{\hbar_i} \quad (4.244)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada ifade edilen

$$\theta_i^{(1)} = \chi_i \left(1 - \varepsilon^{-1} a_i \chi_{1,i}^{-1} - \varepsilon^{-2} b_i \mu_{1,i} \right), \quad (4.245)$$

$$\theta_i^{(2)} = \chi_i \left(1 + \varepsilon^{-1} a_i \chi_{2,i}^{-1} - \varepsilon^{-2} b_i \mu_{2,i} \right) \quad (4.246)$$

biçimindedir. Eş. (4.245)'te ifade edilen

$$\chi_{1,i}^{-1} = \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i^{(1)} dx = \frac{\hbar_i^{-1} P_i}{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \left(e^{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \hbar_i} - e^{-(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \hbar_i} \right)}$$

şeklinde olup, Eş. (4.237)'de ki ifadenin sağ tarafındaki ilk terimdir. Benzer şekilde Eş. (4.246)'da ifade edilen

$$\chi_{2,i}^{-1} = \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i^{(2)} dx = \frac{\hbar_i^{-1} Q_i}{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \left(e^{(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \hbar_{i+1}} - e^{-(\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \hbar_{i+1}} \right)}$$

şeklinde olup, Eş. (4.237)'de ifadenin sağ tarafındaki ikinci terimdir. Eş. (4.245)'de ifade edilen

$$\begin{aligned} \mu_{1,i} &= \hbar_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) \varphi_i^{(1)} dx \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{\lambda_{1,i} \hbar_i} - e^{\lambda_{2,i} \hbar_i}} \left\{ \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) e^{\lambda_{1,i} (x - x_{i-1})} dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i) e^{\lambda_{2,i} (x - x_{i-1})} dx \right\} \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{\lambda_{1,i} \hbar_i} - e^{\lambda_{2,i} \hbar_i}} \left(\frac{(x - x_i)}{\lambda_{1,i}} e^{\lambda_{1,i} (x - x_{i-1})} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{\lambda_{1,i}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{\lambda_{1,i} (x - x_{i-1})} dx \right) \\ &\quad - \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{\lambda_{1,i} \hbar_i} - e^{\lambda_{2,i} \hbar_i}} \left(\frac{(x - x_i)}{\lambda_{2,i}} e^{\lambda_{2,i} (x - x_{i-1})} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{1}{\lambda_{2,i}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{\lambda_{2,i} (x - x_{i-1})} dx \right) \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{\lambda_{1,i} \hbar_i} - e^{\lambda_{2,i} \hbar_i}} \left(\frac{\hbar_i}{\lambda_{1,i}} - \frac{\hbar_i}{\lambda_{2,i}} + \frac{1}{\lambda_{1,i}^2} (1 - e^{\lambda_{1,i} \hbar_i}) - \frac{1}{\lambda_{2,i}^2} (1 - e^{\lambda_{2,i} \hbar_i}) \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\mu_{1,i} = \frac{\hbar_i^{-1} D_i}{e^{\lambda_{1,i} h_i} - e^{\lambda_{2,i} h_i}}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$D_i = \frac{h_i}{\lambda_{1,i}} - \frac{h_i}{\lambda_{2,i}} + \frac{1}{\lambda_{1,i}^2} (1 - e^{\lambda_{1,i} h_i}) - \frac{1}{\lambda_{2,i}^2} (1 - e^{\lambda_{2,i} h_i})$$

biçimindedir. Benzer şekilde Eş. (4.246)'da ifade edilen

$$\begin{aligned} \mu_{2,i} &= \hbar_i^{-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i^{(2)} dx \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{-\lambda_{2,i} h_i + 1} - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}}} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) e^{-\lambda_{2,i} (x_{i+1} - x)} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} (x - x_i) e^{-\lambda_{1,i} (x_{i+1} - x)} dx \right\} \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{-\lambda_{2,i} h_i + 1} - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}}} \left(\left. \frac{(x - x_i)}{\lambda_{2,i}} e^{-\lambda_{2,i} (x_{i+1} - x)} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_{2,i}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\lambda_{2,i} (x_{i+1} - x)} dx \right) \\ &\quad - \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{-\lambda_{2,i} h_i + 1} - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}}} \left(\left. \frac{(x - x_i)}{\lambda_{1,i}} e^{-\lambda_{1,i} (x_{i+1} - x)} \right|_{x_i}^{x_{i+1}} - \frac{1}{\lambda_{1,i}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} e^{-\lambda_{1,i} (x_{i+1} - x)} dx \right) \\ &= \frac{\hbar_i^{-1}}{e^{-\lambda_{2,i} h_{i+1}} - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}}} \left(\frac{h_{i+1}}{\lambda_{2,i}} - \frac{h_{i+1}}{\lambda_{1,i}} - \frac{1}{\lambda_{2,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{2,i} h_{i+1}}) + \frac{1}{\lambda_{1,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}}) \right) \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\mu_{2,i} = \frac{\hbar_i^{-1} E_i}{e^{-\lambda_{2,i} h_{i+1}} - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}}}$$

şeklinde ifade edilir. Burada

$$E_i = \frac{h_{i+1}}{\lambda_{2,i}} - \frac{h_{i+1}}{\lambda_{1,i}} - \frac{1}{\lambda_{2,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{2,i} h_{i+1}}) + \frac{1}{\lambda_{1,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{1,i} h_{i+1}})$$

biçimindedir. Burada belirtilen $\lambda_{1,i}$ ve $\lambda_{2,i}$ Eş. (4.236)'da ifade edilmiştir. Buradan hareketle

$$\mu_i = \mu_{1,i} + \mu_{2,i} \quad (4.247)$$

şeklindedir. x_i, x_{i+1} şebeke noktalarına göre Newton interpolasyon formülü

$$a(x) - a(x_i) = (x - x_i)a_{x,i} + \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})a''(\xi_i(x))$$

biçiminde yazılabilir. Bu formül dikkate alınarak Eş. (4.243)'ün sağ tarafındaki üçüncü terim

$$\begin{aligned} \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u'(x) \varphi_i(x) dx &= \chi_i h_i^{-1} \varepsilon a_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u'(x) \varphi_i(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) a''(\xi_i(x)) u'(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.248)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Eş. (4.248)'in sağ tarafındaki ilk terim Eş. (3.7) interpolasyon kuadratür formülü kullanarak yeniden hesaplanırsa,

$$\chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [a(x) - a(x_i)] u'(x) \varphi_i(x) dx = a_{x,i} \varepsilon \chi_i \mu_{x,i} u_0 + R_i^{(1)} \quad (4.249)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} R_i^{(1)} &= \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) a''(\xi_i(x)) u'(x) \varphi_i(x) dx \\ &- \chi_i h_i^{-1} \varepsilon a_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx (x - x_i) \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(\xi) \left[T_0(\xi - x) - \frac{1}{2} h_i^{-1} (\xi - x_{i-1}) \right] d\xi \end{aligned} \quad (4.250)$$

biçimindedir. Benzer şekilde x_i, x_{i+1} şebeke noktalarına göre Newton interpolasyon formülü

$$b(x) - b(x_i) = (x - x_i)b_{x,i} + \frac{1}{2}(x - x_i)(x - x_{i+1})b''(\xi_i(x))$$

dikkate alınarak Eş. (4.243)'ün sağ tarafındaki dördüncü terim

$$\begin{aligned} \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x) - b(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx &= \chi_i h_i^{-1} b_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) u(x) \varphi_i(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) b''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \end{aligned} \quad (4.251)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca Eş. (4.251)'in sağ tarafındaki ilk terim için

$$u(x) = u(x_i) + \int_{x_i}^x u'(s) ds$$

formülü kullanarak yeniden hesaplanırsa, Eş. (4.251)

$$\chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [b(x) - b(x_i)] u(x) \varphi_i(x) dx = b_{x,i} \chi_i \mu_i u_i + R_i^{(2)} \quad (4.252)$$

