

**T.C.
CELAL BAYAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
LİE SİMETRİLERİ ÜZERİNE**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Mehmet AÇIL
Danışman: Prof. Dr. Necdet BİLDİK**

MANİSA

2013

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
İÇİNDEKİLER	ii
SEMBOL LİSTESİ.....	iii
TEŞEKKÜR.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT	vi
1. BÖLÜM	1
BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ	
VASİTASIYLA ÇÖZÜLMESİ	1
1.1 Birinci Mertebeden Adî Diferansiyel Denklemler için Simetri Şartı.....	1
1.2 Kanonik Koordinatlar	4
2. BÖLÜM	8
İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ VASİTASIYLA	
ÇÖZÜLMESİ	8
2.1. İkinci Mertebeden Adî Diferansiyel Denklemler için Simetri Şartı	8
2.2 Kanonik Koordinatlar Kullanılarak Mertebenin İndirgenmesi	10
2.3 Diferansiyel İnvaryantlar ve Mertebenin İndirgenmesi	12
2.4 Nokta Simetri Üreteçlerinin Lie Cebri	16
3. BÖLÜM	22
İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ VE KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER YARDIMIYLA BİRİNCİ	
MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİLERİNİN ARAŞTIRILMASI	22
3.1 İkinci Mertebeden Adî Diferansiyel Denklemler Yardımıyla Birinci Mertebeden Adî Diferansiyel	
Denklemlerin Simetrilerinin Araştırılması	22
3.2. Birinci Mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler Yardımıyla Birinci Mertebeden Adî	
Diferansiyel Denklemlerin Simetrilerinin Araştırılması.....	28
SONUÇLAR VE ÖNERİLER.....	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	37

SEMBOL LİSTESİ

D_x	: $\mathbf{x}$ -doğrultusunda total türev
ε	: Lie parametresi
(ξ, η)	: Düzlemde (x, y) noktasında yörünge üzerinde tanjant vektörü
(ξ, τ, η)	: 3-boyutlu Öklit uzayında (x, y, u) noktasında yörünge üzerinde tanjant vektörü
(r, s)	: Kanonik koordinatlar
X	: Lie simetrileri için infinitesimal üreteç
$X^{(n)}$	: Uzanımlı infinitesimal üreteç
$[\cdot, \cdot]$	: Lie komütatörü
$L^{(R)}$	: R -boyutlu Lie cebiri

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu veren, sayın hocam Prof. Dr. Necdet BİLDİK'e ve çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Ali KONURALP'e ve hiçbir zaman manevi desteğini esirgemeyen sevgili eşim İrem AÇİL' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mehmet AÇİL

ÖZET

Bu tez çalışması üç bölümden oluşmuştur.

Bu çalışmanın ilk bölümünde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin sahip olduğu Lie simetri dönüşümlerinin bulunuşu ve bulunan bu simetri dönüşümlerinin kullanılması ile adi diferansiyel denklemlerin çözülmesi üzerinde durulmuştur.

İkinci bölümde ise, birinci mertebeden denklemlerde kullanılan çözüm yolundan farklı olarak ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetrilerin sistematik bulunuşu için bir yaklaşım verilmiştir. Ayrıca genel çözümün elde edilmesinde kullanılacak olan bu simetrilerin Lie cebirinden kısaca bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde ise birinci bölümde değinilen, simetrilerinin bulunması aşamasında sistematik bir yola sahip olmayan birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerdeki bu eksikliği gidermek için, kendisinin bir kez daha türevlerinin alınmasıyla oluşturulan ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerden ve bölüm içerisinde ifade edilen karakteristikler vasıtasıyla elde edilen lineer birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerden faydalanılmıştır.

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, we discuss how to find Lie symmetry transformations of the first-order ordinary differential equations and how to obtain the solutions of the ordinary differential equations by using these Lie symmetry transformations.

In the second chapter, we mention about finding the Lie symmetries of the second-order ordinary differential equations systematically unlike the first-order. And we give a brief summary about Lie algebra that is used to obtain solutions of the ordinary differential equations with their Lie symmetries.

In the third chapter, we consider second-order ordinary differential equations derived from the original first-order ordinary differential equations and also first-order linear partial differential equations obtained by writing characteristic into the linearized symmetry condition in order to resolve an important deficiency for the first-order ordinary differential equations which have no systematic way to find their Lie symmetries.

1. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ VASITASIYLA ÇÖZÜLMESİ

Bu bölümde hedeflenen amaç öncelikle birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin kabul ettiği benzerlik dönüşümlerinin bir özel hali olan simetri dönüşümleri vasıtasıyla çözümünde, literatürde çoğu kaynakta karşılaşılabilecek temel bilgileri vermek ve bu bilgiler ışığında birinci mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmektir. Aksi belirtilmedikçe bu simetriler Lie nokta simetrileri olacaktır. Bu bilgiler yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemler içinde temel teşkil etmektedir.

1.1 Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler için Simetri Şartı

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için genel anlamda simetri şartını oluşturmak için

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

formundaki adi diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bilindiği üzere simetri dönüşümleri diferansiyel denklemlerin çözüm ailelerini yeni koordinatlarda değişmeden bırakır. Yani

$$\Gamma_\varepsilon : (x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \varepsilon), \hat{y}(x, y; \varepsilon)) \quad , \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \quad (2)$$

şeklindeki bir dönüşüm, (1) denklemi için bir simetri ise bu durumda

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (3)$$

olup, buna (1) denklemi için simetri şartı denir. Bu şartı biraz daha işler hale getirmek için D_x , x -yönünde total türevi göstermek üzere

$$D_x = \partial_x + y' \partial_y + y'' \partial_{y'} + \dots$$

alınırsa; y , x in bir fonksiyonu ve $\hat{x}$ ile $\hat{y}$ ise x ve y nin fonksiyonu olmak üzere, D_x türev operatörü kullanıldığında

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = \frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y}$$

olarak yazılabilir. Böylece (1) denklemi için simetri şartı

$$\frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} = f(\hat{x}, \hat{y}) \quad (4)$$

şeklinde ortaya çıkar. Bu şart bazı basit adi diferansiyel denklemler için kolayca çözülebilir hale gelebiliyorsa da genel olarak karmaşık yapıda bir kısmi türevli denklemdir ve dolayısıyla çözümünü oldukça zordur. Bu zorluğun üstesinden gelebilmek için bir-parametrelili Lie simetrilerinin de bir özelliği olan Taylor seri açılımından faydalanılır. Ancak buna doğrudan geçmeden hem açılımda kullanılan hem de çözüm için kilit öneme sahip bir kavramı vermek adına düzlemdeki noktalar üzerinde, simetrilerin bir-parametrelili Lie grubunun etkisine bakılır. Bir Lie simetri grubu, düzlem üzerinde simetri altında invariant olmayan bir (x, y) noktası boyunca bir yörünge oluşturur. (x, y) boyunca yörünge üzerindeki noktaların koordinatları

$$(\hat{x}(x, y; 0), \hat{y}(x, y; 0)) = (x, y)$$

olmak üzere

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \varepsilon), \hat{y}(x, y; \varepsilon))$$

biçimindedir. Bir Lie grubunun etkisi, bir yörünge üzerindeki her bir noktayı aynı yörünge üzerindeki bir noktaya bire bir eşler. Dolayısıyla yörünge, Lie grubunun etkisi altında invarianttır.

Şimdi invariant olmayan bir (x, y) noktası boyunca yörüngeyi göz önüne alalım. $(\hat{x}, \hat{y})$ noktasındaki yörünge için tanjant vektörü

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{ve} \quad \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y}) \quad (5)$$

olmak üzere

$$(\xi(\hat{x}, \hat{y}), \eta(\hat{x}, \hat{y}))$$

şeklindedir. Özel olarak (x, y) noktasındaki tanjant vektörü ise

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right) \quad (6)$$

olur. Böylece Lie grubunun etkisi ile $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ için Taylor serisi ε nun ilk mertebesinde aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= x + \varepsilon \xi(x, y) + 0(\varepsilon^2) \\ \hat{y} &= y + \varepsilon \eta(x, y) + 0(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (7)$$

Bunlar (4) ile verilen simetri şartı altında $y' = f(x, y)$ ile birlikte yazılırsa;

$$\frac{f + \varepsilon(\eta_x + f \eta_y) + 0(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon(\xi_x + f \xi_y) + 0(\varepsilon^2)} = f\left(x + \varepsilon \xi(x, y) + 0(\varepsilon^2), y + \varepsilon \eta(x, y) + 0(\varepsilon^2)\right)$$

elde edilir. Şimdi bu ifadenin her iki tarafı $\varepsilon = 0$ civarında Taylor serisine açılır ve fonksiyonların analitik oldukları, yani her bir serinin yakınsak olduğu varsayılırsa

$$f + \varepsilon \left\{ \eta_x + (\eta_y - \xi_x) f - \xi_y f^2 \right\} + 0(\varepsilon^2) = f + \varepsilon \left\{ \xi f_x + \eta f_y \right\} + 0(\varepsilon^2)$$

sonucuna ulaşılır. Burada $0(\varepsilon)$ terimlerinin karşılıklı olarak eşitlenmesiyle

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) f - \xi_y f^2 = \xi f_x + \eta f_y \quad (8)$$

bulunur. Bu şarta (1) adi diferansiyel denklemi için *lineerleştirilmiş simetri şartı* denir.

Sonraki kısımda görüleceği üzere yüksek mertebeden diferansiyel denklemler için simetri şartında ξ ve η değişkenlerinin sadece x ve y değişkenlerine bağlı olmasından faydalanarak tanjant vektörleri sistematik olarak ortaya çıkarılacaktır. Tanjant vektörleri bulunduğundan sonra

$$\frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} = \xi(\hat{x}, \hat{y}), \quad \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} = \eta(\hat{x}, \hat{y})$$

diferansiyel denklemleri ile birlikte

$$(\hat{x}(x, y; 0), \hat{y}(x, y; 0)) = (x, y)$$

başlangıç şartları göz önüne alınarak simetri dönüşümlerinin kendileri elde edilebilir. Ancak bu simetri dönüşümlerinden ziyade tanjant vektörleri kullanıldığından bunun üzerinde burada hiç durulmayacaktır. Birinci mertebeden diferansiyel denklemlerde ise böyle bir imkan mevcut değildir, çünkü lineerleştirilmiş simetri şartında ξ ve η değişkenlerinin dışında sadece f fonksiyonu bulunmaktadır. f fonksiyonu da ξ ve η gibi yalnız x ve y değişkenlerine bağlıdır. Birinci mertebeden denklemlerde bu sıkıntıyı aşmak için belirli formlardaki ξ ve η lar aranmaktadır. Bunlardan yaygın olarak kullanılan öteleme, ölçekleme ve dönme gibi simetrileri bulmak için

$$\xi = c_1 x + c_2 y + c_3, \quad \eta = c_4 x + c_5 y + c_6$$

tahmini yapılabilir. Yine yaygın olarak ortaya çıkan y den bağımsız ξ , ve y ye göre lineer η da kullanılabilir. Aşağıda çözüm araştırılmaksızın sadece tanjant vektörlerin araştırılması ile ilgili bir örnek verilmiştir.

