

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :
ORCID : - - -

Trabzon

ÖNSÖZ

Öncelikle yüksek lisans ve doktora eğitimim boyunca yaptığım çalışmalarımındaki her türlü yardımlarını, desteğini esirgemeyen ve bu zorlu süreci daha kolay atlatmam için göstermiş olduğu sabır ve ayrıca kendisini ablam olarak hissettirdiği için sayın hocam Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü'nde bu süreçte her türlü desteğini benden esirgemeyen başta Prof. Dr. Zameddin İSMAİLOV olmak üzere sayın değerli hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkür ediyorum. Ayrıca tezi hazırlama sürecinde sürekli bana telkinlerde bulunan, benim sürekli moral ve motivasyonumu yüksek tutmamı sağlayan, dağcılık sporu aracılığı ile tanıştığım canım dostlarıma ayrıca teşekkür etmek istiyorum.

Son olarak, doktora eğitimim boyunca 2211-A Genel Yurtiçi Doktora Burs programı kapsamında, bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

Fatih YILMAZ

Trabzon, 2023

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora tezi olarak sunduğum “Birinci Mertebeden Bir Sınıf Dejenere Diferensiyel Operatörler ve Bazı Spektral Problemleri” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ‘ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 05/04/2023

Fatih YILMAZ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
SEMBOLLER DİZİNİ	IX
1.GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Lineer Uzaylar ve Metrik Uzaylar	5
1.3. Normlu Vektör Uzayları	7
1.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları.....	10
1.5. Operatörler Teorisinin Temel Kavramları	13
2.YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	35
2.1.Birinci Mertebeden Dejenere Diferansiyel Operatörlerin Normal Genişlemeleri	35
2.1.1. Normal Genişlemelerin Tanımlanması	35
2.1.2. Normal Genişlemelerin Spektrum Yapısı	47
2.2.Birinci Mertebeden Dejenere Diferansiyel Operatörlerin Maksimal Hiponormal Genişlemeleri	50
2.2.1. Maksimal Hiponormal Genişlemelerin Tanımlanması	50
2.2.2. Maksimal Hiponormal Genişlemelerin Spektrum Yapısı	58
2.3.Birinci Mertebeden Singüler Dejenere Diferansiyel Operatörlerin Normal Genişlemeleri	60
2.3.1.Singüler Dejenere Diferansiyel Operatörlerin Normal Genişlemelerin Tanımlanması.....	60

2.3.2.Singüler Dejenere Diferensiyel Operatörlerin Normal Genişlemelerinin Spektrum Yapısı.....	70
3. SONUÇLAR.....	74
ÖZGEÇMİŞ	



Doktora Tezi

ÖZET

BİRİNCİ MERTEBEDEN BİR SINIF DEJENERE DİFERANSİYEL OPERATÖRLER VE
BAZI SPEKTRAL PROBLEMLERİ

Fatih YILMAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ
2023, 81 Sayfa

Bu çalışmada, reel sayılar kümesinin sınırlı bir alt aralığı üzerinde tanımlı, ayrılabilir Hilbert uzay değerli vektör fonksiyonların Hilbert uzayı üzerinde verilen birinci mertebeden lineer özeşlenik operatör katsayılı iki terimli dejenere lineer diferensiyel ifadenin ürettiği formal normal olan minimal operatörün bütün normal genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesinin genel gösterimi verilmiştir. Benzer şekilde, Hilbert uzayının sonlu boyutlu olması durumunda verilen dejenere lineer diferensiyel ifadenin ürettiği hiponormal olan minimal operatörün bütün maksimal hiponormal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiştir. Ayrıca yukarıdakilerden farklı olarak birinci mertebeden singüler lineer dejenere diferensiyel ifadenin ürettiği formal normal olan minimal operatörün bütün normal genişlemelerinin sınır değerleri dilinde ifadesinin gösterimi araştırılmıştır.

Ek olarak, yukarıda bahsedilen bu üç durum için sınır değer koşulları ile verilen bu genişlemelerin bazı spektrum problemleri ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: Formal Normal Operatör, Normal Operatör, Hiponormal Operatör, Normal Genişleme, Spektrum

PhD. Thesis

SUMMARY

A CLASS OF FIRST ORDER DEGENERATE DIFFERENTIAL OPERATORS AND
SOME THEIR SPECTRAL PROBLEMS

Fatih YILMAZ

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ
2023,81 Pages,

In this study, the general representation of all normal extensions of a formally normal minimal operator generated by a degenerate linear differential operator expression for first order, with linear selfadjoint operator coefficients, in the Hilbert space of vector functions on a finite interval is investigated in terms of boundary values. Similarly, if the Hilbert space is finite, all maximal hyponormal extensions of the hyponormal minimal operator produced by the given degenerate linear differential expression are expressed in the terms of boundary values. In addition, unlike the above, the representation of all normal extensions of the formal normal minimal operator produced by the singular degenerate linear differential expression for first order has been investigated in terms of boundary values.

In addition, some spectrum problems of these extensions given with boundary value conditions for these three cases mentioned above are analyzed.

Key Words: Formally Normal Operator, Normal Operator, Hiponormal Operator, Normal Extension, Spectrum

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$D(A)$	: A operatörünün tanım kümesi
$R(A)$	: A operatörünün görüntü kümesi
I	: Birim Operatör
$\mathfrak{B}(H)$	: H lineer normlu uzayında tanımlı lineer sınırlı operatörler uzayı
$L_2(H, I)$	: I aralığından H Hilbert uzayına tanımlı Lebesgue ölçülebilir vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayı
$R_\lambda(A)$	: A operatörünün rezolvent operatörü
$\rho(A)$	: A operatörünün rezolvent kümesi
$\sigma(A)$	: A operatörünün spektrum kümesi
$\sigma_p(A)$	: A operatörünün ayırık spektrum kümesi
$\sigma_r(A)$	: A operatörünün kalan spektrum kümesi
$\sigma_c(A)$	: A operatörünün sürekli spektrum kümesi
$\text{Ker} A$	: A operatörünün çekirdeği
$\dim H$	: H uzayının boyutu
$\oplus$	: Direkt toplam
$\square$	: İspat Sonu

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Hilbert uzayında tanımlı, sınırsız formal normal operatörlerin normal genişlemeleri ile ilgili ilk sonuçlar Kilpi (1953; 1957; 1963) ve Davis (1955) tarafından yapılan çalışmalara atfedilebilir. Bundan başka, Coddington (1973), Biriuk ve Coddington (1964), Stochel ve Szafraniec'de (1985; 1989; 1989) çalışmalarında genel teoriyi genişletip ilerletmişlerdir.

Daha sonra vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayında tanımlı birinci mertebeden

$$l(u) = u'(t) + B(t)u(t) \quad (1.1.1)$$

lineer diferensiyel ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatörün normal genişlemelerinin varlığı hakkında bazı ek koşullar karşılaması gerektiği belirtilip bu normal genişlemelerin spektrum özellikleri İsmailov (1992), İsmailov (2003), İsmailov (2006) çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalardan İsmailov (1992) çalışmasında $B(t)$ sınırlı sabit normal operatör olarak kabul edilirken, İsmailov (2003) çalışmasında $B(t)$ sınırlı normal operatör, İsmailov (2006) çalışmasında ise $B(t) = B$ lineer sınırsız sabit operatör ve $B_R B_I = B_I B_R$ ve $B_R \geq I$ olarak kabul edilmiştir. Ayrıca, Maksudov ve İsmailov (1996) çalışmalarında (1.1.1) yerine, B operatörü H Hilbert uzayı üzerinde lineer sınırsız normal operatör ve $B_R \geq I$, $B_I \geq I$ olmak üzere,

$$l(u) = iu'(t) + Bu(t) \quad (1.1.2)$$

birinci mertebeden lineer diferensiyel ifadesi ile çalışmışlar ve benzer sonuçlar elde etmişlerdir. Bunlardan başka, Karataş ve İsmailov (2000) ise çalışmalarında H ayrılabilir Hilbert uzay, her $t \in [0,1]$ için $A(t), B(t)$ operatörleri H uzayı üzerinde birer lineer sınırlı özeşlenik operatör, $A(t)$ güçlü diferensiyellenebilir, $A(t) \geq I$ ve $B(t)$ güçlü sürekli olmak üzere, $a, b \in \mathbb{R}$ için, $L^2(H, (a, b))$ Hilbert uzayında tanımlı birinci mertebeden

$$l(u) = A(t)u'(t) + B(t)u(t)$$

lineer diferensiyel operatör ifadesi tarafından doğrulan minimal operatörün normal genişlemeleri için gerekli koşulları sınır değerleri dilinden ifade etmişler ve bu genişlemelerin spektrum kümesini vermişlerdir.

Son olarak, İsmailov ve Erol'un (2012) çalışmasında H ayrılabilir Hilbert uzay ve $B(t)$ operatörü H uzayı üzerinde bir lineer sınırlı ve güçlü sürekli özeşlenik fonksiyon operatörü olmak üzere, $L^2(H, (a, b))$, $a, b \in \mathbb{R}$ Hilbert uzayında tanımlı birinci mertebeden

$$l(u) = u'(t) + B(t)u(t)$$

lineer diferensiyel operatör ifadesi tarafından doğrulan minimal operatörün formal normal operatör olması için gerek ve yeter koşul verilmiş, formal normal olan bu minimal operatörün normal genişlemeleri için gerekli koşulları sınır değerleri dilinden ifade etmişler ve bu genişlemelerin spektrum kümesini araştırmışlardır.

H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı A operatörü lineer sınırlı ve B operatörü ise yoğun tanımlı kapalı birer lineer operatörler olmak üzere

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ Au' &= Bu \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

başlangıç değerli birinci mertebeden lineer operatör katsayılı diferensiyel denklemi göz önüne alınsın. Bu diferensiyel denklem, eğer A^{-1} var ise kolaylıkla

$$\begin{aligned} u(0) &= u_0 \\ u' &= A^{-1}Bu \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

indirgenebilir. İşte bu (1.1.4) probleminin teorik kısmı yukarıda bahsedilenlerden dışında (Daleckiı ve Krein, 1974; Gokhberg ve Krein, 1965; Krein, 1963; Krein ve Khazan, 1990) tarafından çalışılmış ve çeşitli uygulamaları da gösterilmiştir (Balakrishman, 1976; Henry, 1981; Lions, 1960; Temam, 1979).

(1.1.3) lineer diferensiyel denklemiindeki A operatörünün terslenebilir olmadığı durumlar (yani $\text{Ker} A \neq \{0\}$) için birinci mertebeden operatör katsayılı lineer dejenere diferensiyel denklem ifadesi kullanılmıştır. Showalter (1963) klasik olmayan matematiksel fizik denklemleri için, (1.1.4) başlangıç değer problemlerinin çözümünün ilk sonuçlarını

elde etmiştir. Bu çalışmada, A lineer operatörünü özeşlenik operatör olarak kabul edilmiş ve

$$A(u(0) - u_0) = 0 \quad (1.1.5)$$

başlangıç değeri ile çalışmıştır. Daha sonra bu konuda Carroll ve Showalter (1976) ve Showalter (1977) tarafından da çalışmalar yapılmış ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Daha sonra, Banach uzayındaki dejenere Cauchy problem teorisi üzerine bir çok yazarın çalışmaları vardır (Favini ve Yagi, 1999; Sviridyuk ve Federov, 2003; Sauer, 1982; Sauer ve Singleton, 1987; Barbu ve Favini, 1997). Ayrıca, bu problem matematiksel fizik ve uygulamalı bilimlerde uygulamalara sahiptir. Örneğin, DNA moleküllerinin uzunlamasına salınımlarının analizinde problemin uygulaması mevcuttur (Chen ve Zhang, 2004).

Bu tez iki ana başlıktan oluşmaktadır. Genel Bilgiler kısmında tezin asıl içeriği olan Yapılan Çalışmalar kısmı için gerekli olacak tüm tanımlar ve teoremler verilmiştir. Yapılan Çalışmalar kısmı ise de üç alt başlıkta toplanmıştır.

Birinci kısımda, H ile ayrılabilir Hilbert uzay, $\mathfrak{B}(H)$ ile H Hilbert uzayındaki lineer sınırlı operatörlerin uzayı ve $L^2(H, (a, b))$ ile de sonlu (a, b) aralığından H ayrılabilir Hilbert uzayına tanımlı vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayı olarak gösterildi ve $L^2(H, (a, b))$ uzayında birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi,

$$l(u) = (Au(t))' + B(t)u(t) \quad (1.1.4)$$

olarak ele alındı. Bu ifadede, $A: H \rightarrow H$ operatörü $\text{Ker}A \neq \{0\}$ olan ve görüntü kümesi kapalı bir pozitif özeşlenik operatör ve $B(t): [a, b] \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ ise bir güçlü sürekli ve özeşlenik operatör fonksiyonudur. İlk olarak bu birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatörün formal normal olması için gerek ve yeter şartlar verildi ve daha sonra formal normal olan minimal operatörlerin tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edildi. Ayrıca bu normal genişlemelerin spektrum kümesi belirlendi.

İkinci kısımda ise ilk kısımdan farklı olarak H Hilbert uzayı sonlu boyutlu ve $2 \leq \dim H$ olarak alındı. $A: H \rightarrow H$ özeşlenik pozitif operatör için $1 \leq \dim \text{Ker}A < \dim H$ ve $B(t): [a, b] \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ bir güçlü sürekli öz-eşlenik operatör fonksiyonu olarak

seçilip, $L^2(H, (a, b))$ uzayında bir birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi

$$l(u) = (Au(t))' + B(t)u(t) \quad (1.1.6)$$

ile tanımlanan minimal operatörün hiponormal olması için gerek ve yeter şartlar verildi ve hiponormal olan minimal operatörlerin tüm maksimal hiponormal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edildi. Ayrıca bu maksimal hiponormal genişlemelerin spektrum problemi incelendi.

Üçüncü ve son kısımda ise H_1 ve H_2 birer ayrılabilir kompleks Hilbert uzaylar olmak üzere

$$L^2(H_1, (-\infty, a)) \oplus L^2(H_2, (b, +\infty)), \quad a < b$$

Hilbert uzayı üzerinde, $A_k: H_k \rightarrow H_k, k = 1, 2$ operatörleri kapalı görüntü kümesine sahip olup $\text{Ker} A_k \neq \{0\}, \dim R(A_1) = \dim R(A_2) > 0$ olan lineer sınırlı pozitif özeşlenik operatörler ve $B_k: H_k \rightarrow H_k, k = 1, 2$ ise lineer sınırlı özeşlenik operatörler olup $(-1)^k B_k \geq 0$ olmak üzere,

$$l(u(t)) = \begin{cases} (A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), & t < a \\ (A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), & t > b \end{cases} \quad (1.1.7)$$

lineer dejenere diferensiyel ifadesi ele alındı. Bu birinci mertebeden singüler lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatörün formal normal olması için gerek ve yeter şartlar araştırıldı. Ayrıca formal normal olan minimal operatörlerin tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifadesi verildi ve bu normal genişlemelerin spektrum kümesi belirlendi.

1.2. Lineer Uzaylar ve Metrik Uzaylar

Tanım 1.2.1 (Lineer (vektör) Uzay (Rynne ve Youngson, 2008)): $V \neq \emptyset$ bir küme ve $\mathbb{F}$ ($\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$) bir cisim olmak üzere, toplama ve çarpma işlemleri denilen işlemler

$$+ : V \times V \rightarrow V, \quad (u, v) \rightarrow u + v, \quad u, v \in V$$

$$\cdot : \mathbb{F} \times V \rightarrow V, \quad (a, u) \rightarrow a \cdot u, \quad a \in \mathbb{F}, u \in V$$

dönüşümleri ile tanımlansın. O halde, her $u, v, w \in V$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

- (a) $u + v = v + u$
- (b) $u + (v + w) = (u + v) + w$
- (c) $u + 0 = u$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $0 \in V$ elemanı vardır.
- (d) $u + (-u) = 0$ eşitliğini sağlayan yalnız bir $-u \in V$ elemanı vardır.
- (e) $1 \cdot u = u$
- (f) $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha \cdot \beta) \cdot u$
- (g) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
- (h) $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot v$

koşulları sağlanıyor ise V kümesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir lineer uzay (vektör uzayı) denir.

Tanım 1.2.2 (Lineer (Vektör) Alt Uzay (Rynne ve Youngson, 2008)): V bir vektör uzay ve $U \subset V$, $U \neq \emptyset$ olsun. V vektör uzayı üzerinde tanımlı olan cebirsel işlemlere göre eğer U kümesi kendi başına bir vektör uzay oluşturuyorsa U kümesine V vektör uzayının bir alt uzayıdır denir.

U alt kümesinin vektör altuzay olduğunu anlamak için $u, v \in U$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için $\alpha u + \beta v \in U$ olması yeterlidir (altuzay testi).

Tanım 1.2.3 (Rynne ve Youngson, 2008): V bir vektör uzayı, $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\} \subset V$, $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$ sonlu bir küme ve $M \subset V$ boştan farklı keyfi bir küme olsun. Keyfi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ skalerleri için,

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_n u_n \in U$$

yazımına U nin elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir. Eğer,

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

eşitliği ancak ve ancak

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

olması halinde gerçekleşiyorsa $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}$ kümesine lineer bağımsız, aksi halde lineer bağımlı denir.

M kümesinin her sonlu alt kümesi lineer bağımsız ise M kümesine lineer bağımsız, aksi halde M kümesine lineer bağımlı denir. M kümesinin tüm sonlu alt kümelerinin tüm lineer kombinasyonlarının oluşturduğu kümeye M kümesinin üreticisi adı verilir ve $\text{span}M$ simgesi ile gösterilir.

Eğer U lineer bağımsız ve $\text{span}U = V$ ise U ya V vektör uzayının bir bazı denir. Eğer V vektör uzayının sonlu bir bazı var ise bu bazın eleman sayısına V vektör uzayının boyutu denir ve $\dim V$ ile gösterilir. V vektör uzayının sonlu bir bazı yok ise V vektör uzayına sonsuz boyutludur denir.

Tanım 1.2.4 (Metrik Uzay (Bachman ve Narici, 1966)): V boştan farklı bir küme ve her $u, v, w \in V$ için,

- (1) $d(u, v) \geq 0$ ve $d(u, v) = 0$ ancak ve ancak $u = v$,
- (2) $d(u, v) = d(v, u)$,
- (3) $d(u, v + w) \leq d(u, v) + d(u, w)$,

koşullarını sağlayan

$$d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(u, v) \rightarrow d(u, v)$$

fonksiyonu var ise bu d fonksiyonuna bir metrik ve (V, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

Örnek 1.2.5: l_∞ ifadesi ile terimleri kompleks sayılardan oluşan tüm sınırlı dizilerin kümesi gösterilsin. Burada, $x \in l_\infty$ ise $u_1, u_2, \dots \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$u = (u_1, u_2, \dots)$$

veya kısaca

$$u = (u_n)$$

ile gösterilir öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|u_n| \leq c_u$$

olacak şekilde x bağlı fakat n indisine bağlı olmayan bir c_x reel sayısı vardır. O halde, her $u = (u_n), v = (v_n) \in l_\infty$ için

$$d_\infty(u, v) = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i - v_i|$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir metriktir.

Tanım 1.2.6 (Ayrılabilir Metrik Uzay ((Rynne ve Youngson, 2008))): Sayılabilir yoğun alt kümesi var olan (V, d) metrik uzayına bir ayrılabilir metrik uzaydır denir.

1.3. Normlu Vektör Uzayları

Tanım 1.3.1 (Normlu Vektör Uzay (Rynne ve Youngson, 2008)): $V, \mathbb{F}$ üzerinde tanımlı bir vektör uzay olmak üzere, her $u, v \in V$ ve keyfi $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

- (1) $\|u\| \geq 0$,
- (2) $\|u\| = 0$ için gerek ve yeter şart $u = 0$,
- (3) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$,
- (4) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

koşullarını sağlayan $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir norm ve üzerinde norm tanımlanan V vektör uzayına bir normlu vektör uzayı denir. Ayrıca $\|u\| = 1$ eşitliğini sağlayan $u \in V$ vektörüne birim vektör denir.

Örnek 1.3.2: l_∞ ifadesi ile terimleri kompleks sayılardan oluşan tüm sınırlı dizilerin kümesi gösterilsin. Burada, $u \in l_\infty$ ise $u_1, u_2, \dots \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$u = (u_1, u_2, \dots)$$

veya kısaca

$$u = (u_n)$$

ile gösterilir öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|u_n| \leq c_u$$

olacak şekilde u bağlı fakat n indisine bağlı olmayan bir c_u reel sayısı vardır. O halde, her $u = (u_n) \in l_\infty$ için

$$\|u\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i|$$

olarak tanımlanan fonksiyon bir norm olur.

Gerçekten de, her $u = (u_n), v = (v_n) \in l_\infty$ ve keyfi $\alpha \in \mathbb{F}$ için,

- 1) $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \geq 0$
- 2) $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = 0$ eşitliğinin sağlanabilmesi gerek ve yeter şart her $n \in \mathbb{N}$ için $|u_n| = 0$, her $n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow u_n = 0$ olmalıdır $\Leftrightarrow u = 0$ olur.
- 3) $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha u_n| = |\alpha| \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = |\alpha| \|u\|_\infty$
- 4) $\|u + v\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n + v_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |v_n| \leq \|u\|_\infty + \|v\|_\infty$.