şeklinde yazılabilir. Burada kalan terim

$$\begin{aligned} R_i^{(2)} = & \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) b''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \\ & - \chi_i h_i^{-1} b_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) \left(\int_{x_i}^x u'(s) ds \right) dx \end{aligned} \quad (4.253)$$

biçimindedir. (4.249) ve (4.252) dikkate alınarak Eş. (4.243) yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} [\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon a(x) u'(x) - b(x) u(x)] \varphi_i(x) dx = & \varepsilon \delta^2 u_i + \varepsilon \delta u_i - \bar{b}_i u_i \\ & + R_i^{(1)} - R_i^{(2)} \end{aligned} \quad (4.254)$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$\delta u_i = a_{x,i} \varepsilon \chi_i \mu_i u_{0_{x,i}}, \quad (4.255)$$

$$\bar{b}_i = b_i + b_{x,i} \chi_i \mu_i \quad (4.256)$$

şeklindedir. Burada χ_i ve μ_i sırasıyla Eş. (4.237) ve (4.247)'de ifade edilmiştir. Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde Eş. (4.235)'in sağ tarafındaki integral terim için benzer şekilde

$$\chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx = \bar{f}_i + R_i^{(3)} \quad (4.257)$$

yazılabilir. Burada

$$\bar{f}_i = f_i + f_{x,i} \chi_i \mu_i \quad (4.258)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(3)} = \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \quad (4.259)$$

şeklindedir. Şimdi Eş. (4.235)'in sol tarafındaki ikinci terimin yaklaşımı için

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) F(x) dx &= \left(\int_a^b p(x) dx \right) F(\bar{x}) + F'(\bar{x}) \int_a^b (x - \bar{x}) p(x) dx \\ &+ \int_a^b dx p(x) \int_a^b F''(\xi) (x - \xi) [T_0(x - \xi) - T_0(\bar{x} - \xi)] d\xi, \quad a \leq \bar{x} \leq b \end{aligned}$$

interpolasyon kuadratur formülünü kullanılacaktır. Burada $F(x) = \int_0^l K(x, s) u(s) ds$,

$[a, b] = [x_{i-1}, x_{i+1}]$, ve $p(x) = \varphi_i(x)$ olacak şekilde denklemde yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} &\chi_i h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \varphi_i(x) \left(\int_0^l K(x, s) u(s) ds \right) dx = \lambda \int_0^l K(x_i, s) u(s) ds \\ &+ \left(\chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) dx \right) \lambda \int_0^l \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) u(s) ds \\ &+ \chi_i h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} K(\xi, s) u(s) ds [T_0(x - \xi) - T_0(x_i - \xi)] (x - \xi) d\xi \right) \\ &\equiv \lambda \int_0^l \kappa(x_i, s) u(s) ds + R_i^{(4)} \end{aligned} \quad (4.260)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\kappa(x_i, s) = K(x_i, s) + \mu_i \frac{\partial}{\partial x} K(x_i, s) \quad (4.261)$$

ve kalan terim

$$R_i^{(4)} = \chi_i \hbar_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\int_0^l \frac{\partial^2}{\partial x^2} K(\xi, s) u(s) ds \right) x \left[T_0(x - \xi) - T_0(x_i - \xi) \right] (x - \xi) d\xi \quad (4.262)$$

şeklindedir. Şimdi Eş. (4.261)'de $\kappa(x_i, s)u(s)$ için Eş. (3.1)'de kalan terimi integral biçiminde olan genelleştirilmiş yamuk kuralı uygulanırsa

$$\lambda \int_0^l \kappa(x_i, s) u(s) ds = \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} u_j + R_i^{(5)} \quad (4.263)$$

ifadesi elde edilir. Burada kalan terim

$$R_i^{(5)} = \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{d^2}{d\xi^2} (\kappa(x_i, \xi) u(\xi)) d\xi \quad (4.264)$$

şeklindedir. O halde Eş. (4.235)'den Eş. (4.254), (4.257), (4.260) ve (4.263) dikkate alınarak, $u(x_i)$ için kesin bağıntı

$$L_N u_i := \varepsilon^2 \delta^2 u_i + \varepsilon \delta u_i - \bar{b}_i u_i + \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} u_j + R_i = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1 \quad (4.265)$$

şeklinde yazılabilir. Burada R_i kalan terimi

$$R_i = R_i^{(1)} - R_i^{(2)} - R_i^{(3)} + R_i^{(4)} + R_i^{(5)}$$

biçiminde olup $R_i^{(1)}$, $R_i^{(2)}$, $R_i^{(3)}$, $R_i^{(4)}$ ve $R_i^{(5)}$ kalan terimleri sırasıyla Eş. (4.250), (4.253), (4.259), (4.262) ve (4.264)'de ayrı ayrı ifade edilmiştir. Sonuç olarak, Denk. (4.265) esas alınarak R_i ihmal edilirse, (4.230)-(4.231) problemi için

$$L_N y_i := \varepsilon^2 \delta^2 y_i + \varepsilon \delta y_i - \bar{b}_i y_i + \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} y_j = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.266)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0 \quad (4.267)$$

fark şeması sunulur. Burada $\delta^2 y_i$, δy_i , $\bar{b}_i$, $\bar{f}_i$, ve κ_{ij} değerleri sırasıyla Eş. (4.244), (4.255), (4.256), (4.258) ve (4.261)'de ayrı ayrı ifade edilmiştir.

(4.266)-(4.267) fark şemasının ε parametresine göre düzgün yakınsak olması için $\bar{\omega}_N$ üzerinde düzgün olmayan σ_1 ve σ_2 'ye bağlı geçiş noktaları içeren Shishkin tip şebeke kullanılacaktır. Bu şebeke, $x=0$ ve $x=l$ sınır katı etrafında yoğunlaşan parçalı düzgün bir şebekedir. N çift bir sayı olmak üzere, $\bar{\omega}_N$ parçalı düzgün şebekesi $[0, l]$ aralığını $[0, \sigma_1]$, $[l - \sigma_2, l]$ $N/4$ eşit alt aralığına ve $[\sigma_1, l - \sigma_2]$ ise $N/2$ alt aralığına bölünmüştür. Burada σ_1 ve σ_2 geçiş noktaları

$$\sigma_1 = \min \left\{ \frac{l}{4}, \mu_1^{-1} \varepsilon \ln N \right\}, \quad \sigma_2 = \min \left\{ \frac{l}{4}, \mu_2^{-1} \varepsilon \ln N \right\}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada μ_1 ve μ_2 Lemma 4.13 de ifade edilmiştir. Ayrıca $h^{(1)}$, $h^{(2)}$ ve $h^{(3)}$ $[0, \sigma_1]$, $[\sigma_1, l - \sigma_2]$ ve $[l - \sigma_2, l]$ alt aralıkların adım uzunlukları olup, $[0, \sigma_1]$, $[\sigma_1, l - \sigma_2]$ ve $[l - \sigma_2, l]$ üzerinde x_i düğüm noktaları

$$\bar{\omega}_N = \begin{cases} x_i = ih^{(1)}, & i = 0, 1, \dots, \frac{N}{4}, & h^{(1)} = \frac{4\sigma_1}{N}; \\ x_i = \sigma_1 + \left(i - \frac{N}{4}\right)h^{(2)}, & i = \frac{N}{4} + 1, \dots, \frac{3N}{4}, & h^{(2)} = \frac{2(l - \sigma_2 - \sigma_1)}{N}; \\ x_i = l - \sigma_2 + \left(i - \frac{3N}{4}\right)h^{(3)}, & i = \frac{3N}{4} + 1, \dots, N, & h^{(3)} = \frac{4\sigma_2}{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Ayrıca burada $h_i = h^{(1)}$, $h_i = h^{(2)}$, $h_i = h^{(3)}$

$$h = \begin{cases} h^{(1)}, & \text{için } [0, \sigma_1], \\ h^{(2)}, & \text{için } [\sigma_1, l - \sigma_2], \\ h^{(3)}, & \text{için } [\sigma_2, l], \end{cases}$$

anlamına gelecektir. (4.266)-(4.267) fark şeması için $i = \frac{N}{4}$ ve $i = \frac{3N}{4}$ haricinde ki noktalar için

$$L_N y_i := \varepsilon^2 \theta_{1,i} y_{\bar{x},i} + \varepsilon \theta_{2,i} y_{x,i}^0 - \bar{b}_i y_i + \lambda \sum_{j=0}^N \hbar_j \kappa_{ij} y_j = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.268)$$

