



**BİRİNCİ MERTEBEDEN
FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Elif ULUSOY

**Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİRİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN
ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Elif ULUSOY

Danışman
Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Elif ULUSOY tarafından hazırlanan “Birinci Mertebeden Fark Denklemlerinin Çözümlerinin Salınımlılığı” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca .../.../2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı’nda YÜKSEK LİSANSTEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman :Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Başkan :...

...

...

Üye

:...

...

...

Üye

:...

...

...

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun

...../...../..... tarih ve

..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

.....

Prof. Dr. İbrahim EROL

Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI
Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

02 /02 /2023

Elif ULUSOY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BİRİNCİ MERTEBEDEN FARK DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN SALINIMLILIĞI

Elif ULUSOY

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm, giriş kısmına ayrılarak genel bir literatür bilgisi verilmiştir. İkinci bölümde, gerekli temel kavramlardan ve şimdiye dek yapılan bazı çalışmalardan söz edilmiştir. Üçüncü bölümde orijinal sonuçlar verilmiştir. Üçüncü bölümde, $\{p(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 1 \text{ için } \tau(n) \geq n$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve geri fark operatörü

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere birinci mertebeden

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0$$

ileri fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeni kriter elde edilmiştir.

Son olarak tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2023, v + 28 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemi, İleri fark denklemi, Monoton argümanlar, Monoton olmayan argümanlar, Salınımlı çözüm, Salınımlı olmayan çözüm.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

OSCILLATION OF SOLUTIONS OF FIRST ORDER DIFFERENCE EQUATIONS

Elif ULUSOY

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Mustafa Kemal YILDIZ

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction section and provide a general knowledge of literature. In the second chapter, we mention some basic notions and studies so far. Our original results are given in the third chapter. In the third chapter, new oscillatory criteria is obtained for first order linear advanced difference equation given by

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

where $\{p(n)\}$ is sequence of positive real numbers and $\{\tau(n)\}$ is sequence of integers and is not necessarily monotone such that

$$\tau(n) \geq n \text{ for } n \geq 1$$

and backward difference operator is given by

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1).$$

Finally, the discussion and conclusion part is given.

2023, v + 28 pages

Keywords: Difference equation, Advanced difference equation, Monotone arguments, Nonmonoton arguments, Oscillatory solution, Nonoscillatory solution.

TEŞEKKÜR

Bu konuyu yüksek lisans tez çalışması olarak bana veren ve benim için çok değerli olan danışman hocam Prof. Dr. Mustafa Kemal YILDIZ ve her konuda desteğini esirgemeyen sevgili hocam Prof. Dr. Özkan ÖCALAN'a tüm yardımlarından, öğretilerinden dolayı çok teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, tüm eğitim ve öğretim hayatım boyunca beni hiç yalnız bırakmayan değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.

Elif ULUSOY

Afyonkarahisar 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

	Sayfa
ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ.....	iv
SİMGELER DİZİNİ	v
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR	6
2.1 Fark Analizi	6
2.2 İleri Fark ve Diferensiyel Denklemler İçin Literatür Araştırması	8
3. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER İLERİ FARK DENKLEMİ İÇİN SALINIM KRİTERLERİ.....	16
4. TARTIŞMA ve SONUÇ	23
5. KAYNAKLAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ.....	28

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel sayılar
$\mathbb{R}^-$	Negatif Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar
$\mathbb{R}_0$	$\mathbb{R} - \{0\}$
$\mathbb{R}_+$	$[0, \infty)$
τ	Monoton olmayan argüman
h	Monoton argüman
Π	Çarpım sembolü
Σ	Toplam sembolü
Δ	İleri fark operatörü
∇	Geri fark operatörü
E	Öteleme (kaydırma) operatörü
C	Sürekli fonksiyonların kümesi