Önerme 1.3.3 (Rynne ve Youngson, 2008): V bir lineer (vektör) uzayı ve bu uzay üzerinde tanımlı bir norm $\|\cdot\|$ olsun. O halde,

$$d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$d(u, v) = \|u - v\|$$

olarak verilen fonksiyon bir metriktir ve (V, d) bir metrik uzaydır, ayrıca özel olarak bu metriği, $\|\cdot\|$ normu tarafından doğurulmuş metrik uzay olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.4 (Yakınsak Dizi (Rynne ve Youngson, 2008)): $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzay, $(v_n) \subset V$ bir dizi olsun. O halde, eğer $v \in V$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\| = 0$$

ise, $(v_n) \subset V$ dizisi $\|\cdot\|_V$ normuna göre $v \in V$ elemanına yakınsıyor denir ve

$$v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\|\cdot\|_V} v$$

ya da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = v$$

notasyonlarından biri ile gösterilir.

Tanım 1.3.5 (Cauchy Dizisi (Rynne ve Youngson, 2008)): $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzay, $(v_n) \subset V$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve $m, n > n_\varepsilon$ doğal sayıları için $\|v_n - v_m\|_V < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir ise $(v_n) \subset V$ dizisine $(V, \|\cdot\|_V)$ normlu uzayında bir Cauchy Dizisi denir.

Tanım 1.3.6 (Tam Uzay (Rynne ve Youngson, 2008)): Eğer bir normlu uzayda her Cauchy dizisi bu normlu uzayda yakınsak ise bu uzaya tam uzay denir.

Tanım 1.3.7 (Banach uzayı, (Rynne ve Youngson, 2008)): Eğer normlu uzay bir tam uzay ise bu normlu uzaya bir Banach uzayı denir.

Örnek 1.3.8 (Rynne ve Youngson, 2008):

$$l_\infty = \{u = (u_i) : u_i \in \mathbb{C}, i \geq 1, |u_i| < c_u, c_u \text{ sabit bir reel sayı}\}$$

uzayı üzerinde

$$\|u\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i|$$

Normu tanımlansın. O halde, l_∞ uzayı $\|\cdot\|_\infty$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

Gerçekten, $(u^{(n)})_{n=1}^\infty$ dizisi l_∞ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Buradan, her $\varepsilon > 0$ ve $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m > N_0, n, m \in \mathbb{N}$ için,

$$\|u^{(n)} - u^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$$

olup

$$|u_i^{(n)} - u_i^{(m)}| \leq \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i^{(n)} - u_i^{(m)}| = \|u^{(n)} - u^{(m)}\|_\infty < \varepsilon$$

olur. Böylece her $i = 1, 2, \dots$ için $\{u_i^{(n)}\}$ skalerlerin dizisi $\mathbb{C}$ de bir Cauchy dizisidir ve her $u_i^{(n)} \in \mathbb{C}$ ve $\mathbb{C}$ tam normlu uzay olduğundan,

$$u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} u_i^{(n)}$$

olacak şekilde $u_i \in \mathbb{C}$ sayısı vardır. $u := (u_1, u_2, u_3, \dots)$ elemanı için

$$\|u^{(n)} - u\|_{l_\infty} = \sup_{i \in \mathbb{N}} |u_i^{(n)} - u_i| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca, $u = (u_i)$ için $u = u^{(n)} - (u^{(n)} - u) \in l_\infty$ olduğu rahatlıkla görülür. Sonuç olarak l_∞ Banach uzayıdır.

1.4. İç Çarpım ve Hilbert Uzayları

Tanım 1.4.1 (İç Çarpım Uzayı (Rynne ve Youngson, 2008)): $V, \mathbb{F}$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonu her $u, v, w \in V$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

- (a) $(u, u) \in \mathbb{R}$ ve $(u, u) \geq 0$;
- (b) $(u, u) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $u = 0$ olmasıdır;
- (c) $(\alpha u + \beta v, w) = (\alpha u, w) + (\beta v, w) = \alpha(u, w) + \beta(v, w)$;
- (d) $(u, v) = \overline{(v, u)}$

şartlarını sağlıyor ise bu fonksiyona V üzerinde bir iç çarpım ve $(V, (\cdot, \cdot))$ ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir.

Örnek 1.4.2 (Gohberg vb., 2003): $u, v \in L_2(a, b)$ ve $t \in (a, b)$ için

$$(u, v)_{L_2(a, b)} = \int_a^b u(t) \overline{v(t)} dt$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlansın. $L_2(a, b)$ lineer uzayı üzerinde tanımlanan bu dönüşüm bir iç çarpım belirtir.

Gerçekten, her $u, v, w \in L_2(a, b)$ ve her $t \in (a, b)$ için

a)

$$(u, u)_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(t) \overline{u(t)} dt = \int_a^b |u(t)|^2 dt \geq 0.$$

Eğer,

$$(u, u)_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(t) \overline{u(t)} dt = \int_a^b |u(t)|^2 dt = 0$$

ise $\lambda - \text{h.h.y.}$ için $|u(t)| = 0$ olduğu görülür.Tersine, eğer $u(t) = 0$ ise

$$(u, u)_{L_2(a,b)} = \int_a^b |u(t)|^2 dt = \int_a^b 0 dt = 0$$

olup $(u, u)_{L_2(a,b)} = 0$ eşitliğine ulaşılır.

b)

$$(u, v)_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(t) \overline{v(t)} dt = \overline{\int_a^b \overline{u(t)} v(t) dt} = \overline{\int_a^b u(t) \overline{v(t)} dt} = \overline{(v, u)_{L_2(a,b)}} .$$

c)

$$(\beta u, v)_{L_2(a,b)} = \int_a^b \beta u(t) \overline{v(t)} dt = \beta \int_a^b u(t) \overline{v(t)} dt = \beta (u, v)_{L_2(a,b)} .$$

d)

$$\begin{aligned} (u + v, w)_{L_2(a,b)} &= \int_a^b (u(t) + v(t)) \overline{w(t)} dt = \int_a^b (u(t) \overline{w(t)} + v(t) \overline{w(t)}) dt \\ &= \int_a^b u(t) \overline{w(t)} dt + \int_a^b v(t) \overline{w(t)} dt = (u, w)_{L_2(a,b)} + (v, w)_{L_2(a,b)} \end{aligned}$$

Tanım 1.4.3 (Kreyszig, 1978): V bir iç çarpım uzayı olmak üzere,

$$(u, v) = 0$$

eşitliğini sağlayan $u, v \in V$ için u ve v diktir denir ve $u \perp v$ ile gösterilir. Benzer şekilde, $U \subset V$ ve $W \subset V$ olmak üzere her $v \in U$ için $u \perp v$ oluyorsa $u \perp U$, her $v \in U, w \in W$ için $v \perp w$ ise, $U \perp W$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.4.4 (Rynne ve Youngson, 2008): $(V, (\cdot, \cdot))$ bir iç çarpım uzayı üzerinde,

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in V \text{ için}$$

olacak şekilde tanımlanan $\|\cdot\|$ normuna iç çarpımın ürettiği norm denir.

Tanım 1.4.5 (Rynne ve Youngson, 2008): $(V, (\cdot, \cdot))$ iç çarpım uzayı, bu uzay üzerinde

$$\|u\| = (u, u)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u \in V$$

olarak tanımlanan iç çarpımın ürettiği norma göre tam uzay ise bu iç çarpım uzayına bir Hilbert uzayıdır denir.

Örnek 1.4.6 (Rynne ve Youngson, 2008):

$$l_2 := \left\{ (u_n) : u_n \in \mathbb{C}, n \geq 1, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 < \infty \right\}$$

üzerinde tanımlı,

$$(\cdot, \cdot) : l_2 \times l_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$(u, v) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \overline{v_n}, u = (u_n), v = (v_n) \in l_2$$

fonksiyonu bir iç çarpım fonksiyonudur. l_2 uzayı bu iç çarpımın ürettiği

$$\|u\|_{l_2} = (u, u)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^2 \right)^{1/2}, u = (u_n) \in l_2$$

normuna göre bir Hilbert uzayıdır.

1.5. Operatörler Teorisinin Temel Kavramları

Tanım 1.5.1 (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V boş olmayan birer küme olmak üzere $W \subset U$ olsun. W kümesinin her elemanını V kümesinin bir elemanına karşılık götüren bir kurala W den V ye bir operatör veya dönüşüm denir. A operatörünün $u \in W$ elemanına karşılık getirdiği $v \in V$ elemanı $A(u) = v$ veya $Au = v$ şeklinde ifade edilir. Sonuç olarak her $W \subset U$ elemanını V nin bir elemanına getiren operatör

$$A: W \subset U \rightarrow V, \quad Au = v$$

ile gösterilir. Buradaki W kümesine A operatörünün tanım kümesi denir ve $D(A)$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$R(A) := \{v \in V: Au = v, u \in D(A)\}$$

olarak A operatörünün görüntü kümesi tanımlanır. Burada dikkat edilirse, $D(A) = U$ veya $R(A) = V$ olmak zorunda değildir.

Tanım 1.5.2 (Rynne ve Youngson, 2008): $\mathbb{F}$ cismi üzerinde U ve V iki vektör uzay, $D(A) \subset U$ ve $A: D(A) \subset U \rightarrow V$ bir operatör olmak üzere, eğer her $u, v \in D(A)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için,

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v)$$

eşitliği sağlanıyor ise A operatörüne bir lineer operatördür denir.

Tanım 1.5.3 (Rynne ve Youngson, 2008): V lineer uzayı üzerinde her $u \in V$ için,

$$I: V \rightarrow V, \quad Iu = u$$

olarak tanımlanan operatöre birim operatör denir.

Tanım 1.5.4 (Rynne ve Youngson, 2008): V bir lineer uzay üzerinde her $u \in V$ için,

$$0: V \rightarrow V, \quad 0u = 0$$

olarak tanımlanan operatöre sıfır operatörü denir.

Örnek 1.5.5 (Rynne ve Youngson, 2008):

$$l_\infty = \left\{ c = (c_n) : c_n \in \mathbb{C}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n| < \infty \right\}$$

Ve

$$l_1 = \left\{ u = (u_n) : u_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| < \infty \right\}$$

olmak üzere $(c_n) \in l_\infty$ ve $u = (u_n) \in l_1$ için,

$$A : l_1 \rightarrow \mathbb{C},$$

$$Au = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n$$

şeklinde iyi tanımlanan operatör lineerdir. Gerçekten, $u = (u_n), v = (v_n) \in l_1$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} A(\alpha u + \beta v) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k c_n (\alpha u_n + \beta v_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k (c_n \alpha u_n + c_n \beta v_n) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^k c_n \alpha u_n + \sum_{n=1}^k c_n \beta v_n \right) = \alpha \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k c_n u_n + \beta \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k c_n v_n \\ &= \alpha Au + \beta Av \end{aligned}$$

olur.

Tanım 1.5.6 (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V iki normlu lineer uzay ve $D(A)$, U uzayının bir lineer alt uzayı olsun.

$$A : D(A) \subset U \rightarrow V$$

olacak şekilde bir A lineer operatörü tanımlansın ve $u_0 \in D(A)$ seçilsin. Her $\varepsilon > 0$ ve her $u \in D(A)$ için $\|u - u_0\| < \delta$ olduğunda $\|Au - Au_0\| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan öyle bir $\delta > 0$ sayısı var ise A lineer operatörüne $u = u_0$ noktasında süreklidır denir. Ayrıca, $D(A)$ alt uzayının her noktasında sürekli olan A operatörüne de sürekli operatör denir.

Tanım 1.5.7 (Sınırlı Operatör (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V iki normlu lineer uzay olmak üzere $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör tanımlansın. Her $u \in U$ için,

$$\|Au\| \leq c\|u\|$$

koşulunu sağlayan $c \in \mathbb{R}^+$ var ise A lineer operatörüne sınırlıdır denir ve U den V ye tanımlanan tüm sınırlı lineer operatörler kümesi $\mathfrak{B}(U, V)$ ile gösterilir. Özel olarak $U = V$ ise $\mathfrak{B}(U, U)$ yerine $\mathfrak{B}(U)$ yazılır.

Önerme 1.5.8 (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V iki normlu lineer uzay ve $A : U \rightarrow V$ bir lineer operatör olsun. O halde aşağıdakiler birbirine denktirler.

- (a) A lineer operatörü düzgün süreklidir.
- (b) A lineer operatörü süreklidir.
- (c) A lineer operatörü, $u = 0$ noktasında süreklidir.
- (d) $\|u\| \leq 1$ eşitsizliğini sağlayan her $u \in U$ için $\|Au\| \leq c$ olacak şekilde $c \in \mathbb{R}^+$ vardır.
- (e) Her $u \in U$ için, $\|Au\| \leq c\|u\|$ koşulunu sağlayan $c \in \mathbb{R}^+$ vardır.

Örnek 1.5.9 (Rynne ve Youngson, 2008): $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$k: [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$$

süreklili ve

$$M = \sup\{|k(s, t)|: (s, t) \in [a, b] \times [a, b]\} < +\infty$$

olsun.

- a) $g \in C[a, b]$ için,

$$f(s) = \int_a^b k(s, t)g(t)dt$$

şeklinde tanımlanan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ operatörü $C[a, b]$ nın elemanıdır.

- b) $K: C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ operatörü,

$$(K(g))(s) = f(s) = \int_a^b k(s, t)g(t)dt$$

şeklinde tanımlansın. O halde, $K \in \mathfrak{B}(C[a, b])$ ve

$$\|K(g)\|_\infty \leq M(b-a)\|g\|_\infty$$

olur. Gerçekten, Varsayalım ki $\varepsilon > 0$ ve $s \in [a, b]$ olsun. Ayrıca $k_s = k(s, t)$, $t \in [a, b]$ olacak şekilde $k_s \in C[a, b]$ fonksiyonu tanımlansın. $[a, b] \times [a, b]$ karesi $\mathbb{R}^2$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan k fonksiyonu düzgün süreklidir. Dolayısıyla her $t \in [a, b]$ için $|s - s'| < \delta$ olduğunda $|k_s(t) - k_{s'}(t)| < \varepsilon$ olan $\delta > 0$ sayısı vardır. Buradan devam edilirse,

$$|f(s) - f(s')| \leq \int_a^b |k(s, t) - k(s', t)| |g(t)| dt \leq \varepsilon(b-a)\|g\|_\infty$$

olacağından f süreklidir. Şimdi, her $s \in [a, b]$ için,

$$|(K(g))(s)| \leq \int_a^b |k(s, t)g(t)| dt \leq \int_a^b M\|g\|_\infty dt = M(b-a)\|g\|_\infty$$

olacağından,

$$\|K(g)\|_\infty \leq M(b-a)\|g\|_\infty$$

olur ki $K \in \mathfrak{B}(C[a, b])$ olduğu görülür.

Örnek 1.5.10 (Rynne ve Youngson, 2008): Tüm polinom tipli fonksiyonları içeren $C_{\mathbb{C}}[0,1]$ ın lineer alt uzayını $\mathcal{P}$ ile gösterelim. Her $p \in \mathcal{P}$ için p' ile p nin türevi gösterilmek üzere, $T: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ lineer operatörü,

$$T(p) = p'$$

olarak tanımlanırsa bu T lineer operatörü sürekli değildir. Gerçekten de, $p_n \in \mathcal{P}, n \geq 1$, polinomları $p_n(t) = t^n$ olarak tanımlansın. O halde,

$$\|p_n\| = \sup\{|p_n(t)|; t \in [0,1]\} = 1$$

olmasına rağmen her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|T(p_n)\| = \|p_n'\| = \sup\{|p_n'(t)| : t \in [a, b]\} = \sup\{|n \cdot t^{n-1}| : t \in [a, b]\} = n$$

olduğundan, her $p \in \mathcal{P}$ için $\|Tp\| \leq k\|p\|$ olacak şekilde $k \geq 0$ sayısı bulunamaz. Dolayısıyla T operatörü sınırsız bir operatördür.

Tanım 1.5.11 (Rynne ve Youngson, 2008): X herhangi bir vektör uzayı olmak üzere, $P^2 = P$ koşulunu sağlayan $P : X \rightarrow X$ lineer operatörüne bir izdüşüm operatörü denir.

Örnek 1.5.12: $H = \mathbb{C}^2$ üzerinde,

$$P : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan P operatörünün bir iz düşüm operatörü olduğu her $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için,

$$P^2x = P(Px) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Px$$

eşitliğinden rahatlıkla görülür.

Tanım 1.5.13 (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V normlu uzay olsun. O halde, $A : U \rightarrow V$ sınırlı operatörü için,

$$\|A\| = \sup\{\|Au\|_V : u \in U, \|u\|_U \leq 1\} = \inf\{k : \|Au\|_V \leq k\|u\|_U, \forall u \in U\}$$

olarak tanımlanan, $\|\cdot\| : \mathfrak{B}(U, V) \rightarrow \mathbb{R}$ normuna A sınırlı operatörünün normu denir.

Örnek 1.5.14:

$$C_{\mathbb{R}}[0,1] = \{f | f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ ve } f \text{ sürekli}\}$$

üzerinde

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$$

normu tanımlanmak üzere, her $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için,

$$Af(t) := \int_0^1 f(t) dt$$

olacak şekilde bir dönüşüm verilsin. O halde, her $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ için,

$$|Af(t)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \int_0^1 \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty$$

eşitsizliğinden A lineer operatörünün sınırlı olduğu görülüp $\|A\| \leq 1$ sonucuna ulaşılır. Üstelik f fonksiyonu,

$$f(x) = 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

olacak şeklindeki sabit fonksiyon seçilirse,

$$\|f\|_\infty = 1$$

olup,

$$|Af(t)| = \left| \int_0^1 f(t) dt \right| = 1$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise $1 \leq \|A\|$ eşitsizliğini verir ki $\|A\| = 1$ olduğu açıkça görülür.

Teorem 1.5.15 (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V iki normlu uzay olsun. U normlu uzaydan V normlu uzay üzerine tanımlı tüm lineer sınırlı operatörlerin oluşturduğu $\mathfrak{B}(U, V)$ lineer uzayı $\|\cdot\|$ operatör normu altında bir normlu uzaydır.

Tanım 1.5.16 (Kreyszig, 1978): U ve V iki normlu uzay ve $D(A)$ ise U uzayının bir lineer alt uzayı olmak üzere,

$$A: D(A) \subset U \rightarrow V$$

bir lineer operatörünün grafiği

$$Gr(A) := \{(u, Au): u \in D(A)\} \subset U \times V$$

olarak tanımlanır. İşte bu A operatörünün grafiğinin $U \times V$ normlu uzayında kapalı olması durumunda A operatörüne bir kapalı lineer operatör denir.

Teorem 1.5.17 (Rynne ve Youngson, 2008): U ve V iki normlu uzay ve $D(A)$, U uzayının bir lineer alt uzayı olmak üzere,

$$A: D(A) \subset U \rightarrow V$$

bir lineer operatör olsun. A lineer operatörünün kapalı operatör olması için gerek ve yeter şart her $(u_n) \subset D(A)$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Au_n = v$$

olduğunda $u \in D(A)$ ve $v = Au$ olmasıdır.

Tanım 1.5.18 (Kreyszig, 1978): U ve V iki lineer uzay ve $D(A)$, U uzayının bir lineer alt uzayı olmak üzere,

$$A: D(A) \subset U \rightarrow V$$

bir lineer operatör olsun. Eğer her $u_1, u_2 \in D(A)$ için,

$$Au_1 = Au_2$$

eşitliği sağlandığında

$$u_1 = u_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A operatörüne birebir operatör denir.

Tanım 1.5.19 (Eşlenik Operatör, (Schmüdgen, 2012)): $(H_1, (\cdot)_1)$ ve $(H_2, (\cdot)_2)$ birer Hilbert uzayı ve $D(A)$, H_1 uzayının bir lineer altuzayı olsun. Yoğun tanımlı bir

$$A: D(A) \subset H_1 \rightarrow H_2$$

lineer operatör için

$$D(A^*) := \{y \in H_2 : \forall x \in D(A) \text{ için bir } z \in H_1 \text{ vardır öyle ki } (Ax, y)_2 = (x, z)_1\}$$

kümesi için Riesz Teoremi'nin sonucu olarak $y \in H_2$ elemanının $D(A^*)$ kümesinde olması için gerek ve yeter şart $x \rightarrow (Ax, y)_2$ dönüşümünün $(D(A), \|\cdot\|_1)$ üzerinde bir lineer sürekli fonksiyonel olması veya

$$|(Ax, y)_2| \leq c_y \|x\|_1, \forall x \in D(A)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c_y > 0$ sayısının var olmasıdır.

$D(A)$ kümesi H_1 uzayında yoğun olsun. O halde,

$$(Ax, y)_2 = (x, z)_1, \quad \forall x \in D(A)$$

eşitliğini sağlayan $z \in H_1$ elemanı $y \in H_2$ tarafından tek türlü tanımlanır. Bundan dolayı, $A^*y = z$ olan H_2 uzayından H_1 uzayının içine iyi tanımlı A^* operatörü mevcuttur. A^* operatörünün lineerdir ve bu operatöre A operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü denir.

Örnek 1.5.20: $H = (L_2[0,1], \|\cdot\|_2)$ Hilbert uzayının bir alt uzayı

$$D(A) := \{v \in L_2[0,1]; v' \in L_2[0,1], \quad v(0) = v(1)\}$$

olsun. O halde,

$$A: D(A) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$$

$$Av = v'$$

olarak tanımlanan lineer operatörü için eşlenik operatörü her $u \in L_2[0,1]$ için,

$$A^*u(t) = -u'(t)$$

olur. Gerçekten de A^* , A operatörünün eşlenik operatörü ve $v, u \in L_2[0,1]$ için,

$$\begin{aligned} (Av(t), u(t)) &= \int_0^1 v'(t)u(t)dt = v(1)u(1) - v(0)u(0) - \int_0^1 v(t)u'(t)dt \\ &= - \int_0^1 v(t)u'(t)dt = (v(t), A^*u(t)) \end{aligned}$$

olduğundan $A^*u(t) = -u'(t)$ ve $D(A) = D(A^*)$ olduğu görülür.