Örnek 1. $y = y(x)$, $k = k(x)$ ve c keyfi bir sabit olmak üzere birinci mertebeden

$$\left(\frac{y'}{k} \right)^2 + y^2 = c$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklem $y' = f(x, y)$ formuna çevrilirse $c > y$ olmak

üzere $f = \pm k \sqrt{c - y^2}$ biçimindedir. (8) simetri şartı altında f fonksiyonunun $f = \pm k \sqrt{c - y^2}$ değeri yerine yazılırsa

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x) \left(\pm k \sqrt{c - y^2} \right) - \xi_y \left(\pm k \sqrt{c - y^2} \right)^2 = \xi \left(\pm k' \sqrt{c - y^2} \right) + \eta \left(\mp \frac{ky}{\sqrt{c - y^2}} \right)$$

elde edilir. Şimdi y den bağımsız bir ξ ile y ye göre lineer bir η nın varlığına bakalım. Buna göre α, β ve γ sonradan belirlenecek fonksiyonlar olmak üzere

$$\xi = \alpha(x), \quad \eta = \beta(x)y + \gamma(x)$$

olarak alınsın. Bu dönüşümler yukarıdaki denklemde yerine yazılırsa

$$\beta' y + \gamma' \pm (\beta - \alpha') k \sqrt{c - y^2} = \pm \alpha k' \sqrt{c - y^2} \mp (\beta y + \gamma) \frac{ky}{\sqrt{c - y^2}}$$

bulunur. Burada $\sqrt{c - y^2}$ nın kuvvetlerine göre ayırıştırma yapılırsa

$$\beta = \gamma = 0 \quad \text{ve} \quad \alpha' k + \alpha k' = 0$$

elde edilir. İkinci denklemden

$$(\alpha k)' = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\tilde{c}}{k}$$

olup, böylece

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{k}, 0 \right)$$

biçimindeki tanjant vektörlerine ulaşılır. Ancak çözüm için bu yeterli değildir. Bunun için simetrilerin Lie grubu vasıtasıyla ulaşacağımız çözümü kolaylaştırıcı koordinatların tanımlanmasına ihtiyaç vardır.

1.2 Kanonik Koordinatlar

(1) ile verilen adi diferansiyel denklemine ait aşikar olmayan simetrilerin bulunabileceğini ve bu simetrilerin sadece y - yönündeki

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x, y + \varepsilon) \tag{9}$$

ötelemelerinin Lie grubunu içerdiğini varsayalım. Bu durumda tanjant vektörler

$$(\xi, \eta) = (0, 1)$$

şeklinde olup, (8) ile verilen lineerleştirilmiş simetri şartı altında bu değerler yerine yazılırsa

$$f_y = 0$$

bulunur. Dolayısıyla sadece y - yönündeki ötelemelerin Lie grubuna sahip olan adi diferansiyel denklemler

$$y' = f(x)$$

formunda olmalıdır ve dolayısı ile bu tip denklemlerin genel çözümü c integral sabiti olmak üzere

$$y = \int f(x) dx + c$$

biçiminde elde edilir. Bu tip simetrilere ait sonuçlardan faydalanarak birinci mertebeden (bu yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlere de genelleştirilebilir) adi diferansiyel denklemler uygun koordinat dönüşümler ile kolaylıkla çözülebilir.

Şimdi bu koordinatların nasıl elde edilebileceğine bakalım. Burada hedeflenen amaç, (1) formundaki diferansiyel denklemlerin sahip oldukları simetri dönüşümleri vasıtasıyla bu adi diferansiyel denklemleri yalnızca bağımlı değişken yönünde ötelemeleri içerecek yeni bir adi diferansiyel denkleme dönüştürecek koordinatlara taşımak olacaktır. Bu koordinatlara ise *kanonik koordinatlar* denir. Bu açıklamalar ışığında yeni koordinatlar

$$(r, s) = (r(x, y), s(x, y)) \quad , \quad r_x s_y - r_y s_x \neq 0$$

ile gösterilirse bu takdirde göz önüne alınan yeni koordinatlarda adi diferansiyel denklemin sahip olduğu simetritelerin tek-parametrelili Lie grubu

$$(\hat{r}, \hat{s}) = (r(\hat{x}, \hat{y}), s(\hat{x}, \hat{y})) = (r, s + \varepsilon)$$

formunda olmalıdır. Böylece (r, s) noktasında tanjant vektör

$$\left. \frac{d\hat{r}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \quad , \quad \left. \frac{d\hat{s}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 1$$

biçimindedir. Burada zincir kuralı kullanılarak

$$\left(r_{\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} + r_{\hat{y}} \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right) \bigg|_{\varepsilon=0} = 0 \quad , \quad \left(s_{\hat{x}} \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} + s_{\hat{y}} \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right) \bigg|_{\varepsilon=0} = 1$$

elde edilir. Bu denklemler, (6) denklemleri ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\xi(x, y)r_x + \eta(x, y)r_y = 0, \quad \xi(x, y)s_x + \eta(x, y)s_y = 1 \quad (10)$$

bulunur. Burada (r, s) aşağıdaki gibi elde edilebilir.

i) Eğer $\xi \neq 0$ ise r 'nin

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta(x, y)}{\xi(x, y)}$$

diferansiyel denkleminin bir ilk integrali olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece yukarıdaki adi diferansiyel denklem için bir ilk integral

$$\phi(x, y) = c, \quad \phi_y \neq 0$$

biçiminde olup buradan

$$r = \phi(x, y) \quad \text{ve} \quad s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))} \right) \bigg|_{r=r(x, y)}$$

olur.

ii) Eğer $\xi = 0$ ise (eğer bu simetriteler aşikar simetriteler değilse $\eta \neq 0$ olmalıdır), (10) un ilk denkleminde $r_y = 0$ olduğu görülür. Buradan basitçe

$$r = x \quad \text{ve} \quad s = \left(\int \frac{dy}{\eta(r, y)} \right) \Big|_{r=x}$$

biçimindeki kanonik koordinatlara ulaşılır.

(r, s) kanonik koordinatları bulunduktan sonra (1) denklemini bu koordinatlar cinsinden

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{s_x + f(x, y) s_y}{r_x + f(x, y) r_y} \quad (11)$$

şeklinde yazılır. (11) denkleminin sağ tarafı r ve s nin bir fonksiyonu olarak ifade edilebilir. Böylece (1) ile ifade edilen adi diferansiyel denklem dönüştürülmüş koordinatlarda

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r, s)$$

olmalıdır. Hâlbuki $(\hat{r}, \hat{s}) = (r, s + \varepsilon)$ ötelemelerinin bir tek-parametrelili Lie grubuna sahip olduğunda $\Omega_s = 0$ olması sebebi ile yukarıdaki adi diferansiyel denklem

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r)$$

formunda olup bunun genel çözümü

$$s = \int \Omega(r) dr + c$$

biçimindedir. Böylece (orijinal) adi diferansiyel denklemin genel çözümü

$$s(x, y) - \int_{r(x, y)} \Omega(r) dr + c = 0$$

olarak elde edilir. Aşağıda daha önce tanjant vektörün belirlendiği diferansiyel denklem için kanonik koordinatlar kullanılarak çözüme ulaşılmaya çalışılmıştır.

Örnek 2. $k = k(x)$ ve $c > y$ olmak üzere

$$(\xi, \eta) = \left(\frac{1}{k}, 0 \right)$$

şeklindeki tanjant vektöre sahip

$$\left(\frac{y'}{k} \right)^2 + y^2 = c$$

adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Burada $\xi \neq 0$ olduğundan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\eta}{\xi} = 0$$

yazılır ve dolayısıyla $y = c$ olup, böylece

$$r = y \quad \text{ve} \quad s = \left(\int \frac{dx}{\xi(x, y(x, r))} \right) \bigg|_{r=r(x, y)} = \int k(x) dx$$

bulunur. Diğer yandan

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{s_x + y' s_y}{r_x + y' r_y} = \frac{k(x)}{y'} = \frac{k}{\pm k \sqrt{c - y^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c - y^2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{c - r^2}}$$

diferansiyel denkleminin integrali alınarak

$$s = \pm \int \frac{1}{\sqrt{c}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{\sqrt{c}} \right)^2}} = \pm \arcsin \left(\frac{r}{\sqrt{c}} \right) + \tilde{c} \quad , \quad \tilde{c} \text{ sabit}$$

çözümü elde edilir. Burada r ve s nin orijinal değişkenler cinsinden karşılıkları yazılıp düzenlenirse

$$y = \pm \sqrt{c} \sin \left[\int k(x) dx - \tilde{c} \right]$$

biçimindeki genel çözümü bulunur.

2. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİ DÖNÜŞÜMÜ VASİTASIYLA ÇÖZÜLMESİ

İki ve daha yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin simetrileri vasıtasıyla çözümünde ele alınan çeşitli yollar vardır. Bu yolların her birinde kullanılan simetri türleri (nokta simetrileri, dinamik simetriler, bağlantı simetrileri vb.) değişmektedir. Daha önceki bölümde olduğu gibi bu bölümde de Lie nokta simetrileri üzerinde durulacaktır. Burada ortaya konulan fikirler ve uygulamaları genel olarak n . mertebeden adi diferansiyel denklemler için geçerli olsa da tüm dikkatler sadece ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler üzerinde yoğunlaşacaktır.

2.1. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler için Simetri Şartı

Genel ikinci mertebeden

$$y'' = \omega(x, y, y') \quad (12)$$

formunda olan adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Öncelikle bu formdaki denklemler için simetri şartı belirlenir. Ancak burada önceki bölümden farklı olarak, birinci mertebeyi de kapsayacak şekilde lineerleştirilmiş simetri şartını (bulunması daha kolaydır) oluşturmak için yeni bir kavram sunulacaktır. (ξ, η) tanjant vektörleri olmak üzere önerilen bu yeni kavram

$$X = \xi \partial_x + \eta \partial_y \quad (13)$$

biçiminde gösterilen infinitesimal üreteçtir. Bu düşünce ışığı altında

$$\eta^{(k)} = D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

olmak üzere

$$X^{(n)} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta^{(1)} \partial_{y'} + \eta^{(2)} \partial_{y''} + \dots + \eta^{(n)} \partial_{y^{(n)}} \quad (15)$$

şeklinde uzanımlı forma getirilebilir. Buna göre ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş simetri şartı,

$$X^{(2)}(y'' - \omega(x, y, y')) = 0 \quad (16)$$

olarak ortaya çıkar. Buradan

$$\eta^{(2)} = \xi \omega_x + \eta \omega_y + \eta^{(1)} \omega_{y'} \quad (17)$$

olduğu görülür. (14) formülünün burada kullanılmasıyla

$$\eta^{(1)} = \eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2$$

$$\eta^{(2)} = \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - \xi_{yy} y'^3 + \{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y'\} y''$$

bulunur. Bu değerler ve (12) eşitliği (17) de yerine yazılırsa, ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş simetri şartı

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 \\ - \xi_{yy} y'^3 + \{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y'\} \omega = \xi \omega_x + \eta \omega_y + \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2\} \omega_{y'} \end{aligned} \quad (18)$$

olarak elde edilir

İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için simetri şartının birinci mertebeye göre avantajı y nin türevlerini içermesidir. Bu sayede lineerleştirilmiş simetri şartında y' nin kuvvetlerine göre ayrıştırma yapılabilir. Bu şekilde ortaya çıkacak denklem sistemine, *belirleme denklemleri* denir. Aşağıda simetri şartından bir sistematik vasıtasıyla belirleme denklemlerinin ve dolayısıyla onların çözülmesi ile infinitesimal üreteçlerin elde edilişi bir örnek ile verilmiştir.

Örnek 3. İkinci mertebeden

$$y'' = \sin(y'^2) + 1$$

adi diferansiyel denklemini göz önüne alarak yukarıda bahsedilen adımları sırayla uygulayalım. Bu denklem için ω fonksiyonu;

$$y'' = \omega(x, y, y') = \sin(y'^2) + 1$$

biçiminde yazılır ve (18) lineerleştirilmiş simetri şartı altında bu değerler yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) y' + (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) y'^2 - \xi_{yy} y'^3 \\ + \{\eta_y - 2\xi_x - 3\xi_y y'\} (\sin(y'^2) + 1) = \{\eta_x + (\eta_y - \xi_x) y' - \xi_y y'^2\} (2y' \cos(y'^2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada türevli ifadelerin katsayıları ayrıştırılırsa

$$\begin{aligned} \xi_y &= 0, \quad \xi_{xx} = 0 \\ \eta_x &= 0, \quad \eta_y - \xi_x = 0 \\ \eta_{yy} &= 0, \quad \eta_y - 2\xi_x = 0 \end{aligned}$$

belirleme denklemlerine ulaşılır. Böylece bulunan kısmi diferansiyel denklem sistemi çözülerek c_1 ve c_2 sabitler

olmak üzere

$$\xi = c_1, \quad \eta = c_2$$

dönüşümleri bulunur. Buradan tanjant vektörler

$$(\xi_1, \eta_1) = (1, 0), \quad (\xi_2, \eta_2) = (0, 1)$$

olup, dolayısıyla

$$X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y$$

biçimindeki infinitesimal üreteçlerine ulaşılır.