1 GİRİŞ

Matematik, mühendislik, fizik, kimya, biyoloji, biyolojideki genetik, radyasyondaki kuantum, ekonomi gibi bilim dallarında, teknolojinin sürekli değişmesi ve gelişmesiyle birlikte matematiksel problemler ortaya çıkmıştır. Fark denklemleri genellikle bu bilim dallarındaki problemlerin çözümünde karşımıza çıkmaktadır. Çünkü bu tarz problemlerde bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlar karşımıza çıkabilir. Bağımsız değişkenin sürekli olmadığı durumlar fark denklemleri ile kaldırılmak istenmiştir. Fark denklemleri ; bir veya birden çok değişkenli bir fonksiyonun sonlu farkları ile bağımsız değişkenleri arasındaki cebirsel bağıntılardır. Diferensiyel denklemlerin teorisine çok büyük benzerlikler göstermekle birlikte inceleme yönünden daha yeni bir kavramdır. Fark denklemleri, fonksiyonel denklemler olarak da adlandırılır. (Elaydi 2000)

Zamana bağlı çeşitli doğa olaylarının incelenmesinde fark denklemleri ile karşılaşmaktadır. Fark denklemleri bu incelemenin doğal bir ifadesidir. Zaman kesikli yani t değişkeni sadece tam sayı değerleri oluyor ise bu değişkendeki değişme türevle değil, farklarla gösterilir ve bu denklemlere fark denklemleri denir. Zamana bağlı değişkenlerin yer verildiği birçok olay ayrık (kesikli) olaylardır. Bundan dolayı bu tür denklemler önemli matematiksel modelleri oluştururlar. Fark denklemleri için daha önemli olan nokta ise diferensiyel denklemler için ayrıklaştırma (discretization) metodlarının incelenmesinde kullanılmasıdır. Fark denklemleri teorisinde elde edilen birçok sonuç, bunlara karşılık gelen diferensiyel denklemlerdeki sonuçlar ile aşağı yukarı benzerdir. Bundan dolayı birinci mertebeden diferensiyel denklemlerin ayrık bir benzeri olarak ele alınır. Yine de fark denklemleri teorisi, diferensiyel denklemler teorisinden daha geniş kapsamlıdır. Örneğin, fark denkleminin birinci mertebeden bir diferensiyel denklemin ayrık bir benzeri olduğundan bahsetmiştik. Bu fark denklemi "ghost" çözüm veya kaotik yörüngelere sahiptir. Fakat diferensiyel denklemlerde böyle bir durum ancak yüksek mertebeden diferensiyel denklemlerde geçerlidir.

İkinci bir örnek verecek olursak, bir seçimden 6 ay önce, belirlenen bir gruba her ay aynı sorular sorulur. 1. oylamadan 6. oylamaya kadar sonuçlar not edilir. Grubun verdiği cevaplar oylama sayısının bir fonksiyonu olarak incelenir. 1'den 6'ya kadar tam sayıları alan bu kesikli değişken, fark denklemleri kullanılmasına neden olur. sosyolojik

araştırmalar bu ardışık değerlerin özellikleriyle ilgilenir.

Psikolojik araştırmalar için de sözlü kelime öğrenme modeli örnek gösterilebilir. Sözlü kelime öğrenme modelinde kişiye kelime listesi yükse bir sesle okunur. Kişi aklında kalan kelimeleri yazar. Kelimelerin sırası değiştirilip tekrar tekrar okunur ve her defasında kişinin aklında kalıp yazdığı kelimelerin oranı hesaplanır. Bu oran kararlı bir değere ulaşana kadar devam edilir. Psikoloji, bu ardışık değerlerin özelliklerini inceler. Bu modelde kesikli değişken deneme sayısıdır ve fark denklemleri kullanılır. Fark denklemleri teorisinin uygulamalarını içeren bu tür örnekler çoğaltılabilir. Biyolojide canlı populasyon sayısının araştırılmasında , tıpta hücre hareketlerinin gözlenmesinde, ekonomide borsa hareketlerinin takibinde, kontrol teorisinde kararlılık durumunun tespit edilmesinde, doğa olaylarının araştırılmasında ve daha birçok bilim dalında kullanıldığını söyleyebiliriz.

Bağımsız değişkenin sürekli olduğu durumda $y(x)$ bağımlı değişkenin değişimi $y'(x)$, $y''(x)$, $y'''(x)$... türevleri ile açıklanabilir. Fakat x 'in ayrık (discrete) değerler alırsa değişimi türevleri ile açıklayamayız. Böyle bir durumda içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemlerine ihtiyaç vardır. 20. yüzyılda radyasyondaki kuantum, biyolojideki genetik gibi bilimlerde görülen gelişmeler,tüm doğa olaylarının süreklilikle ifade edilemeyeceğini göstermiş olup başka ifadelere ihtiyaç duyulmuştur. Bu ihtiyaç fark denklemleri kullanılarak karşılanmıştır. Böylece diferensiyel denklemlerdeki süreksizlik halleri kaldırılmıştır.