Tanım 1.5.21 (Simetrik Operatör (Schmüdgen, 2012)) : $D(A)$, H bir Hilbert uzayının bir lineer alt uzayı olmak üzere

$$A: D(A) \subset H \rightarrow H$$

bir lineer operatör olsun. Bu durumda, her $u, v \in D(A)$ için,

$$(Au, v)_H = (u, Av)_H$$

eşitliği sağlayan A lineer operatörüne bir simetrik operatör denir.

Tanım 1.5.22 (Özeşlenik Operatör (Schmüdgen, 2012)): H Hilbert uzayı üzerinde A simetrik operatörü yoğun tanımlı olsun. O halde,

$$A = A^*$$

eşitliği sağlanıyor ise A lineer operatörüne bir özeşlenik operatör denir.

Örnek 1.5.23 (Rynne ve Youngson, 2008): Keyfi $k(t) \in C[0,1]$ için $T_k \in \mathfrak{B}(L_2[0,1])$ operatörü,

$$(T_k v)(t) := k(t)v(t)$$

olarak tanımlansın. O halde eğer $u \in C[0,1]$ ise $(T_u)^* = T_{\bar{u}}$ olduğu rahatlıkla görülür. Eğer $u \in C[0,1]$ reel değerli ise $(T_u)^* = T_u$ olur. Bu durumda reel değerli $u \in C[0,1]$ için T_u özeşlenik operatördür.

Örnek 1.5.24 (Rynne ve Youngson, 2008): $H = \mathbb{C}^2$ ve $u_{12}, u_{21} \in \mathbb{C}$, $u_{11}, u_{22} \in \mathbb{R}$, $\overline{u_{12}} = u_{21}$ olmak üzere,

$$A = \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 ,$$

$$A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

şeklinde A operatörü tanımlansın. A operatörünün eşleniği

$$A^* = \begin{pmatrix} u_{11} & \overline{u_{21}} \\ \overline{u_{12}} & u_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}$$

olduğundan $A = A^*$ eşitliği elde edilir ki buradan A lineer operatörünün özeşlenik olduğu görülür.

Tanım 1.5.25 (Formal Normal Operatör ve Normal Operatör (Schmüdgen, 2012)): H kompleks Hilbert uzayı, A^* operatörü ise A lineer operatörünün eşlenik operatörü olmak üzere,

$$D(A) \subset D(A^*)$$

olan ve

$$\|A^*x\|_H = \|Ax\|_H, \forall x \in D(A)$$

eşitliğini sağlayan A lineer operatörüne bir formal normal operatör denir. Ayrıca, A lineer operatörü formal normal operatör ve $D(A) = D(A^*)$ ise A lineer operatörü bir normal operatördür denir.

Önerme 1.5.26 (Schmüdgen, 2012): A lineer operatörünün kapalı olması ve

$$A^*A = AA^*$$

eşitliğinin sağlanması durumunda A lineer operatörü bir normal operatördür. Bunun tersi de doğrudur. Yani, A lineer operatörü bir normal operatör ise A lineer operatörü kapalı ve

$$A^*A = AA^*$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 1.5.27: $H = (L_2[0,1], \|\cdot\|_2)$ Hilbert uzayının bir altuzayı

$$D(A) := \{v \in L_2[0,1] : v' \in L_2[0,1], v(0) = v(1)\}$$

olmak üzere,

$$A: D(A) \subset L_2[0,1] \rightarrow L_2[0,1]$$

$$Av = v'$$

olarak tanımlanana A lineer operatörü bir normal operatördür. Gerçekten,

$$A^*u(t) = -u'(t)$$

ve

$$D(A^*) := \{u \in L_2[0,1]; u' \in L_2[0,1], u(0) = u(1)\}$$

olduğu rahatlıkla görülüp,

$$D(A) = D(A^*)$$

ve her $v(t) \in L_2[0,1]$ için,

$$\|Av\|_{L_2[0,1]} = \|v'\|_{L_2[0,1]} = \|-v'\|_{L_2[0,1]} = \|A^*v\|_{L_2[0,1]}$$

eşitliği sağlanır. Sonuç olarak A lineer operatörü bir normal operatördür.

Örnek 1.5.28 (Rynne ve Youngson, 2008): Keyfi $k \in C[0,1]$ için $T_k \in \mathfrak{B}(L_2[0,1])$ operatörü Örnek 1.5.23 deki gibi tanımlansın. Eğer $u \in C[0,1]$ ise T_u normaldir. Gerçekten de Örnek 1.5.23 de $(T_u)^* = T_{\bar{u}}$ olduğu görülür. Bundan dolayı, her $v \in L_2[0,1]$ için,

$$(T_u(T_u)^*)(v) = T_u(T_{\bar{u}}(v)) = T_u(\bar{u}v) = u\bar{u}v$$

ve

$$((T_u)^*T_u)(v) = T_{\bar{u}}(T_u(v)) = T_{\bar{u}}(uv) = \bar{u}uv = u\bar{u}v$$

olup,

$$T_u(T_u)^* = (T_u)^*T_u$$

eşitliği bulunur ki buradan T_u operatörünün normal bir operatör olduğu görülür.

Tanım 1.5.29 (Hiponormal Operator (Halmos, 1974)): H kompleks Hilbert uzayı, A operatörü H üzerinde yoğun tanımlı bir operatör olsun. O halde, eğer $D(A) \subset D(A^*)$ ve her $x \in D(A)$ için

$$\|A^*x\|_H \leq \|Ax\|_H$$

veya denk olarak

$$A^*A - AA^* \geq 0$$

oluyorsa A lineer operatörüne hiponormal operatör denir.

Tanım 1.5.30 (Üniter Operatör (Rynne ve Youngson, 2008)): H bir Hilbert uzayı üzerinde tanımlı bir A lineer operatör için, A^* ile A lineer operatörünün eşlenik operatörü gösterilmek üzere, eğer

$$AA^* = A^*A = I$$

eşitliği sağlanıyorsa bu A lineer operatörüne bir üniter operatördür denir.

Örnek 1.5.31: $H = \mathbb{C}^2$ ve $u, v \in \mathbb{C}$, $|u|^2 + |v|^2 = 1$ olmak üzere,

$$A: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ -e^{i\alpha}\bar{v} & e^{i\alpha}\bar{u} \end{pmatrix}$$

operatörü tanımlansın. O halde, A operatörü üniter operatördür. Gerçekten de A operatörünün eşlenik operatörü $A^* = \begin{pmatrix} \bar{u} & -e^{-i\alpha}v \\ \bar{v} & e^{-i\alpha}u \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$AA^* = \begin{pmatrix} u & v \\ -e^{i\alpha}\bar{v} & e^{i\alpha}\bar{u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u} & -e^{-i\alpha}v \\ \bar{v} & e^{-i\alpha}u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u|^2 + |v|^2 & 0 \\ 0 & |u|^2 + |v|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^*A = \begin{pmatrix} \bar{u} & -e^{-i\alpha}v \\ \bar{v} & e^{-i\alpha}u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ -e^{i\alpha}\bar{v} & e^{i\alpha}\bar{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |u|^2 + |v|^2 & 0 \\ 0 & |u|^2 + |v|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eşitliklerinden $AA^* = A^*A = I$ olduğu görülür ki A operatörü üniterdir.

Tanım 1.5.32 (İzometri (Bachman ve Narici, 1966)): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı ve $A: H_1 \rightarrow H_2$ operatörü birebir olsun. Eğer keyfi $u, v \in H_1$ için,

$$\|u - v\|_{H_1} = \|A(u - v)\|_{H_2}$$

eşitliğini sağlayan bu A lineer operatörüne bir izometri ve bu iki uzaya da izometrik denir.

Teorem 1.5.33 (Bachman ve Narici, 1966): H_1 ve H_2 birer Hilbert uzayı ve $A: H_1 \rightarrow H_2$ bir lineer operatör olsun. A^* simgesi ile A lineer operatörünün eşlenik operatörü gösterilmek üzere, A lineer operatörünün bir izometri olabilmesi için gerek ve yeter koşul,

$$A^*A = I$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Tanım 1.5.34 (Rezolvent Küme (Bachman ve Narici, 1966)): X kompleks normlu lineer uzay ve A , X üzerinde tanımlı lineer operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda I)$ kümesi X de yoğun ve $(A - \lambda I)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda I)$ kümesinde var ve sınırlı ise $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı A operatörünün rezolvent kümesine aittir denir ve $\lambda \in \rho(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.35 (Süreklî Spektrum (Bachman ve Narici, 1966)): X kompleks normlu lineer uzay ve A operatörü X uzayı üzerinde tanımlı bir lineer operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak

üzere, eğer $R(A - \lambda I)$ kümesi X de yoğun ve $(A - \lambda I)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda I)$ kümesinde var fakat sınırlı değil ise λ sayısı A operatörünün sürekli spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_c(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.36 (Kalan Spektrum (Bachman ve Narici, 1966)): X kompleks normlu lineer uzay ve A, X üzerinde tanımlı lineer operatör, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, eğer $R(A - \lambda I)$ kümesi X de yoğun değil fakat $(A - \lambda I)$ operatörünün tersi $R(A - \lambda I)$ kümesinde var (sınırlı ya da sınırsız) ise λ sayısı A operatörünün kalan spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_r(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.37 (Noktasal Spektrum (Bachman ve Narici, 1966)): X kompleks normlu lineer uzay ve A, X üzerinde tanımlı lineer operatör, $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $(A - \lambda I)$ operatörünün tersi yok ise λ sayısı A operatörünün noktasal (ayrık) spektrumuna aittir denir ve $\lambda \in \sigma_p(A)$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.38 (Özdeğer, Özvektör (Bachman ve Narici, 1966)): X kompleks normlu lineer uzay ve A, X üzerinde tanımlı lineer operatör olsun. $\lambda \in \sigma_p(A)$ sayısına A nın özdeğeri,

$$Ax = \lambda x$$

denklemin çözümünü sağlayan $x \in X, x \neq 0$ vektörüne ise A lineer operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Örnek 1.5.39 (Rynne ve Youngson, 2008): Sağa öteleme operatörü

$$A: l_2 \rightarrow l_2,$$

$$A(u_1, u_2, u_3, \dots) = (0, u_1, u_2, u_3, \dots)$$

olarak tanımlansın. O halde, $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Gerçekten, sıfırdan farklı $u = \{u_1, u_2, u_3, \dots\}$ için özvektörü için λ bir özdeğer olsun. O halde,

$$A(u_1, u_2, u_3, \dots) = (0, u_1, u_2, u_3, \dots) = \lambda(u_1, u_2, u_3, \dots)$$

olmalıdır. Eğer $\lambda = 0$ ise $u = 0$ olur ki bu u özvektörünün sıfırdan farklı olması ile çelişir. Şimdi de $\lambda \neq 0$ olsun. O halde,

$$\lambda u_1 = 0,$$

$$\lambda u_2 = u_1$$

$$\lambda u_3 = u_2$$

$$\vdots$$

olduğundan $u_1 = u_2 = u_3 = \dots = 0$ olur ki bu yine u özvektörünün sıfırdan farklı olması ile çelişir. Sonuç olarak $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Tanım 1.5.40 (Spektrum (Bachman ve Narici, 1966)): X kompleks normlu lineer uzay ve A , X üzerinde tanımlı lineer operatör olmak üzere $\sigma_c(A) \cup \sigma_r(A) \cup \sigma_p(A)$ kümesine A nın spektrumu denir ve $\sigma(A)$ ile gösterilir.

Örnek 1.5.41 (Schmüdgen, 2012): M kümesi $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin boştan farklı kapalı bir alt kümesi olsun. $\mathbb{C}$ ayrılabilir olduğundan M kümesi de ayrılabilir. O halde, $\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subset M$ sayılabilir ve M de yoğun bir alt küme vardır. Şimdi,

$$D(A) = \{(u_n) \in l_2(\mathbb{N}) \mid (r_n u_n) \in l_2(\mathbb{N})\}$$

tanım kümesi olmak üzere, her $(u_n) \in l_2(\mathbb{N})$ için

$$A(u_n) = (r_n u_n)$$

olacak şekilde $l_2(\mathbb{N})$ uzayı üzerinde bir A operatörü tanımlansın. Kolay bir şekilde $D(A) = D(A^*)$ ve $A^*(u_n) = (\bar{r}_n u_n)$ olduğu bulunabilir. Buradan, $A = A^{**}$ olduğu açıkça görülür ki bu A operatörünün kapalı olduğu anlamına gelir. Son olarak da her r_n sayısı A operatörü için bir özdeğer ve $\sigma(A) = \overline{\{r_n : n \in \mathbb{N}\}} = M$ olduğu rahatlıkla görülür.

Örnek 1.5.42 (Halmos, 1974): Lineer sınırlı Volterra operatörü,

$$V: L_2(0,1) \rightarrow L_2(0,1),$$

$$Vf(x) = \int_0^x f(t) dt$$

olarak tanımlanır. O halde, Volterra operatörünün spektrum kümesi

$$\sigma(V) = \{0\}$$

şeklindedir.

Gerçekten, $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(V - \lambda I)f = g, \quad f, g \in L_2(0,1)$$

spektrum probleminin çözümüne bakılsın. Bunun için de aşağıdaki durumlar sırasıyla incelensin.

(a) $g = 0$, $\lambda \neq 0$ durumu için problem

$$(V - \lambda I)f = 0$$

şeklinde olup buradan,

$$\int_0^x f(t)dt = \lambda f(x), \quad f \in L_2(0,1)$$

eşitliği elde edilir. Bu integral denklemi ise

$$\begin{cases} f(x) = \lambda f'(x), & \lambda - \text{h.h.y.} \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

diferensiyel denklem olan sınır-değer problemine dönüştürülüp

$$f'(x) = \frac{1}{\lambda} f(x), \quad \lambda - \text{h.h.y.}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu diferensiyel denklemin çözümü de

$$f(x) = ce^{\frac{1}{\lambda}x}$$

şeklinde olur. Buradan $f(0) = 0$ sınır-değer şartını kullanılırsa $f(x) = 0$, $\lambda - \text{h.h.y.}$ bulunur ki bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ sayısının özdeğer olamayacağı anlamına ulaşılır.

(b) $g = 0$, $\lambda = 0$ durumu ele alındığında $Vf = 0$ olup

$$\int_0^x f(t)dt = 0, \quad f \in L_2(0,1)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan ise $f(x) = 0, \lambda - \text{h.h.y.}$ olduğu açıkça görülür ki $0 \notin \sigma_p(A)$ sonucuna ulaşılır.

Böylece, (a) ve (b) durumlarından $\sigma_p(A) = \emptyset$ olduğu elde edilir.

(c) $g \neq 0, \lambda \neq 0$ durumundan,

$$(V - \lambda I)f = g, \quad f, g \in L_2(0,1)$$

yani

$$\int_0^x f(t)dt - \lambda f(x) = g(x), \quad f, g \in L_2(0,1)$$

olur. Bu halde

$$h(x) := \int_0^x f(t)dt$$

olarak alınırsa integral denklemi

$$\begin{cases} h'(x) - \frac{1}{\lambda} h(x) = -\frac{1}{\lambda} g(x) \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

diferensiyel denklemine dönüşür. Bu denklemin genel çözümü

$$h(x) = ce^{\frac{1}{\lambda}x} - \frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} g(t)dt$$

olarak bulunur. Burada $h(0) = 0$ eşitliği kullanıldığında $c = 0$ olur ki

$$h(x) = -\frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} g(t)dt$$

eşitliği elde edilir. $h(x) = \int_0^x f(t)dt$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
(V - \lambda I)^{-1}g(x) = f(x) = h'(x) &= \left(-\frac{1}{\lambda} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} g(t) dt \right)' \\
&= -\frac{1}{\lambda} g(x) - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^x e^{\frac{1}{\lambda}(x-t)} g(t) dt
\end{aligned}$$

çözümüne varılır. Son eşitlikten $(V - \lambda I)^{-1}$ operatörünün varlığı ve

$$(V - \lambda I)^{-1} \in \mathfrak{B}(L_2(0,1))$$

olduğu elde edilir. Sonuç olarak,

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} = \rho(V)$$

olup

$$\sigma(V) = \{0\}$$

şeklindedir. Şimdi ise

(d) $g \neq 0$, $\lambda = 0$ durumunda ise $0 \in \sigma_c(V)$ olduğu açıktır.

Böylece,

$$\sigma(V) = \sigma_c(V) = \{0\}$$

bulunur.

Tanım 1.5.43 (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L., 1991): J reel eksen üzerinde bir aralık olmak üzere X Banach uzayında değer alan $u(t): J \rightarrow X$ fonksiyonlarına vektör değerli fonksiyonlar denir.

Tanım 1.5.44 (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L., 1991): Bir $u(t): J \rightarrow X$ vektör fonksiyonu için $t \rightarrow t_0$ iken

$$\|u(t) - u(t_0)\| \rightarrow 0$$

oluyorsa $u(t)$ vektör fonksiyonu $t_0 \in J$ noktasında süreklidir denir. Eğer $u(t)$ vektör fonksiyonu J aralığının her noktasında sürekli ise $u(t)$ süreklidir denir. Açıktır ki eğer

$u(t)$ vektör fonksiyonu J üzerinde sürekli ise $\|u(t)\|$ aynı aralıkta sürekli bir skaler fonksiyondur.

Tanım 1.5.45 (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L., 1991): Bir $u(t):J \rightarrow X$ vektör fonksiyonu için t_0 noktasında $\Delta t \rightarrow 0$ iken

$$\left\| \frac{u(t + \Delta t) - u(t)}{\Delta t} - v \right\| \rightarrow 0$$

olacak şekilde bir $v \in X$ var ise $u(t)$ vektör fonksiyonuna t_0 noktasında diferensiyellenebilir denir. Buradaki $v \in X$ elemanına $u(t)$ fonksiyonunun t_0 noktasındaki türevi denir ve $u'(t_0)$ ile gösterilir. Eğer $u(t)$ vektör fonksiyonu her $t \in J$ için diferensiyellenebilir ise $u(t)$ vektör fonksiyonu J aralığı üzerinde diferensiyellenebilir denir. Ayrıca $u'(t)$ vektör fonksiyonu sürekli ise $u(t)$ vektör fonksiyonuna sürekli diferensiyellenebilir denir.

Tanım 1.5.46 (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L., 1991): X değerli , $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı tüm $\sigma - integrallenebilir$ vektör fonksiyonların uzayı $L_1(X, [a, b], d\sigma)$ ile gösterilir ve bu uzay

$$\|u(t)\|_{L_1(X, [a, b], d\sigma)} = \int_a^b \|u(t)\|_X d\sigma(t)$$

olarak tanımlı norm ile bir Banach uzayıdır. Benzer şekilde

$$\|u(t)\|_{L_p(X, [a, b], d\sigma)} = \left(\int_a^b (\|u(t)\|_X)^p d\sigma(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlanan sonlu norm ile $u(t)$ vektör fonksiyonlarının $L_p(X, [a, b], d\sigma)$ uzayı da bir Banach uzayıdır.

Özel olarak, H bir Hilbert uzayı olmak üzere $p = 2$ ve $X = H$ seçilirse $L_2(H, [a, b], d\sigma)$ uzayı

$$(u, v)_{L_2(H, [a, b], d\sigma)} = \int_a^b (u(t), v(t))_H d\sigma(t) \quad u, v \in L_2(H, [a, b], d\sigma)$$

olarak tanımlanmış iç çarpım ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.5.47 (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L, 1991): A operatörü H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı kapalı simetrik bir operatör olsun. Eğer γ_1 ve γ_2 , $D(A^*)$ uzayından H uzayı içine tanımlı birer lineer dönüşümler olmak üzere;

i) Her $u, v \in D(A^*)$ için,

$$(A^*u, v) - (u, A^*v) = (\gamma_1 u, \gamma_2 v)_H - (\gamma_2 u, \gamma_1 v)_H$$

ii) Her $F_1, F_2 \in H$ için, $\gamma_1 u = F_1$ ve $\gamma_2 u = F_2$ eşitliklerini sağlayacak bir $u \in D(A^*)$ vardır,

koşulları sağlanıyorsa (H, γ_1, γ_2) üçlüsüne A operatörünün bir sınır değer uzayı denir.

Sınır değer uzay tanımından $u \in D(A)$ olması için gerek ve yeter şart $\gamma_1 u = \gamma_2 u = 0$ olmasıdır.

Tanım 1.5.48 (Schmüdgen, 2012): A operatörü, H Hilbert uzayı üzerinde bir lineer operatör olmak üzere, eğer

$$\operatorname{Re}(Ax, x)_H \geq 0, \forall x \in D(A)$$

oluyorsa A operatörüne akkretif operatördür denir. Eğer A lineer operatörü akkretif operatör, kapalı ve bazı $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda_0 < 0$ için $\operatorname{Range}(A - \lambda_0 I)$ uzayı H Hilbert uzayında yoğun ise A operatörüne m- akkretif operatör denir.

Eğer $-A$ lineer operatörü akkretif operatör ise A operatörü disipatif operatör ve $-A$ lineer operatörü m- akkretif operatör ise A operatörüne m-disipatif operatördür denir.