İnfinitesimal üreteçler elde edildikten sonra tıpkı birinci mertebede yapıldığı gibi indirgeme işlemleri yapılır.

2.2 Kanonik Koordinatlar Kullanılarak Mertebenin İndirgenmesi

Yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümünde de mertebesi küçük olan diferansiyel denklemlerde yapıldığı gibi kanonik koordinatlardan faydalanılır. Bu yöntemin adımları birinci mertebeden denklemler için yapılanlar ile neredeyse aynıdır. Tabii ki mertebenin birinci mertebeden büyük olması, uygulanan prosedürün uzayacağı anlamına gelse de, her aşamanın tamamen tekrarlanması söz konusu olduğundan bu uzama herhangi bir karmaşıklığa sebebiyet vermemektedir. Şimdi

$$y'' = \omega(x, y, y')$$

formundaki (12) diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin $X = \partial_y$ şeklinde bir infinitesimal üretece sahip olduğunu varsayalım. Daha önceden ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için simetri koşulunun

$$X^{(n)}(y'' - \omega(x, y, y')) = 0$$

şeklinde olduğunu düşünüldüğünde, burada

$$\eta^{(k)} = D_x \eta^{(k-1)} - y^{(k)} D_x \xi, \quad k = 1, 2$$

olmak üzere

$$X^{(n)} = \partial_y$$

yazılır ve dolayısıyla lineerleştirilmiş simetri şartından

$$\omega_y = 0$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise diferansiyel denklemin

$$y'' = \omega(x, y')$$

formunda olması gerektiğini gösterir. Dolayısıyla $y'(x) = v(x)$ dönüşümü ile

$$v' = \omega(x, v)$$

indirgenmiş diferansiyel denklemi elde edilir. İndirgenmiş diferansiyel denklemin çözülebildiğini (İndirgenmiş diferansiyel denklemi çözmek için de önceki bölümde ifade edildiği üzere simetri dönüşümlerinden faydalanılabilir) ve bu denklemin genel çözümünün de

$$v = f(x, c_1)$$

olduğu varsayılırsa bu takdirde (12) diferansiyel denklemi

$$y' = f(x, c_1)$$

biçiminde olup bunun genel çözümü ise

$$y = \int f(x, c_1) + c_2$$

şeklindedir.

Daha önce, bulunan simetriler vasıtasıyla kanonik koordinatların nasıl elde edildiğine değinildiğinden ve bu sebeple kanonik koordinatlarda dönüştürülmüş adi diferansiyel denklemin simetrilerinin infinitesimal üreticinin ise $\tilde{X} = \partial_s$ şeklinde tanımlanmış olduğundan, böylece adi diferansiyel denklem için, simetriler ne olursa olsun kolaylıkla merteye indirilmesi yapılabilmektedir. Aşağıda bunu gösteren bir örnek vardır.

Örnek 4. İkinci mertebeden

$$y'' = \frac{3y'^2}{2y} + 2y^3$$

diferansiyel denklemi $X = \partial_x$ tarafından üretilen simetrilerin bir tek-parametrelili ailesine sahiptir. Bu üreticiden $(\xi, \eta) = (1, 0)$ olup (r, s) kanonik koordinatları

$$r = y, \quad s = x$$

olarak yazılır ve buradan

$$\frac{ds}{dr} = \dot{s} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{1}{y'}, \quad \frac{d^2 s}{dr^2} = \frac{d\dot{s}}{dr} = -\frac{y''}{y'^3} = -\frac{3}{2yy'} - 2\frac{y^3}{y'^3} = -\left(\frac{3\dot{s}}{2r} + 2r^3 \dot{s}^3\right)$$

bulunur. Merteye indirilmesi için $v(r) = \dot{s}(r)$ eşitliği kullanılırsa, birinci mertebeden

$$v' = -\frac{3v}{2r} - 2r^3 v^3$$

denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için, önce tanjant vektörleri

$$(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = (0, r^3 v^3)$$

biçiminde bulunur. Buradan yeni kanonik koordinatlar

$$\tilde{r} = r, \quad \tilde{s} = \int \frac{dv}{\eta(r(\tilde{r}, v), v)} \Big|_{\tilde{r}=r} = -\frac{1}{2r^3 v^2}$$

olur. Böylece

$$\frac{d\tilde{s}}{d\tilde{r}} = \frac{D_r \tilde{s}}{D_r \tilde{r}} = D_r \tilde{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{r^4 v^2} + 2 \frac{v'}{r^3 v^3} \right) = \frac{3}{2r^4 v^2} - \frac{1}{v^3 r^3} \left(\frac{3v}{2r} + 2r^3 v^3 \right) = -2$$

şeklinde olup, c_1 sabit olmak üzere

$$\tilde{s} = c_1 - 2\tilde{r}$$

dir. O halde (r, v) kanonik koordinatları cinsinden denklem

$$v = \pm \sqrt{\frac{1}{2r^3(2r - c_1)}}$$

olup buradan diferansiyel denklemin genel çözümü

$$x = \pm \int \frac{dy}{\sqrt{2y^3(2y - c_1)}} + c_2 = \pm \frac{\sqrt{2y^3(2y - c_1)}}{c_1 y^2} + c_2$$

olarak elde edilir.

2.3 Diferansiyel İnvaryantlar ve Mertebenin İndirgenmesi

Şuana kadar göz önüne alınan bir adi diferansiyel denklem için aşıkâr olmayan Lie nokta simetrilerinin bir üreticini kullanarak mertebenin bir kez indirgenebileceği ortaya konulmuştur. Genel olarak, n . mertebeden adi diferansiyel denklem için $R \leq n$ tane Lie nokta simetrisi kullanılarak indirgenmiş $(n - R)$. mertebeden diferansiyel denklemler elde edilebilmesi mümkündür. Bu ise özelleştirilirse, aşıkâr olmayan iki tane Lie nokta simetri ailesini kullanarak ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin iki mertebe birden indirgenebileceği anlamına gelmektedir. Bu yüzden şimdi de, aşıkâr olmayan iki tane Lie nokta simetrisi kullanılarak ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin iki mertebe birden nasıl indirgenebileceği gösterilecektir. Burada genel olarak n . mertebeden diferansiyel denklemlerin incelenmesi hedeflenmesine rağmen uygulama olarak sadece ikinci mertebeden diferansiyel denklemler kullanılacaktır. Yukarıda ifade edilen indirgeme yapılmadan önce diferansiyel invaryant tanımını önce verelim.

Bir $F(x, y)$ fonksiyonu tek-parametrelî bir grubun dönüşümleri altında değişmeden kalıyorsa bu fonksiyona grubun bir *invaryantı* (veya *grup altında invaryant fonksiyon*) denir.

Teorem: Bir $F(x, y)$ fonksiyonunun tek-parametrelî grup altında invaryant olması için gerek ve yeter koşul X bu grubun infinitesimal üretici olmak üzere

$$XF = 0$$

olmasıdır.

İspat: (r, s) kanonik koordinatlar ve $G(r, s)$ de smooth bir fonksiyon olmak üzere

$$F(x, y) = G(r(x, y), s(x, y))$$

şeklinde tanımlansın. İnvaryant olmayan herhangi bir (x, y) noktasında Lie simetrileri $F(x, y)$ yi

$$F(\hat{x}, \hat{y}) = G(\hat{r}, \hat{s}) = G(r, s + \varepsilon)$$

na dönüştürür. $G(r, s + \varepsilon)$ fonksiyonu $\varepsilon = 0$ civarında Taylor serisine açılır ve kanonik koordinatlarda $X = \partial_s$ olduğunu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}
F(\hat{x}, \hat{y}) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} \frac{\partial^j G(r, s)}{\partial s^j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} X^j G(r, s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^j}{j!} X^j F(x, y) \\
&= e^{\varepsilon X} F(x, y) = F(x, y) + \frac{\varepsilon}{1} XF + \frac{\varepsilon^2}{2} X^2 F + \dots
\end{aligned} \tag{19}$$

bulunur. Şimdi F in invariant olduğu kabul edilsin. Bu durumda $F(\hat{x}, \hat{y}) = F(x, y)$ olmalıdır. Bu ise yukarıda (19) eşitliğindeki $F(x, y)$ hariç sağdaki tüm terimlerin sıfır olmasını gerektirir ve özel olarak $XF = 0$ olmalıdır.

Diğer taraftan $XF = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$X^2 F = X(XF) = X(0) = 0, \dots, X^n F = X^{n-1}(XF) = X^{n-1}(0) = 0, \dots$$

olup, bu eşitlikler (19) da yerine yazılırsa $F(\hat{x}, \hat{y}) = F(x, y)$ elde edilir. Dolayısıyla F , grup altında invarianttır.

Şimdi n . mertebeden

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \tag{20}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım ve F fonksiyonunu

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = y^{(n)} - f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = 0$$

olarak farz edelim. Eğer F için

$$X^{(k)} F = 0 \tag{21}$$

oluyorsa F e X tarafından üretilen grubun k . mertebeden bir diferansiyel invariantı denir. Sadece invariant kanonik koordinat olan $r(x, y)$ koordinatı sıfırıncı mertebeden diferansiyel invarianttır. Birinci mertebeden diferansiyel invariantlar r ve v nin, daha yüksek mertebeden diferansiyel invariantlar ise r yi, v yi ve v nin r ye göre türevlerini içeren fonksiyonlardır. Burada r ve v ye *temel diferansiyel invariantlar* denir.

Kanonik koordinatlarda s i belirledikten sonra v belirlenebilmesine rağmen burada s i belirlemeksizin temel diferansiyel invariantların uygun bir ikilisi tespit edilebilmektedir. Burada (21) eşitliğini

$$X^{(k)} = \xi \partial_x + \eta \partial_y + \eta^{(1)} \partial_{y'} + \dots + \eta^{(k)} \partial_{y^{(k)}}$$

biçiminde olup bu ise yeniden yazılarak

$$\xi F_x + \eta F_y + \eta^{(1)} F_{y'} + \dots + \eta^{(k)} F_{y^{(k)}} = 0$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla F , bu kısmi diferansiyel denklemin Lagrange sisteminin, yani

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta^{(1)}} = \dots = \frac{dy^{(k)}}{\eta^{(k)}}$$

ifadesinin bir ilk integralidir. Özel olarak r

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta}$$

denkleminin ve v ise

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dy'}{\eta^{(1)}}$$

eşitliğinin bir ilk integralidir. Temel diferansiyel invariantlar belirlenir belirlenmez (20) denklemi bu diferansiyel invariantlar cinsinden indirgenmiş olarak

$$v^{(n-1)} = \Omega(r, v, \dots, v^{(n-2)})$$

biçiminde yazılır.

Şimdi benzer mantıkla birden fazla (iki) Lie nokta simetri üreteline sahip bir adi diferansiyel denkleme ait her bir üretelin diferansiyel invariantlar cinsinden yazılabileceğine bakalım.

L , n .meriteden bir diferansiyel denklemin nokta simetrilerinin tek-parametrelili Lie gruplarının tüm infinitesimal üretelerinin kümesi olsun. Lineerleştirilmiş simetri şartı altında c_1 ve c_2 ler sabitler olmak üzere $\forall X_1, X_2 \in L$ için

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \in L$$

olduğu açıktır. Burada L bir vektör uzayıdır. Aynı zamanda bu uzayın R boyutu, lineerleştirilmiş simetri şartının genel çözümünde ortaya çıkan sabitlerin sayısı ile belirlenir. Tüm $X \in L$ ler tarafından üretilen Lie nokta simetrilerinin kümesi, R -parametrelili bir Lie grubu oluşturur.