$$y_0 = 0, \quad y_N = 0 \quad (4.269)$$

fark şeması sunulur. Burada

$$\begin{aligned} \theta_{1,i} &= \chi_i \left(1 + \frac{h}{2} \varepsilon^{-1} a_i (\chi_{2,i}^{-1} - \chi_{1,i}^{-1}) - \frac{h}{2} \varepsilon^{-2} b_i (\mu_{2,i} - \mu_{1,i}) \right) \\ &= -\frac{b_i h^2}{4 \varepsilon^2} \left(1 + \coth \left(\frac{\lambda_{1,i} h}{2} \right) \coth \left(\frac{\lambda_{2,i} h}{2} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{2,i} &= a_i - \varepsilon^{-1} \chi_i b_i \mu_i + a_{x,i} \varepsilon \chi_i \mu_i \\ &= -\frac{b_i h}{2 a_i \varepsilon} \left(\coth \left(\frac{\lambda_{1,i} h}{2} \right) \coth \left(\frac{\lambda_{2,i} h}{2} \right) \right) + a_{x,i} \varepsilon \chi_i \mu_i \end{aligned}$$

$$\bar{b}_i = b_i + b_{x,i} \chi_i \mu_i, \quad \bar{f}_i = f_i + f_{x,i} \chi_i \mu_i$$

ve

$$\chi_i = \frac{\lambda_{1,i} \lambda_{2,i} \sinh \left((\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \frac{h}{2} \right)}{2 h^{-1} (\lambda_{1,i} - \lambda_{2,i}) \sinh \left(\frac{\lambda_{1,i} h}{2} \right) \sinh \left(\frac{\lambda_{2,i} h}{2} \right)},$$

$$\mu_i = \frac{h^{-1} F_i}{e^{\lambda_{1,i} h - \lambda_{2,i} h}} + \frac{h^{-1} G_i}{e^{-\lambda_{2,i} h - \lambda_{1,i} h}},$$

$$F_i = \frac{h}{\lambda_{1,i}} - \frac{h}{\lambda_{2,i}} + \frac{1}{\lambda_{1,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{1,i} h}) - \frac{1}{\lambda_{2,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{2,i} h}),$$

$$G_i = \frac{h}{\lambda_{2,i}} - \frac{h}{\lambda_{1,i}} - \frac{1}{\lambda_{2,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{2,i} h}) + \frac{1}{\lambda_{1,i}^2} (1 - e^{-\lambda_{1,i} h})$$

şeklindedir.

4.3.1.3. Hata değ erlendirmesi ve yakınsaklık analizi

Lemma 4.14. $a, b, f \in C^2[0, l]$ ve $\frac{\partial^m K}{\partial x^m}, \frac{\partial^{m+1} K}{\partial x \partial s^m} \in C^2[0, l]^2$, ($m = 0, 1, 2$) olsun. O halde

$$\|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-2} \ln^2 N \quad (4.270)$$

değ erlendirmesi doğ rudur.

İspat. R_i i in $1 \leq i \leq \frac{N}{4} - 1$, $\frac{N}{4} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{4} - 1$, $\frac{3N}{4} + 1 \leq i \leq N - 1$, $i = \frac{N}{4}$ ve $i = \frac{3N}{4}$ noktalarında ayrı ayrı değ erlendirilecektir.

 ncelikle $i \neq \frac{N}{4}$ ve $i \neq \frac{3N}{4}$ dikkate alınarak değ erlendirmeler yapılacaktır.

İlk olarak, $R_i^{(1)}$ kalan terimi ele alınırsa $a \in C^2[0, l]$, $|x - x_i| \leq \max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2h_i$ ve $h^{(k)} \leq CN^{-1}$, ($k = 1, 2$) olduğ undan ayrıca E . (4.250) ve Lemma 4.13  artları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} |R_i^{(1)}| &\leq \left| \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \varepsilon \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) a''(\xi_i(x)) u'(x) \varphi_i(x) dx \right| \\ &+ \left| \chi_i h_i^{-1} \varepsilon a_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx (x - x_i) \varphi_i(x) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} u''(\xi) [T_0(\xi - x) - 2h_i^{-1}(\xi - x_{i-1})] d\xi \right| \quad (4.271) \\ &\leq C\varepsilon \left\{ \max(h_i, h_{i+1}) \right\}^2 \|u'\|_{\infty, [x_{i-1}, x_{i+1}]} + C\varepsilon \max(h_i, h_{i+1}) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u''(x)| dx \end{aligned}$$

değ erlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $R_i^{(2)}$ kalan terimi i in yukarıdaki gibi benzer  ekilde $b \in C^2[0, l]$, $|x - x_i| \leq \max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2h_i$ ve $h^{(k)} \leq CN^{-1}$, ($k = 1, 2$) olduğ undan ayrıca E . (4.253) ve Lemma 4.13  artları dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\left| R_i^{(2)} \right| &\leq \left| \frac{1}{2} \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) b''(\xi_i(x)) u(x) \varphi_i(x) dx \right| \\
&+ \left| \chi_i h_i^{-1} b_{x,i} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i) \varphi_i(x) \left(\int_{x_i}^x u'(t) dt \right) dx \right| \\
&\leq C \left\{ \max(h_i, h_{i+1}) \right\}^2 + C \max(h_i, h_{i+1}) \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx
\end{aligned} \tag{4.272}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Üçüncü olarak, $R_i^{(3)}$ kalan terimi için yukarıdaki gibi benzer şekilde $f \in C^2[0, l]$, $|x - x_i| \leq \max(h_i, h_{i+1})$, $|x - x_{i+1}| \leq 2h_i$ ve $h^{(k)} \leq CN^{-1}$, ($k=1, 2$) olduğundan Eş. (4.259) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\left| R_i^{(3)} \right| &\leq C \chi_i h_i^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (x - x_i)(x - x_{i+1}) f''(\xi_i(x)) \varphi_i(x) dx \\
&\leq CN^{-2}
\end{aligned} \tag{4.273}$$

değerlendirmesi elde edilir.

Son olarak, $R_i^{(4)}$ ve $R_i^{(5)}$ kalan terimleri için $\frac{\partial^2 K}{\partial x^2}$ sınırlı olduğu ve Lemma 4.13 dikkate alınır Eş. (4.262) ve (4.264)'ten

$$\begin{aligned}
\left| R_i^{(4)} \right| + \left| R_i^{(5)} \right| &\leq \left| \frac{1}{2} \lambda \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(x_{j-1} - \xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\kappa(x_i, \xi) u(\xi)) d\xi \right| \\
&+ \left| \chi_i h_i^{-1} \lambda \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} dx \varphi_i(x) \left(\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} (\kappa(\xi, s) u(s)) ds \right) [T_0(x - \xi) - T_0(x_i - \xi)](x - \xi) d\xi \right| \\
&\leq C \left(\sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1}) (1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|) d\xi + N^{-2} \right)
\end{aligned} \tag{4.274}$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece Eşitsizlik (4.271), (4.272), (4.273) ve (4.274) değerlendirmeleri göz önüne alınır

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left\{ N^{-2} + N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u'(x)| dx + \varepsilon N^{-2} \|u'\|_{\infty, [x_{i-1}, x_{i+1}]} + \varepsilon N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} |u''(x)| dx \right\} \\
&+ C \sum_{j=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1})(1 + |u'(x)| + |u''(x)|) dx \\
&\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\} \\
&+ C \sum_{j=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_j - x)(x - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx
\end{aligned} \tag{4.275}$$

değerlendirmesi elde edilir. Ayrıca Eşitsizlik (4.275)'in sağ tarafındaki üçüncü terim

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_j - x)(x - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \\
&= \sum_{j=1}^{\frac{N}{4}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_j - x)(x - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \\
&+ \sum_{j=\frac{N}{4}+1}^{\frac{3N}{4}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_j - x)(x - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \\
&+ \sum_{j=\frac{3N}{4}+1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x_j - x)(x - x_{j-1}) \frac{1}{\varepsilon^2} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \\
&\leq CN^{-1} \left(\frac{|h^{(1)}|^3}{\varepsilon^2} + \frac{|h^{(3)}|^3}{\varepsilon^2} \right) + 2h^{(2)} \int_{\sigma_1}^{l-\sigma_2} \left(\mu_1^{-1} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + \mu_2^{-1} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \\
&\leq CN^{-2} \ln^2 N + Ch^{(2)} N^{-1} \\
&\leq CN^{-2} \ln^2 N
\end{aligned}$$

şeklinde yeniden düzenlenebilir. R_i için buradan Eşitsizlik (4.275)

$$|R_i| \leq C \left\{ N^{-2} \ln^2 N + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\} \tag{4.276}$$

biçiminde ifade edilir. Şimdi parçalı düzgün şebeke üzerinde hata değerlendirme yapılacaktır.