Önerme 1.5.49 (Schmüdegen, 2012) : H Hilbert uzayın üzerinde A ve B operatörleri birer simetrik operatör olsunlar. $T = A + iB$ olarak tanımlanan T operatörünün bir akkretif operatör olması için gerek ve yeter koşul $A \geq 0$ olmasıdır.

Teorem 1.5.50 (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L., 1991): H Hilbert uzayı üzerinde tanımlı A lineer kapalı simetrik operatörünün keyfi sınır değer uzayı (H, γ_1, γ_2) olsun. W operatörü H üzerinde bir daraltma ise A^* operatörünün kısıtlanması, her $f \in D(A^*)$ için

$$(W - I)\gamma_1 f + i(W + I)\gamma_2 f = 0 \quad (1.5.1)$$

veya

$$(W - I)\gamma_1 f - i(W + I)\gamma_2 f = 0 \quad (1.5.2)$$

koşulunu sağlıyorsa A lineer operatörünün bir maximal disipatif, aynı şekilde, bir maksimal akkümülatif genişlemesidir. Tersine, W bu genişleme tarafından tek türlü tanımlı bir daraltma operatör olmak üzere, A lineer operatörünün her maksimal disipatif (maksimal akkümülatif) genişlemesi, her $f \in D(A^*)$ için (1.5.1) ((1.5.2)) eşitliklerini sağlayan A^* operatörünün bir kısıtlanmasıdır. H üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemeleri, W bir izometrik operatör olmak üzere, (1.5.1) ((1.5.2)) eşitlikleri ile tanımlanır. Benzer şekilde, özeşlenik genişlemeler için W operatörü bir üniter operatördür.

Tanım 1.5.51 (Krein, 1971): Her $t \in [a, b]$ için,

$$A(.): [a, b] \rightarrow \mathfrak{B}(H),$$

$$A(t) \in \mathfrak{B}(H)$$

olarak tanımlanan fonksiyonu bir parametreye bağlı operatör veya operatör değerli fonksiyon (kısaca operatör fonksiyon) olarak adlandırılır. Her $x \in H$ için, eğer $A(t)x$ fonksiyonu sürekli (noktada veya aralıkta) ise $A(t)$ operatör fonksiyonuna güçlü sürekli (noktada veya aralıkta) denir.

Tanım 1.5.52 (Kreyszig, 1978): H kompleks Hilbert uzayı üzerinde $A : H \rightarrow H$ lineer sınırlı özeşlenik operatör tanımlansın. O halde, her $u \in H$ için eğer A lineer operatörü

$$(Au, u) \geq 0$$

eşitsizliği sağlıyor ise bir pozitif operatördür denir ve $A \geq 0$ ile gösterilir.

Tanım 1.5.53 (Kreyszig, 1978): H kompleks Hilbert uzayı üzerinde $A : H \rightarrow H$ bir pozitif sınırlı öz-eşlenik lineer operatör olarak tanımlansın. O halde, bir sınırlı öz-eşlenik lineer T operatörü

$$T^2 = A$$

eşitliğini sağlıyorsa A lineer operatörünün karakökü olarak adlandırılır. Ek olarak, eğer $T \geq 0$ ise T ye A operatörünün bir pozitif karakökü denir ve $T = A^{1/2}$ olarak gösterilir.

Örnek 1.5.54 (Rynne ve Youngson, 2008): λ_1, λ_2 birer pozitif reel sayı ve $A : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$,

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ olsun. Her } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, u_1, u_2 \in \mathbb{C} \text{ için,}$$

$$(Au, u) = \lambda_1 |u_1|^2 + \lambda_2 |u_2|^2 \geq 0$$

olduğundan A lineer operatörü bir pozitif operatördür.

Ayrıca, $B = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix}$ operatörü de

$$B^2 = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = A$$

olduğundan B operatörü A operatörünün bir pozitif kareköküdür.

Teorem 1.5.55 (Kreyszig, 1978): H kompleks Hilbert uzayı üzerinde $A: H \rightarrow H$ keyfi bir pozitif sınırlı öz-eşlenik operatörü olsun. O halde A lineer operatörü tek türlü tanımlı T pozitif karekök operatörüne sahiptir. Ayrıca, T pozitif karekök operatörü A operatörü ile değişmeli olan H üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer operatörlerle değişmelidir.

Tanım 1.5.56 (Daleckiı ve Krein, 1974): J sonlu veya sonsuz bir aralık, $B(\cdot)$ bir operatör fonksiyon olmak üzere,

$$\frac{d(u(t))}{dt} = B(t)u(t),$$

$$u(s) = I, \quad s \in J$$

diferensiyel operatör denklemi için bakılan başlangıç değer probleminin $u(t) = U(t, s)$, $t, s \in J$ operatör çözümüne

$$\frac{d}{dt} = B(t), \quad t \in J$$

diferensiyel denkleminin karşılık gelen evolüsyon operatörler ailesi denir. Ayrıca, $U(t) = U(t, 0)$, $t \in J$, operatörüne Cauchy operatörü denir.

Teorem 1.5.57 (Schmüdgen, 2012): T operatörü H üzerinde yoğun tanımlı simetrik operatör olmak üzere, $\mathcal{H}_+ \subset \text{Ker}(T^* - i)$, $\mathcal{H}_- \subset \text{Ker}(T^* + i)$ uzaylarının H Hilbert uzayının $\dim \mathcal{H}_+ = \dim \mathcal{H}_-$ koşulunu sağlayan kapalı lineer alt uzayları ve U ise $\mathcal{H}_+$ uzayından $\mathcal{H}_-$ uzayı üzerine tanımlı bir izometrik lineer dönüşüm olduğu varsayılınsın. Şimdi, $\oplus$ sembolü ile vektör uzaylarının direkt toplam gösterilmek üzere, her $x \in D(\bar{T})$ ve $y \in \mathcal{H}_+$ için,

$$D(T_U) = D(\bar{T}) \oplus (I - U)\mathcal{H}_+ \quad \text{ve} \quad T_U = T^*|_{D(T_U)}$$

$$T_U(x + (I - U)y) = \bar{T}x + iy + iUy$$

tanımlansın. O halde, T_U bir kapalı simetrik operatördür öyle ki $T \subset T_U$ ve ayrıca H üzerindeki T operatörünün her kapalı simetrik genişlemesi bu formdadır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Birinci Mertebeden Dejenere Diferensiyel Operatörlerin Normal Genişlemeleri

2.1.1. Normal Genişlemelerin Tanımlanması

Bu kısımda H ile ayrılabilir Hilbert uzay, $\mathfrak{B}(H)$ ile H Hilbert uzayındaki lineer sınırlı operatörlerin uzayı ve $L^2 = L^2(H, (a, b))$ ile de sonlu (a, b) aralığından H ayrılabilir Hilbert uzayına tanımlı vektör fonksiyonlarının Hilbert uzayı olsun. O halde, L^2 uzayında birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi,

$$l(u(t)) = (Au(t))' + B(t)u(t) \quad (2.1.1.1)$$

olarak ele alınsın. Bu ifadede, $\text{Ker} A$ triviyal olmayan bir alt uzay ve $\overline{\text{Range} A} = \text{Range} A$ olmak üzere $A: H \rightarrow H$ pozitif özeşlenik operatör ve $B(t): [a, b] \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ ise bir güçlü sürekli ve güçlü türevlenebilir özeşlenik operatör fonksiyonu olarak alınmaktadır.

Bu durumda,

$$\begin{aligned} (l(u), v(t))_{L^2} &= ((Au(t))' + B(t)u(t), v(t))_{L^2} \\ &= ((Au(t))', v(t))_{L^2} + (B(t)u(t), v(t))_{L^2} \\ &= \int_a^b ((Au(t))', v(t))_H dt + (u(t), B(t)v(t))_{L^2} \\ &= (u(t), -(Av(t))')_{L^2} + (u(t), B(t)v(t))_{L^2} + (Au(t), v(t))_H \Big|_a^b \\ &= (u(t), -(Av(t))' + B(t)v(t))_{L^2} + (u(t), Av(t))_H \Big|_a^b \end{aligned}$$

olduğundan L^2 uzayında (2.1.1.1) ifadesinin formal eşleniği

$$l^+(v) = -(Av(t))' + B(t)v(t) \quad (2.1.1.2)$$

şeklindedir. Şimdi, vektör fonksiyonlarının bir yoğun lineer monifoldu olan

$$D'_0 := \left\{ u(t) \in L^2 : u(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)u_k, f_k(t) \in C_0^\infty(a, b), u_k \in H, \quad n \in \mathbb{N} \right\}$$

üzerinde $L'_0 u(t) := l(u(t))$ olacak şekilde L'_0 operatörü tanımlansın. Burada $\overline{D'_0} = L^2$ olduğu da açıkça görülür. Şimdi, L'_0 eşlenik operatörünün tanım kümesi D'_0 yoğun lineer manifoldunu içerdiğinden L'_0 operatörü bir kapanışa sahiptir (Schmüdgen, 2012). L^2 uzayındaki L'_0 operatörünün kapanışına (2.1.1.1) deki diferensiyel operatör ifadesi tarafından doğrulan minimal operatör denir. Bu minimal operatör de L_0 ile gösterilir.

Aynı şekilde, L^2 uzayındaki (2.1.1.2) diferensiyel operatör ifadesi tarafından L_0^+ minimal operatörü tanımlanabilir. L^2 uzayındaki L_0^+ ve L_0 operatörlerinin eşlenik operatörlerine (2.1.1.1) ve (2.1.1.2) ifadeleri tarafından doğrulan maksimal operatörler denir ve sırasıyla L ve L^+ ile gösterilir (Hörmander, 1955; Gorbachuk V.I. ve Gorbachuk M.L., 1991; Brezansky, 1968). Tanımlardan,

$$L_0 \subset L, \quad L_0^+ \subset L^+$$

bağıntıları doğrudur. Üstelik,

$$D(L_0) = \left\{ u(t) \in L^2 : (Au(t))' \in L^2 \text{ ve } u(a), u(b) \in \text{Ker} A \right\}$$

ve

$$D(L) = \{ u \in L^2 : (Au(t))' \in L^2 \}$$

olduğu açıktır.

Bu kısım boyunca; H_0 ve H_1 ile sırasıyla $\text{Ker} A$ ve $\text{Range} A$ uzayları ve $A_0, A_1, B_0(t)$ ve $B_1(t)$ notasyonları ile sırasıyla $A|_{H_0}, A|_{H_1}, B(t)|_{H_0}$ ve $B(t)|_{H_1}$ kısıtlanmış operatörleri gösterilsin.

Teorem 2.1.1.1. $\|B'(t)\| \in L^2(a, b)$ olsun. L^2 uzayında L_0 minimal operatörünün formal normal operatör olması için gerek ve yeter şart

- i) $AB(t) = B(t)A$, her $t \in [a, b]$ için
- ii) $AB'(t) = 0$, h.h.y. $t \in [a, b]$,

eşitliklerinin sağlanmasıdır.

İspat: Varsayalım ki L_0 minimal operatörü L^2 uzayında bir formal normal operatör olsun. O halde, her $u(t) \in D(L_0) \subset D(L_0^*)$ için

$$(L_0 u(t), L_0 v(t))_{L^2} - (L_0^* u(t), L_0^* v(t))_{L^2} = 0$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Şimdi, $u(t) = u_1(t) + u_0(t)$, $v(t) = v_1(t) + v_0(t)$, $u_1(t), v_1(t) \in H_1$ ve $u_0(t), v_0(t) \in H_0$ için keyfi $u(t), v(t) \in D(L_0)$ fonksiyonları ele alınsın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} & (L_0 u(t), L_0 v(t))_{L^2} - (L_0^* u(t), L_0^* v(t))_{L^2} \\ &= \left((Au(t))' + B(t)u(t), (Av(t))' + B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ & \quad - \left(-(Au(t))' + B(t)u(t), -(Av(t))' + B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ &= (Au_1'(t), Av_1'(t))_{L^2} + (Au_1'(t), B(t)v(t))_{L^2} + (B(t)u(t), Av_1'(t))_{L^2} \\ & \quad + (B(t)u(t), B(t)v(t))_{L^2} - (Au_1'(t), Av_1'(t))_{L^2} + (Au_1'(t), B(t)v(t))_{L^2} \\ & \quad + (B(t)u(t), Av_1'(t))_{L^2} - (B(t)u(t), B(t)v(t))_{L^2} \\ &= 2 \left[\left((Au(t))', B(t)v(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), (Av(t))' \right)_{L^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.1.3}$$

denklemini sağlanır. Burada, H_1 uzayı üzerindeki A_1 kısıtlanış operatörünün sınırlı tersi olduğundan $u_1'(t)$ tanımlıdır. Dolayısıyla $(Au(t))' = Au_1'(t)$ eşitliği kullanılabilir. Ayrıca, (2.1.1.3) eşitliğinde $e^{it}u(t), e^{it}v(t) \in D(L_0)$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \left(B(t) \left(A e^{it} u(t) \right)' , e^{it} v(t) \right)_{L^2} + \left(B(t) e^{it} u(t), \left(A e^{it} v(t) \right)' \right)_{L^2} \\
&= i \left(B(t) A e^{it} u_1(t), e^{it} v(t) \right)_{L^2} + \left(B(t) A e^{it} u_1'(t), e^{it} v(t) \right)_{L^2} \\
&- i \left(AB(t) e^{it} u(t), e^{it} v_1(t) \right)_{L^2} + \left(AB(t) e^{it} u(t), e^{it} v_1'(t) \right)_{L^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki buradan

$$\begin{aligned}
& i \left[\left(B(t) A u_1(t), v(t) \right)_{L^2} - \left(AB(t) u(t), v(t) \right)_{L^2} \right] + \left(B(t) A u_1'(t), v(t) \right)_{L^2} + \left(AB(t) u(t), v_1'(t) \right)_{L^2} \\
&= i \left[\left(B(t) A u(t), v(t) \right)_{L^2} - \left(AB(t) u(t), v(t) \right)_{L^2} \right] + \left((A u(t))', B(t) v(t) \right)_{L^2} \\
&+ \left(B(t) u(t), (A v(t))' \right)_{L^2} = 0
\end{aligned}$$

eşitliği doğrudur. Burada (2.1.1.3) eşitliği kullanılırsa

$$\left((B(t)A - AB(t))u(t), v(t) \right)_{L^2} = 0$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik, $D(L_0)$ kümesi L^2 uzayında yoğun ve $B(t)$ sürekli operatör fonksiyonu olduğundan,

$$AB(t) = B(t)A, \quad \forall t \in [a, b]$$

eşitliğine ulaşılır. Son olarak (2.1.1.3) eşitliğinde elde edilen bu son eşitlik kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& (L_0 u(t), L_0 v(t))_{L^2} - (L_0^* u(t), L_0^* v(t))_{L^2} = 2(AB'(t)u(t), v(t))_{L^2} \\
&= 0, \quad \forall u(t), v(t) \in D(L_0)
\end{aligned}$$

olur ki bunun sonucu olarak

$$AB'(t) = 0 \quad h.h.y. \quad t \in [a, b]$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Teoremin tersi ise (2.1.1.3) eşitliğinden rahatlıkla elde edilir. $\square$

Teorem 2.1.1.2. L^2 Hilbert uzayında, (2.1.1.1) diferensiyel ifadenin ürettiği L_0 minimal operatörü formal normal operatör olsun. O halde, her L_n normal genişlemesi, $L_0 \subset L_n \subset L$, $WA^{1/2}u(a) = A^{1/2}u(b)$ (2.1.1.4)

sınır değer koşulu tarafından verilir. Burada $W: H_1 \rightarrow H_1$ bir üniter operatördür ve $B_1(a), B_1(b): H_1 \rightarrow H_1$ kısıtlama operatörleri

$$B_1(b)W = WB_1(a)$$

eşitliğini sağlar. Aynı zamanda her L_n normal genişlemesi tarafından W operatörü tek türdür. Bu durumda, $L_n = L_W$.

Tersine, L maksimal operatörünün

$$B_1(b)W = WB_1(a)$$

eşitliğini sağlayan keyfi bir $W: H_1 \rightarrow H_1$ üniter operatörü için (2.1.1.4) sınır değer koşulunu sağlayan vektör fonksiyonların lineer manifoldu üzerine kısıtlanışı L^2 uzayında L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesidir.

İspat: Formal normal olan L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi L_n operatörü olarak belirlensin. Şimdi, $u(t) \in D(L_n)$ için

$$Im(L_n)u(t) = -i(Au(t))'$$

$$Re(L_n)u(t) = B(t)u(t)$$

olarak tanımlanan operatörler L^2 uzayında birer özeşlenik operatörlerdir. Gerçekten de her $u(t), v(t) \in D(L_n) = D(L_n^*)$ öyle ki $u(t) = u_1(t) + u_0(t)$, $v(t) = v_1(t) + v_0(t)$, $u_1(t), v_0(t) \in H_1$, $u_0(t), v_0(t) \in H_0$ için,

$$(Re(L_n)u(t), v(t))_{L^2} = (B(t)u(t), v(t))_{L^2} = (u(t), B(t)v(t))_{L^2}$$

ve

$$\begin{aligned} (Im(L_n)u(t), v(t))_{L^2} &= (-i(Au(t))', v(t))_{L^2} = -i(u_1'(t), Av_1(t))_{L^2} \\ &= -i \left[(u_1(t), Av_1(t))_H \Big|_a^b - (u_1(t), (Av_1(t)))'_{L^2} \right] \\ &= (u(t), -i(Av(t))')_{L^2} \end{aligned}$$

eşitliklerinden $Re(L_n)$ ve $Im(L_n)$ operatörlerinin özeşlenik operatör olduğu rahatlıkla görülür.

Şimdi,

$$\mathcal{H} := H_1$$

$$\gamma_1(u) := \frac{A^{1/2}u(b) + A^{1/2}u(a)}{\sqrt{2}}$$

$$\gamma_2(u) := \frac{-A^{1/2}u(b) + A^{1/2}u(a)}{i\sqrt{2}}$$

olmak üzere, $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ üçlüsünün $Im(L_0)$ minimal operatörü için L^2 uzayında bir sınır değer uzayıdır. Gerçekten, $u_1(t), v_0(t) \in H_1$, $u_0(t), v_1(t) \in H_0$ ve $u(t) = u_1(t) + u_0(t)$, $v(t) = v_1(t) + v_0(t)$ olmak üzere, her $u(t), v(t) \in D(Im(L_0)^*)$ için,

$$\begin{aligned} & (Im(L_0)^*u(t), v(t))_{L^2} - (u(t), Im(L_0)^*v(t))_{L^2} \\ &= \left(-i(Au(t))', v(t) \right)_{L^2} - \left(u(t), -i(Av(t))' \right)_{L^2} \\ &= \int_a^b (-iAu_1'(t), v_1(t))_H dt - \int_a^b (u_1(t), -iAv_1'(t))_H dt \\ &= - \int_a^b (-iu_1(t), Av_1'(t))_H dt - \int_a^b (u_1(t), -iAv_1'(t))_H dt + (-iu_1(t), Av_1(t))_H \Big|_a^b \\ &= (-iA_1u_1(b), v_1(b))_H - (-iA_1u_1(a), v_1(a))_H \\ &\quad + i \int_a^b (u_1(t), Av_1'(t))_H dt - i \int_a^b (u_1(t), Av_1'(t))_H dt \\ &= i \left[(Au(a), v(a))_H - (Au(b), v(b))_H \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H \\
&= \left(\frac{A^{1/2}u(a) + A^{1/2}u(b)}{\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(a) - A^{1/2}v(b)}{i\sqrt{2}} \right)_H \\
&\quad - \left(\frac{A^{1/2}u(a) - A^{1/2}u(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(a) + A^{1/2}v(b)}{\sqrt{2}} \right)_H \\
&= \left(\frac{A^{1/2}u(a)}{\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(a)}{i\sqrt{2}} \right)_H - \left(\frac{A^{1/2}u(a)}{\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(b)}{i\sqrt{2}} \right)_H \\
&\quad + \left(\frac{A^{1/2}u(b)}{\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(a)}{i\sqrt{2}} \right)_H - \left(\frac{A^{1/2}u(b)}{\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(b)}{i\sqrt{2}} \right)_H \\
&\quad - \left(\frac{A^{1/2}u(a)}{i\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(a)}{\sqrt{2}} \right)_H - \left(\frac{A^{1/2}u(a)}{i\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(b)}{\sqrt{2}} \right)_H \\
&\quad + \left(\frac{A^{1/2}u(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(a)}{\sqrt{2}} \right)_H + \left(\frac{A^{1/2}u(b)}{i\sqrt{2}}, \frac{A^{1/2}v(b)}{\sqrt{2}} \right)_H \\
&= -\frac{1}{2i} (Au(a), v(a))_H + \frac{1}{2i} (Au(a), v(b))_H - \frac{1}{2i} (Au(b), v(a))_H \\
&\quad + \frac{1}{2i} (Au(b), v(b))_H - \frac{1}{2i} (Au(a), v(a))_H - \frac{1}{2i} (Au(a), v(b))_H \\
&\quad + \frac{1}{2i} (Au(b), v(a))_H + \frac{1}{2i} (Au(b), v(b))_H \\
&= \frac{1}{i} [(Au(b), v(b))_H - (Au(a), v(a))_H] \\
&= i [(Au(a), v(a))_H - (Au(b), v(b))_H]
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$(Im(L_0)^*u(t), v(t))_{L^2} - (u(t), Im(L_0)^*v(t))_{L^2} = (\gamma_1(u), \gamma_2(v))_H - (\gamma_2(u), \gamma_1(v))_H$$