$\{X_1, X_2\}$, L için bir baz olsun. L tarafından üretilen grubun temel diferansiyel invariantları

$$\begin{bmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \eta_1^{(1)} & \eta_1^{(2)} \\ \xi_2 & \eta_2 & \eta_2^{(1)} & \eta_2^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{y'} \\ F_{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sisteminin çözümleridir. Bu sistem iki fonksiyonel bağımsız çözüme sahiptir. Bu çözümleri bulmak için, sisteme önce Gauss eliminasyon yöntemi uygulanır daha sonra geriye kalan kısmi diferansiyel denklemler için tek tek karakteristik metot kullanılır. Bunlardan birisi $y^{(2)}$ den bağımsızdır ve r_2 ile

gösterilir, diğeri ise (aşıkarak olmayacak şekilde) $y^{(2)}$ ye bağılı olup v_2 ile gösterilir. Burada $\frac{dv_2}{dr_2}$, $y^{(3)}$

e bağılı olduğundan, 2. mertebeden bir adi diferansiyel denklemin

$$v_2 = \Omega(r_2)$$

şeklinde cebirsel denkleme dönüştüğü açıkça görülür. Bu indirgemeyi gösteren bir örnek aşağıdadır.

Örnek 5. Yukarıda ifade edilen adımları ikinci mertebeden

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y^2}{x^3 y'}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alarak uygulayalım. Bu diferansiyel denklem $X_1 = x\partial_x$ ve $X_2 = y\partial_y$ biçimindeki infinitesimal üreteçlere karşılık gelen Lie simetri gruplarını kabul eder. Buradan tanjant vektörler

$$(\xi_1, \eta_1) = (x, 0) \text{ ve } (\xi_2, \eta_2) = (0, y)$$

olup, buradan

$$\eta_i^{(k)} = D_x \eta_i^{(k-1)} - y'' D_x \xi_i, \quad i, k = 1, 2$$

yazılır. Bu değerler (22) de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} x & 0 & -y' & -2y'' \\ 0 & y & y' & y'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_{y'} \\ F_{y''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir. Burada Gauss eliminasyon yöntemini uygulamaya gerek yoktur. Dolayısıyla doğrudan karakteristik metoda geçilirse, ikinci denklemden, yani $yF_y + y'F_{y'} + y''F_{y''} = 0$ denkleminde

$$F = F\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}\right)$$

olduğu çıkar. Bu sonucu ilk denklemde yerine yazarak,

$$F = F\left(\frac{xy'}{y}, \frac{x^2 y''}{y}\right)$$

bulunur. Böylece $\{X_1, X_2\}$ tarafından üretilen grubun temel diferansiyel invariantları

$$r_2 = \frac{xy'}{y} \quad \text{ve} \quad v_2 = \frac{x^2 y''}{y}$$

dir. Böylece örnek olarak alınan diferansiyel denklem, diferansiyel invariantlar cinsinden

$$v_2 = \frac{x^2 y''}{y} = \frac{x^2}{y} \left(\frac{y'^2}{y} - \frac{y^2}{x^3 y'} \right) = \left(\frac{xy'}{y} \right)^2 - \frac{y}{xy'} = r_2^2 - \frac{1}{r_2}$$

biçimindeki cebirsel denkleme indirgenir.

Bu şekilde indirgenmiş olan cebirsel denklemleri sistematik bir şekilde çözmek için daha fazlasını bilmeye ihtiyaç duyarız. Bu nedenle burada yeterli olacak şekilde simetrilerin Lie cebiri ve bununla birlikte gerekli olan tanım ve teoremler verilmelidir.

2.4 Nokta Simetri Üreteçlerinin Lie Cebri

Genel olarak $R \leq n$ olmak üzere R -boyutlu L tarafından üretilen R -parametrelili bir Lie grubuna sahip olan

$$y^{(n)} = \omega(x, y', \dots, y^{(n-1)})$$

diferansiyel denkleminin r_R, v_R temel diferansiyel invariantları cinsinden

$$v_R^{(n-R)} = \Omega(r_R, v_R, \dots, v_R^{(n-R-1)})$$

şeklinde $n - R$ mertebeden bir diferansiyel denkleme indirgenebileceği bilinmektedir. Bu indirgenmiş diferansiyel denklem çözümlerse

$$v_R = F(r_R, c_1, \dots, c_{n-R}) \quad (24)$$

biçiminde bir cebirsel denklem elde edilir. Böylece önceki örnekte $n - R = 0$ olduğundan dolayı doğrudan diferansiyel denklemden bir cebirsel denklem elde edilmiş olunur. Bu şekilde elde edilen cebirsel denklemler aslında orijinal değişkenler cinsinden R . mertebeden bir diferansiyel denkleme denktir. Bu bölümdeki amaç, göz önüne alınacak olan orijinal diferansiyel denklemin sahip olduğu R -parametrelili Lie grubunu (daha doğrusu R -boyutlu L uzayının baz elemanları olan her bir infinitesimal üreteçleri) kullanarak bu R .mertebeden diferansiyel denklemi, dolayısıyla sonuç olarak orijinal adi diferansiyel denklemi çözmektir. Bunun için aşağıdaki adımları ele alalım.

Öncelikle bir X üretecinin koordinat değişimi altındaki karakterini inceleyelim. Yeni koordinatlar $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ olmak üzere F bu yeni koordinatlarda keyfi bir fonksiyon ise bu takdirde

$$\begin{aligned} XF &= (\xi \partial_x + \eta \partial_y) F(u, v) = \xi (F_u u_x + F_v v_x) + \eta (F_u u_y + F_v v_y) \\ &= (\xi u_x + \eta u_y) F_u + (\xi v_x + \eta v_y) F_v \\ &= [(\xi \partial_x + \eta \partial_y) u] F_u + [(\xi \partial_x + \eta \partial_y) v] F_v \\ &= [(Xu) \partial_u + (Xv) \partial_v] F \end{aligned}$$

yazılır. Böylece X , yeni koordinatlar cinsinden

$$X = (Xu) \partial_u + (Xv) \partial_v \quad (25)$$

biçiminde ifade edilir. Diğer yandan her $X_i, X_j \in L$ için

$$[X_i, X_j] = X_i X_j - X_j X_i = (X_i \xi_j - X_j \xi_i) \partial_x + (X_i \eta_j - X_j \eta_i) \partial_y \quad (26)$$

komütatörünü göz önüne alınırsa, $X_i X_j$ ile $X_j X_i$ lerin her biri ikinci mertebeden diferansiyel operatörler olmasına rağmen bu mertebedeki terimlerinin aynı olmasından dolayı

$[X_i, X_j]$ komütatörünün birinci mertebeden bir operatör olduğu görülür. Buradan $[X_i, X_j]$

komütatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) Antisimetriktir. Yani her $X_i, X_j \in L$ için

$$[X_i, X_j] = -[X_j, X_i] \text{ dir.}$$

ii) Bilineerdir. Yani her $X_i, X_j, X_k \in L$ ve $c_i, c_j, c_k \in \mathbb{R}$ için

$$[c_i X_i + c_j X_j, X_k] = c_i [X_i, X_k] + c_j [X_j, X_k]$$

$$[X_i, c_j X_j + c_k X_k] = c_j [X_i, X_j] + c_k [X_i, X_k]$$

yazılır.

iii) Jakobi özdeşliğini sağlar. Yani her $X_i, X_j, X_k \in L$ için

$$[X_i, [X_j, X_k]] + [X_k, [X_i, X_j]] + [X_j, [X_k, X_i]] = 0.$$

olur.

Verilen bu özellikler (26) denkleminde çıkarılabilir. Bunlarla birlikte dönüşümlerin bir R -parametrelili Lie grubunun herhangi iki infinitesimal üreticinin komütatörü

$$[X_i, X_j]$$

olup, bu komütatörün kendisi de bir infinitesimal üreticidir. Böylece L , komütatör altında kapalıdır, yani

$$X_i, X_j \in L \text{ ise } [X_i, X_j] \in L$$

dir. Bir Lie cebirinin, bileer, antisimetrik ve Jakobi özdeşliğini sağlayan bir $[\cdot, \cdot]$ çarpımı altında kapalı olan bir vektör uzayı olduğu göz önüne alınırsa, sonuçta L nin bir Lie cebri olduğu görülür.

Tanım: Bir $J \subset L$ alt uzayını göz önüne alalım. Eğer her $X_i, X_j \in J$ için $[X_i, X_j] \in J$ oluyorsa bu J ye L nin bir alt cebiri denir.

Tanım: Eğer her $X_i \in J$ ve her $X_j \in L$ için $[X_i, X_j] \in J$ oluyorsa bu takdirde $J \subset L$ alt cebirine L nin bir ideali veya normal alt cebiri denir.

Tanım : Eğer $L^{(k)}$ ($k=1,2,\dots,q$) k -boyutlu bir Lie cebri ve $L^{(k-1)}$ ise $L^{(k)}$ nin bir ideali olacak şekilde

$$\{0\} = L^{(0)} \subset L^{(1)} \subset \dots \subset L^{(q-1)} \subset L^{(q)} = L^q \quad (27)$$

alt cebirlerin bir zinciri mevcut ise L^q , q -boyutlu çözülebilir bir Lie cebiridir.

Teorem: Her 2-boyutlu Lie cebiri çözülebilirdir.

İspat: $L, \{X_1, X_2\}$ baz vektörlerine sahip 2-boyutlu bir Lie cebiri ve $[X_1, X_2] = aX_1 + bX_2 = Y$ olsun. Bu durumda her $c_1X_1 + c_2X_2 \in L$ için

$$\begin{aligned} [Y, c_1X_1 + c_2X_2] &= c_1[Y, X_1] + c_2[Y, X_2] \\ &= ac_1[X_1, X_1] + bc_1[X_2, X_1] + ac_2[X_1, X_2] + bc_2[X_2, X_2] \\ &= bc_1[X_2, X_1] + ac_2[X_1, X_2] = ac_2[X_1, X_2] - bc_1[X_1, X_2] \\ &= (ac_2 - bc_1)[X_1, X_2] = (ac_2 - bc_1)Y \end{aligned}$$

yazılır. Buradan $\{Y\}$ 'nin L nin bir ideali olduğu açıktır, dolayısıyla her 2-boyutlu Lie cebiri çözülebilirdir.

Eğer R -parametrelili bir grubu oluşturan infinitesimal üreteçlerin R -boyutlu Lie cebiri bir q -boyutlu çözülebilir alt cebire sahipse, bu takdirde orijinal değişkenler cinsinden R . mertebeden bir diferansiyel denkleme denk olan (24) denkleminin mertebesi q kez indirgenebilir. Eğer $q = R$ ise (ortaya çıkacak olan integrallerin alınabileceği varsayılarak) indirgenmiş (24) denklemi tekrarlamalı işlemlerle tam olarak çözülebilirdir ve dolayısı ile bu sonuçta orijinal diferansiyel denklemin genel çözümünü verir. Eğer $n = R = q$ ise elbette genel çözüm garanti olacaktır.

Burada daha çok ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler ile ilgilenildiğinden L nin $\{X_1, X_2\}$ şeklinde bir alt cebirini bulmak çözüm için yeterli olacaktır. Daha sonra izlenecek yol aşağıda örnek ile verilebilir.