İlk olarak, $\frac{l}{4} < \mu_1^{-1} \varepsilon \ln N$ ve $\frac{l}{4} < \mu_2^{-1} \varepsilon \ln N$ olsun. O halde $\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{l}{4}$ olup

$h^{(1)} = h^{(2)} = h^{(3)} \leq CN^{-1}$ dikkate alınır

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right) \\
&\leq C \left(N^{-2} \ln^2 N + N^{-1} \frac{4h^{(1)}}{\varepsilon} \right) \\
&= C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{16N^{-2}\sigma_1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\
&= C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{4N^{-2}l}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\
&\leq CN^{-2}, \quad 1 \leq i \leq N-1
\end{aligned} \tag{4.277}$$

değerlendirmesi elde edilir.

İkinci olarak, $\mu_1^{-1} \varepsilon \ln N < \frac{l}{4}$ ve $\mu_2^{-1} \varepsilon \ln N < \frac{l}{4}$ olsun. O halde $\sigma_1 = \mu_1^{-1} \varepsilon \ln N$ ve $\sigma_2 = \mu_2^{-1} \varepsilon \ln N$ olup $h^{(1)} = h^{(2)} = h^{(3)} \leq CN^{-1}$ şeklindedir.

$1 \leq i \leq \frac{N}{4} - 1$ aralığında R_i değerlendirmesi Eşitsizlik (4.276) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left\{ N^{-2} \ln^2 N + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\} \\
&\leq C \left(N^{-2} \ln^2 N + N^{-1} \frac{h^{(1)}}{\varepsilon} \right) \\
&= C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{4N^{-2}\sigma_1}{\varepsilon} \right) \\
&= C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{4N^{-2}\mu_1^{-1} \varepsilon \ln N}{\varepsilon} \right) \\
&\leq C \left(N^{-2} \ln^2 N + N^{-2} \ln N \right) \\
&\leq CN^{-2} \ln^2 N
\end{aligned} \tag{4.278}$$

şeklinde elde edilir.

$\frac{N}{4} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{4} - 1$ aralığında R_i değeriendirilmesi Eşitsizlik (4.276) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + \frac{1}{\varepsilon} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\} \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} \ln^2 N + \mu_1^{-1} \left(e^{-\frac{\mu_1 x_{i-1}}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\mu_1 x_{i+1}}{\varepsilon}} \right) + \mu_2^{-1} \left(e^{-\frac{\mu_2(l-x_{i+1})}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\mu_2(l-x_{i-1})}{\varepsilon}} \right) \right) \\
&\leq CN^{-1} \left(N^{-1} \ln^2 N + \mu_1^{-1} e^{-\frac{\mu_1 x_N}{\varepsilon}} + \mu_2^{-1} e^{-\frac{\mu_2 x_{3N}}{\varepsilon}} \right) \leq CN^{-2} \ln^2 N
\end{aligned} \tag{4.279}$$

şeklinde elde edilir.

$\frac{3N}{4} + 1 \leq i \leq N - 1$ aralığında R_i değeriendirilmesi Eşitsizlik (4.276) dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
|R_i| &\leq C \left\{ N^{-2} \ln^2 N + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\} \\
&\leq C \left(N^{-2} \ln^2 N + N^{-1} \frac{h^{(3)}}{\varepsilon} \right) \\
&= C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{4N^{-2} \sigma_2}{\varepsilon} \right) \\
&= C \left(N^{-2} \ln^2 N + \frac{4N^{-2} \mu_1^{-1} \varepsilon \ln N}{\varepsilon} \right) \leq CN^{-2} \ln^2 N
\end{aligned} \tag{4.280}$$

şeklinde elde edilir.

$i = \frac{N}{4}$ için $R_{\frac{N}{4}}^{(1)}$ değeriendirilmesi Eşitsizlik (4.271) ve Lemma 4.13 dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\left| R_{\frac{N}{4}}^{(1)} \right| &\leq C \varepsilon \left| h_{\frac{N}{4}} \right|^2 \left\| u' \right\|_{\infty, \left[\frac{x_{N-1}}{4}, \frac{x_{N+1}}{4} \right]} + C \varepsilon \max \left\{ h_{\frac{N}{4}}, h_{\frac{N}{4}+1} \right\} \int_{\frac{x_{N-1}}{4}}^{\frac{x_{N+1}}{4}} |u''(x)| dx \\
&\leq C \left\{ N^{-2} + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{\frac{x_{N-1}}{4}}^{\frac{x_{N+1}}{4}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\}
\end{aligned} \tag{4.281}$$

şeklinde elde edilir.

$i = \frac{N}{4}$ için $R_{\frac{N}{4}}^{(2)}$ değerlendirmesi Eşitsizlik (4.272) ve Lemma 4.13 şartları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \left| R_{\frac{N}{4}}^{(2)} \right| &\leq C \left| h_{\frac{N}{4}} \right|^2 + C \max \left\{ h_{\frac{N}{4}}, h_{\frac{N}{4}+1} \right\} \int_{x_{\frac{N}{4}-1}}^{x_{\frac{N}{4}+1}} |u'(x)| dx \\ &\leq C \left\{ N^{-2} + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{x_{\frac{N}{4}-1}}^{x_{\frac{N}{4}+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\} \end{aligned} \quad (4.282)$$

şeklinde elde edilir.

Benzer şekilde, $i = \frac{N}{4}$ için $R_{\frac{N}{4}}^{(3)}$ değerlendirmesi Eşitsizlik (4.273) dikkate alınarak

$$\left| R_{\frac{N}{4}}^{(3)} \right| \leq C N^{-2} \quad (4.283)$$

şeklinde elde edilir.

Son olarak, $i = \frac{N}{4}$ için $R_{\frac{N}{4}}^{(4)}$ ve $R_{\frac{N}{4}}^{(5)}$ değerlendirmesi Eşitsizlik (4.274) ve Lemma 4.13 şartları dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \left| R_{\frac{N}{4}}^{(4)} \right| + \left| R_{\frac{N}{4}}^{(5)} \right| &\leq C \left(N^{-2} + \sum_{j=1}^N \int_{x_{j-1}}^{x_j} (x_j - \xi)(\xi - x_{j-1})(1 + |u'(\xi)| + |u''(\xi)|) d\xi \right) \\ &\leq C N^{-2} \ln^2 N \end{aligned} \quad (4.284)$$

şeklinde elde edilir.

Böylece Eşitsizlik (4.281), (4.282), (4.283) ve (4.284) göz önüne alınırsa

$$\left| R_{\frac{N}{4}} \right| \leq C \left\{ N^{-2} \ln^2 N + \frac{1}{\varepsilon} N^{-1} \int_{x_{\frac{N}{4}-1}}^{x_{\frac{N}{4}+1}} \left(e^{-\frac{\mu_1 x}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2(l-x)}{\varepsilon}} \right) dx \right\}$$

değerlendirmesi elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\left| R_{\frac{N}{4}} \right| &\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + \mu_1^{-1} \left(e^{-\frac{\mu_1 x_N}{4} - \frac{\mu_1 x_N}{4+1}} - e^{-\frac{\mu_1 x_N}{4}} \right) + \mu_2^{-1} \left(e^{-\frac{\mu_2 \left(l - x_N \frac{1}{4} \right)}{\varepsilon}} - e^{-\frac{\mu_2 \left(l - x_N \frac{1}{4} \right)}{\varepsilon}} \right) \right\} \\
&\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + e^{-\frac{\mu_1 x_N}{4} - \frac{\mu_1 x_N}{4+1}} + e^{-\frac{\mu_2 \left(l - x_N \frac{1}{4} \right)}{\varepsilon}} \right\} \\
&\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + e^{-\frac{\mu_1 x_N}{4}} e^{-\frac{\mu_1 h^{(1)}}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2 x_N}{4}} e^{-\frac{\mu_2 \left(\frac{l}{2} - \frac{2(l-\sigma_1-\sigma_2)}{N} \right)}{\varepsilon}} \right\} \quad (4.285) \\
&\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + e^{-\frac{\mu_1 x_N}{4}} e^{-\frac{4 \ln N}{N}} + e^{-\frac{\mu_2 x_N}{4}} e^{-\frac{\mu_2 \frac{l}{2} \left(1 - \frac{4}{N} \right)}{\varepsilon}} \right\} \\
&\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + e^{-\frac{\mu_1 \sigma_1}{\varepsilon}} + e^{-\frac{\mu_2 \sigma_2}{\varepsilon}} \right\} \\
&\leq CN^{-1} \left\{ N^{-1} \ln^2 N + N^{-1} \right\} \\
&\leq CN^{-2} \ln^2 N, \quad N > 4
\end{aligned}$$

şeklinde bir değerlendirme elde edilir.