eşitliği sağlanır. Şimdi, her $x_1, x_2 \in H_1$ için

$$u_{x_1, x_2}(t) = \left(A_1^{1/2} \right)^{-1} \left[\frac{x_2 i \sqrt{2}(a-t)}{b-a} + \frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}} \right]$$

tanımlansın. Açık ki $u_{x_1, x_2}(t) \in D(Im(L_0)^*)$ olup

$$u_{x_1, x_2}(a) = \left(A_1^{1/2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}}\right)$$

ve

$$u_{x_1, x_2}(b) = \left(A_1^{1/2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1 - ix_2}{\sqrt{2}}\right)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan da

$$\begin{aligned} \gamma_1(u_{x_1, x_2}) &= \frac{A_1^{1/2}u_0(b) + A_1^{1/2}u_0(a)}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{A_1^{1/2} \left(A_1^{1/2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}}\right) + A_1^{1/2} \left(A_1^{1/2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1 - ix_2}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}} = x_1 \end{aligned}$$

ve

$$\gamma_2(u_{x_1, x_2}) = \frac{A_1^{1/2} \left(A_1^{1/2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1 + ix_2}{\sqrt{2}}\right) - A_1^{1/2} \left(A_1^{1/2}\right)^{-1} \left(\frac{x_1 - ix_2}{\sqrt{2}}\right)}{i\sqrt{2}} = x_2$$

eşitlikleri elde edilir. O halde, $(\mathcal{H}, \gamma_1, \gamma_2)$ üçlüsü $Im(L_0)$ minimal operatörü için $L_2(H, (a, b))$ uzayında bir sınır değer uzayı olur. Ayrıca, $u(t), v(t) \in D(Im(L_0))$ için,

$$\begin{aligned} (Im(L_0)u(t), v(t))_{L^2} &= (-iAu_1'(t), v_1(t))_{L^2} = -i(u_1'(t), Av_1(t))_{L^2} \\ &= -i \int_a^b (u_1'(t), Av_1(t))_H dt \\ &= -i \left[(u_1(t), Av_1(t))_H \Big|_a^b - \int_a^b (u_1(t), (Av_1(t))'_H) dt \right] \\ &= -i \left[(u_1(t), Av_1(t))_H \Big|_a^b - (u_1(t), (Av_1(t))'_H) \right]_{L^2} = (u(t), -i(Av(t))'_H)_{L^2} \\ &= (u(t), Im(L_0)v(t))_{L^2} \end{aligned}$$

olduğundan $Im(L_0)$ bir simetrik operatördür. Yani $D(Im(L_0)) \subset D(Im(L_0)^*)$ olur. Bu durumda $Im(L_n)$, L^2 üzerindeki $Im(L_0)$ minimal operatörünün özeşlenik genişlemelerinden biridir. Ayrıca, $Im(L_n)$ genişlemesi tarafından tek türlü tanımlanan bir $W: H_1 \rightarrow H_1$ üniter operatörü vardır öyle ki $Im(L_n)$ özeşlenik genişlemesi

$$(W - I)\gamma_1(u) + i(W + I)\gamma_2(u) = 0$$

sınır değer koşulu ile tanımlanır (Gorbachuk V.I ve Gorbachuk M.L., 1991). Buradan,

$$\begin{aligned} & (W - I) \left(\frac{A^{1/2}u(a) + A^{1/2}u(b)}{\sqrt{2}} \right) + i(W + I) \left(\frac{A^{1/2}u(a) - A^{1/2}u(b)}{i\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{\left(WA^{1/2}u(a) + WA^{1/2}u(b) - A^{1/2}u(a) - A^{1/2}u(b) + WA^{1/2}u(a) - WA^{1/2}u(b) + A^{1/2}u(a) - A^{1/2}u(b) \right)}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \left(WA^{1/2}u(a) - A^{1/2}u(b) \right) = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ki $Im(L_n)$ özeşlenik genişlemesinin $u \in D(L_n)$ için

$$A^{1/2}u(b) = WA^{1/2}u(a)$$

sınır değer koşulu ile belirlendiği görülür. L_n operatörü, L_0 minimal operatörün bir normal genişleme operatörü olduğundan her $u(t) \in D(L_n) = D(L_n^*)$ için,

$$\begin{aligned} & (L_n u(t), L_n v(t))_{L^2} - (L_n^* u(t), L_n^* v(t))_{L^2} \\ &= \left((Au(t))' + B(t)u(t), (Av(t))' + B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ &\quad - \left(-Au'(t) + B(t)u(t), -Av'(t) + B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ &= \left((Au(t))', (Av(t))' \right)_{L^2} + \left((Au(t))', B(t)v(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), (Av(t))' \right)_{L^2} \\ &\quad + \left(B(t)u(t), B(t)v(t) \right)_{L^2} - \left(Au'(t), Av'(t) \right)_{L^2} + \left(Au'(t), B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ &\quad + \left(B(t)u(t), Av'(t) \right)_{L^2} - \left(B(t)u(t), B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ &= \left(Au'(t), B(t)v(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), Av'(t) \right)_{L^2} + \left(Au'(t), B(t)v(t) \right)_{L^2} \\ &\quad + \left(B(t)u(t), Av'(t) \right)_{L^2} = 2 \left[\left(Au'(t), B(t)v(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), Av'(t) \right)_{L^2} \right] \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.1.5}$$

eşitliği sağlanır. Bu son eşitlik ve Teorem 2.1.1.1. den dolayı

$$2(B(t)Au(t), v(t))'_{L^2} = 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca, sınırlı pozitif operatör ile değişmeli olan tüm sınırlı operatörler sınırlı pozitif operatörünün kök operatörü ile de değişmeli olup (Kreyszig, 1978), bir önceki eşitlikten

$$\begin{aligned}
& (B(b)Au(b), v(b))_H - (B(a)Au(a), v(a))_H \\
&= \left(B_1(b)A_1A_1^{-1/2}WA_1^{1/2}u(a), A_1^{-1/2}WA_1^{1/2}v(a) \right)_H \\
&\quad - (B_1(a)A_1u(a), v(a))_H \\
&= \left(A_1^{1/2}W^*A_1^{-1/2}B_1(b)A_1A_1^{-1/2}WA_1^{1/2}u(a), v(a) \right)_H \\
&\quad - (B_1(a)A_1u(a), v(a))_H \\
&= \left(A_1^{1/2}W^*A_1^{-1/2}B(b)A_1A_1^{-1/2}WA_1^{1/2}u(a) - B(a)A_1u(a), v(a) \right)_H \\
&= \left(A_1^{1/2}[W^*B_1(b)W - B_1(a)]A_1^{1/2}u(a), v(a) \right)_H = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son denklemden

$$B_1(b)W = WB_1(a)$$

eşitliği sağlanmalıdır. Varsayalım ki öyle olmasın. Şimdi,

$$H_a = \{u(a) \in H : u(t) \in D(L_n)\}$$

$$H_b = \{u(b) \in H : u(t) \in D(L_n)\}$$

alt uzayları tanımlansın öyle ki $H_a^\perp$ ve $H_b^\perp$ uzaylarından en az biri H_1 içinde sıfır vektör uzayından farklı olmak zorundadır. Ayrıca, her $x_0 \in H_0$ için $u_{x_0}(t) = x_0$, $t \in [a, b]$ tanımlanabilir ve $u_{x_0}(t) \in D(L_0) \subset D(L_n)$ olup buradan $H_0 \subset H_a \cap H_b$ bağıntısı elde edilir. Şimdi, her $x \in H_a^\perp \neq \{0\}$ ise

$$u_x(t) = (t - a)A_1^{-1}x$$

fonksiyonu tanımlansın. Bu durumda, $u_x(t) \in D(L_n)$ olmalıdır. Aksi takdirde,

$$\widetilde{L}_n u(t) = (Au(t))' + B(t)u(t)$$

ve

$$D(\widetilde{L}_n) = \text{span}\{D(L_n), u_x\}$$

olan L_n operatörünün bir $\widetilde{L}_n$ genişlemesi vardır.

Şimdi, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $u_{11}(t) \in D(L_n)$ için, her $u_1(t) = \alpha u_{11}(t) + \beta u_x(t) \in D(\widetilde{L}_n)$ ve $u_2(t) \in D(\widetilde{L}_n)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \left(\widetilde{L}_n u_1(t), u_2(t) \right)_{L^2} \\
&= \left(\widetilde{L}_n (\alpha u_{11}(t) + \beta u_x(t)), u_2(t) \right)_{L^2} \\
&= \left(\alpha L_n(u_{11}(t)) + \beta \widetilde{L}_n(u_x(t)), u_2(t) \right)_{L^2} \\
&= \left(\alpha L_n(u_{11}(t)), u_2(t) \right)_{L^2} + \left(\beta \widetilde{L}_n(u_x(t)), u_2(t) \right)_{L^2} \\
&= \left(\alpha u_{11}(t), L_n^*(u_2(t)) \right)_{L^2} + \left(\beta u_x(t), \widetilde{L}_n^*(u_2(t)) \right)_{L^2} \\
&= \left(\alpha u_{11}(t) + \beta u_x(t), L_n^*(u_2(t)) + \widetilde{L}_n^*(u_2(t)) \right)_{L^2} = (u_1(t), v(t))_{L^2}
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan $v(t) \in H$ vardır. Burada, L_n yoğun tanımlı olduğundan $\widetilde{L}_n$ yoğun tanımlı olur ki bu sayede $\widetilde{L}_n^*$ varlığından bahsedilebildi. Dolayısıyla, $D(\widetilde{L}_n) \subset D(\widetilde{L}_n^*)$ olduğu görülebilir. Ayrıca, $D(L_n) \subset D(\widetilde{L}_n)$ olduğundan $D(\widetilde{L}_n^*) \subset D(L_n^*)$ olacağından (Schmüdgen, 2012),

$$D(L_n) \subset D(\widetilde{L}_n) \subset D(\widetilde{L}_n^*) \subset D(L_n^*) = D(L_n)$$

olur ki buradan $D(L_n) = D(\widetilde{L}_n^*)$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $H_a^\perp = \{0\}$ ve $H_b^\perp = \{0\}$. Sonuç olarak her $u \in D(L_n)$ için

$$B_1(b)W = WB_1(a)$$

eşitliği sağlanır.

Tersine, W operatörü H_1 içinde bir üniter operatör olmak üzere

$$B_1(b)W = WB_1(a)$$

eşitliği sağlansın. O halde, L_w operatörü L^2 içinde $l(u)$ ifadesi tarafından (2.1.1.4) deki sınır değer koşulu ile tanımlanır öyle ki

$$L_w u(t) = (Au(t))' + B(t)u(t)$$

$$D(L_w) = D(L) \cap \left\{ u \in L^2 : (Au(t))' \in L^2 \text{ ve } A_1^{1/2}u(b) = WA_1^{1/2}u(a) \right\}.$$

Dahası, L_W^* eşlenik operatörü her $v(t) \in D(L_W^*)$ için

$$l^*(v) = -(Av(t))' + B(t)v(t)$$

diferensiyel ifadesi olarak tanımlanır ve

$$A^{1/2}v(a) = W^*A^{1/2}v(b)$$

sınır değer koşulunu sağlar. Ayrıca, W operatörünün üniterliğinden $D(L_w) = D(L_W^*)$ olduğu açıktır ve L^2 uzayındaki normal olduğu (2.1.1.5) denkleminde elde edilir. $\square$

Örnek 2.1.1.3: Eğer $H := \mathbb{C}^2$ olması durumunda bir $W: \text{Span}\{(0,1)\} \rightarrow \text{Span}\{(0,1)\}$ üniter operatörü $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ ve $|\alpha| = 1 = |\mu|$ olmak üzere,

$$W := \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edilir.

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$B(t) := \begin{bmatrix} \sin^2 t & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

şeklinde olup,

- i) $AB(t) = B(t)A$, her $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için
- ii) $AB'(t) = 0$ h.h.y $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ için

koşulları sağlanıp

$$WA^{1/2}u\left(-\frac{\pi}{2}\right) = A^{1/2}u\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

ve ayrıca

$$B_1\left(-\frac{\pi}{2}\right)W = WB_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

koşulları altında formal normal olan L_0 minimal operatörün normal genişlemeleri mevcuttur ve

$$L_w u(t) = (Au(t))' + B(t)u(t), u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in L^2\left(H, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right), \mu u_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = u_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

sınır değerleriyle ifade edilir.

2.1.2. Normal Genişlemelerin Spektrum Yapısı

Bu kısımda, W bir üniter operatör olmak üzere, H_1 uzayının içinde $B_1(b)W = WB_1(a)$ eşitliğini sağlayan, L^2 uzayındaki (2.1.1.1) dejenere diferensiyel operatör ifadesi ve (2.1.1.4) deki sınır değer koşulları tarafından doğrulan L_0 minimal operatörün L_w normal genişlemesinin spektrum kümesi araştırıldı.

Şimdi, $t, s \in [a, b]$ ve $f \in H_1$ için,

$$U_t(t, s)f + A_1^{-1}B(t)U(t, s)f = 0 \quad (2.1.2.1)$$

eşitliğini sağlayan $U(t, s)$ evölüsyon operatör mevcuttur (Daleckii, ve Krein 1974; Goldstein 1985; Krein 1971). Ayrıca, $U(t, s)$ evölüsyon operatörü

- i) $U(s, s) = I$
- ii) $U(t, s) = (U(s, t))^{-1}$
- iii) $U(t, s)U(s, k) = U(t, k)$

özelliklerini sağlar. Dahası, A_1 operatörü ile $U(t, s)$ evölüsyon operatörü her $t, s \in [a, b]$ için değişmelidir.

Teorem 2.1.2.1. L_0 minimal operatörün L_w normal genişlemesinin spektrum kümesi

$$\sigma(L_w) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : 1 \in \sigma\left(W^*U(a, b)e^{\lambda A_1^{-1}(a-b)}\right) \right\} \cup \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(B_0(t)), h. h. y. t \in [a, b] \right\}$$

formundadır.

İspat: L_0 minimal operatörün L_w normal genişlemesinin spektrumunu bulabilmek için, $u(t) \in D(L_w)$, $f(t) \in L^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$(L_w - \lambda I)u(t) = f(t)$$

eşitliğinden

$$L_w u = (Au(t))' + B(t)u(t) = \lambda u(t) + f(t) \quad (2.1.2.2)$$

problemi göz önüne alınır.

Her $t \in [a, b]$ için $u(t) = u_1(t) + u_0(t)$, $v(t) = f_1(t) + f_0(t)$, $f_i, u_i(t) \in H_i$, $i = 0, 1$ olsun. Ayrıca, H_1 uzayı üzerindeki A_1 kısıtlanmış operatörünün sınırlı tersi olduğundan $u_1'(t)$ tanımlıdır. O halde, (2.1.2.2) denklemi için

$$\begin{cases} u_1'(t) + A_1^{-1}(B(t) - \lambda)u_1(t) = A_1^{-1}f_1(t) \end{cases} \quad (2.1.2.3)$$

$$(B(t) - \lambda)u_0(t) = f_0(t) \quad (2.1.2.4)$$

denklemin sisteminin çözümüne bakılır. O halde, (2.1.2.3) diferensiyel denkleminin genel çözümü,

$$u_{\lambda,1}(t) = e^{\lambda A_1^{-1}(t-a)}U(t, a)x + \int_a^t e^{\lambda A_1^{-1}(t-s)}U(t, s)A_1^{-1}f_1(s)ds, \quad x \in H_1$$

olarak bulunur. Bundan dolayı, bu diferensiyel denklemin L^2 uzayındaki genel çözümü,

$$u_{\lambda,1}(t) = e^{\lambda A_1^{-1}(t-a)}U(t, a)x + \int_a^t e^{\lambda A_1^{-1}(t-s)}U(t, s)A_1^{-1}f_1(s)ds, \quad x \in H_1$$

$$(B_0(t) - \lambda I)u_{\lambda,0}(t) = f_0(t)$$

formundadır. Buradan,

$$u_{\lambda,1}(a) = x$$

ve

$$u_{\lambda,1}(b) = e^{\lambda A_1^{-1}(b-a)} U(b,a)x + \int_a^b e^{\lambda A_1^{-1}(b-s)} U(b,s) A_1^{-1} f_1(s) ds, \quad x \in H_1$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi, W operatörü H_1 uzayı içinde üniter operatör olduğundan ve $A_1^{1/2} u_{\lambda,1}(b) = W A_1^{1/2} u_{\lambda,1}(a)$ sınır değer koşulu üstteki eşitlikte kullanılırsa, $x \in H_1$ için,

$$W^* A_1^{1/2} u_{\lambda,1}(b) = W^* A_1^{1/2} e^{\lambda A_1^{-1}(b-a)} U(b,a)x + W^* A_1^{1/2} \int_a^b e^{\lambda A_1^{-1}(b-s)} U(b,s) A_1^{-1} f_1(s) ds$$

eşitliğinden,

$$A_1^{1/2} x = W^* A_1^{1/2} e^{\lambda A_1^{-1}(b-a)} U(b,a)x + W^* \int_a^b e^{\lambda A_1^{-1}(a-s)} U(b,s) A_1^{-1/2} f_1(s) ds$$

elde edilir ki buradan

$$(W^* U(a,b) e^{\lambda A_1^{-1}(a-b)} - I) A_1^{1/2} x = -W^* \int_a^b e^{\lambda A_1^{-1}(a-s)} U(a,s) A_1^{-1/2} f_1(s) ds$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan açıkça görülür ki $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı L_w normal genişlemesinin spektrumunda olabilmesi için gerek ve yeter şart $t \in [a, b]$ için

$$1 \in \sigma(W^* U(a,b) e^{\lambda A_1^{-1}(a-b)})$$

veya

$$\lambda \in \sigma(B_0(t))$$

olmasıdır. $\square$

Sonuç 2.1.2.2. Triviyal olmayan bir alt uzayda A operatörü projeksiyon operatör ise L_0 minimal operatörün L_w normal genişlemesinin spektrum kümesi

$$\begin{aligned} \sigma(L_w) = & \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \lambda = \frac{1}{b-a} (\ln|\mu| + i(\arg\mu + 2k\pi)), \mu \in \sigma(W^* U(b,a)), k \in \mathbb{Z} \right\} \\ & \cup \{ \lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in \sigma(B_0(t)), h. h. y. t \in [a, b] \} \end{aligned}$$

olur.

Sonuç 2.1.2.3. Eğer L_0 minimal operatörü formal normal ise $\sigma(L_0) = \mathbb{C}$ olur.

2.2.Birinci Mertebeden Dejenere Diferensiyel Operatörlerin Maksimal Hiponormal Genişlemeleri

2.2.1. Maksimal Hiponormal Genişlemelerin Tanımlanması

Bu kısımda, bir önceki kısımdan farklı olarak H Hilbert uzayı sonlu boyutlu ve $2 \leq \dim H$ olarak alınmıştır. Önceki bölüm ile benzer şekilde, $A: H \rightarrow H$ özeşlenik pozitif operatör öyle ki $1 \leq \dim \text{Ker} A < \dim H$ ve $B(t) : [a, b] \rightarrow \mathfrak{B}(H)$ bir güçlü sürekli ve güçlü türevlenebilir özeşlenik operatör fonksiyonu olarak alınsın. O halde, $L^2 := L^2(H, (a, b))$ uzayında birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi,

$$l(u(t)) = (Au(t))' + B(t)u(t) \quad (2.2.1.1)$$

ile ifade edilir ve bu ifadenin formal eşleniği L^2 uzayında

$$l^+(v(t)) = -(Av(t))' + B(t)v(t) \quad (2.2.1.2)$$

olduğu görülür. Yine benzer şekilde,

$$D'_0 := \left\{ u(t) \in L^2 : u(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t)u_k, f_k(t) \in C_0^\infty(a, b), u_k \in H, k = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N} \right\}$$

vektör fonksiyonlarının yoğun manifoldu üzerinde L'_0 operatörü, $L'_0 u = l(u(t))$ olacak şekilde tanımlanmak üzere L'^*_0 operatörünün tanım kümesi D'_0 kümesini içerdiğinden L'_0 operatörü bir kapanışa sahiptir. (2.2.1.1) deki lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi tarafından üretilen minimal operatör, L^2 uzayındaki bu L'_0 operatörünün kapanışına denir ve bu minimal operatör L_0 ile gösterilir.

O halde, (2.2.1.2) ifadesindeki diferensiyel operatör tarafından üretilen L_0^+ minimal operatörü L^2 Hilbert uzayı üzerinde tanımlanabilir. L^2 uzayındaki L_0^+ (L_0) operatörünün eşlenik operatörü (2.2.1.1) ((2.2.1.2)) diferensiyel ifadesi tarafından üretilen maksimal

operatör olarak adlandırılır ve L (L^+) ile gösterilir (Hörmander, 1955; Gorbachuk V.I. ve Gorbachuk M.L., 1991; Brezansky, 1968). Dikkat edilirse,

$$L_0 \subset L, L_0^+ \subset L^+$$

ifadeleri doğrudur ve

$$D(L_0) = \{u(t) \in L^2 : (Au(t))' \in L^2, u(a), u(b) \in \text{Ker} A\}$$

ve

$$D(L) = \{u(t) \in L^2 : (Au(t))' \in L^2\}$$

olur.

Ayrıca, bu bölümde de bir önceki bölümde olduğu gibi $H_0 := \text{Ker} A$, $H_1 := \text{Range} A$, $A_1 := A|_{H_1} : H_1 \rightarrow H_1$ notasyonları kullanılmıştır.