Bugün birçok alanda fark denklemlerinin uygulamalarından yararlanılmaktadır. Uygulama alanı olarak en çok ekonomide arz-talep denklemlerinde,ekonomik dalgalanmalara açıklık getirmekte, hareket analizinde devrelerin matematiksel ifadesinde kullanılmaktadır. Daha da genişletecek olursak bir canlının neslinin tükenip tükenmeyeceği, 1. yıl sonunda, 2. yıl sonunda ... nüfusunun kaç olacağı gibi tahminlerde dahi fark denklemlerinden yararlanılır.

Fark denklemlerinin M.  2000'li yıllara Babillere dayandığı düşünülmektedir. Fark denklemlerine M.  450'de Pisagor'un üzerinde çalıştığı t ensel sayılar;

$$t^n = t^{n-1} + n \quad \text{ve} \quad S_n = S_{n-1} + n^2$$

denklemleri katkı sağlamıştır. M.S 400 ve M.S 1200 yılları arası matematik için verimsiz bir dönem olup Avrupa’da önemli bir çalışma yapılmamıştır. Fakat Ömer Hayyam, Chia Hsien ile birlikte 1000-1100 yıllarında olduğu tahmin edilen en eski fark denklemlerinden biri olan,

$$b_{n+1,r} = b_{n,r} + b_{n,r-1}$$

denklemini üzerinde çalışmışlardır (Laksmikhantham ve Trigiante 2002).

1,1,2,3,5,8,13,21,34,... şeklinde devam eden ; ilk ikisi 1’e sonraki sayıların da kendinden önceki iki sayının toplamına eşit olan Fibonacci sayıları birçok yerde karşımıza çıkmaktadır. Örneğin papatyaların yaprak sayısı, meyveleri ya da sebzeleri ortadan ikiye böldüğümüzde içindeki boşlukların sayısı, ayçiçeğin üstündeki spiral şeklinde dizilmiş tohumları, çam kozalaklarının tanelerinin sayısı gibi. 1202’de ünlü İtalyan matematikçi Leonardo Fibonacci’nin ”Liber Abaci” adlı kitabındaki ”tavşan problemi” Fibonacci dizisinin temelini oluşturmuştur. Kendinden önceki iki sayının toplamına eşit olan Fibonacci sayıları fark denklemi yardımıyla bulunabilir. Bazı kaynaklarda fark denklemlerinin başlangıcı olarak kabul edilir.

1600-1700 yılları arasında fark denklemleri ve yinelemeli sayma üzerine çalışmalar yapan matematikçiler; Francesco Maurolica, Fermat, Pascal, Sir Thomas Harriet, Henry Briggs, Leibniz, Newton ve Euler’dır. Bu kişiler arasında en önemli çalışmayı Newton, günümüzde “Newton Metodu” olarak bilinen kök bulma formülünü (nümerik analizde yer alan)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

şeklindeki fark denklemi ile ifade etmiştir (Kulenovic vd. 2000).

18. yy’da temel lineer fark denklemleri teorisini geliştiren matematikçiler Moivre, Euler, Lagrange, Laplace, Simson, Cotes olmuştur. Yine bu dönemde Riccati’nin de çalış-

maları olmuştur. “Riccati fark denklemi” olarak bilinen denklem aşağıda belirtilmiştir.

$$x_{n+1} = \frac{a + bx_n}{c + dx_n}$$

1850 li yıllardan sonra herhangi bir canlı türünün gelecekteki durumuyla ilgili tahminler yapılırken, bu türün çoğalmasını etkileyebilecek tüm iç, dış ve çevresel faktörler göz önüne alınması gerektiğinden fark denklemlerinden yararlanılmaya başlanmıştır.