Yukarıdaki işlemlere benzer şekilde $i = \frac{3N}{4}$ için $R_{\frac{3N}{4}}$ değerlendirmesi

$$\left| R_{\frac{3N}{4}} \right| \leq CN^{-2} \ln^2 N \quad (4.286)$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, Eşitsizlik (4.278), (4.279), (4.280), (4.285) ve (4.286) dikkate alınırsa Eşitsizlik (4.270) değerlendirilmesi sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

$z_i = y_i - u_i$, $(0 \leq i \leq N)$ yaklaşık çözüm hatası

$$L_N z_i := \varepsilon^2 \delta^2 z_i + \varepsilon \delta z_i - \bar{b}_i z_i + \lambda \sum_{j=0}^N \bar{h}_j \kappa_{ij} z_j = R_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.287)$$

$$z_0 = A, \quad z_N = B \quad (4.288)$$

problemini sağlar.

Ayrıca, $b \in C^2[0, l]$ olduğundan dolayı yeterince büyük N değerleri için $\bar{b}_i \geq \bar{\beta} > 0$ olacak şekilde bir $\bar{\beta}$ sayısının olduğunu belirtmek gerekir.

Teorem 4.6. $a, b, f \in C^2[0, l]$, $\frac{\partial^m K}{\partial x^m} \in C^2[0, l]^2$, ($m = 0, 1, 2$) ve

$$|\lambda| < \frac{\bar{\beta}}{\max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=0}^N \bar{h}_j |\kappa_{ij}|}$$

olsun. Bu durumda (4.266)-(4.267) fark probleminin y_i çözümü için

$$\|y - u\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq CN^{-2} \ln^2 N \quad (4.289)$$

hata değerlendirmesi doğrudur.

İspat. (4.287)-(4.288) problemi ele alınarak maksimum prensibi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} &\leq (\bar{\beta})^{-1} \left\| R - \lambda \sum_{j=1}^N \bar{h}_j \kappa_{ij} z_j \right\|_{\infty, \omega_N} \\ &\leq (\bar{\beta})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N} + |\lambda| (\bar{\beta})^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \bar{h}_j |\kappa_{ij}| \|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \\ &= \frac{(\bar{\beta})^{-1} \|R\|_{\infty, \omega_N}}{1 - |\lambda| (\bar{\beta})^{-1} \max_{1 \leq i \leq N} \sum_{j=1}^N \bar{h}_j |\kappa_{ij}|} \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Buradan (4.232)'de göz önüne alınarak

$$\|z\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \leq C \|R\|_{\infty, \bar{\omega}_N} \quad (4.290)$$

sonucu elde edilir. Bu ifade Eşitsizlik (4.270) ve (4.290) birlikte ele alınırsa teoremden istenilen Eşitsizlik (4.289) sonucuna ulaşılmış ve böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

4.3.1.4. Nümerik sonuçlar

Bu bölümde (4.230)-(4.231) problemi için elde edilen teorik sonuçlar bir örnek ile gösterilecektir. Ayrıca belirtmek gerekir ki (4.266)-(4.267) ve (4.268)-(4.269) fark şemalarını çözmek için

$$A_i y_{i-1}^{(n)} - C_i y_i^{(n)} + B_i y_{i+1}^{(n)} + \lambda \sum_{j=0}^N h_j \kappa_{ij} y_j^{(n-1)} = \bar{f}_i, \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad (4.291)$$

$$y_0^{(n)} = A, \quad y_N^{(n)} = B, \quad n=1,2,\dots; \quad y_i^{(0)} \text{ (verilen değer)} \quad (4.292)$$

iteratif tekniği bu örneği çözerken kullanılacaktır. Burada $i \neq \frac{N}{4}$, $i \neq \frac{3N}{4}$ için

$$A_i = \varepsilon^2 h^{-2} \theta_{1,i} - \frac{1}{2} \varepsilon h^{-1} \theta_{2,i},$$

$$B_i = \varepsilon^2 h^{-2} \theta_{1,i} + \frac{1}{2} \varepsilon h^{-1} \theta_{2,i},$$

$$C_i = 2\varepsilon^2 h^{-2} \theta_{1,i} + \bar{b}_i$$

ve

$$h = \begin{cases} h^{(1)}, & 1 \leq i \leq \frac{N}{4}, \\ h^{(2)}, & \frac{N}{4} + 1 \leq i \leq \frac{3N}{4}, \\ h^{(3)}, & \frac{3N}{4} + 1 \leq i \leq N \end{cases}$$

şeklindedir. $i = \frac{N}{4}$, $i = \frac{3N}{4}$ için

$$A_{\frac{N}{4}} = \frac{2\varepsilon^2}{h^{(1)} + h^{(2)}} \left(\frac{\theta_{\frac{N}{4}}^{(1)}}{h^{(1)}} - \frac{a_{x, \frac{N}{4}} \chi_{\frac{N}{4}} \mu_{\frac{N}{4}}}{2} \right),$$

$$B_{\frac{N}{4}} = \frac{2\varepsilon^2}{h^{(1)} + h^{(2)}} \left(\frac{\theta_{\frac{N}{4}}^{(2)}}{h^{(2)}} + \frac{a_{x, \frac{N}{4}} \chi_{\frac{N}{4}} \mu_{\frac{N}{4}}}{2} \right),$$

$$C_{\frac{N}{4}} = \frac{2\varepsilon^2}{h^{(1)} + h^{(2)}} \left(\frac{\theta_{\frac{N}{4}}^{(2)}}{h^{(2)}} - \frac{\theta_{\frac{N}{4}}^{(1)}}{h^{(1)}} \right) + \bar{b}_{\frac{N}{4}},$$

$$A_{\frac{3N}{4}} = \frac{2\varepsilon^2}{h^{(2)} + h^{(3)}} \left(\frac{\theta_{\frac{3N}{4}}^{(1)}}{h^{(2)}} - \frac{a_{x, \frac{3N}{4}} \chi_{\frac{3N}{4}} \mu_{\frac{3N}{4}}}{2} \right),$$

$$B_{\frac{3N}{4}} = \frac{2\varepsilon^2}{h^{(2)} + h^{(3)}} \left(\frac{\theta_{\frac{3N}{4}}^{(2)}}{h^{(3)}} + \frac{a_{x, \frac{3N}{4}} \chi_{\frac{3N}{4}} \mu_{\frac{3N}{4}}}{2} \right),$$

$$C_{\frac{3N}{4}} = \frac{2\varepsilon^2}{h^{(2)} + h^{(3)}} \left(\frac{\theta_{\frac{3N}{4}}^{(2)}}{h^{(3)}} - \frac{\theta_{\frac{3N}{4}}^{(1)}}{h^{(2)}} \right) + \bar{b}_{\frac{3N}{4}}$$

şeklindedir.