Teorem 2.2.1.1. $\|B'(t)\| \in L^2(a, b)$ olsun. L_0 minimal operatörünün L^2 uzayı üzerinde hiponormal operatör olması için gerek ve yeter şart

- i. $AB(t) = B(t)A$, her $t \in [a, b]$,
- ii. $AB'(t) \leq 0$, h.h.y. $t \in [a, b]$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat. L_0 minimal operatörü L^2 uzayı üzerinde bir hiponormal operatör olsun. O halde, her $u(t) \in D(L_0) \subset D(L_0^*)$ öyle ki $u(t) = u_1(t) + u_0(t)$, $u_1(t) \in H_1$, $u_0(t) \in H_0$ için,

$$\begin{aligned}
& \|L_0 u\|_{L^2}^2 - \|L_0^* u\|_{L^2}^2 \\
&= \left((Au(t))' + B(t)u(t), (Au(t))' + B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad - \left(-(Au(t))' + B(t)u(t), -(Au(t))' + B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&= (Au_1'(t), Au_1'(t))_{L^2} + (Au_1'(t), B(t)u(t))_{L^2} + (B(t)u(t), Au_1'(t))_{L^2} \\
&\quad + (B(t)u(t), B(t)u(t))_{L^2} - (Au_1'(t), Au_1'(t))_{L^2} + (Au_1'(t), B(t)u(t))_{L^2} \\
&\quad + (B(t)u(t), Au_1'(t))_{L^2} - (B(t)u(t), B(t)u(t))_{L^2} \\
&= (Au_1'(t), B(t)u(t))_{L^2} + (B(t)u(t), Au_1'(t))_{L^2} + (Au_1'(t), B(t)u(t))_{L^2} \\
&\quad + (B(t)u(t), Au_1'(t))_{L^2} \\
&= 2 \left[\left((Au(t))', B(t)u(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), (Av(t))' \right)_{L^2} \right] \\
&\geq 0
\end{aligned} \tag{2.2.1.3}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $e^{i\alpha t}u(t) \in D(L_0)$ için de sağlanacağından,

$$\begin{aligned}
& \left((Ae^{i\alpha t}u(t))', B(t)e^{i\alpha t}u(t) \right) + \left(B(t)e^{i\alpha t}u(t), (Ae^{i\alpha t}u(t))' \right) \\
&= i\alpha \left(B(t)Ae^{i\alpha t}u(t), e^{i\alpha t}u(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)Ae^{i\alpha t}u'(t), e^{i\alpha t}u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad - i\alpha \left(AB(t)e^{i\alpha t}u(t), e^{i\alpha t}u(t) \right)_{L^2} + \left(AB(t)e^{i\alpha t}u(t), e^{i\alpha t}u'(t) \right)_{L^2} \geq 0
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır ki burada da (2.2.1.3) eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
& i\alpha \left((B(t)A - AB(t))u_1(t), u_1(t) \right)_{L^2} + (B(t)Au_1'(t), u_1(t))_{L^2} + (AB(t)u_1(t), u_1'(t))_{L^2} \\
&= i\alpha \left((B(t)A - AB(t))u_1(t), u_1(t) \right)_{L^2} + \left((Au(t))', B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad + \left(B(t)u(t), (Av(t))' \right)_{L^2} \\
&\geq i\alpha \left((B(t)A - AB(t))u(t), u(t) \right)_{L^2}
\end{aligned} \tag{2.2.1.4}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $\left((B(t)A - AB(t))u(t), u(t) \right)_{L^2} = 0$ olmak zorundadır. Aksi halde (2.2.1.4) eşitsizliğinden dolayı öyle bir $u(t) \in D(L_0)$ elemanı vardır ki

$\left((B(t)A - AB(t))u(t), u(t) \right)$ sayısı, reel kısmı sıfır olan kompleks sayı olmalıdır. Buradan da $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı keyfi olduğundan $\|L_0 u\|_{L^2}^2 - \|L_0^* u\|_{L^2}^2$ farkı sonsuz olur. Bu ise bir çelişkidir. Ayrıca, $D(L_0)$ kümesi L^2 uzayında yoğun ve $B(t)$ sürekli operatör fonksiyonu olduğundan

$$AB(t) = B(t)A, \quad \forall t \in [a, b]$$

eşitliği sağlanmalıdır. Son olarak (2.2.1.4) eşitsizliğinden, her $u(t) \in D(L_0)$ için,

$$\|L_0 u\|_{L^2}^2 - \|L^* u\|_{L^2}^2 = -2(AB'(t)u(t), u(t)) \geq 0$$

eşitsizliği gelir ki

$$AB'(t) \leq 0, \quad h.h.y. \quad t \in [a, b]$$

olduğu görülür.

Teoremin diğer yönden ispatı (2.2.1.3) eşsizliğinden gelir.

Teorem 2.2.1.2. L^2 uzayında, (2.2.1.1) diferensiyel ifadenin ürettiği L_0 minimal operatörü bir hiponormal operatör olsun. O halde, L_0 minimal operatörünün her L_h maksimal hiponormal genişlemesi, W operatörü H_1 üzerinde bir üniter operatör olmak üzere

$$A^{1/2}u(b) = WA^{1/2}u(a) \quad (2.2.1.5)$$

sınır değer şartını sağlar ve $A^{1/2}(W^*B(b)W - B(a))A^{1/2}$ operatörü bir pozitif operatördür. Ayrıca, W üniter operatörü tek türlü tanımlı olduğundan $L_h = L_w$.

Tersine, (2.2.1.5) sınır değer şartını, verilen özelliklerle birlikte sağlayan her L maksimal operatörün kısıtlanması L_0 minimal operatörünün maksimal hiponormal genişlemesidir.

İspat: L_h operatörü, L_0 hiponormal operatörünün maksimal hiponormal genişlemesi olsun. $B(t)$ düzgün sınırlı ve L_h kapalı operatör olduğundan

$$Im(L_h)u(t) = -i(Au(t))', \quad u(t) \in D(L_h)$$

operatörü kapalıdır. Ayrıca, $Im(L_h)$ operatörü L^2 uzayında L_0 minimal operatörünün sanal kısmının bir simetrik genişlemesi olduğu görülür. Buradan, her $u(t) \in D(L_h) \subset D(L_h^*)$ için

$$\begin{aligned}
& (L_h u(t), u(t))_{L^2} - (u(t), L_h^* u(t))_{L^2} \\
&= -i \left((Im(L_h)u(t), u(t))_{L^2} - (u(t), Im(L_h)u(t))_{L^2} \right) \\
&= (Au(t), u(t))_H \Big|_a^b - (u(t), (Au(t))')_{L^2} + (u(t), (Au(t))')_{L^2} \\
&= \left(A^{1/2}u(b), A^{1/2}u(b) \right)_H - \left(A^{1/2}u(a), A^{1/2}u(a) \right)_H \\
&= \|A^{1/2}u(b)\|^2 - \|A^{1/2}u(a)\|^2 = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. O halde, bir W izometrik operatörü mevcuttur öyle ki

$$A^{1/2}u(b) = W A^{1/2}u(a)$$

eşitliği sağlanır.

Şimdi,

$$Ker(Im(L_h)^* - iI) = \{e^{A_1^{-1}(t-a)}f : f \in H_1\}$$

ve

$$Ker(Im(L_h)^* + iI) = \{e^{A_1^{-1}(b-t)}f : f \in H_1\}$$

olsun. M_+ ve M_- , H_1 uzayının keyfi alt uzayları olmak üzere $\mathcal{H}_+ := \{e^{A_1^{-1}(t-a)}x : x \in M_+\}$ ve $\mathcal{H}_- := \{e^{A_1^{-1}(b-t)}x : x \in M_-\}$ ve bu uzaylar üzerinde $U : \mathcal{H}_+ \rightarrow \mathcal{H}_-$ bir lineer izometrik dönüşüm tanımlansın. $\mathcal{H}_+$ ve $\mathcal{H}_-$ uzaylarının H Hilbert uzayının $dim \mathcal{H}_+ = dim \mathcal{H}_-$ koşulunu sağlayan kapalı lineer alt uzayları olduğu açıktır. Buradan, Teorem 1.5.55'den dolayı L_h genişlemesinin tanım kümesi,

$$D(L_h) = D(Im(L_h)) = D(L_0) \oplus (I - U)\mathcal{H}_+ \quad (2.2.1.6)$$

olur.

Diğer taraftan,

$$H_a = \{u(a) \in H : u(t) \in D(L_h)\}$$

$$H_b = \{u(b) \in H : u(t) \in D(L_h)\}$$

uzayları H uzayının alt uzayları olarak tanımlansın. (2.2.1.6) eşitliğinden dolayı $\dim H_a = \dim H_b$ olur. Üstelik, H_a uzayı veya H_b uzayı H Hilbert uzayına eşit olmak zorundadır. Varsayalım ki olmasın. O halde,

$$\dim \left(\left(A^{1/2}(H_a) \cap \text{Ker}(W - I) \right) \oplus (W - I)A^{1/2}(H_a) \right) = \dim A^{1/2}(H_a)$$

ve

$$\dim H < \infty$$

olduğundan H_1 de sıfırdan farklı öyle bir f elemanı vardır ki her $x \in A^{1/2}(H_a)$ için

$$((W - I)x, f)_{H_1} = 0$$

ve

$$f \notin A^{1/2}(H_a) \cap \text{Ker}(W - I)$$

olur. Bundan dolayı, L_h operatörünün bir $\widetilde{L}_h$ genişlemesi $D(\widetilde{L}_h) = \text{span} \left\{ D(L_h), A_1^{-1/2}f \right\}$ olacak şekilde inşa edilebilir. Açıktır ki $D(\widetilde{L}_h) \subset D(\widetilde{L}_h^*)$ ve $\widetilde{L}_h$ bir hiponormal operatördür. Bu ise L_h operatörünün maksimal hiponormal operatör olması ile çelişir. Dolayısıyla, $H_a = H_b = H$ olduğu görülür. Buradan $\text{Im}(L_h)$ operatörü L^2 uzayı üzerinde bir özeşlenik operatördür ve W üniter operatördür. Dolayısıyla L_h genişlemesi tarafından tek türlü belirlenir.

L_h operatörü, L_0 minimal operatörünün maksimal hiponormal genişlemesi olduğundan, her $u(t) \in D(L_h)$ için

$$\begin{aligned}
& (L_h u(t), L_h u(t))_{L^2} - (L_h^* u(t), L_h^* u(t))_{L^2} \\
&= \left((Au(t))' + B(t)u(t), (Au(t))' + B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad - \left(-(Au(t))' + B(t)u(t), -(Au(t))' + B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&= \left((Au(t))', (Au(t))' \right)_{L^2} + \left((Au(t))', B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad + \left(B(t)u(t), (Au(t))' \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad - \left((Au(t))', Au'(t) \right)_{L^2} + \left((Au(t))', B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad + \left(B(t)u(t), (Au(t))' \right)_{L^2} - \left(B(t)u(t), B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&= \left(Au'(t), B(t)u(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), Au'(t) \right)_{L^2} + \left(Au'(t), B(t)u(t) \right)_{L^2} \\
&\quad + \left(B(t)u(t), Au'(t) \right)_{L^2} \\
&= 2 \left[\left(Au'(t), B(t)u(t) \right)_{L^2} + \left(B(t)u(t), Au'(t) \right)_{L^2} \right] \geq 0
\end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada Teorem 2.1.1.1 ve (2.2.1.5) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
& 2 \left[\left((B(t)Au(t), u(t))_{L^2} \right)' - (B'(t)Au(t), u(t))_{L^2} \right] \\
&= 2 \left[\left(A^{1/2}(W^*B(b)W - B(a))A^{1/2}u(a), u(a) \right)_{L^2} - (B' Au(t), u(t))_{L^2} \right] \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağlandığı görülür. $D(L_0) \subset D(L_h)$ ve son eşitsizlikten her $v(t) \in D(L_0)$ ve her $u(t) \in D(L_h)$ için

$$\left(A^{1/2}(W^*B(b)W - B(a))A^{1/2}u(a), u(a) \right)_{L^2} - (AB'(t)(u - v)(t), (u - v)(t))_{L^2} \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. $D(L_0)$ yoğun olduğundan $v_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$ olacak şekilde $v_n \in D(L_0)$ vardır. Bu sonuçtan ve $\|B'(t)\| \in L^2(a, b)$ olduğundan

$$\left(A^{1/2}(W^*B(b)W - B(a))A^{1/2}u(a), u(a) \right)_{L^2} \geq 0$$

olur ki $A^{1/2}(W^*B(b)W - B(a))A^{1/2}$ operatörünün H Hilbert uzayında pozitif olduğu sonucuna ulaşılır.

Böylece, L_w^* operatörü

$$l^*(u) = -(Au(t))' + B(t)u(t)$$

diferensiyel operatör ifadesi tarafından üretilir ve

$$W^*A^{1/2}u(b) = A^{1/2}u(a) \quad , \forall u(t) \in D(L_w^*)$$

sınır değer koşulunu sağlar. L^2 uzayındaki hiponormal genişlemelerin diğer durumunu ve $D(L_w) \subset D(L_w^*)$ olduğunu görmek kolaydır. $\square$

Örnek 2.2.1.3: Eğer $H := \mathbb{C}^2$ olması durumunda bir $W: \text{Span}\{(1,0)\} \rightarrow \text{Span}\{(1,0)\}$ üniter operatörü $\alpha, \mu \in \mathbb{C}$ ve $|\alpha\mu - \gamma\beta| = 1$, $\frac{\mu}{\alpha\mu - \gamma\beta} = \bar{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha\mu - \gamma\beta} = \bar{\gamma}$ ve $|\gamma| > 2|\alpha|$ olmak üzere,

$$W := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \mu \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edilir.

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$B(t) := \begin{bmatrix} -t^3 - 1 & 0 \\ 0 & t \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1]$$

şeklinde olup,

- i) $AB(t) = B(t)A$, her $t \in [0,1]$ için
- ii) $AB'(t) \leq 0$, h.h.y $t \in [0,1]$ için

koşulları sağlanıp $A^{1/2}(W^*B(1)W - B(0))A^{1/2}$ bir pozitif operatör olup

$$WA^{1/2}u(0) = A^{1/2}u(1)$$

koşulu altında hiponormal olan L_0 minimal operatörün maksimal hiponormal genişlemesi mevcuttur ve

$$L_w u(t) = (Au(t))' + B(t)u(t) \quad , u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{pmatrix} \in L^2(H, [0,1]) \quad , u_1(1) = 0, u_1(0) = 0$$

sınır değerleriyle ifade edilir.

2.2.2. Maksimal Hiponormal Genişlemelerin Spektrum Yapısı

Bu kısımda, W bir üniter operatör olmak üzere, H uzayının içinde $A^{1/2}(W^*B(b)W - B(a))A^{1/2} > 0$ eşitsizliğini sağlayan, L^2 uzayındaki (2.2.1.1.) dejenere diferensiyel operatör ifadesi ve (2.2.1.5) deki sınır değer koşulları tarafından doğrulan L_0 minimal operatörün L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrum kümesi araştırıldı.

Bir önceki kısma benzer olarak $t, s \in [a, b]$ ve $f \in H_1$ için,

$$U_t(t, s)f + A_1^{-1}B(t)U(t, s)f = 0 \quad (2.2.2.1)$$

eşitliğini sağlayan $U(t, s)$ evölüsyon operatörü mevcuttur (Ayrıntılı bilgi için Daleckii, ve Krein 1974, Goldstein 1985, Krein 1971 bakınız.). Ayrıca, $U(t, s)$ evölüsyon operatörü

- i) $U(s, s) = I$
- ii) $U(t, s) = (U(s, t))^{-1}$
- iii) $U(t, s)U(s, k) = U(t, k)$

özelliklerini sağlar ve her $t, s \in [a, b]$ için A_1 ve $U(t, s)$ değişmeli olurlar.

Teorem 2.2.2.1. L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrum kümesi

$$\sigma(L_W) = \{\lambda \in \mathbb{C} : 1 \in \sigma(WU(a, b)e^{\lambda A_1^{-1}(a-b)})\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \in \sigma(B_0(t)), \text{ h. h. y. } t \in [a, b]\}$$

formundadır.

İspat: L_W maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumunu bulabilmek için, $u(t) \in D(L_W)$, $f(t) \in L^2$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$(L_W - \lambda I)u(t) = f(t)$$

eşitliği, yani

$$L_w u = (Au(t))' + B(t)u(t) = \lambda u(t) + f(t)$$

problemni göz önüne alınmıştır.

Her $t \in [a, b]$ için $u(t) = u_1(t) + u_0(t)$, $v(t) = v_1(t) + v_0(t)$, $v_i, u_i(t) \in H_i$, $i = 0,1$ olarak seçilsin. Ayrıca, $(Au(t))' = Au_1'(t)$ yazılabilir. Burada, H_1 uzayı üzerindeki A_1 kısıtlanış operatörünün sınırlı tersi olduğundan $u_1'(t)$ vardır. Bundan dolayı, bu diferensiyel denklemin L^2 uzayında genel çözümü, $u_\lambda(t) = u_{\lambda,1}(t) + u_{\lambda,0}(t)$ ve $v_{\lambda,i}, u_{\lambda,i}(t) \in H_i$, $i = 0,1$ için,

$$u_{\lambda,1}(t) = e^{\lambda A_1^{-1}(t-a)} U(t, a)x + \int_a^t e^{\lambda A_1^{-1}(t-s)} U(t, s) A_1^{-1} f_1(s) ds, \quad x \in H_1$$

$$(B(t) - \lambda I) u_{\lambda,0}(t) = f_0(t)$$

formundadır.

W operatörü, H_1 uzayı üzerinde üniter operatör ve $A^{1/2}u(b) = WA^{1/2}u(a)$ sınır değer koşulundan

$$(WU(a, b)e^{\lambda A_1^{-1}(a-b)} - I)A^{1/2}x = \int_a^t e^{\lambda A_1^{-1}(a-s)} U(a, s) A_1^{-1/2} f_1(s) ds$$

eşitliği elde edilir. Buradan açıkça görülür ki $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı L_w maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumunda olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$1 \in \sigma(WU(a, b)e^{\lambda A_1^{-1}(a-b)})$$

veya

$$\lambda \in \sigma(B_0(t)), \quad h. h. y. \quad t \in [a, b]$$

olmasıdır.

Sonuç 2.2.2.2: Triviyal olmayan bir altuzayda A operatörü projeksiyon operatör olsun. O halde, L_w maksimal hiponormal genişlemesinin spektrumu

$$\sigma(L_w) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \lambda = \frac{1}{b-a} (\ln|\mu| + i(\arg\mu + 2k\pi)), \mu \in \sigma(W^*U(b,a)), k \in \mathbb{Z} \right\} \\ \cup \{ \lambda \in \mathbb{C}: \lambda \in \sigma(B_0(t)), \text{ h. h. y. } t \in [a, b] \}$$

formundadır.

Sonuç 2.2.2.3: Eğer L_0 minimal operatörü hiponormal ise $\sigma(L_0) = \mathbb{C}$ dir.

2.3.Birinci Mertebeden Singüler Dejenere Diferensiyel Operatörlerin Normal Genişlemeleri

2.3.1.Singüler Dejenere Diferensiyel Operatörlerin Normal Genişlemelerin Tanımlanması

H_1 ve H_2 birer ayrılabilir kompleks Hilbert uzay olsun. O halde, $a < b$ için

$$\mathfrak{H} := L^2(H_1, (-\infty, a)) \oplus L^2(H_2, (b, +\infty))$$

uzayı, $u_1(t), v_1(t) \in L^2(H_1, (-\infty, a))$ ve $u_2(t), v_2(t) \in L^2(H_2, (b, +\infty))$ olmak üzere, her $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in \mathfrak{H}$ için,

$$(u(t), v(t))_{\mathfrak{H}} := \int_{-\infty}^a (u_1(t), v_1(t))_{H_1} dt + \int_b^{+\infty} (u_2(t), v_2(t))_{H_2} dt$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır. $k = 1, 2$ için, $\text{Ker} A_k \neq \{0\}$ olan $A_k: H_k \rightarrow H_k$ operatörleri kapalı görüntü kümesine sahip lineer sınırlı pozitif özeşlenik operatörler ve $B_k: H_k \rightarrow H_k$ ise lineer sınırlı özeşlenik operatörler olmak üzere

$$\dim \text{Range}(A_1) = \dim \text{Range}(A_2) > 0$$

ve

$$(-1)^k B_k \geq 0$$

olsun. O halde, $\mathfrak{H}$ uzayında, $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathfrak{H}$ için, lineer dejenere diferensiyel ifadesi,

$$l(u(t)) = \begin{cases} (A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), & t < a \\ (A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), & t > b \end{cases} \quad (2.3.1.1)$$

şeklindedir. Bu diferensiyel ifadesinin $\mathfrak{H}$ uzayındaki formal eşleniği,

$$\begin{aligned} & (l(u(t)), v(t))_{\mathfrak{H}} \\ &= \int_{-\infty}^a ((A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), v_1(t))_{H_1} dt \\ &+ \int_b^{+\infty} ((A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), v_2(t))_{H_2} dt \\ &= \int_{-\infty}^a ((A_1 u_1(t))', v_1(t))_{H_1} dt + \int_b^{+\infty} ((A_2 u_2(t))', v_2(t))_{H_2} dt \\ &+ \int_{-\infty}^a (B_1 u_1(t), v_1(t))_{H_1} dt + \int_b^{+\infty} (B_2 u_2(t), v_2(t))_{H_2} dt \\ &= (A_1 u_1(t), v_1(t))_{H_1} \Big|_{-\infty}^a + (A_2 u_2(t), v_2(t))_{H_2} \Big|_b^{+\infty} \\ &- \int_{-\infty}^a (u_1(t), A_1 v_1'(t))_{H_1} dt - \int_b^{+\infty} (u_2(t), A_2 v_2'(t))_{H_2} dt \\ &+ \int_{-\infty}^a (u_1(t), B_1 v_1(t))_{H_1} dt + \int_b^{+\infty} (u_2(t), B_2 v_2(t))_{H_2} dt \\ &= (A_1 u_1(a), v_1(a))_{H_1} - (A_2 u_2(b), v_2(b))_{H_2} \\ &+ \int_{-\infty}^a (u_1(t), -(A_1 v_1(t))' + B_1 v_1(t))_{H_1} dt \\ &+ \int_b^{+\infty} (u_2(t), -(A_2 v_2(t))' + B_2 v_2(t))_{H_2} dt \end{aligned}$$

olduğundan, $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in \mathfrak{H}$ için

$$l^+(v(t)) = \begin{cases} -(A_1 v_1(t))' + B_1 v_1(t), & t < a \\ -(A_2 v_2(t))' + B_2 v_2(t), & t > b \end{cases} \quad (2.3.1.2)$$

olur. Şimdi, $\mathfrak{H}$ uzayının

$$D'_0 := \left\{ u(t) \in \mathfrak{H} : u(t) = \sum_{k=1}^n f_k(t) u_k, f_k(t) u_k = (f_{k1}(t) u_{k1}, f_{k2}(t) u_{k2}), \right. \\ \left. f_{k1}(t) \in C_0^\infty(-\infty, a), f_{k2}(t)(t) \in C_0^\infty(b, +\infty), \quad u_{ki} \in H_i, \right. \\ \left. i = 1, 2, n \in \mathbb{N} \right\}$$

yoğun lineer manifoldu üzerinde tanımlı $L'_0 u(t) := l(u(t))$ olan L'_0 operatörü göz önüne alınsın. L'_0 eşlenik operatörünün tanım kümesi D'_0 lineer manifoldunu içerdiğinden L'_0 operatörü kapanışa sahiptir (Schmüdgen, 2012). $\mathfrak{H}$ uzayında tanımlı L'_0 operatörünün kapanışına (2.3.1.1) deki lineer diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan minimal operatör denir ve L_0 ile gösterilir.