Örnek 6 : Önceki örnekte incelenilen ikinci mertebeden

$$y'' = \frac{y'^2}{y} - \frac{y^2}{x^3 y'}$$

adi diferansiyel denklem tekrar göz önüne alınır. Bu diferansiyel denklemin sahip olduğu Lie grubunu üreten infinitesimal üreteçler $X_1 = x\partial_x$ ve $X_2 = y\partial_y$ olarak bulunulduğundan şimdi bu üreteçlerin komütatörlerine bakıldığında

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= X_1X_2 - X_2X_1 = (X_1\xi_2 - X_2\xi_1)\partial_x + (X_1\eta_2 - X_2\eta_1)\partial_y \\ &= (x\partial_x(0) - y\partial_y(x))\partial_x + (x\partial_x(y) - y\partial_y(0))\partial_y = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Ters simetri özelliğinden ve her i için $[X_i, X_i] = 0$ olduğundan burada diğer durumlara bakmaya gerek yoktur. Buna göre

$$\{0\} = L^{(0)} \subset \{X_1\} = L^{(1)} \subset \{X_1, X_2\} = L^{(2)}$$

şeklinde bir zincir oluşturabiliriz. Böylece çözülebilir zincirdeki her bir alt cebir için temel diferansiyel invariantlar

$$L^{(1)} = \{X_1\} \quad \text{ için } \quad r_1 = y \quad , \quad v_1 = xy'$$

$$L^{(2)} = \{X_1, X_2\} \quad \text{ için } \quad r_2 = \frac{xy'}{y} \quad , \quad v_2 = \frac{x^2 y''}{y}$$

olarak elde edilir. Yine önceki örnekte ele alınan $L^{(2)} = \{X_1, X_2\}$ vasıtasıyla

$$v_2 = r_2^2 - \frac{1}{r_2}$$

biçimindeki indirgenmiş denklemde s_2 yi bulmak için $X_2 = y\partial_y$ üretici r_1 ve v_1 cinsinden yeniden yazılırsa

$$X_2 r_1 = y\partial_y y = y = r_1 \quad , \quad X_2^{(1)} v_1 = (y\partial_y + y'\partial_{y'}) xy' = xy' = v_1$$

olduğundan (25) denkleminde

$$X_2 = r_1 \partial_{r_1} + v_1 \partial_{v_1}$$

bulunur. Daha sonra kanonik koordinatlar için yapılan işlemlerin burada tekrar edilmesi ile

$$r_2 = \frac{v_1}{r_1} \quad \text{ ve } \quad s_2 = \ln r_1$$

Sonucuna ulaşılır ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{ds_2}{dr_2} &= \frac{D_x s_2}{D_x r_2} = \frac{D_x (\ln y)}{D_x \left(\frac{xy'}{y} \right)} = \frac{\frac{y'}{y}}{\frac{y'}{y} + x \left(\frac{y''}{y} - \frac{y'^2}{y^2} \right)} = \frac{\frac{y'}{y}}{\frac{y'}{y} + x \left(\frac{y'^2}{y^2} - \frac{y}{x^3 y'} - \frac{y'^2}{y^2} \right)} \\ &= \frac{\frac{y'}{y}}{\frac{y'}{y} - \frac{y}{x^2 y'}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{y}{xy'} \right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{r_2^2}} = 1 + \frac{1}{r_2^2 - 1} \end{aligned}$$

yazılır. Bu denklemin integrali alınır,

$$s_2 = r_2 + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{r_2 - 1}{r_2 + 1} \right| + c_1$$

elde edilir. Burada r_2 ve s_2 nin, r_1 ve v_1 cinsinden değerleri yazılırsa,

$$\ln |r_1| = \frac{v_1}{r_1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{v_1 - r_1}{v_1 + r_1} \right| + c_1$$

bulunur.

Genel olarak burada arzu edilen $v_1 = f(r_1)$ şeklinde cebirsel bir denklemin elde edilmesidir. Böylece adım adım yapılan işlemler ile herhangi bir sıkıntı yaşanmadan integral almak suretiyle genel çözüme ulaşılır. Ancak $\dot{s}_1 = \frac{ds_1}{dr_1}$ nin r_1 ve v_1 cinsinden yazılabilmesi koşulu oldukça önemli olup (ki çoğunlukla bu mümkündür.) çözüm esnasında $r_1 = g(v_1)$ gibi cebirsel denklemle de karşılaşılacak olunursa

$$r_1 = g(v_1) \text{ ve } s_1 = h(v_1) = \int \dot{s}_1(r_1, v_1) \Big|_{r_1=g(v_1)} \frac{dg}{dv_1} dv_1 + c_2$$

denklemlerinden v_1 elimine edildikten sonra orijinal değişkenlerin yazılmasıyla genel çözüm elde edilmiş olur. Eğer v_1 in elimine işlemi gerçekleştirilemiyorsa, bu takdirde her iki denklem orijinal değişkenler cinsinden yazılarak parametrik formda genel çözüme doğrudan ulaşılır.

Yukarıda ele alınan örnekte her iki $v_1 = f(r_1)$ veya $r_1 = g(v_1)$ olması durumları zor görüldüğünden, burada $X_1 = x\partial_x$, $X_2 = y\partial_y$ seçimi $X_1 = y\partial_y$, $X_2 = x\partial_x$ biçiminde ele alınırsa genel çözüme ulaşmada kolaylık sağlanmış olur. Buna göre temel diferansiyel invariantlar

$$L^{(1)} = \{X_1\} \quad \text{için} \quad r_1 = x, \quad v_1 = \frac{y'}{y}$$

$$L^{(2)} = \{X_1, X_2\} \quad \text{için} \quad r_2 = \frac{xy'}{y}, \quad v_2 = \frac{x^2 y''}{y}$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece cebirsel denklem

$$v_2 = r_2^2 - \frac{1}{r_2}$$

olarak yazılır. Buradan

$$X_2 r_1 = x\partial_x x = x = r_1, \quad X_2^{(1)} v_1 = (x\partial_x - y'\partial_{y'}) \frac{y'}{y} = -\frac{y'}{y} = -v_1$$

olup, böylece

$$X_2 = r_1 \partial_{r_1} - v_1 \partial_{v_1}$$

eşitliğinden

$$r_2 = v_1 r_1 \text{ ve } s_2 = \ln r_1$$

elde edilir. Diğer yandan

$$\frac{ds_2}{dr_2} = \frac{D_x s_2}{D_x r_2} = \frac{D_x (\ln x)}{D_x \left(\frac{xy'}{y} \right)} = \frac{1}{\frac{xy'}{y} - \frac{y}{xy'}} = \frac{r_2}{r_2^2 - 1}$$

ifadesinin integrali alınarak

$$s_2 = \ln \left| c_1 \sqrt{r_2^2 - 1} \right|$$

ve

$$\ln |r_1| = \ln \left| c_1 \sqrt{(r_1 v_1)^2 - 1} \right| \Rightarrow v_1 = \frac{1}{c_1} \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{r_1} \right)^2}$$

bulunur. Benzer şekilde $X_1 = y \partial_y$ ifadesinde $s_1 = \ln y$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\frac{ds_1}{dr_1} = v_1 = \frac{1}{c_1} \sqrt{1 + \left(\frac{c_1}{r_1} \right)^2}$$

denklemini ve bu diferansiyel denklemin de integrali alınırsa

$$s_1 = \frac{r_1 \sqrt{\frac{c_1^2}{r_1^2} + 1} \left(\sqrt{c_1^2 + r_1^2} - c_1 \ln \left(c_1 \sqrt{c_1^2 + r_1^2} + c_1^2 \right) + c_1 \ln r_1 \right)}{\sqrt{c_1^2 + r_1^2}} + c_2$$

elde edilir. Buradan da orijinal değişkenlere dönülürse

$$\ln y = \frac{x \sqrt{\frac{c_1^2}{x^2} + 1} \left(\sqrt{c_1^2 + x^2} - c_1 \ln \left(c_1 \sqrt{c_1^2 + x^2} + c_1^2 \right) + c_1 \ln x \right)}{\sqrt{c_1^2 + x^2}} + c_2$$

biçimindeki genel çözüme ulaşılmış olur.

3. BÖLÜM

İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ VE KİSMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER YARDIMIYLA BİRİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SİMETRİLERİNİN ARAŞTIRILMASI

Bu bölümde birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin tanjant vektörlerini tespit etmede yararlanılan lineerleştirilmiş simetri koşulunda, yüksek mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklemlerinki ile karşılaştırıldığında ortaya çıkan yetersizliği aşmak amacıyla ikinci mertebeden (bu n . mertebeye genelleştirilebilir.) diferansiyel denklemlerden ve birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerden faydalanılmaya çalışılacaktır.

3.1 İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler Yardımıyla Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Simetrilerinin Araştırılması

Birinci mertebeden

$$y' = \omega(x, y) \quad (28)$$

adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin

$$\Gamma_\varepsilon : (x, y) \rightarrow (\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \varepsilon), \hat{y}(x, y; \varepsilon)) \quad (29)$$

şeklindeki simetrilerinin bir Lie grubuna sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda simetri şartından, (28) eşitliği sağlanmak üzere $(\hat{x}, \hat{y})$ koordinatları cinsinden bu denklemin

$$\frac{d\hat{y}}{d\hat{x}} = \omega(\hat{x}, \hat{y}) \quad (30)$$

biçiminde olması gerektiği bilinmektedir. Şimdi (28) denkleminin her iki yanının x e göre türevi alınırsa

$$f(x, y, y') = \omega_x + y' \omega_y$$

olmak üzere

$$y'' = f(x, y, y') \quad (31)$$

formunda ikinci mertebeden diferansiyel denklemini elde edilir. Şimdi (29) ile verilen dönüşümlerin aynı zamanda (31) denkleminin de simetrileri olduğu gösterilebilir. Bunun için, (31) sağlanmak üzere

$$\hat{y}'' = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')$$

biçiminde yazılabileceği gösterilmelidir. Bunun için (30) denklemini ve türev için zincir kuralı kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\hat{y}'' &= \frac{d^2 \hat{y}}{d \hat{x}^2} = \frac{d}{d \hat{x}} \frac{d \hat{y}}{d \hat{x}} = \frac{d}{d \hat{x}} \left(\omega(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) \right) = \frac{d}{d x} \left(\omega(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) \right) \frac{d x}{d \hat{x}} \\
&= \frac{\frac{d}{d x} \left(\omega(\hat{x}(x, y), \hat{y}(x, y)) \right)}{\frac{d \hat{x}}{d x}} = \frac{\omega_{\hat{x}} (\hat{x}_x + y' \hat{x}_y) + \omega_{\hat{y}} (\hat{y}_x + y' \hat{y}_y)}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} = \omega_{\hat{x}} + \omega_{\hat{y}} \frac{\hat{y}_x + y' \hat{y}_y}{\hat{x}_x + y' \hat{x}_y} \\
&= \omega_{\hat{x}} + \omega_{\hat{y}} \frac{D_x \hat{y}}{D_x \hat{x}} = \omega_{\hat{x}} + \hat{y}' \omega_{\hat{y}} = f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{y}')
\end{aligned}$$

yazılır. Dolayısıyla (28) denkleminin her simetrisi aynı zamanda kendisinin türevlenmesiyle elde edilen (30) diferansiyel denkleminin de bir simetrisidir. Bundan dolayı birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin simetrisi, kendilerinin türevlenmesiyle elde edilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemler yardımıyla araştırılabilir.

Örnek 7. Birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dx} = y^2 e^{-x} + y + e^x$$

Riccati diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin her iki yanının x e göre türevi alınırsa,

$$y'' = 2yy'e^{-x} - y^2 e^{-x} + y' + e^x$$

elde edilir. İkinci bölümde gösterildiği gibi bu diferansiyel denklemin simetrisi araştırılırsa

$$X = \partial_x + y \partial_y$$

tarafından üretilen

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (x + \varepsilon, y e^\varepsilon)$$

biçimindeki Lie simetri ailesi bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{d \hat{y}}{d \hat{x}} &= \frac{d \hat{y}}{d x} \frac{d x}{d \hat{x}} = \frac{\frac{d \hat{y}}{d x}}{\frac{d \hat{x}}{d x}} = \frac{y' e^\varepsilon}{1} = e^\varepsilon y^2 e^{-x} + e^\varepsilon y + e^\varepsilon e^x = e^\varepsilon e^{-\varepsilon} e^\varepsilon y^2 e^{-x} + e^\varepsilon y + e^\varepsilon e^x \\
&= (e^\varepsilon y)^2 e^{-(x+\varepsilon)} + e^\varepsilon y + e^{x+\varepsilon} = \hat{y}^2 e^{-\hat{x}} + \hat{y} + e^{\hat{x}}
\end{aligned}$$

olmasından dolayı aynı zamanda Riccati denklemini de bu simetrisi aynen kabul eder. Şimdi bu simetrisi kullanarak diferansiyel denklemin çözümü bulunmaya çalışılır. Bulunan bu üreteçten

$(\xi, \eta) = (1, y)$ yazılır. Bunlar yardımıyla kanonik koordinatlar,

$$(r, s) = (\ln y - x, x)$$

olarak bulunur. Buradan

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{1}{\frac{y'}{y} - 1} = \frac{1}{y e^x + \frac{e^x}{y}} = \frac{1}{e^{r+s-s} + e^{-r-s+s}} = \frac{e^r}{e^{2r} + 1}$$

olup bu diferansiyel denklemin her iki yanının integrallenmesi ile

$$s = \arctan(e^r) + c$$

elde edilir. Sonuçta orijinal değişkenlerin yerine yazılması ve yeniden düzenlenmesi ile

$$y = e^x \tan(x - c)$$

şeklindeki genel çözüme ulaşılır.