Örnek 4.6.

$$\varepsilon^2 u''(x) + \varepsilon(3 + x \sin x)u'(x) - (2 - e^{-x})u(x) + \frac{1}{2} \int_0^1 x u(s) ds = x \cos x, \quad 0 < x < 1, \quad (4.293)$$

$$u(0) = 1, \quad u(1) = 0 \quad (4.294)$$

problemi ele alınacaktır. İterasyon sürecinde başlangıç tahmini $y_i^{(0)} = 1 - x_i$ ve durdurma kriteri

$$\max_i |y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}| < 10^{-5}$$

olsun. Bu problemin kesin çözümü bilinmiyor. Bu yüzden nümerik sonuçlarda hata yaklaşımı ve yakınsama oranı hesabı için çift şebeke metodu kullanılacaktır. Yani nümerik sonuçları iki kat daha ince şebeke üzerindeki sonuçlar ile karşılaştırılacaktır. Maksimum noktasal hata ve ε 'a göre hesaplanmış maksimum hata

$$e_\varepsilon^N = \max_i |y_i^{\varepsilon, N} - \tilde{y}_{2i}^{\varepsilon, 2N}|, \quad e^N = \max_\varepsilon e_\varepsilon^N$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\tilde{y}_i^{\varepsilon, 2N}$

$$\bar{\omega}_{2N} = \left\{ x_{\frac{i}{2}} : i = 0, 1, \dots, 2N \right\}$$

şebekesi üzerinde ilgili metodun yakınsak çözümüdür. Burada

$$x_{\frac{i}{2}+1} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

şeklindedir. Ayrıca düzgün yakınsama oranı ve ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama oranı

$$p_\varepsilon^N = \frac{\ln \left(\frac{e_\varepsilon^N}{e_\varepsilon^{2N}} \right)}{\ln 2},$$

$$p^N = \frac{\ln \left(\frac{e^N}{e^{2N}} \right)}{\ln 2}$$

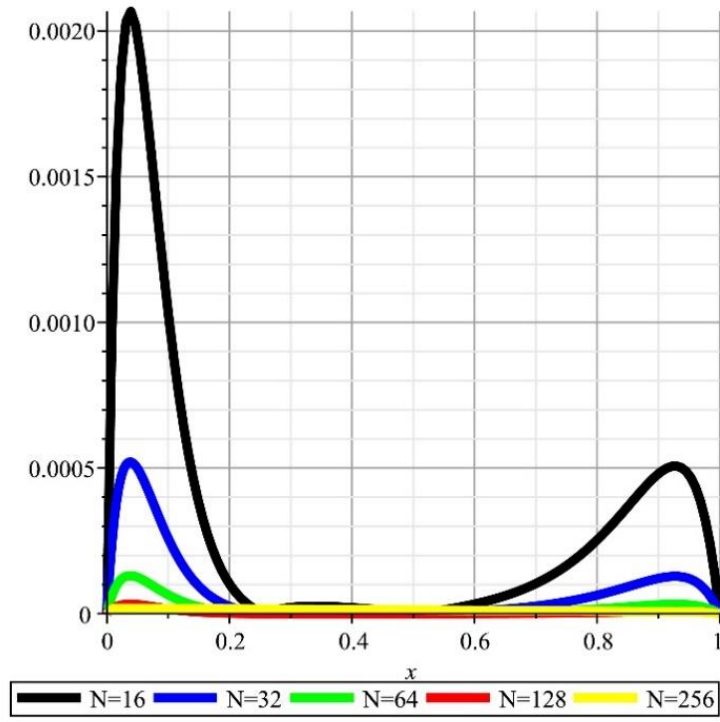
şeklinde hesaplanır.

Sonuç olarak probleminin çözümünden $N = 32, 64, 128, 256, 512, 1024$ ve $\varepsilon = 2^{-i}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10$ değerleri için elde edilen hatalar ve düzgün yakınsaklık oranı (4.291)-(4.292) algoritması ile bulunmuş ve Tablo 4.6'da gösterilmiştir.

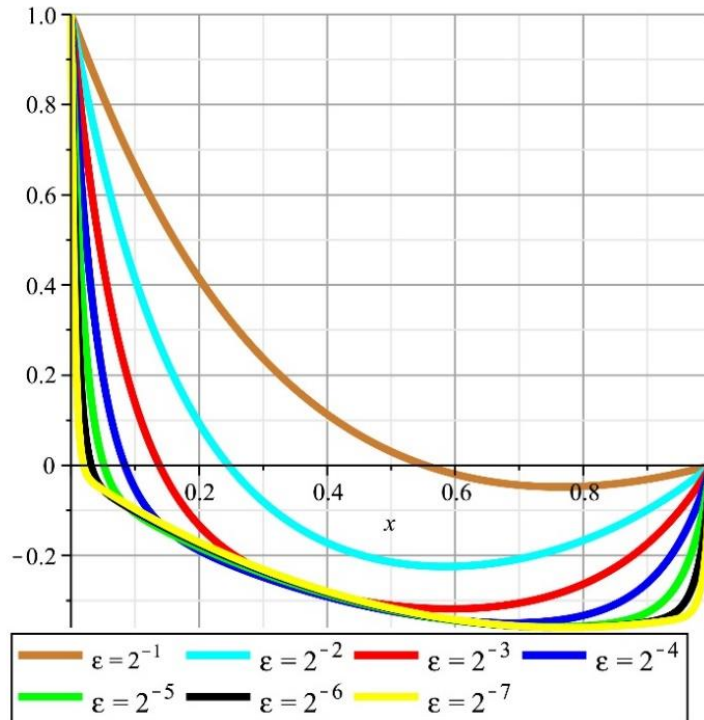
Tablo 4.6. (4.293)-(4.294) probleminin çözümünden elde edilmiş ve ω_N şebeke üzerindeki e^N , ε 'a göre hesaplanmış hatalar ve p^N , ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsaklık oranları.

ε	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	$N = 128$	$N = 256$	$N = 512$
2^{-1}	0,0021971685 1,99	0,0005526961 1,99	0,0001382452 2,00	0,0000345532 1,98	0,0000087870 2,01	0,0000021793
2^{-2}	0,0022670723 1,96	0,0005758971 1,97	0,0001442211 1,98	0,0000360720 1,99	0,0000092432 1,98	0,0000023390
2^{-3}	0,0021092834 1,82	0,0005309620 1,93	0,0001330104 1,99	0,0000328824 2,00	0,0000081831 2,00	0,0000020391
2^{-4}	0,0020678027 1,99	0,0005206216 1,99	0,0001303608 2,00	0,0000325103 2,00	0,0000081012 2,01	0,0000020016
2^{-5}	0,0020611292 1,98	0,0005189299 2,00	0,0001292900 1,99	0,0000323421 1,99	0,0000081099 2,00	0,0000019073
2^{-6}	0,0020597850 1,98	0,0005210910 1,98	0,0001320121 1,99	0,0000330630 1,99	0,0000083013 1,98	0,0000021019
2^{-7}	0,0020565848 2,01	0,0005004122 2,01	0,0001242104 1,99	0,0000311009 1,99	0,0000078012 1,99	0,0000019519
e^N	0,0022670723	0,0005758971	0,0001442211	0,0000360720	0,0000092432	0,0000023390
p^N	1,96	1,97	1,98	1,99	1,98	

Yukarıdaki tabloda görüldüğü gibi N değerleri artıkça, ε 'a göre hesaplanan düzgün yakınsama hızı olan p^N 'in yakınsama derecesi ikinci dereceden olmuştur. Böylece teoride ifade edilen ikinci dereceden ε -düzgün yakınsaklık uygulamada da sağlanmış oldu. ε -pertürbasyon parametresinin farklı farklı değerleri için Örnek 4.6'da farklı N değerleri için hata eğrisi Şekil 4.1'de gösterilmiştir. Ayrıca farklı ε değerleri için yaklaşık çözüm eğrileri grafiği Şekil 4.2'de gösterilmiştir.



Şekil 4.1. $N = 16, 32, 64, 128, 256$ değerleri için hata eğrileri



Şekil 4.2. $\varepsilon = 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5}, 2^{-6}, 2^{-7}$ değerleri için yaklaşık çözüm eğrileri

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada SPFİDD için üç farklı problem ele alınmıştır.

İlk olarak, birinci mertebeden lineer SPFİDD için (4.1)-(4.2) başlangıç değer problemi ele alınmıştır. (4.1)-(4.2) problemi için kalan terimi integral formunda olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılarak düzgün şebekede uygun sonlu fark şeması kuruldu. Fark şemasına ait kararlılık ve yakınsaklık analizleri yapıldı. Bu şemanın ayırık maksimum normda ε -pertürbasyon parametresine göre birinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterildi. Nümerik bir örnek ile teorik olarak sunulan yöntem desteklenmiştir.