Benzer şekilde, $\mathfrak{H}$ uzayında (2.3.1.2) lineer diferensiyel ifadesi tarafından doğrulan L_0^+ minimal operatör tanımı verilebilir. $\mathfrak{H}$ uzayındaki L_0^+ (L_0) minimal operatörünün özeşlenik operatörü (2.3.1.1)((2.3.1.2)) tarafından doğrulan maksimal operatör olarak adlandırılır ve L (L^+) ile gösterilir (Berezansky, 1968; Dunford, 1963).

T operatörü H Hilbert uzayında bir kapanabilir operatör ve $S: H \rightarrow H$ bir sınırlı operatör olsun. $\bar{T}$ operatörü T operatörünün en küçük kapalı genişlemesi olmak üzere $\overline{T+S} = \bar{T} + \bar{S}$ ve $D(\overline{T+S}) = D(\bar{T})$ eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlik ile birlikte Öztürk ve İsmailov'un (2012) çalışmasından dolayı,

$$L_0 \subset L, \quad L_0^+ \subset L^+$$

$$D(L_0) = \left\{ u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathfrak{H} : \left((A_1 u_1(t))', (A_2 u_2(t))' \right) \in \mathfrak{H}, u_1(a) \right. \\ \left. \in \text{Ker} A_1 \text{ ve } u_2(b) \in \text{Ker} A_2 \right\}$$

ve

$$D(L) = \left\{ u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in \mathfrak{H} : \left((A_1 u_1(t))', (A_2 u_2(t))' \right) \in \mathfrak{H} \right\}$$

olur.

Bu kısım boyunca, her $k = 1, 2$ ve $i = 0, 1$ için $H_{k0} := \text{Ker} A_k$, $H_{k1} := \text{Range} A_k$, $A_{k1} := A|_{H_{k1}}: H_{k1} \rightarrow H_{k1}$ ve $B_{ki} := B|_{H_{ki}}: H_{ki} \rightarrow H_{ki}$ notasyonları kullanılmıştır.

Teorem 2.3.1.1. L_0 minimal operatörü $\mathfrak{H}$ üzerinde formal normal operatör olması için gerek ve yeter şart her $k = 1, 2$ için $A_k B_k = B_k A_k$ olmasıdır.

İspat: L_0 minimal operatörü $\mathfrak{H}$ üzerinde formal normal operatör olsun. O halde, her $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$, $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in D(L_0) \subset D(L_0^*)$ için

$$\begin{aligned}
& (L_0 u(t), L_0 v(t))_{\mathfrak{H}} - (L_0^* u(t), L_0^* v(t))_{\mathfrak{H}} \\
&= \int_{-\infty}^a \left((A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), (A_1 v_1(t))' + B_1 v_1(t) \right)_{H_1} dt \\
&+ \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), (A_2 v_2(t))' + B_2 v_2(t) \right)_{H_2} dt \\
&- \left(\int_{-\infty}^a \left(-(A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), -(A_1 v_1(t))' + B_1 v_1(t) \right)_{H_1} dt \right. \\
&\left. + \int_b^{+\infty} \left(-(A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), -(A_2 v_2(t))' + B_2 v_2(t) \right)_{H_2} dt \right) \\
&= \int_{-\infty}^a \left((A_1 u_1(t))', (A_1 v_1(t))' \right)_{H_1} dt + \int_{-\infty}^a \left((A_1 u_1(t))', +B_1 v_1(t) \right)_{H_1} dt \\
&+ \int_{-\infty}^a \left(B_1 u_1(t), (A_1 v_1(t))' \right)_{H_1} dt + \int_{-\infty}^a \left(B_1 u_1(t), B_1 v_1(t) \right)_{H_1} dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))', (A_2 v_2(t))' \right)_{H_2} dt + \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))', B_2 v_2(t) \right)_{H_2} dt \\
& + \int_b^{+\infty} \left(B_2 u_2(t), (A_2 v_2(t))' \right)_{H_2} dt + \int_b^{+\infty} \left(B_2 u_2(t), B_2 v_2(t) \right)_{H_2} dt \\
& - \int_{-\infty}^a \left((A_1(t) u_1)' , (A_1 v_1(t))' \right)_{H_1} dt + \int_{-\infty}^a \left((A_1(t) u_1)' , B_1 v_1(t) \right)_{H_1} dt \\
& + \int_{-\infty}^a \left(B_1 u_1(t), (A_1(t) v_1)' \right)_{H_1} dt - \int_{-\infty}^a \left(B_1 u_1(t), B_1 v_1(t) \right)_{H_1} dt \\
& - \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))', (A_2 v_2(t))' \right)_{H_2} dt + \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))', B_2 v_2(t) \right)_{H_2} dt \\
& + \int_b^{+\infty} \left(B_2 u_2(t), (A_2 v_2(t))' \right)_{H_2} dt - \int_b^{+\infty} \left(B_2 u_2(t), B_2 v_2(t) \right)_{H_2} dt \\
& = 2. \left[\left((A_1 u_1(t))' , B_1 v_1(t) \right)_{L^2(H_1, (-\infty, a))} \right. \\
& \quad + \left(B_1 u_1(t) , (A_1 v_1(t))' \right)_{L^2(H_1, (-\infty, a))} + \left((A_2 u_2(t))' , B_2 v_2(t) \right)_{L^2(H_2, (b, \infty))} \\
& \quad \left. + \left(B_2 u_2(t) , (A_2 v_2(t))' \right)_{L^2(H_2, (b, \infty))} \right] = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu son eşitlikte $e^{it}u(t)$, $e^{it}v(t) \in D(L_0)$ kullanılırsa,

$$\left((B_1 A_1 - A_1 B_1) u_1(t), v_1(t) \right)_{L^2(H_1, (-\infty, a))} + \left((B_2 A_2 - A_2 B_2) u_2(t), v_2(t) \right)_{L^2(H_2, (b, \infty))} = 0$$

eşitliğine ulaşılır. $D(L_0)$ uzayının $\mathfrak{H}$ uzayında yoğun olduğundan, her $k = 1, 2$ için

$$A_k B_k = B_k A_k$$

olduğu görülür.

Tersine, her $k = 1, 2$ için B_k sınırlı lineer operatör olduğundan

$$B_k (A_k u_k(t))' = (B_k A_k u_k(t))'$$

eşitliği doğrudur. İlk denklem ve bu sonuçtan L_0 minimal operatörünün formal normal olduğu elde edilir.

Teorem 2.3.1.2. § Hilbert uzayında, (2.3.1.1) diferensiyel ifadenin ürettiği formal normal olan L_0 minimal operatörünün keyfi L_n genişlemesinin normal olması için gerek ve yeter koşul her $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in D(L_n)$ için,

$$\begin{cases} A_2^{1/2}u_2(b) = WA_1^{1/2}u_1(a) \\ A_1^{1/2}u_1(a) \in \text{Ker}(-B_1)^{1/2}, \quad A_2^{1/2}u_2(b) \in \text{Ker}(B_2)^{1/2} \end{cases}$$

sınır değer koşullarının sağlandığı L_n operatörünün tanım kümesinin $D(L)$ uzayının bir kısıtlanması olmasıdır. Burada, $W: H_{11} \rightarrow H_{21}$ bir üniter operatördür. Ayrıca, bu W üniter operatörü L_n genişlemesi tarafından tek türlü tanımlıdır, dolayısıyla $L_n = L_W$ olarak gösterilir.

İspat: L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi L_n operatörü olsun. O halde, her $u \in D(L_n) = D(L_n^*)$ için

$$\begin{aligned} & (L_n u(t), u(t))_{\mathfrak{H}} - (u(t), L_n^* u(t))_{\mathfrak{H}} \\ &= \int_{-\infty}^a \left((A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), u_1(t) \right)_{H_1} dt \\ &+ \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), u_2(t) \right)_{H_2} dt \\ &- \left(\int_{-\infty}^a \left(u_1(t), -(A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t) \right)_{H_1} dt \right. \\ &\left. + \int_b^{+\infty} \left(u_2(t), -(A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t) \right)_{H_2} dt \right) \\ &= \int_{-\infty}^a \left((A_1 u_1(t))', u_1(t) \right)_{H_1} dt + \int_{-\infty}^a (B_1 u_1(t), u_1(t))_{H_1} dt \\ &+ \int_b^{+\infty} \left((A_2 u_2(t))', u_2(t) \right)_{H_2} dt + \int_b^{+\infty} (B_2 u_2(t), u_2(t))_{H_2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-\infty}^a (u_1(t), (A_1 u_1(t))')_{H_1} dt - \int_{-\infty}^a (u_1(t), B_1 u_1(t))_{H_1} dt \\
& + \int_b^{+\infty} (u_2(t), (A_2 u_2(t))')_{H_2} dt - \int_b^{+\infty} (u_2(t), B_2 u_2(t))_{H_2} dt \\
& = (A_1 u_1(t), u_1(t))_{H_1} \Big|_{-\infty}^a - \int_{-\infty}^a (A_1 u_1(t), u_1'(t))_{H_1} dt \\
& + (A_2 u_2(t), u_2(t))_{H_2} \Big|_b^{+\infty} - \int_b^{+\infty} (A_2 u_2(t), u_2'(t))_{H_2} dt \\
& + \int_{-\infty}^a (u_1(t), A_1 u_1'(t))_{H_1} dt + \int_b^{+\infty} (u_2(t), A_2 u_2'(t))_{H_2} dt \\
& = \|A_1^{1/2} u_1(a)\|_{H_1}^2 - \|A_2^{1/2} u_1(b)\|_{H_2}^2 = 0
\end{aligned}$$

eşitliği ulaşılır. Bundan dolayı, $u \in D(L_n)$ için

$$W A_1^{1/2} u_1(a) = A_2^{1/2} u_2(b)$$

eşitliğini sağlayan bir izometrik operatör vardır. Ayrıca, sırasıyla

$$\begin{aligned}
H_a &= \{u_1(a) \in H_1 : u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in D(L_n)\} \\
H_b &= \{u_2(b) \in H_2 : u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in D(L_n)\}
\end{aligned}$$

uzayları H_1 ve H_2 uzaylarının altuzayıdır. $H_a = \overline{H_1}$ ve $H_b = \overline{H_2}$ olmalıdır. Varsayalım ki olmasın. Şimdi, sıfırdan farklı $f_1 \in H_a^\perp$ veya $f_2 \in H_b^\perp$ için $\mathfrak{H}$ uzayında, $u_1(t) = (e^t A_{11}^{-1} f_1, 0)$ ve $u_2(t) = (0, e^{-t} A_{21}^{-1} f_2)$ tanımlanır. O halde, her $v(t) = (v_1(t), v_2(t)) \in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}
& (L_n v(t), u_1(t))_{\mathfrak{H}} - (v(t), L_n^* u_1(t))_{\mathfrak{H}} \\
&= \int_{-\infty}^a \left((A_{11} v_1(t))' + B_1 v(t), e^t A_{11}^{-1} f_1(t) \right)_{H_1} dt \\
&+ \int_b^{+\infty} \left((A_2 v_2(t))' + B_2 v_2(t), 0 \right)_{H_2} dt \\
&- \left(\int_{-\infty}^a \left(v_1(t), -(A_1 e^t A_{11}^{-1} f_1(t))' + B_1 e^t A_{11}^{-1} f_1(t) \right)_{H_1} dt \right. \\
&\left. + \int_b^{+\infty} (v_2(t), 0)_{H_2} dt \right) = (A_{11} v(a), e^t A_{11}^{-1} f_1(t))_{H_2} = 0
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& (L_n v(t), u_2(t))_{\mathfrak{H}} - (v(t), L_n^* u_2(t))_{\mathfrak{H}} \\
&= \int_{-\infty}^a \left((A_{11} v_1(t))' + B_1 v_1(t), 0 \right)_{H_1} dt \\
&+ \int_b^{+\infty} \left((A_{21} v_2(t))' + B_2 v_2(t), e^{-t} A_{21}^{-1} f_2(t) \right)_{H_2} dt \\
&- \left(\int_{-\infty}^a (v_1(t), 0)_{H_1} dt \right. \\
&\left. + \int_b^{+\infty} \left(v_2(t), -(A_2 e^{-t} A_{21}^{-1} f_2(t))' + B_2 e^{-t} A_{21}^{-1} f_2(t) \right)_{H_2} dt \right) \\
&= (A_{21} v_1(a), e^t A_{21}^{-1} f_1)_{H_2} = 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu durum ise $k = 1, 2$ için $u_k \in D(L_n^*)$, fakat $u_k \notin D(L_n)$ olduğunu gösterir. L_n bir normal operatör olduğundan bu bir çelişkidir. Bundan dolayı, $W: H_{12} \rightarrow H_{21}$ bir üniter operatördür ve L_n genişlemesi tarafından $H_a = \overline{H_1}$ ve $H_b = \overline{H_2}$ olduğundan tek türlü tanımlıdır.

Diğer taraftan, L_n operatörü L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olduğundan, her $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) \in D(L_n)$ için

$$\begin{aligned}
& (L_n u(t), L_n u(t))_{\mathfrak{H}} - (L_n^* u(t), L_n^* u(t))_{\mathfrak{H}} \\
&= 2 \left[\left((A_1 u_1(t))', B_1 u_1(t) \right)_{L^2(H_1, (-\infty, a))} \right. \\
&\quad + \left(B_1 u_1(t), (A_1 u_1(t))' \right)_{L^2(H_1, (-\infty, a))} + \left((A_2 u_2(t))', B_2 u_2(t) \right)_{L^2(H_2, (b, \infty))} \\
&\quad \left. + \left(B_2 u_2(t), (A_2 u_2(t))' \right)_{L^2(H_2, (b, \infty))} \right] \\
&= 2 \left[\left(B_1 A_1^{1/2} u_1(a), A_1^{1/2} u_1(a) \right)_{H_1} - \left(B_2 A_2^{1/2} u_2(b), A_2^{1/2} u_2(b) \right)_{H_2} \right] \\
&= -2 \left\| (-B_1 A_1)^{1/2} u_1(a) \right\|_{H_1}^2 - 2 \left\| (B_2 A_2)^{1/2} u_2(b) \right\|_{H_2}^2 = 0
\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bundan dolayı,

$$A_1^{1/2} u_1(a) \in \text{Ker}(-B_1)^{1/2}$$

ve

$$A_2^{1/2} u_2(b) \in \text{Ker}(B_2)^{1/2}$$

olur.

Tersine,

$$A_2^{1/2} u_2(b) = W A_1^{1/2} u_1(a)$$

ve

$$A_1^{1/2} u_1(a) \in \text{Ker}(-B_1)^{1/2}, \quad A_2^{1/2} u_2(b) \in \text{Ker}(B_2)^{1/2}$$

sınır değer koşulları sağlansın. Burada, $W: H_{11} \rightarrow H_{21}$ bir üniter operatör olarak alınmıştır. Bu durumda, L_w^* özeşlenik operatörü (2.3.1.2) diferensiyel operatör ifadesi tarafından doğrulur ve $D(L_w) = D(L_w^*)$ dir. Ayrıca, $\mathfrak{H}$ uzayındaki normal genişlemelerin diğer koşulu sağladığı yukarıdaki eşitliklerden elde edilir.

Sonuç 2.3.1.3. Eğer B_1 veya B_2 den biri birebir operatör ise L_0 minimal operatörünün $\mathfrak{H}$ da normal genişlemesi yoktur.

Sonuç 2.3.1.4. Eğer L_0 minimal operatörünün $\mathfrak{H}$ uzayında bir normal genişlemesi var ise

$$\dim Ker(-B_{11})^{1/2} = \dim Ker(B_{21})^{1/2} > 0$$

bağıntısı sağlanır.

Örnek 2.3.1.5: Eğer $H_1 := \mathbb{C}^2$, $H_2 := \mathbb{C}^2$ olması durumunda bir $W: Span\{(1,0)\} \rightarrow Span\{(0,1)\}$ üniter operatörü $\alpha, \mu, \gamma, \beta \in \mathbb{C}$ ve $|\alpha\mu - \gamma\beta| = 1$, $\frac{\mu}{\alpha\mu - \gamma\beta} = \bar{\alpha}$, $\frac{\beta}{\alpha\mu - \gamma\beta} = \bar{\gamma}$ olmak üzere,

$$W := \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \mu \end{bmatrix}$$

matrisi ile ifade edilir.

$$A_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$B_1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

şeklinde olup, her $k = 1, 2$ için $A_k B_k = B_k A_k$ eşitliği sağlanıp

$$\begin{cases} A_2^{1/2} u_2(b) = W A_1^{1/2} u_1(a) \\ A_1^{1/2} u_1(a) \in Ker(-B_1)^{1/2}, \quad A_2^{1/2} u_2(b) \in Ker(B_2)^{1/2} \end{cases}$$

koşulları altında formal normal olan L_0 minimal operatörün normal genişlemeleri mevcuttur ve

$$L_W(u(t)) = \begin{cases} (A_1 u_1(t))' + B_1 u_1(t), & t < 0 \\ (A_2 u_2(t))' + B_2 u_2(t), & t > 1 \end{cases}$$

$$u_k(t) = \begin{pmatrix} u_{k1}(t) \\ u_{k2}(t) \end{pmatrix} \in L^2(H_1, (-\infty, 0)) \oplus L^2(H_2, (1, +\infty)),$$

$$\alpha u_{11}(0) = 0, \gamma u_{11}(0) = u_{22}(1)$$

sınır değerleriyle ifade edilir.

2.3.2. Singüler Dejenere Diferensiyel Operatörlerin Normal Genişlemelerinin Spektrum Yapısı

Bu bölümde, $\mathfrak{H}$ uzayında (2.3.1.1) tarafından doğrulan L_0 minimal operatörün, $W : H_{11} \rightarrow H_{21}$ üniter operatör olmak üzere, L_w normal genişlemesinin

$$\begin{cases} A_2^{1/2}u_2(b) = WA_1^{1/2}u_1(a) \\ A_1^{1/2}u_1(a) \in \text{Ker}(-B_1)^{1/2}, \quad A_2^{1/2}u_2(b) \in \text{Ker}(B_2)^{1/2} \end{cases}$$

sınır değer koşulları altında spektrum kümesi araştırılmıştır. Ayrıca, L_0 minimal operatörü için

$$0 \in \sigma_p((-B_{11})^{1/2}) \cap \sigma_p((B_{21})^{1/2})$$

olarak alınmıştır.

Teorem 2.3.2.1. L_w operatörü, L_0 minimal operatörünün bir normal genişlemesi olsun. O halde, L_w normal operatörün noktasal spektrum kümesi

$$\sigma_p(L_w) = \sigma_p(B_{10}) \cup \sigma_p(B_{20})$$

olur.