Bir kez daha türev alınmasıyla oluşturulan ikinci mertebeden diferansiyel denklemin tüm Lie simetrilerinin bulunabildiğini varsayalım. Bu durumda çok sayıda simetri grubunun olması, bulunan her simetrinin orijinal birinci mertebeden adi diferansiyel denklemde denenmesini zahmetli kılar. Bu zahmetten kurtulmak amacıyla oluşturulan ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde, özellikle de üreteçlerin kullanım sırasına dikkat edildiğinde oluşturulan çözülebilir zincirin son halkasının kullanılmasının mantıklı olabileceği düşünülebilir. Çünkü orijinal değişkenler yerine yazıldığında indirgenmiş olan diferansiyel denklem (bir sabit içeren birinci mertebeden bir diferansiyel denklem) ile orijinal diferansiyel denklem (sabit içermeyen birinci mertebeden bir denklem), oluşturulmuş ikinci mertebeden diferansiyel denklemin birer ilk integralleridirler. Bu nedenle aralarında sabit seçimiyle ortaya çıkan doğrudan bir bağlantı olması, yani uygun sabit seçimiyle orijinal diferansiyel denkleme ulaşılması olasıdır. Aşağıdaki örnek böyle bir durumu gösterir.

Örnek 8. Birinci mertebeden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2}{x}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin türevinin alınmasıyla ikinci mertebeden

$$y'' = -y' \frac{1 + 2y}{x}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Oluşturulan bu denklemin simetrileri ikinci bölümde gösterildiği tarzda bir yaklaşımla araştırılırsa, bu takdirde

$$X_1 = x\partial_x, \quad X_2 = x \ln x \partial_x + y\partial_y$$

biçiminde infinitesimal üreteçler bulunur. Bunların çözülebilir bir alt cebir oluşturup oluşturmadığına bakılırsa,

$$\begin{aligned} [X_1, X_2] &= (X_1 \xi_2 - X_2 \xi_1) \partial_x + (X_1 \eta_2 - X_2 \eta_1) \partial_y \\ &= (X_1(x \ln x) - X_2(x)) \partial_x + (X_1(y) - X_2(0)) \partial_y = x \partial_x = X_1 \end{aligned}$$

olduğundan, buradan

$$\{0\} = L^{(0)} \subset L^{(1)} = \{X_1\} \subset L^{(2)} = \{X_1, X_2\}$$

çözülebilir bir zincir bulunur. Buradan beklenen X_1 in orijinal birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin bir simetri üretici olmasıdır. Gerçekten de kontrol edildiğinde bunun doğru olduğu görülür. Ancak bu örnek durumun her zaman böyle olacağı anlamına gelmez. Çünkü 2.mertebeden diferansiyel denklemlerde genel çözüme ulaşmamızı sağlayan birbirinden fonksiyonel bağımsız iki

$\phi^1(x, y, y') = c_1$ ve $\phi^2(x, y, y') = c_2$ ilk integralinin mevcut olması durumu vardır. Dolayısıyla bunun yerine daha kullanışlı bir yol aramalıyız.

Yukarıda oluşturulan ikinci mertebeden diferansiyel denklemde birinci türevin karşılığı orijinal birinci mertebeden denklemden faydalanılarak yerine yazılırsa, bu takdirde lineerleştirilmiş simetri şartı altında bir kısaltmaya gidilmiş olunur. Bu durum, normalde bulunabilecek olan simetrilerin sayısında azalmaya neden olabilmesine rağmen, birinci mertebeden diferansiyel denklemin simetrilerini bulmada oldukça kolaylık sağlayabilir. Çünkü oluşturulan diferansiyel denklemin, orijinal birinci mertebeden diferansiyel denklemi temsil edilebilme kabiliyeti de o nispette artmış olur.

Örnek 9. Bir önceki örnekte oluşturulan ikinci mertebeden diferansiyel denklemde orijinal birinci mertebeden denklemden faydalanılarak y' nün karşılığı yerine yazılırsa,

$$y'' = -\frac{(1-y^2)(1+2y)}{x^2}$$

elde ederiz. Bu diferansiyel denklemin simetrilerinin üreteçleri araştırıldığında

$$X = x\partial_x$$

bulunur ve bunun aşikar olarak orijinal birinci mertebeden adi diferansiyel denklem tarafından kabul edildiği de bilinmektedir.

Örnek 10. Birinci mertebeden

$$y' = \frac{3y}{x} + \frac{x^5}{2y + x^3}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin her iki yanının türevinin alınmasıyla

$$y'' = -\frac{3y}{x^2} + \frac{5x^4}{x^3 + 2y} + \frac{3y'}{x} - \frac{x^5(3x^2 + 2y')}{(x^3 + 2y)^2}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemde y' nün karşılığı yerine yazılırsa, bu takdirde

$$y'' = -\frac{3y}{x^2} + \frac{5x^4}{x^3 + 2y} + \frac{3\left(\frac{3y}{x} + \frac{x^5}{2y + x^3}\right)}{x} - \frac{x^5\left(3x^2 + 2\left(\frac{3y}{x} + \frac{x^5}{2y + x^3}\right)\right)}{(x^3 + 2y)^2}$$

elde edilir. Buradan da lineerleştirilmiş simetri şartından bu diferansiyel denklemin simetrilerinin üretici

$$X = x\partial_x + 3y\partial_y$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bu üreteç tıpkı önceki örnekte olduğu gibi orijinal birinci mertebeden adi diferansiyel denklemin simetrilerini üretir.

Örnek 11. Aşağıda verilen birinci tip abel denklemi formundaki diferansiyel denklemini göz önüne alalım.

$$y' = a \frac{y^3}{x^3} + b \frac{y^2}{x^2} + c \frac{y}{x} + d$$

Aslında bu diferansiyel denklem $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ formunda olduğu için simetrilerini görmek kolaydır.

Ancak burada bunu görülemediği varsayılarak doğrudan simetrileri araştırılırsa kullanılan programa bağlı olarak sıkıntılarla karşılaşılabilir hatta diferansiyel denklemin simetrilerine bu nedenle ulaşamayabilir. Halbuki bu denklemin her iki yanının türevinin alınması ve y' karşılığının yazılması ile elde edilen

$$y'' = \frac{1}{x^3} \left\{ \left[a \frac{y^3}{x^3} + b \frac{y^2}{x^2} + c \frac{y}{x} + d \right] [3ay^2 + 2bxy + (c-3)x^2] + [by^2 + 2cxy + 3dx^2] \right\}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklem için simetriler araştırılırsa, birinci mertebeden diferansiyel denklemin de simetrileri olan $(\hat{x}, \hat{y}) = (e^\epsilon x, e^\epsilon y)$ dönüşümlerini üreten $X = x\partial_x + y\partial_y$ infinitesimal üreticine ulaşılır.

Örnek 12. Aşağıdaki birinci mertebeden

$$y' = e^{\mu x} (y - be^{\lambda x})^2 + b\lambda e^{\lambda x}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Bu diferansiyel denklemin simetrilerinin doğrudan araştırılmasında yukarıdaki örnekte olduğu gibi bir sonuca ulaşamayabilir. Aynı şekilde diferansiyel denklemin her iki yanının türevinin alınması ve y' karşılığının yazılması ile

$$y'' = e^{\mu x} (y - be^{\lambda x})^2 [\mu + 2e^{\mu x} (y - be^{\lambda x})] + b\lambda^2 e^{\lambda x}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin simetrileri araştırıldığında

$$X = \partial_x + [(\lambda + \mu)be^{\lambda x} - \mu y]\partial_y$$

infinitesimal üreticine ulaşılır. Bu ise aynı zamanda ele aldığımız birinci mertebeden diferansiyel denklemlerin simetrilerini üretir.

9. örnekten itibaren türetilmiş ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için bulunan simetrilerin aynı zamanda ele alınan birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin de simetrileri olmaları yani doğrudan aranan simetrilere ulaşılması tesadüf değildir. Çünkü $y' = \omega(x, y)$ diferansiyel denkleminin türevinin alınması ve birinci mertebe türevin olduğu terimlerde $\omega(x, y)$ karşılığının yazılması ile ikinci mertebeden $y'' = f(x, y) = \omega_x + \omega\omega_y$ diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu diferansiyel denklemin simetrileri için belirleme denklemleri araştırılırsa;

$$\xi_{yy} = 0$$

$$\eta_{yy} - 2\xi_{xy} = 0$$

$$2\eta_{xy} - \xi_{xx} - 3\xi_y f = 0$$

$$\eta_{xx} + \eta_y f - 2\xi_x f - \xi f_x - \eta f_y = 0$$

olarak bulunur. Yukarıdaki denklemlerde $f(x, y) = \omega_x + \omega\omega_y$ karşılığı yazılırsa görülür ki bu denklemler doğrudan birinci mertebe diferansiyel denklemi ile bağlantılır.

İkinci mertebeden bir diferansiyel denklemin simetrilerinin bir tek Lie grubunun bulunabildiği varsayalım. Bu takdirde bu diferansiyel denklemin çözümünde izlenen adımlar 2. bölümde verildiği üzere;

i) İnfinitesimal üreteçler yardımıyla oluşturulan kanonik koordinatlarda zincir kuralı kullanılarak

ikinci mertebeden $\frac{d^2s}{dr^2} = \Omega(r, \dot{s})$ diferansiyel denklemi oluşturulur.

ii) $\dot{s} = v$ şeklinde bir değişken atanarak birinci mertebeden $\frac{dv}{dr} = \Omega(r, v)$ diferansiyel

denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklem çözülebilirse, bu takdirde $v = f(r, c_1)$ cebirsel denklemine ulaşılır.

iii) Bu cebirsel denkleme karşılık gelen $\dot{s} = f(r, c_1)$ diferansiyel denkleminin her iki yanının

integrali alınır. Son olarak orijinal değişkenlere dönülerek $s(x, y) = \int_{r=r(x,y)} f(r, c_1) dr + c_2$

genel çözümüne ulaşılır

şeklinde. Buna bir alternatif olarak yukarıda verilen fikrin tam tersi de uygulanabilir. Bunun için simetrilerinin bir Lie grubu ile verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin, aynı simetrilerin Lie grubuna sahip bir birinci mertebeden diferansiyel denklemin her iki yanının türevinin alınması ile oluştuğu varsayılır ve aşağıdaki adımlar takip edilir.

i) Bu diferansiyel denklem kanonik koordinatlar vasıtasıyla belirlenir.

ii) Belirlenen bu diferansiyel denklemin simetrileri bilindiğinden bir integral alma ile genel çözüme ulaşılır.