19. yy’da ise lineer fark denklemleri Bessel fonksiyonunun hesaplanmasında Miller’in algoritması aracılığıyla kullanılmıştır. 1950’den bu zamana kadar yapılan araştırmalar-daki bilgiler 1950’li yıllardan sonraki matematikçilerin lineer olmayan sabit katsayılı fark denklemleri ile ilgili çalışmaları için bir zemin oluşturmıştır. Bu çalışmalardan bazıları 1995-2000 yılları arasında Ladas tarafından yapılmıştır.

Fark denklemlerinin çözümü, pek çok matematikçinin yakın ilgisini çekmiş ve özellikle son 40 yıl içerisinde yapılan çalışmalar sonucunda da bu konuda zengin bir literatür ortaya çıkmıştır. Son yıllarda fark denklemlerinin çözümlerinin davranışı ve özellikle salınımlı olması ile ilgili çok sayıda çalışma yapılmıştır.

1990 yılında Ladas,

$$x_{n+1} - x_n + px_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

$p \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer otonom gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için gerek ve yeter şart vermiştir. 1989 yılında Erbe ve Zhang

$$x_{n+1} - x_n + p_n x_{n-k} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2)$$

p_n negatif olmayan reel terimli dizi ve $k \in \mathbb{Z}^+$ lineer otonom gecikmeli fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart vermişlerdir. 1989 yılında, Ladas, Philos ve Sficas yukarıdaki otonom olmayan fark denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için yeter şart elde etmişlerdir. Ayrıca diferensiyel denklemler ile fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı arasında ilginç benzerlikler söz konusudur. Ancak bu durum her zaman geçerli olmayabilir. Örneğin,

$$x'(t) + p(t)x(t-k) = 0 \quad (1.3)$$

diferensiyel denklemini göz önüne alalım. (1.2) fark denklemi (1.3) diferensiyel denkleminin ayrık benzeridir. $k = 0$ için (1.3) diferensiyel denklemi

$$x(t) = x(t_0) \exp \left(- \int p(s) ds \right)$$

şeklinde bir çözüme sahiptir ve bu çözüm hiç bir zaman salınımlı değildir. Ancak (1.2) fark denklemi ise $k = 0$ için

$$x_n = \left[\prod_{j=n_0}^{n-1} (1 - p_j) \right] x_{n_0}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Dolayısıyla bu çözüm her $j \geq n_0$ için $1 - p_j < 0$ olduğunda salınımlı bir çözüme sahiptir.

Fark denklemleri ile diferensiyel denklemler arasında büyük benzerlikler bulunmaktadır. Fark denklemleri sayesinde diferensiyel denklemlerdeki süreksizlik durumları ortadan kaldırılabilmektedir. Hatta birçok diferensiyel denklem, fark denklemleri kullanılarak kolaylıkla çözülebilmektedir. Bu nedenle yukarıda verilen bilgiler ışığında bu yüksek lisans tez çalışmasında birinci mertebeden lineer ileri fark denklemleri çalışılmış ve bu denklemlerin çözümlerinin salınımlılığı için yeni şartlar elde edilmiş ve örneklerle yer verilmiştir.

Bu tez çalışmasında ilk olarak diferensiyel denklemler ve fark denklemleri ile ilgili genel bir literatür bilgisine yer verilmiştir.

Ayrıca $1 \leq i \leq m$, $\{p_i(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau_i(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 1 \text{ için } \tau_i(n) \geq n$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve geri fark operatörü

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere birinci mertebeden lineer ileri fark denklemi

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0$$

ileri fark denkleminin çözümlerinin salınımlı olması için yeni yeter şartlar elde edilmiştir. Son olarak ise tartışma ve sonuç kısmına yer verilmiştir.

2 TEMEL TANIMLAR ve KAVRAMLAR

Bu bölümde, tezimizde ihtiyaç duyulacak literatürde yer alan bilgilere yer verilecektir. İlk olarak fark analizi tanıtılacak ardından diferensiyel denklemler ve fark denklemlerinin salınımlılığı ile ilgili bazı tanım ve teoremler hatırlatılacaktır.