İspat: L_w normal genişlemesi, $u(t) \in D(L_w)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ için,

$$L_w u(t) = \lambda u(t) \tag{2.3.2.1}$$

özdeğer problemini göz önüne alınsın. Her $k = 1, 2$ ve $i = 0, 1$ için $u_{ki}(t) \in H_{ki}$ olmak üzere

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = (u_{10}(t) + u_{11}(t), u_{20}(t) + u_{21}(t))$$

yazılabilir ve ayrıca H_{k1} üzerinde A_{k1} kısıtlanmış operatörünün sınırlı tersi olduğundan $u'_{k1}(t)$ vardır. (2.3.2.1) problemin $\mathfrak{H}$ uzayındaki çözümü,

$$\begin{aligned} u_{11}(t) &= e^{-A_{11}^{-1}(B_1-\lambda)(t-a)} f_1, \quad t < a, \quad f_1 \in H_{11} \\ u_{21}(t) &= e^{-A_{21}^{-1}(B_2-\lambda)(t-b)} f_2, \quad t > b, \quad f_2 \in H_{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^{1/2} f_2 &= W A_1^{1/2} f_1 \\ B_1 u_{10}(t) &= \lambda u_{10}(t), \quad B_2 u_{20}(t) = \lambda u_{20}(t) \end{aligned}$$

şeklindedir. Ayrıca, $A_1^{1/2} f_1 \in \text{Ker}(B_1)$ ve $A_2^{1/2} f_2 \in \text{Ker}(B_2)$, ve Teorem 2.3.1.1. den

$$\begin{aligned} u_{11}(t) &= e^{\lambda A_{11}^{-1}(t-a)} f_1, \quad t < a, \quad f_1 \in H_{11}, \\ u_{21}(t) &= e^{\lambda A_{21}^{-1}(t-b)} f_2, \quad t > b, \quad f_2 \in H_{21}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2^{1/2} f_2 &= W A_1^{1/2} f_1, \\ B_1 u_{10}(t) &= \lambda u_{10}(t), \quad B_2 u_{20}(t) = \lambda u_{20}(t) \end{aligned}$$

olmalıdır. Fakat, $(u_{11}(t), u_{21}(t)) \in \mathfrak{H}$ olması için gerek ve yeter şart $k = 1, 2$ için $f_k = 0$ olmasıdır. Bunun sonucu olarak

$$\sigma_p(L_w) = \sigma_p(B_{10}) \cup \sigma_p(B_{20})$$

olur.

Teorem 2.3.2.2: L_w operatörü, L_0 minimal operatörün keyfi normal genişlemesi ise L_w normal operatörün sürekli spektrum kümesi

$$\sigma_c(L_w) = i\mathbb{R} \cup \sigma_c(B_{10}) \cup \sigma_c(B_{20})$$

olur.

İspat: $\text{Re}L_w$ ve $\text{Im}L_w$ sırasıyla L_w normal operatörünün reel ve sanal kısmı olmak üzere,

$$\sigma(L_w) \subset \sigma(\text{Re}L_w) + i\sigma(\text{Im}L_w)$$

olduğu normal operatörlerin spektrumundan bilinir (Dunford ve Schwartz, 1963). Eğer $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i \in \sigma_c(L_w)$ ise $\lambda_r \in \sigma(\text{Re}L_w)$ ve $\lambda_i \in \sigma(\text{Im}L_w)$ olur. Şimdi, L_w normal genişlemesinin, $k = 1, 2$ ve $i = 1, 2$ olmak üzere her $u(t) = (u_1(t), u_2(t)) = (u_{11}(t) + u_{10}(t), u_{21}(t) + u_{20}(t)) \in D(L_w)$, $u_{ki} \in H_{ki}$ için

$$L_w u(t) = \lambda u(t) + f(t), \quad f(t) \in \mathfrak{H}, \lambda \in \mathbb{C}$$

probleminin çözümüne bakılsın. Buradan,

$$A_1 u'_{11}(t) + B_1 u_{11}(t) = \lambda u_{11}(t) + f_{11}(t), \quad u_{11}(t), f_{11}(t) \in L^2(H_{11}, (-\infty, a)),$$

$$A_2 u'_{21}(t) + B_2 u_{21}(t) = \lambda u_{21}(t) + f_{21}(t), \quad u_{21}(t), f_{21}(t) \in L^2(H_{21}, (b, \infty)),$$

$$A_2^{1/2} u_{21}(b) = W A_1^{1/2} u_{11}(a), \quad u_{11}(a) \in \text{Ker}(-B_1)^{1/2}, u_{21}(b) \in \text{Ker}(B_2)^{1/2}$$

$$B_{10} u_{10}(t) = \lambda u_{10}(t) + f_{10}(t), \quad u_{10}(t), f_{10}(t) \in L^2(H_{10}, (-\infty, a))$$

$$B_{20} u_{20}(t) = \lambda u_{20}(t) + f_{20}(t), \quad u_{20}(t), f_{20}(t) \in L^2(H_{20}, (b, \infty))$$

olur. Bu durumda, $\lambda_r \neq 0$ veya $\lambda_r \in \sigma_c(B_{10}) \cup \sigma_c(B_{20})$ olduğunda bu problemin bir çözümü yoktur. Ayrıca, Teorem 2.3.1.1. ve sınır değer koşullarından dolayı genel çözüm

$$u_{11}(t) = e^{i\lambda_i A_{11}^{-1}(t-a)} f_1 - \int_t^a e^{-A_{11}^{-1}(B_1 - i\lambda_i)(t-s)} A_{11}^{-1} f_{11}(s) ds, \quad t < a, \quad f_1 \in H_{11},$$

$$u_{21}(t) = e^{i\lambda_i A_{21}^{-1}(t-b)} f_2 - \int_b^t e^{-A_{21}^{-1}(B_2 - i\lambda_i)(t-s)} A_{21}^{-1} f_{21}(s) ds, \quad t > b, \quad f_2 \in H_{21}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, $\mathfrak{H}$ uzayındaki $A_{k1}^{-1} f_k^* \in \text{Ker}(B_{k1}), k = 1, 2$ için

$$f(t) = (e^{(1+i\lambda_i)A_{11}^{-1}(t-a)} f_1^*, e^{(-1+i\lambda_i)A_{21}^{-1}(t-b)} f_2^*)$$

fonksiyonu vardır öyle ki

$$\begin{aligned} u_{11}(t) &= e^{i\lambda_i A_{11}^{-1}(t-a)} f_1 - \int_t^a e^{i\lambda_i A_{11}^{-1}(t-a)} e^{A_{11}^{-1}(s-a)} A_{11}^{-1} f_1^* ds \\ &= e^{i\lambda_i A_{11}^{-1}(t-a)} f_1 + e^{i\lambda_i A_{11}^{-1}(t-a)} (e^{A_{11}^{-1}(t-a)} - I) f_1^*, \quad t < a, f_{1\lambda_i} \in H_{11}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{21}(t) &= e^{i\lambda_i A_{21}^{-1}(t-b)} f_2 + \int_b^t e^{i\lambda_i A_{21}^{-1}(t-b)} e^{-A_{21}^{-1}(s-b)} A_{21}^{-1} f_2^* ds \\ &= e^{i\lambda_i A_{21}^{-1}(t-b)} f_{2\lambda_i} - e^{i\lambda_i A_{21}^{-1}(t-b)} (e^{-A_{21}^{-1}(t-b)} - I) f_2^*, \quad t > b, f_2 \in H_{21} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca, $u(t) = (u_{11}(t), u_{21}(t)) \in D(L_W)$ olması için gerek ve yeter koşul

$$f_1^* = f_1, \quad f_2^* = -f_2$$

ve

$$A_2^{1/2} f_2^* = W A_1^{1/2} f_1^*$$

eşitliklerinin sağlanmasıdır. $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ için bu sonuçtan dolayı, $k = 1, 2$ için, $A_{k1}^{-1} f_k^* \in \text{Ker}(B_{k1})$ olduğunda

$$f_\alpha(t) = (e^{(1+i\lambda_i)A_{11}^{-1}(t-a)} f_1^*, \alpha e^{(-1+i\lambda_i)A_{21}^{-1}(t-b)} f_2^*)$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla, $L_w u(t) = i\lambda_i u(t) + f_\alpha(t)$ denkleminin çözümü yoktur. Bu da ispatı tamamlar.

3. SONUÇLAR

1. Sonlu aralıktaki vektör fonksiyonlarının oluşturduğu Hilbert uzayındaki birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatör sınıflarının formal normal olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Ayrıca, minimal operatörlerin formal normal olması durumunda tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu normal genişlemelerin evolüsyon operatörü aracılığıyla spektrum kümesi belirlenmiştir.
2. Sonlu aralıktaki vektör fonksiyonlarının oluşturduğu Hilbert uzayındaki birinci mertebeden lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatör sınıflarının hiponormal olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Ayrıca hiponormal olan minimal operatörlerin tüm maksimal hiponormal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu maksimal hiponormal genişlemelerin evolüsyon operatörü aracılığıyla spektrum kümesi belirlenmiştir.
3. Birinci mertebeden singüler lineer dejenere diferensiyel operatör ifadesi tarafından tanımlanan minimal operatör sınıflarının formal normal olması için gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Ayrıca formal normal olan minimal operatörlerin tüm normal genişlemeleri sınır değerleri dilinde ifade edilmiş ve bu normal genişlemelerin evolüsyon operatörü aracılığıyla spektrum kümesi belirlenmiştir.

Bu bulgular üç farklı uluslararası sempozyumda (Yılmaz ve Sertbaş, 2019; Sertbaş ve Yılmaz, 2018 ve 2019) sözlü olarak sunulmuş ve biri tam metin olarak basılmıştır. Ayrıca edinilen sonuçlar iki farklı makale olarak (Yılmaz ve Sertbaş, 2022; Sertbaş ve Yılmaz, 2019) basılmıştır.

4.ÖNERİLER

1. Diferensiyel denklemler ve diferensiyel denklem sistemleri için sınır değer problemleri teorisindeki bazı problemlerin çözümlerinin araştırılmasında tezde alınan sonuçlar kolaylık sağlayabilir.
2. Sonsuz veya sonlu aralık üzerinde tanımlı vektör fonksiyonların Hilbert uzayında sınırlı veya sınırlı olmayan sabit veya değişken dejenere operatör katsayılı ikinci mertebeden diferensiyel ifadelerin doğurduğu minimal operatörün tüm genişlemelerin genel gösterimi araştırılabilir. Ayrıca bu genişlemelerin spektral analizi de incelenebilir.
3. Singüler durumlarda çözümü daha zor olan problemler serisinden olan bu problemler kendi başına serbest bir inceleme alanı olarak görülebilir.
4. Bu tezde alınan sonuçların yeni uygulama alanları fiziksel ve tekniksel modellerde aranabilir.

5. KAYNAKLAR

- Albeverio, R.H.S., Geztesy, F. ve Holden, H., 2005. Solvable Models in Quantum Mechanics. Providence, RI: AMS Chelsea Publishing.
- Arnold, V.I., 1990. Singularities of Caustics and Wave Fronts, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers.
- Bachman, G. ve Narici, 1966. L., Functional Analysis, Academic Press Inc. London.
- Bairamov, E., Mert, R.Ö. ve Ismailov Z. 2012. Selfadjoint Extensions Of A Singular Differential Operator, J. Math. Chem 50, 1100-1110.
- Balakrishnan, A. V., 1976. Applied Functional Analysis, New York-Heidelberg-Berlin, Springer Verlag.
- Banaschewski, B., 2004. Extensions of Topological Spaces, Canad. Math. Bull., 7,1, 1-22.
- Barbu, V. ve Favini, A., 1997. Periodic Problems for Degenerate Differential Equations, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, 28, 29-57.
- Baskakov, A. ve Chernyshov, K., 2002. Spectral Analysis of Linear Relations and Degenerate Operator Semigroups, English translate, Sb. Math., 193,11, 1573-1610.
- Berezansky, YuM., 1968. Expansions in Eigenfunctions of Self-Adjoint Operators, Providence, RI, USA.
- Biriuk, G. ve Coddington, E.A., 1964. Normal Extensions of Unbounded Formally Normal Operators, J. Math. And Mech., 13, 617-638.
- Chen, G. ve Zhang, H., 2004. Initial Boundary Value Problem For A System of Generalized IMBq Equations, Math. Methods Apply Sci, 27, 497-518.
- Coddington, E.A., 1973. Extension Theory of Formally Normal and Symmetric Subspaces, Mem. Amer. Math. Soc., bf 134, 1-80.
- Carrol, R. ve Showalter, R., 1976. Singular and Degenerate Cauchy Problems, London, New York, Academic Press.
- Daleckii, Yu.L. ve Krein, M.G. 1974. Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, American Mathematical Society Providence, Rhode Island.
- Davis, R.H., 1955. Singular Normal Differential Operators. Tech. Rep. Dep. Math. California Univ. 10.
- Dunford, N. ve Schwartz, J.T., 1963. Linear Operators Vol. 2, New York, NY, USA.
- Favini, A. ve Yagi, A., 1999. Degenerate Differential Equations in Banach Spaces, New York, Marcel Dekker Inc.
- Gohberg, I.C., Goldberg, S. ve Kaashoek, M.A., 2003. Basic Classes Of Linear Operators,

Birkhauser, Berlin..

- Goldstein, J.A., 1985. Semigroups of Linear Operators and Applications, New York, NY, USA, Oxford University Press.
- Gorbachuk, V.I. ve Gorbachuk, M.L., 1991. Boundary Value Problems for Operator Differential Equations, Kluwer Academic, Dordrecht.
- Gokhberg, I.I. ve Krein, M.G., 1965. Introduction to The Theory of Linear Nonselfadjoint Operators in Hilbert Space, Nauka, Moscow (in Russian).
- Halmos, P.R., 1974. A Hilbert Space Problem Book, Springer-Verlag, New York Inc.
- Henry, D., 1981. Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, 840, New York-Heidelberg-Berlin, Springer Verlag.
- Hörmander, L., 1955. On The Theory Of General Partial Differential Operators, Acta Mathematica, 94, 161-248.
- Ismailov, Z. I., 1992. Formally Normal Extensions of an Operator, Diff. Equations, 28, 905-907.
- Ismailov, Z. I., 2003. On The Normality of First-Order Differential Operators, Bull. Pol. Aca. Sci (Math), 51, 139-145.
- Ismailov, Z. I., 2006. Compact Inverses of First-Order Normal Differential Operators, J. Math. Anal. Appl., 320, 266-278.
- Ismailov, Z. I. ve Erol, M., 2012. Normal Differential Operators of First-Order With Smooth Coefficients, Rocky Mt. J. Math., 42, 1100-1110.
- Ismailov, Z. I. ve Karataş, H., 2000. Some Necessary Conditions for The Normality of Differential Operators, Doklady Mathematics, 62, 277-279.
- Ismailov, Z. I. ve Unluyol, E., 2010. Hyponormal Differential Operators With Discrete Spectrum, Opuscula Math., 30, 79-94.
- Janas, J., 1989. On Unbounded Hyponormal Operators, Ark Mat., 27, 273-281.
- Jin, K. H., 1993. On Unbounded Subnormal Operators, Bull. Korean Math. Soc., 30, 65-70.
- Kato, T., 1995. Perturbation Theory for Linear Operators, Springer-Verlag GmbH.
- Kilpi, Y., 1953. Über Lineare Normale Transformationen in Hilbertschen Raum. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI. 154.
- Kilpi, Y., 1957. Über Das Komplexe Momenten Problem. Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. Ser. AI, 236, 1-32.
- Kilpi, Y., 1963. Über Die Anzahl der Hypermaximalen Normalen Fortsetzungen Normalen Transformationen. Ann. Univ. Turkuenses Ser. AI. 65.

- Krein, S. G., 1971. Linear Differential Equations in Banach Space, Providence, RI, USA, American Mathematical Society.
- Krein, S. G. ve Khazan, M.I, 1990. Differential Equations in Banach Space, Itogi Nauki I Tekh. Mat. Anal. 21, 130-263 (in Russian).
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Applicatons, John Wiley&Sons.
- Ladyzhenskaya, O.A. 1975. Mathematical Analysis Of Navier-Stokes Equations For Incompressible Liquids, Ann. Rev. Fluid Mech. 7, 249-272.
- Lions, J.L., 1960. Les Semigroups Distributions, Portugal Math. 19, 141-164.
- Maksudov, F.G. ve İsmailov, Z.I., 1996. Normal Boundary Problems For The First Order Differential Equation, Doklady Mathematics, Birmingham (Alabama), USA, 54,2, 659-661.
- Ota, S. ve Schmüdgen, K., 1989. On Some Classes of Unbounded Operators, Integr. Equat. Oper. Th., 12, 211-226.
- Öztürk, R.M., ve İsmailov Z.I., 2012. Normal Extentions of A Singular Multipoint Differential Operator of First Order, EJDE, 36, 1-9.
- Putnam, C. R., 1972. The Spectra of Unbounded Hyponormal Operators, P. Am. Math. Soc., 31, 458-464.
- Rynne, B. P. ve Youngson, M.A., 2008. Lineer Functional Analysis, Springer.
- Sauer, N., 1982. Linear Evolution Equations in Two Banach Spaces, P. Roy. Soc. Edinb. A, 91, 287-303.
- Sauer, N. ve Singleton, J. E., 1987. Evolution Operators Related to Semigroups of Class (A), Semigroup Forum, 35, 317–335.
- Schmüdgen, K., 2012. Unbounded Self-Adjoint Operators on Hilbert Space. Graduate Texts in Mathematics. Springer, Dordrecht, Volume 265.
- Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., 2019. Degenerate Maximal Hyponormal Differential Operators For The First Order, Turkish Journal Of Mathematics, 43, 126-131.
- Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., 2018. Normal Differential Operators for Degenerate First-Order, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Haziran, Trabzon, Bildiriler Kitabı: 154.
- Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., 2019. Degenerate Maximal Hyponormal Differential Operators For The First Order, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Temmuz, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 72.
- Showalter, R.E., 1963. Partial Differential Equations of Sobolev-Galpern Type, Pacific J. Math. , 31,3, 787-793.

- Showalter, R.E., 1977. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman, London-San Francisco –Melbourne.
- Stampfli, J.G., 1962. Hyponormal Operators, Pacific J. Math., 12, 1453-1458.
- Stochel, J. ve Szafraniec, F. H., 1985. On Normal Extensions of Unbounded Operators I, Oper. Theory, 14, 31-55.
- Stochel, J. ve Szafraniec, F. H., 1989. On Normal Extensions of Unbounded Operators II, Acta Sci. Math. (Szeged) , 53, 153-177.
- Stochel, J. ve Szafraniec, F. H., 1989. The Normal Part of An Unbounded Operator, Nederl. Akad. Wetensch Proc. Ser. A., 92, 495-503.
- Sviridyuk, G.A. ve Fedorov, V. E., 2003. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, Utrecht, The Netherlands, VSP.
- Temam, R. 1979. Navier-Stokes Equations. Theory and Numerical Analysis, North Holland Publ. Co. Amsterdam-New York- Oxford.
- Timoshenko, S., 1961. Theory of Elastic Stability, New York, McGraw-Hill.
- Von Neumann, J., 1929. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann., 102, 49-131.
- Yılmaz, F. ve Sertbaş, M., 2022. Singular Degenerate Normal Operators For First-Order, Miskolc Mathematical Notes, 23, 1, 521-528.
- Yılmaz, F. ve Sertbaş, M., 2019. Singular Degenerate Normal Differential Operators For First-Order, 3rd International Conference of Mathematical Sciences, Eylül, İstanbul, Bildiriler Kitabı: 2183.
- Zettl, A., 2005. Sturm-Liouville Theory. USA: Amer. Math. Soc., Math. Survey and Monographs, 121.

ÖZGEÇMİŞ

Fatih YILMAZ, İlkokulu Karaca Köyü İlköğretim Okulu'nda birleşik sınıflarda okuyarak bitirdikten sonra sırasıyla ortaokulu Arsin Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda, liseyi de Trabzon Fatih Lisesi'nde (Yabancı Dil Ağırlıklı) bitirmiştir. 2005-2006 Eğitim-Öğretim yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazanarak lisans öğrenimine başlamıştır. 2009 yılında lisans eğitimini başarılı bir şekilde bitirip matematikçi unvanı aldıktan sonra 2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında Lise Matematik Öğretmenliği alanında tezsiz yüksek lisans (formasyon eğitimi) yapmıştır. 2010-2013 yılları arasında çeşitli özel kurumlarda matematik öğretmenliği yaptıktan sonra 2013-2014 Eğitim-Öğretim yılında Rize'de MEB'e bağlı bir okula lise matematik öğretmeni olarak atanmıştır. 2015-2016 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında tezli yüksek lisansına başlamış ve 2018 yılında 'Bir Sınıf Yarı Normal Operatörlerin Genişletilmiş Spektrumu' isimli tezini vererek tezli yüksek lisansını bitirmiştir. Aynı yıl mayıs ayında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında 50/d kadrolu araştırma görevlisi olarak atanıp ardından 2018-2019 Eğitim-Öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen bilimleri Enstitüsü Matematik anabilim dalında doktora programına kabul edildi. Yabancı dili İngilizcedir.

Doktora tez kapsamında yayınlanan makaleler ve yapılan sunumlar tarih sıralamasına göre aşağıda verilmiştir.

1. Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., Normal Differential Operators for Degenerate First-Order, Haziran 2018, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, Trabzon, Bildiriler Kitabı: s. 154.
2. Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., 2019. Degenerate Maximal Hyponormal Differential Operators For The First Order, Turkish Journal Of Mathematics, 43, 126-131.

3. Sertbaş, M. ve Yılmaz, F., Degenerate Maximal Hyponormal Differential Operators For The First Order, Temmuz 2019, International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, İstanbul, Bildiriler Kitabı: s. 72.
4. Yılmaz, F. ve Sertbaş, M., Singular Degenerate Normal Differential Operators For First-Order, Eylül 2019, 3rd International Conference of Mathematical Sciences, İstanbul, Bildiriler Kitabı: s. 2183.
5. Yılmaz, F. ve Sertbaş, M., 2022, Singular Degenerate Normal Operators For First-Order, Miskolc Mathematical Notes, 23 (1), 521-528.