Örnek 13. Aşağıda

$$X = \partial_x$$

biçiminde simetrilerinin infinitesimal üretici ile verilen ikinci mertebeden

$$y'' = y'^2 + y$$

adi diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Burada yukarıda bahsedilen yol kullanılacaktır. Buna göre verilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemin, $X = \partial_x$ simetri üreticine sahip bir birinci mertebeden diferansiyel denklemin her iki yanının türevinin alınmasıyla oluştuğu varsayalım. Bu durumda kanonik koordinatlar $(r, s) = (y, x)$ olup, bu koordinatlarda birinci mertebeden adi diferansiyel denklem

$$\frac{ds}{dr} = \frac{D_x s}{D_x r} = \frac{1}{y'} = \Omega(r)$$

biçiminde olmalıdır. Burada y' ü çekilirse, $F(r) = \frac{1}{\Omega(r)} \in C^1$ olmak üzere

$$y' = F(y)$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem, verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemi sağlayacağından

$$y'' = y'F'(y) = y'^2 + y \Rightarrow F(r)F'(r) = F^2(r) + r$$

olup, buradan

$$F(r) = \pm \sqrt{c_1 e^{2r} - r - \frac{1}{2}}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{ds}{dr} = \Omega(r) = \frac{1}{F(r)} = \pm \left(c_1 e^{2r} - r - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur. Bu denklemin her iki yanının integralinin alınması ve orjinal değişkenlerin yerine yazılması ile

$$x = \pm \int_{r=y}^r \left(c_1 e^{2r} - r - \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} dr + c_2$$

genel çözümüne ulaşılır.

3.2. Birinci Mertebeden Lineer Kısmi Diferansiyel Denklemler Yardımıyla Birinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Simetrilerinin Araştırılması

Burada öncelikle gerekli olan tanımlar verilir ve daha sonra bu tanımlar kullanılarak kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla adi diferansiyel denklemlerin çözümü bulunmaya çalışılır.

Daha önce uygun $\mathcal{E}$ seçimleri yapılarak

$$(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{x}(x, y; \mathcal{E}), \hat{y}(x, y; \mathcal{E}))$$

biçiminde noktalar kümesinin bir yörünge oluşturduğuna ve bu yörünge üzerindeki herhangi bir noktada tanjant vektörlerin

$$\frac{d\hat{x}}{d\mathcal{E}} = \xi(\hat{x}, \hat{y}) \quad \text{ve} \quad \frac{d\hat{y}}{d\mathcal{E}} = \eta(\hat{x}, \hat{y})$$

olduğuna ve özel olarak (x, y) noktası için bu vektörlerin ise

$$(\xi(x, y), \eta(x, y)) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right)$$

şeklinde yazılabileceğine değinilmişti.

Eğer bir yörünge (x, y) noktasında herhangi bir C eğrisini enine kesiyorsa bu takdirde, (x, y) noktasını C üzerinde olmayan noktalara dönüştüren Lie simetrileri mevcuttur. Buna göre bir eğrinin invaryant olması için gerek ve yeter şart yörünge ile kesişmemesidir. Diğer bir deyişle C nin bir invaryant eğri olması için gerek ve yeter şart her bir (x, y) noktasında C nin teğetinin, $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ tanjant vektörlerine paralel olmasıdır. Eğer C , $y = y(x)$ şeklinde bir eğri ile gösterilirse, bu durumda (x, y) noktasında C nin teğeti $(1, y'(x))$ doğrultusundadır. Eğer bu, $(\xi(x, y), \eta(x, y))$ ile paralel ise ancak ve ancak $Q(x, y, y') = \eta - y'\xi$ iken C eğrisi üzerinde

$$Q(x, y, y') = 0$$

olmalıdır. Buradan $y' = \frac{\eta}{\xi}$ diferansiyel denklemi çözülerek invaryant çözümlere ulaşılır.

Benzer şekilde düzlemdeki bu kavramı üç-boyutlu uzaya taşınırsa; yörünge,

$$(x, y, u) = (\hat{x}(x, y, u; 0), \hat{y}(x, y, u; 0), \hat{u}(x, y, u; 0))$$

olmak üzere

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}) = (\hat{x}(x, y, u; \varepsilon), \hat{y}(x, y, u; \varepsilon), \hat{u}(x, y, u; \varepsilon))$$

biçiminde olup bu yüzey üzerinde tanjant vektörler ise

$$(\xi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}), \tau(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u}), \eta(\hat{x}, \hat{y}, \hat{u})) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right)$$

şeklindedir. Düzlemdekine benzer şekilde özel olarak (x, y, u) noktasında bu,

$$(\xi(x, y, u), \tau(x, y, u), \eta(x, y, u)) = \left(\left. \frac{d\hat{x}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{y}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \left. \frac{d\hat{u}}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \right)$$

biçimindedir. Eğer bir yörünge bir (x, y, u) noktasında herhangi bir C yüzeyini enine kesiyorsa bu takdirde (x, y, u) noktasını C üzerinde olmayan noktalara dönüştüren Lie simetrileri mevcuttur. Buna göre bir yüzeyin invaryant olması için gerek ve yeter şart yörünge ile kesişmemesidir. Diğer bir deyişle C nin bir invaryant yüzey olması için gerek ve yeter şart her bir (x, y, u) noktasında C nin normalinin, $(\xi(x, y, u), \tau(x, y, u), \eta(x, y, u))$ tanjant vektörlerine dik olmasıdır. Eğer C ,

$u = u(x, y)$ biçiminde bir yüzey ise, bu durumda (x, y, u) noktasında C nin normali $(u_x, u_y, -1)$ dir. Eğer bu, $(\xi(x, y, u), \tau(x, y, u), \eta(x, y, u))$ ye dik ise bu iki vektörün iç çarpımları sıfırdır. Yani

$$\eta - \xi u_x - \tau u_y = 0 \quad (32)$$

dir. Bu koşula *invariant yüzey şartı* denir. Bu denklem çözülerek invariant çözümlere ulaşılabilmektedir.

Şimdi

$$y' = \omega(x, y)$$

formundaki birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş

$$\eta_x + (\eta_y - \xi_x)\omega - \xi_y \omega^2 = \xi \omega_x + \eta \omega_y$$

simetri şartını göz önüne alalım. Eğer bu şart $\bar{Q}(x, y) = \eta - \omega\xi$ (burada $Q(x, y, y')$ karakteristiğinde y' nün karşılığı yazılmıştır) biçiminde olan indirgenmiş karakteristik cinsinden ifade edilirse,

$$Q_x + \omega Q_y = \omega Q \quad (33)$$

kısmi diferansiyel denklem elde edilir. Eğer bu kısmi diferansiyel denklemin bir $Q = Q(x, y)$ çözümü bulunabiliyorsa, bu durumda birinci mertebeden $y' = \omega(x, y)$ adi diferansiyel denklemi için tanjant vektörleri, ξ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$(\xi, Q + \omega\xi) \quad (34)$$

şeklinde dir. (33) denklemini için karakteristik metot kullanılırsa;

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{\omega} = \frac{dQ}{Q\omega_y}$$

yazılır. Buradan kısmi diferansiyel denklemin çözümünü elde etmek için genel olarak daha önceden (28) ile verilen adi diferansiyel denklemin çözümünün bilinmesi gerekmektedir. Dolayısıyla burada, bunun dışında çözümlere ulaşmayı amaçlayan farklı bir yorum ortaya konulur. Bu yorum (33) denkleminin simetrilerinin kullanılması ile yeterli olacak bir özel çözüm aranmasını içerir. Burada gerekli olan çözüm bulunduğundan sonra bu çözüm (34) denkleminde yerine yazılarak (28) denkleminin simetrilerine ulaşılır. Sonrasında ise birinci bölümde gösterildiği gibi diferansiyel denklem bir tek integral almaya indirgenir ve bu integralin alınması ile de genel çözüm elde edilir.

Uzanımlı infinitesimal üreteç

$$X^{(1)} = \xi \partial_x + \tau \partial_y + \eta \partial_Q + \eta^x \partial_{Q_x} + \eta^y \partial_{Q_y} \quad (35)$$

ve birinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklem

$$\Delta(x, y, Q, Q_x, Q_y) = Q_x - \omega(x, y, Q, Q_y) = 0 \quad (36)$$

olmak üzere, birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için lineerleştirilmiş simetri şartı

$$X^{(1)} \Delta(x, y, Q, Q_x, Q_y) = 0 \quad (37)$$

şeklindedir. Bu denklemde ξ, τ, η dışında η^x ve η^y lar da yer almaktadır. Böylece bu değişkenler

$$\begin{aligned}\eta^x &= \eta_x + (\eta_Q - \xi_x)Q_x - \tau_x Q_y - \xi_Q Q_x^2 - \tau_Q Q_x Q_y \\ \eta^y &= \eta_y + (\eta_Q - \tau_y)Q_y - \xi_y Q_x - \tau_Q Q_y^2 - \xi_Q Q_x Q_y\end{aligned}\quad (38)$$

biçiminde olup, (33) denklemi için lineerleştirilmiş simetri şartından

$$\xi\omega_x Q_y - \xi\omega_{xy} Q + \tau\omega_y Q_y - \tau\omega_{yy} Q - \eta\omega_y + \eta^x + \omega\eta^y = 0$$

yazılır. Burada (38) eşitlikleri göz önünde bulundurulursa;

$$\begin{aligned}\xi\omega_x Q_y - \xi\omega_{xy} Q + \tau\omega_y Q_y - \tau\omega_{yy} Q - \eta\omega_y + \eta_x + (\eta_Q - \xi_x)Q_x - \tau_x Q_y - \xi_Q Q_x^2 \\ - \tau_Q Q_x Q_y + \omega\eta_y + \omega(\eta_Q - \tau_y)Q_y - \omega\xi_y Q_x - \omega\tau_Q Q_y^2 - \omega\xi_Q Q_x Q_y = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer yandan (33) denkleminde Q_x elimine edilirse,

$$\begin{aligned}\xi Q_y \omega_x - Q\xi\omega_{xy} - \eta\omega_y + \tau Q_y \omega_y - Q\tau\omega_{yy} + Q\eta_Q \omega_y + \eta_x + \\ + \omega\eta_y + Q\omega Q_y \omega_y \xi_Q - Q^2 \omega_y^2 \xi_Q + \omega Q_y \xi_x - Q\omega_y \xi_x + \omega^2 Q_y \xi_y \\ - Q\omega\omega_y \xi_y - QQ_y \omega_y \tau_Q - Q_y \tau_x - \omega Q_y \tau_y = 0\end{aligned}\quad (39)$$

ve Q_y nin kuvvetlerine göre ayrıştırılırsa,

$$\begin{aligned}\xi\omega_x + \tau\omega_y + Q\omega\omega_y \xi_Q + \omega\xi_x + \omega^2 \xi_y - Q\omega_y \tau_Q - \tau_x - \omega\tau_y = 0 \\ -Q\xi\omega_{xy} - \eta\omega_y - Q\tau\omega_{yy} + Q\eta_Q \omega_y \\ + \eta_x + \omega\eta_y - Q^2 \omega_y^2 \xi_Q - Q\omega_y \xi_x - Q\omega\omega_y \xi_y = 0\end{aligned}\quad (40)$$

biçiminde belirleme denklemleri bulunur. Ancak bu iki denklemi genel olarak

$$(\xi(x, y, u), \tau(x, y, u), \eta(x, y, u))$$

ile ifade edilen üçlü için çözmek zordur. Dolayısıyla bunun yerine genel belirleme denklemlerine bağlı olarak belli formda simetriler aranır. Örneğin a, b ve c sabitler olmak üzere bunun

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{Q}) = (xe^{a\varepsilon}, ye^{b\varepsilon}, Qe^{c\varepsilon})$$

şeklinde ölçekleme simetrilerine sahip olup olmadığına bakılır. Bu kısmi diferansiyel denklem üzerinde doğrudan kontrol edilebilir. Böylece

$$\begin{aligned}Q_x &= \frac{\partial}{\partial x} e^{-c\varepsilon} \hat{Q} = \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \hat{x}} e^{-c\varepsilon} \hat{Q} = e^{(a-c)\varepsilon} \hat{Q}_{\hat{x}} \\ Q_y &= \frac{\partial}{\partial y} e^{-c\varepsilon} \hat{Q} = \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} e^{-c\varepsilon} \hat{Q} = e^{(b-c)\varepsilon} \hat{Q}_{\hat{y}} \\ \omega_y(x, y) &= \frac{\partial \hat{y}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \hat{y}} \omega(\hat{x}e^{-a\varepsilon}, \hat{y}e^{-b\varepsilon}) = \omega_{\hat{y}e^{-b\varepsilon}}(\hat{x}e^{-a\varepsilon}, \hat{y}e^{-b\varepsilon})\end{aligned}$$

olup

$$e^{(a-b)\varepsilon} \hat{Q}_x + \omega(e^{-a\varepsilon} \hat{x}, e^{-b\varepsilon} \hat{y}) \hat{Q}_y = \omega_{ye^{-b\varepsilon}}(\hat{x}e^{-a\varepsilon}, \hat{y}e^{-b\varepsilon}) \hat{Q}e^{-b\varepsilon}$$

elde edilir. Bunun (33) denkleminin bir simetrisi olması için gereken koşul ise $a = b = 0$ olmasıdır. Böylece c keyfi bir sabit olmak üzere