2.1 Fark Analizi

Tanım 2.1.1 E öteleme (kaydırma) operatörü x sürekli bir değişken ve ayırık noktalar kümesi üzerinde sırasıyla

$$Ey(x) = y(x + h), \quad Ex_n = x_{n+1} \quad (2.1.1)$$

şeklinde tanımlanır. İkinci mertebeden E operatörü

$$E^2y(x) = E[Ey(x)] = E[y(x + h)] = y(x + 2h)$$

şeklinde bulunur. Benzer işlem adımları devam ettirildiğinde

$$E^ky(x) = y(x + kh), \quad E^kx_n = x_{n+k}$$

eşitliği elde edilir. Böylece, E^k k . dereceden bir öteleme operatörünü tanımlar.

Tanım 2.1.2 y reel veya kompleks değerli bir fonksiyon olmak üzere ileri fark operatörü Δ ,

$$\Delta y(x) = y(x + h) - y(x), \quad \Delta x_n = x_{n+1} - x_n \quad (2.1.2)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada h herhangi bir sabit x ise bağımsız değişkendir.

Özel olarak $y(x) = x$ olarak alınırsa $\Delta x = (x + h) - x = h$ ya da $h = \Delta x$ bulunur. Bu nedenle h fonksiyon aralığı olarakta adlandırılır.

Tanım 2.1.3 Geri fark operatörü ∇

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x - h), \quad \nabla x_n = x_n - x_{n-1} \quad (2.1.3)$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca

$$\nabla y(x) = \Delta E^{-1}[y(x)] = (1 - E^{-1})y(x)$$

şeklinde de ifade edilebilir.

∇ ve E nin temel özellikleri, ∇y ve Ey değerlerini hesaplamak için önemlidir. c_1 ve c_2 keyfi sabitler, y_1 ve y_2 farklı iki fonksiyon olmak üzere;

(a) $E[y_1(k) + y_2(k)] = Ey_1(k) + Ey_2(k),$

(b) $E[cy_1(k)] = cEy_1(k),$

(c) $E^r[E^s y_1(k)] = E^{r+s} y_1(k),$

(d) $E^0 y_1(k) = y_1(k),$

(e) $\nabla[y_1(k) + y_2(k)] = \nabla y_1(k) + \nabla y_2(k),$

(f) $\nabla[cy_1(k)] = c\nabla y_1(k),$

(g) $\nabla[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k)] = c_1 \nabla y_1(k) + c_2 \nabla y_2(k),$

(h) $y_1, y_2, \dots, y_n$; n -tane fonksiyon ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olsunlar. O halde

$$\nabla[c_1 y_1(k) + c_2 y_2(k) + \dots + c_n y_n(k)] = c_1 \nabla y_1(k) + c_2 \nabla y_2(k) + \dots + c_n \nabla y_n(k)$$

yazılır.

(i) k bir tamsayı olmak üzere $y(k)$, y fonksiyonunun k daki değerini göstermek üzere, a, b ($b \geq a$) şeklinde herhangi iki tamsayı ise

$$y(a) + y(a+1) + \dots + y(b) = \sum_{k=a}^b y(k)$$

şeklinde ifade edilir.

Toplam operatörü ile ilgili bazı kurallar ise aşağıdaki şekildedir.

(a) $\sum_{k=1}^m = mc,$

(b) $\sum_{k=1}^m cy(k) = c \sum_{k=1}^m y(k),$

(c) $\sum_{k=1}^m [y(k) \pm z(k)] = \sum_{k=1}^m y(k) \pm \sum_{k=1}^m z(k),$

(d) $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1.2\dots k} A^k B^{n-k}$ veya $(A + B)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$

Tanım 2.1.4 $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, x_n , $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlı reel (veya kompleks) değerli bir fonksiyon olsun.

$$x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k} \tag{2.1.4}$$

ifadelerini içeren bir bağıntıya k . mertebeden bir fark denklemi denir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.5 Bir fark denkleminin mertebesi, denklemdeki en büyük indis ile en küçük indis arasındaki fark olarak tanımlanır. Örneğin; $x_{n+3} - x_{n+1} + 4x_n = 0$ denklemi üçüncü dereceden bir fark denklemdir (Agarwal 2000).

Tanım 2.1.6 Eğer (2.1.4) fark denklemi,

$$\sum_{i=0}^k a_{in} x_{n+i} = b_n \quad (2.1.5)$$

formunda verilirse k . mertebeden olan (2.1.4) fark denkleminde lineerdir denir. Eğer en az bir $n \in \mathbb{N}$ için b_n sıfırdan farklı ise bu durumda (2.1.5) fark denkleminde homojen olmayan lineer fark denklemi denir.