İkinci olarak, (4.1)-(4.2) problemi için kalan terimi integral formunda olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılarak parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli uygun homejen tip (non-hibrit) sonlu fark şeması kuruldu. Kararlılık ve yakınsaklık analizi yapılarak teorik sonuçlar nümerik problem ile desteklenmiştir. Ayrıca nümerik problemin kesin çözümüne ulaşamadığından çift katlı şema tekniği kullanılmıştır.

Üçüncü olarak, ikinci mertebeden lineer SPFİDD için (4.76)-(4.77) sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problem nümerik çözümü için kalan terimi integral formunda olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılarak düzgün şebekede uygun sonlu fark şeması kuruldu. Yöntemin, ayırık maksimum normda ε -pertürbasyon parametresine göre birinci mertebeden düzgün yakınsama sergilediği gösterildi. Yöntemin uygulanabilir ve etkili olduğunu göstermek için örnek problem sunulmuştur. Sonuçtan hareketle uygulanan yöntemin teorik çalışmaya uygun olduğu gözlemlenmiştir.

Dördüncü olarak, yine (4.76)-(4.77) sınır değer problemi ele alınmıştır, ancak bu sefer problemin nümerik çözümü için kalan terimi integral formunda olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılarak düzgün şebekede $a'(0) = a'(l) = 0$, $K(x, 0) = K(x, l) = 0$ şartları altında $O(h^2)$ kesinliğe sahip sonlu fark şeması oluşturulmuştur. Fark şemasının kararlılığı ve ε -pertürbasyon parametresine göre ayırık maksimum normda ikinci mertebeden düzgün yakınsak olduğu gösterilmiştir. Teoriyi destekleyen bir örnek problem ile sunulan yöntemin etkinliği gösterilmiş oldu.

Burada nümerik problemin kesin çözümüne ulaşamadığında çift katlı şema tekniği kullanılmıştır.

Beşinci olarak, (4.76)-(4.77) sınır değer problemi için kalan terimi integral formunda olan ve baz fonksiyonu içeren interpolasyon kuadratur formülleri kullanılarak parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebekede $O(N^{-2} \ln N)$ kesinlikli homejen tip (non-hibrit) sonlu fark şeması oluşturuldu. Kararlılık ve yakınsaklık analizi yapılarak teorik sonuçlar nümerik problem ile desteklenmiştir. Ayrıca nümerik problemin kesin çözümüne ulaşamadığından çift katlı şema tekniği kullanılmıştır.

Altıncı olarak, self adjoint olmayan ve sıfıncı mertebeden indirgenmiş denklemlerle ikinci mertebeden lineer SPFİDD için (4.230)-(4.231) sınır değer problemi ele alınmıştır. İkinci mertebeden yakınsamayı elde etmek için parçalı düzgün (Shishkin mesh) şebeke üzerinde homojen tüp (non-hibrit) sonlu fark şeması oluşturuldu. Şemanın yakınsaklığı ve kararlılığı incelenmiştir. Nümerik problemin kesin çözümüne ulaşamadığında çift katlı şema tekniği kullanılmıştır. Sonuçlar Maple 10 programı kullanılarak Tablo 4.6 ve Şekil 4.1, Şekil 4.2’de gösterilmiştir. Tablo ve şekillerden de görüldüğü gibi iki parametreye sahip ikinci mertebeden SPFİDD için önerilen metot ikinci mertebeden bir yakınsamaya sahiptir.

Sonuç olarak, birinci ve ikinci mertebeden SPFİDD’ler için ele alınan sonlu fark metodu oldukça ekonomik ve etkilidir. Ayrıca literatüre bakıldığında bu tip problemler henüz çalışılmamıştır. Bu çalışmadan hareketle, gecikmeli SPFİDD’ler ve non-lineer SPFİDD’ler üzerine yoğunlaşılabilir.

KAYNAKLAR

- Aksoy, Y. (1998) “İntegral denklemler, cilt I.”, *Y.T.Ü Yayınları*, İstanbul, 13-66.
- Akyüz A. and Sezer M. (1999) “A Chebyshev collocation method for the solution of linear integro-differential equations”, *International Journal of Computer Mathematics*, 72(4), 491-507.
- Amirali, G. and Amirali, İ. (2018) “Nümerik Analiz (Teori ve Uygulamalarla)”, *Seçkin Yayıncılık*, Ankara.
- Amiraliyev, G. M. and Cakir, M. (2000) “A uniformly convergent difference scheme for a singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation” *International Journal of Applied Mathematics*, 2(12), 1407-1419.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M. (2018) “Uniform convergence results for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation”, *Journal of Mathematical Analysis*, 9(6), 55-64.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M. (2020) “Fitted second order numerical method for a singularly perturbed Fredholm integro-differential equation”, *Bulletin of the Belgian Mathematical Society-Simon Stevin*, 27(1), 71-88.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M. (2021) “A numerical method for a second order singularly perturbed Fredholm integro-differential equation”, *Miskolc Mathematical Notes*, 22(1), 37-48.
- Amiraliyev, G. M. and Duru, H. (2002) “Nümerik Analiz”, *Pegem A Yayıncılık*, Ankara.
- Amiraliyev, G. M. and Mamedov, Y. D. (1995) “Difference schemes on the uniform mesh for singularly perturbed pseudo-parabolic equations”, *Turkish Journal of Mathematics*, 19, 207-222.
- Amiraliyev, G. M. and Şevgin S. (2006) “Uniform difference method for singularly perturbed Volterra integro-differential equations”, *Applied Mathematics And Computation*, 179(2), 731-741.
- Amiraliyev, G. M. and Yapman, Ö. (2019) “On the Volterra delay-integro-differential equation with layer behavior and its numerical solution”, *Miskolc Mathematical Notes*, 20(1), 75-87.
- Amiraliyev, G. M., Yapman, Ö. and Kudu, M. (2019) “A fitted approximate method for a Volterra delay-integro-differential equation with initial layer”, *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 48(5), 1417-1429.
- Bakhvalov, N. S. (1969) “On optimization of methods for solving boundary-value problems in the presence of a boundary layer”, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 9(4), 841-859.

- Balachandran, K. and Uchiyama, K. (2007) “Existence of local solutions of quasilinear integrodifferential equations in banach spaces”, ***Applicable Analysis***, 76(1-2), 1-8.
- Barbu, L. and Morosanu, G. (2007) “Singularly perturbed boundary-value problems”, ***International Series of Numerical Mathematics***, Birkhäuser Basel.
- Bijura, A. M. (2002) “Singularly perturbed Volterra integro-differential equations”, ***Quaestiones Mathematicae***, 25, 229-248.
- Bloom, F. (1980) “Asymptotic bounds for solutions to a system of damped integrodifferential equations of electromagnetic theory”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 73(2), 524-542.
- Boglaev, I., (2004) “Uniform numerical methods on arbitrary meshes for singularly perturbed problems with discontinuous data”, ***Applied Mathematics and Computation***, 154(3), 815-833.
- Brunner, H., (2018) “Numerical analysis and computational solution of integro-differential equations”, ***In: Dick, J., et al. (eds.) Contemporary Computational Mathematics-A Celebration of the 80th Birthday of Ian Sloan***, Springer, Cham, 205-231.
- Cerit, C. (1976) “İntegral Denklemler”, ***Alfa Yayınları***, İstanbul.
- Cont, R., Tankov, P. And Voltchkova E. (2004) “Option pricing models with jumps: integro-differential equations and inverse problems” In Neittaanmaki P., Rossi, T., Korotov, S., Onate, E., Periaux J. and Knörzner D., editors, ***European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2004)***, 1-20.
- Danfu, H. and Xufeng, S. (2007) “Numerical solution of integro-differential equations by applying CAS Wavelet operational matrix of integration”, ***Applied Mathematics and Computation***, 194, 460-466.
- Doolan, E. R., Miller, J. J. H. and Schilders, W. H. A. (1980) “Uniform numerical methods for problems with initial and boundary layers”, ***Boole Press***, Dublin.
- Durmaz, M. E. and Amiraliyev, G. M., (2021) “A Robust Numerical Method for a Singularly Perturbed Fredholm Integro-Differential Equation”, ***Mediterranean Journal of Mathematics***, 18(24), 1-17.
- Fathy, M., El-Gamel, M. and El-Azab, M. S. (2014) “Legendre-Galerkin method for the linear Fredholm integro-differential equations”, ***Applied Mathematics and Computation***, 243, 789-800.
- Farrell, P. A., Hegarty, A. F., Miller, J. J. H., O’Riordan, E. and Shishkin, G. I. (2000) “Robust computational techniques for boundary layers”, ***Chapman Hall/CRC***, New York.