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{Q}) = (x, y, Qe^{c\varepsilon})$$

ifadesi (33) diferansiyel denklemi için bir simetridir. Ancak bu simetrilere karşılık gelen $(\xi, \tau, \eta) = (0, 0, cQ)$ için (32) invaryant yüzey şartı yazılırsa, bu takdirde $Q = 0$ aşıkâr çözümüne ulaşılır. Bu ise (34) ifadesinde yerine yazılarak aşıkâr simetriler bulunur. Çünkü

$$Q = \eta - y' \xi = \omega \xi - y' \xi = -\xi(y' - \omega) = 0$$

olur. Dolayısıyla bu simetrilerin hiçbir işe yaramadığı görülür. Bu nedenle farklı tarzda simetriler araştırılmalıdır. Yukarıdaki incelemede de görüldüğü üzere ω nin keyfi ve sadece x ile y ye bağlı olduğu göz önüne alınırsa, araştırılacak olan simetrilerin

$$(\hat{x}, \hat{y}, \hat{Q}) = (x, y, \hat{Q}(x, y, Q))$$

biçiminde olması gerektiği açıktır. Eğer bu, (40) belirleme denklemlerinde yerine yazılırsa,

$$\eta_x + \omega \eta_y + Q \omega_y \eta_Q - \omega_y \eta = 0 \quad (41)$$

elde edilir. Yukarıda da görüldüğü üzere $\eta = \lambda Q$ (λ sabit) bu diferansiyel denklemin özel bir çözümüdür. Eğer bu kısmi diferansiyel denklemin en basit haliyle $\eta = Q - f(x, y)$ (f sıfırdan farklı keyfi bir fonksiyon) formunda bir çözümü bulunabilirse, bu takdirde tüm birinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler için ayrıca simetriler araştırılmaksızın

$$r = x, \quad s = \int \frac{dy}{f(r, y)} \Big|_{r=x}$$

dönüşümü ile ortaya çıkan integral alınırsa, bu takdirde genel çözüme ulaşılır. Aslında $f = f(x)$ ve $f = f(y)$ için $\eta = Q - f$ ler mevcut olup ancak bunlar sırasıyla lineer ve değişkenlerine ayrılabilir formda birinci mertebeden diferansiyel denklemleri işaret eder. Dolayısı ile bunlar metot dışında kolaylıkla çözülebilen diferansiyel denklemlerdir. Burada ayrıca $f = f(x, y)$ için $f_x + \omega f_y = \omega_y f$ diferansiyel denklemini elde edilir. Bu ise aslında çözmeye çalışılan (33) ile ifade edilen denklemdir. Dolayısıyla buradan varılan sonuç, genel formdaki (28) denklemi yerine özel olarak ele alınan diferansiyel denklem için (33) denkleminin belli formdaki simetrilerinin araştırılması daha uygun olur.

Bunun dışında (33) ile ifade edilen birinci mertebeden adi diferansiyel denklem için çözüm önerisinde bulunularak ω nın yapısı belirlenebilir. Aşağıda böyle bir çözüm önerilir

λ sabit olmak üzere $Q = \varphi(x)e^{\lambda y}$ ün (33) denklemini için bir çözüm olduğunu varsayalım. Bu durumda (33) kısmi diferansiyel denklemi

$$\varphi' e^{\lambda y} + \omega \lambda \varphi e^{\lambda y} = \omega_y \varphi e^{\lambda y} \Rightarrow \varphi' + \omega \lambda \varphi = \omega_y \varphi$$

biçiminde olup, bu denklemin çözümü yapıldığında sabit ise sıfır alınarak

$$\varphi(x) = e^{\int (\omega_y - \lambda \omega) dx}$$

elde edilir. Böylece $Q = e^{\int (\omega_y - \lambda \omega) dx + \lambda y}$ olur. Burada dikkat edilmesi gereken husus integrandın $\omega_y - \lambda \omega = f(x)$ şeklinde x e bağlı bir fonksiyon olmasıdır. Bu denklemde ω çekilirse, $\omega_y - \lambda \omega = f(x)$ ve $g(x)$ keyfi bir fonksiyon olmak üzere

$$\omega = e^{\lambda y} g(x) - \frac{f(x)}{\lambda}$$

yazılır. Burada

$$y' = e^{\lambda y} g(x) - \frac{f(x)}{\lambda} \quad (42)$$

diferansiyel denklemi için tanjant vektörleri

$$(\xi, \eta) = \left(0, e^{\int f(x) dx + \lambda y} \right)$$

biçimindedir. Böylece birinci bölümde yapıldığı gibi (42) denklemden

$$r = x, \quad s = \int \frac{dy}{\eta(r, y)} \Big|_{r=x} = -\frac{1}{\lambda} e^{-\int f(x) dx - \lambda y}$$

şeklindeki kanonik koordinatlara ulaşılır. Yeni koordinatlar cinsinden diferansiyel denklem yeniden yazılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dr} &= \frac{f(x)}{\lambda} e^{-\int f(x) dx - \lambda y} + y' e^{-\int f(x) dx - \lambda y} \\ &= \frac{f(x)}{\lambda} e^{-\int f(x) dx - \lambda y} + \left(e^{\lambda y} g(x) - \frac{f(x)}{\lambda} \right) e^{-\int f(x) dx - \lambda y} \\ &= g(x) e^{-\int f(x) dx} = g(r) e^{-\int f(r) dr} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$s = \int \left(g(r) e^{-\int_{v=r}^{\infty} f(v) dv} \right) dr + c$$

olarak bulunur. Son olarak orijinal değişkenlere geri dönülürse, bu takdirde genel çözümü

$$y = -\frac{1}{\lambda} \ln \left| -\lambda e^{\int f(x) dx} \left[\int_{r=x}^{\infty} \left(g(r) e^{-\int_{v=r}^{\infty} f(v) dv} \right) dr + c \right] \right| \quad (43)$$

biçimindedir.

Örnek 14. Birinci mertebeden

$$y' = xe^{-2y} + \frac{1}{x}$$

adi diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer bu denklem (42) denklemi ile karşılaştırılırsa,

$$\lambda = -2, \quad g(x) = x, \quad f(x) = \frac{2}{x}$$

bulunur. Bu değerler (43) denkleminde yerine yazılırsa

$$y = \frac{1}{2} \ln \left| 2e^{\int \frac{2}{x} dx} \left[\int_{r=x}^{r=x} \left(re^{-\int \frac{2}{v} dv} \right) dr + c \right] \right|$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| 2x^2 \left[\int_{r=x}^{r=x} r \frac{1}{r^2} dr + c \right] \right| = \frac{1}{2} \ln |2x^2 (\ln x + c)|$$

biçimindeki genel çözüme ulaşılır.

Örnek 15. Aşağıdaki birinci mertebeden

$$y' = ae^{2\alpha x - \beta y} + be^{\alpha x} + ce^{\alpha x - \beta y}$$

diferansiyel denklemi göz önüne alalım. Buradan

$$\lambda = -\beta, \quad g(x) = ae^{2\alpha x} + ce^{\alpha x}, \quad f(x) = \beta be^{\alpha x}$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla

$$X = e^{\frac{b\beta}{\alpha} e^{\alpha x - \beta y}} \partial_y$$

infinitesimal üretici bu diferansiyel denklemin simetrilerini üretir.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin simetrileri çeşitli bilgisayar programları yardımıyla ve varsayımlarda bulunularak çoğunlukla tespit edilebilmektedir. Ancak bunlar sistematik bir yol oluşturmamaktadır. Bu çalışmada birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin simetrilerini, ikinci mertebeden (veya daha yüksek mertebeden adi diferansiyel denklemlere genelleştirilebilir) adi diferansiyel denklemlerden faydalanarak bir sistematik oluşturup bulunmaya çalışılmıştır. Bu fikrin genelleştirilmesinin, günümüzde popüler olan kesirli diferansiyel denklemlerin bir kısmının simetrilerinin bulunmasında ve bu simetriler vasıtasıyla çözülmesinde basit bir yol oluşturması muhtemeldir. Bununla birlikte yine birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için karakteristikler yardımıyla oluşturulan özel bir denklem göz önüne alınmış, fakat bu diferansiyel denklemin karakteristik denklemler vasıtasıyla genellikle çözülemediği gözlemlenmiştir. Ancak bu çalışmada bu tip diferansiyel denklemin simetrilerine, ve onun kullanılmasıyla birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerine ulaşılmaya çalışılmıştır. Bu doğrultuda diferansiyel denklem irdelenerek simetrilerinin formları ile ilgili olarak yorumlarda bulunulmuştur. Çalışmanın üçüncü bölümünün sonunda ise bu özel denkleme bir çözüm önererek belirtilen formdaki birinci mertebeden adi diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunmuştur. Bu tez çalışmasında sistematik olarak ortaya konmaya çalışılan; birinci mertebeden bir diferansiyel denklemin simetrilerinin, bu denklemle ilişkilendirilen ikinci mertebeden diferansiyel denklemin simetrilerinden faydalanılarak bulunması ve orijinal denklemin çözümü için sergilenen farklı bir yaklaşımın verilmesidir.

KAYNAKLAR

- [1] G.W. Bluman, S. Kumei, Symmetries and Differential Equations, New York: Springer-Verlag, 1989.
- [2] P.E. Hyden, Symmetry Methods for Differential Equations (A Beginner's Guide), Cambridge Texts In Applied Mathematics, 2000.
- [3] G. Baumann, MathLie a Program of Doing Symmetry Analysis, Math. Comput. Simulation, 48, No. 2, 205-223, 2002.
- [4] G.W. Bluman, S.C. Anco, Symmetry and Integration Methods for Differential Equations, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [5] Simon Hood, On Symmetry- and Ansatz-Based Methods for Integrating Ordinary Differential Equations, IMA Journal of Appl. Math., 58, 1-18, 1997.
- [6] Qu Changzheng, Exact Solutions to Nonlinear Diffusion Equations Obtained by a Generalized Conditional Symmetry Method, IMA J Appl Math, 62 (3): 283-302, 1999.
- [7] G. Baumann, Symmetry Analysis of Differential Equations with Mathematica, Springer-Verlag New York, 2000.
- [8] K. Iwancio Thompson, Solving First Order Ordinary Differential Equations Using Lie Symmetries, 2006 (Basılmamış).
- [9] E.S. Cheb-Terrab, T. Kolokolnikov, First-order Ordinary Differential Equations, Symmetries and Linear Transformations, European Journal of Applied Mathematics, 14:2:231-246 Cambridge University Press, 2003.
- [10] Andrei D. Polyanin, Valentin F. Zaitsev, Hand Book of Exact Solution For Ordinary Differential Equations Second Edition, Chapman & Hall / CRC Press Company New York, 2003.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve soyadı : Mehmet AÇIL

Baba adı : Mehmet Emin AÇIL

Ana adı : Züleyğa

Doğum tarihi : 01/01/1985

Doğum yeri : İzmir

İlköğretimi Açık İlköğretim Okulunda, liseyi Açık Öğretim Lisesi' nde tamamladı. 2007 yılında Celal Bayar Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde okumaya hak kazandı ve 2011 yılında birincilik ile mezun oldu. Aynı yıl Celal Bayar Üniversitesinde Yüksek Lisans eğitimine başladı.