Eğer (2.1.5) fark denklemi

$$\sum_{i=0}^k a_{in} x_{n+i} = 0 \quad (2.1.6)$$

şeklinde verilirse (2.1.6) fark denkleminde homojen lineer fark denklemi denir (Agarwal 2000).

2.2 İleri Fark ve Diferensiyel Denklemler için Literatür Araştırması

Bu bölümde ileri diferensiyel denklemler ve ileri diferensiyel denklemlerin ayrık benzeri olan ileri fark denklemleri ile ilgili bilinen bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

İlk olarak $\tau(t) \geq t$ ve $p \in C[[t_0, \infty), \mathbb{R}]$ olmak üzere, birinci mertebeden bir lineer ileri diferensiyel denklemi göz önüne alalım.

$$x'(t) - p(t)x(\tau(t)) = 0. \quad (2.2.1)$$

T pozitif bir reel sayı ve $p, [t_0, \infty)$ üzerinde tanımlı negatif olmayan reel değerli bir fonksiyon olmak üzere $\tau(t) = t + T$ alınırsa (2.2.1) denklemi

$$x'(t) - p(t)x(t + T) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (2.2.2)$$

sabit gecikmeli bir diferensiyel denkleme dönüşür.

Tanım 2.2.1 $\tau \in \mathbb{R}^+$, $\tau(t) = t - \tau$ olmak üzere $t \geq t_1$ için x , $[t_1, \infty)$ aralığında sürekli diferensiyellenebilir ve x , (2.2.1) denklemini sağlıyorsa $x \in C[[t_1 - \tau, \infty), \mathbb{R}]$ fonksiyonu (2.2.1) denkleminin bir çözümüdür ve bu çözüm $[t_1, \infty)$ üzerinde bir çözüm olarak adlandırılır.

t_1 bir başlangıç noktası olmak üzere, $\phi \in C[[t_1 - \tau, t_1), \mathbb{R}]$ başlangıç fonksiyonu verilmiş olsun. Böylece (2.2.1) denklemin $t_1 - \tau \leq t \leq t_1$ için

$$x(t) = \phi(t) \quad (2.2.3)$$

olacak şekilde $[t_1, \infty)$ aralığında birtek x çözümüne sahiptir (Györi ve Ladas 1991)

Tanım 2.2.2 Bir diferensiyel denklemin aşıkâr olmayan bir çözümü x olsun. Eğer x çözümü keyfî sayıda sifîra sahipse, yani; $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$ olacak şekilde bir $\{t_n\}$ dizisi vardır öyle ki $x(t_n) = 0$ ise x çözümüne salınımlıdır denir. Aksi taktirde salınımlı değildir denir. Salınımlı olmayan bir çözüm, ergeç pozitif yada ergeç negatiftir. Yani, $\forall t > t_1$ için $x(t) \neq 0$ olacak biçimde bir t_1 vardır. Eğer denklemin her çözümü salınımlı ise denklemin tüm çözümleri salınımlıdır, salınımlı olmayan en az bir çözümü varsa denklemin çözümleri salınımlı değildir denir (Ladde vd. 1987).

Aşağıda verilen teorem Ladas ve Stavroulakis (1982) tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+T} p(s) ds > \frac{1}{e} \quad (2.2.4)$$

ise (2.2.2) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Ladas ve Stavroulakis 1982).

$p(t) \equiv p \in (0, \infty)$ olduğunda ise aşağıdaki koşul elde edilmiştir.

Teorem 2.2.2

- (i) $x'(t) - px(t+T) \geq 0$, $t \geq t_0$ eşitsizliğinin ergeç hiç bir pozitif çözüme sahip olmaması,
- (ii) $x'(t) - px(t+T) \leq 0$, $t \geq t_0$ eşitsizliğinin ergeç hiç bir negatif çözüme sahip olmaması,
- (iii) $x'(t) - px(t+T) = 0$, $t \geq t_0$ denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$pT > \frac{1}{e} \quad (2.2.5)$$

olmasıdır (Ladas ve Stavroulakis 1982).

Ayrıca Kulenovic ve Grammatikopoulos (1988), Koplatadze ve Chanturiya (1982), Kusano (1982) da (2.2.2) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı ile ilgili çalışmalar yapmışlardır.