- Hosseini, S. M. and Shahmorad, S. (2005) "Numerical piecewise approximate solution of Fredholm integro-differential equations by the Tau method", ***Applied Mathematical Modelling***, 29, 1005-1021.
- Iragi, B. C. and Munyakazi J. B. (2018) "New parameter-uniform discretisations of singularly perturbed Volterra integro-differential equations", ***Applied Mathematics and Information Sciences***, 12(3), 517-527.
- Iragi, B. C. and Munyakazi J. B. (2020) "A uniformly convergent numerical method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation", ***International Journal of Computer Mathematics***, 97(4), 759-771.
- Isaacson, E., Keller, B. H., (1994) "Analysis of numerical methods", ***Dover Publications Inc.***, New York.
- Kadalbajoo, M. K. Patidar K. C. (2002) "A survey of numerical techniques for solving singularly perturbed ordinary differential equations", ***Applied Mathematics and Computation***, 130(2), 457-510.
- Kadalbajoo, M. K. Gupta V. (2009) "Numerical solution of singularly perturbed convection-diffusion problem using parameter uniform B-spline collocation method", ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 355(1), 439-452.
- Kauthen, J. P. (1997) "A survey of singularly perturbed Volterra equations", ***Applied Numerical Mathematics***, 24(2-3), 95-114.
- Kevorkian J. K. and Cole J. D. (1996) "Multiple Scale and Singular Perturbation Methods", ***Springer-Verlag***, New York.
- Krasnov, M., Kiselev, A. and Makarenko, G. (1971) "Problems and exercises in integral equations", Mir Publishers, Moscow.
- Kudu, M., Amirali, I. and Amiraliyev, G. M. (2016) "A finite-difference method for a singularly perturbed delay integro-differential equation", ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 308, 379-390.
- Kythe, P. K. and Puri, P. (2002) "Computational methods for linear integral equations", ***Birkhuser***, Boston.
- Larsson, S., Racheva, M. and Saedpanah, F. (2015) "Discontinuous galerkin method for an integro-differential equation modeling dynamic fractional order viscoelasticity", ***Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering***, 283, 196-209.
- Madhu, L. K. (2016) "Numerical analysis of singularly perturbed boundary value problems", ***Lambert Academic Publishing***, Chisinau.

- Mbroh, N. A., Noutchie, S. C. O. and Massoukou, R. Y. M. (2020) "A second order finite difference scheme for singularly perturbed Volterra integro-differential equation", *Alexandria Engineering Journal*, 59(4), 2441-2447.
- Mohsen, A., El-Gamel, M. (2007) "A Sinc-Collocation method for the linear Fredholm integro-differential equations". *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 58, 380-390.
- Miller, J. J. H. O’Riordan, E. and Shishkin, G. I. (2012) "Fitted numerical methods for singular perturbation problems: Error estimates in the maximum norm for linear problems in one and two dimensions (Rev. Ed.)", *World Scientific*, Singapore.
- Nayfeh, A. H. (1993) "Introduction to perturbation techniques", *Wiley*, New York.
- O’Malley, R. E. (2013) "Singular perturbations methods for ordinary differential equations", *Springer*, New York.
- Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. (2008) "Handbook of integral equations", *Chapman and Hall/CRC*, Boca Raton, Fla, USA.
- Prandtl, L. (1904) "Über flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner reibung", *III. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, in Verhandlungen des, Heidelberg, 484-491.
- Rama, C. and Ekaterina, V. (2005) "Integro-differential equations for option prices in exponential Levy models", *Finance and Stochastics*, 9, 299-325.
- Roos, H. G., Stynes, M. and Tobiska, L. (2014) "Numerical methods for singularly perturbed differential equations: Convection-diffusion and flow problems", *Springer-Verlag*, Berlin.
- Saadati, R., Raftari, B., Adibi, H., Vaezpour, S. M. and Shakeri, S. (2008) "A comparison between the variational iteration method and trapezoidal rule for solving linear integro-differential equations", *World Applied Sciences Journal*, 4(3), 321-325.
- Salama, A. A. and Evans, D. J. (2001) "Fourth order scheme of exponential type for singularly perturbed volterra integro-differential equations", *International Journal of Computer Mathematics*, 77(1), 153-164.
- Samarskii, A. A. (2001) "The theory of difference schemes", *Marcel Dekker, Inc.*, New York.
- Shishkin, G. I. and Shishkina, L. P. (2008) "Difference methods for singular perturbation problems (1st ed.)", *Chapman and Hall/CRC*, New York.
- Skellam, J. G. (1991) "Random dispersal in theoretical populations", *Bulletin of Mathematical Biology*, 53, 135-165.
- Şevgin, S. (2014) "Numerical solution of a singularly perturbed Volterra integro-differential equation", *Advances in Difference Equations*, 171, 1-15.

- Türkyılmazoğlu, M. (2014) “An effective approach for numerical solutions of high-order Fredholm integro-differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 227, 384-398.
- Vahidi, A. R., Babolian, E., Cordshooli, G. A. and Azimzadeh, Z. (2009) “Numerical solution of Fredholm integro-differential equation by Adomian’s decomposition method”, *International Journal of Mathematical Analysis*, 3(36), 1769-1773.
- Yalçınbaş S., Sezer M. and Sorkun H. H. (2009) “Legendre polynomial solutions of high-order linear Fredholm integro-differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 210, 334-349.
- Yapman, Ö., Amiraliev, G. M. and Amirali, I., (2019) “Convergence analysis of fitted numerical method for a singularly perturbed nonlinear Volterra integro differential equation with delay”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 355, 301-309.
- Yapman, O. and Amiraliev, G. M., (2020) “A novel second-order fitted computational method for a singularly perturbed Volterra integro-differential equation”, *International Journal of Computer Mathematics*, 97(6), 1293-1302.
- Xie, S. (2012) “Existence of solutions for nonlinear mixed type integro-differential functional evolution equations with nonlocal conditions”, *Boundary Value Problems*, 2012(100).
- Zhao, J. and Corless, R. M. (2006) “Compact finite difference method for integro-differential equations”, *Applied Mathematics and Computation*, 177, 271-288.

EKLER

Ek-1. Tez Çalışması Süresince Yapılan Akademik Çalışmalar

- Durmaz, M. E. and Amiraliyev, G. M., (2021) “A Robust Numerical Method for a Singularly Perturbed Fredholm Integro-Differential Equation”, ***Mediterranean Journal of Mathematics***, 18(24), 1-17.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M., (2021) “A Numerical Method for a Second Order Singularly Perturbed Fredholm Integro-Differential Equation”, ***Miskolc Mathematical Notes***, 22(1), 37-48.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M., (2020) “Fitted second order numerical method for a singularly perturbed Fredholm integro-differential equation”, ***Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin***, 27(1), 71-88.
- Amiraliyev, G. M., Durmaz, M. E. and Kudu, M., (2018) “Uniform convergence results for singularly perturbed Fredholm integro-differential equation”, ***Journal of Mathematical Analysis***, 9(6), 55-64.
- Durmaz, M. E., Çakır, M. and Amirali, G. (2020) “Second order numerical method for the singularly perturbed Fredholm integro-differential problem with zeroth order reduced equation”, ***3rd International Conference On Pure And Applied Mathematics (ICPAM20)***, Van, 03-05 September, 63-63.
- Durmaz, M. E. and Amirali, G. (2018) “Numerical solution of the Fredholm integro-differential equation with initial-layer”, ***International Conference On Applied Mathematics In Engineering (ICAME18)***, Balıkesir, 27-29 June, 91-91.
- Durmaz, M. E. and Amirali, G. (2018) “Convergence analysis of the finite difference method for a singularly perturbed Fredholm integro-differential equation”, ***7th International Conference On Applied Analysis And Mathematical Modeling (ICAAMM18)***, İstanbul, 20-24 June, 111-111.