Şimdi Fukagai ve Kusano tarafından (1984) yılında, (2.2.1) denkleminin çözümlerinin salınımlılığı için elde ettikleri aşağıdaki sonucu verelim.

Teorem 2.2.3 $p(t) \geq 0, t \geq t_0$, azalmayan $\tau(t)$ fonksiyonu için $\tau(t) \geq t$ ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \tau(t) = \infty$ olmak üzere

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\tau(t)} p(s) ds > \frac{1}{e} \quad (2.2.6)$$

ise (2.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Ancak

$$\int_t^{\tau(t)} p(s) ds \leq \frac{1}{e}$$

ise (2.2.1) denklemini salınımsız bir çözüme sahiptir (Fukagai ve Kusano 1984).

Örnek 2.2.1 $a > 0$ ve α bir sabit olmak üzere

$$x'(t) - at^\alpha x(e^t) = 0 \quad (2.2.7)$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Eğer $p(t) = at^\alpha$ ve $\tau(t) = e^t$ alınırsa, ileri diferensiyel denklem için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\tau(t)} p(s) ds = \begin{cases} \infty, & \alpha \geq -1 \\ 0, & \alpha < -1 \end{cases}$$

sonucu elde edilir. Böylece verilen (2.2.7) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul $\alpha \geq -1$ olmasıdır (Fukagai ve Kusano 1984).

Örnek 2.2.2 $a > 0$ bir sabit olmak üzere

$$x'(t) - atx\left(t + \frac{1}{t}\right) = 0 \quad (2.2.8)$$

ileri diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

Eğer, $p(t) = at$ ve $\tau(t) = t + \frac{1}{t}$ alınırsa, ileri diferensiyel denklem için

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \int_t^{\tau(t)} p(s) ds = a$$

sonucu elde edilir. Böylece $a > \frac{1}{e}$ ise verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı, $a \leq \frac{1}{e}$ ise verilen denklemin salınımlı olmayan çözümü vardır (Fukagai ve Kusano 1984).

Chatzarakis ve Öcalan (2015) yılında $\tau(t)$ fonksiyonlarının monoton olması gerekmeyen fonksiyonlar olması durumunda aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.4 Kabul edelim ki $t \geq t_0$ için $p(t) \geq 0$, $\tau(t)$ monoton olması gerekmeyen ve $\tau(t) \geq t$ olmak üzere, eğer

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{h(t)} p(s) \exp \left\{ \int_{h(t)}^{\tau(s)} p(\xi) d\xi \right\} ds > 1 \quad (2.2.9)$$

ise (2.2.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $t \geq 0$ için $h(t) = \inf_{t \leq s} \{\tau(s)\}$ dir. (Chatzarakis ve Öcalan 2015).

Şimdi birinci mertebeden lineer ileri fark denklemleri ile ilgili literatürde yer alan çalışmaları inceleyelim.

$\{p(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen,

$$n \geq 1 \text{ için } \tau(n) \geq n \quad (2.2.10)$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileri ve geri fark operatörü

$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \quad (2.2.11)$$

eşitliği ile tanımlanmak üzere

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \quad (2.2.12)$$

şeklinde ifade edilen birinci mertebeden lineer ileri fark denklemini göz önüne alalım.

Tanım 2.2.3 Eğer pozitif bir N tamsayısı ve $n \geq N$ için $x(n)x(n+1) \leq 0$ ise $x(n)$ aşikar olmayan çözümüne sıfır etrafında salınımlıdır denir. Aksi halde $x(n)$ çözümüne salınımlı olmayan çözüm denir.

Başka bir şekilde ifade edecek olursak, eğer bir $x(n)$ çözümü belli bir yerden (n değerinden itibaren) sonra ergeç pozitif ya da ergeç negatif değilse sıfır etrafında salınımlıdır denir (Agarwal vd. 2000, Györi ve Ladas 1991, Elaydi 2000).

Teorem 2.2.5 $\tau(n) = n + k$ olduğunda

$$\begin{aligned} q_1(n) &= \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i), \quad n \geq k, \\ q_{j+1}(n) &= \sum_{i=n-k}^{n-1} p(i)q_j(n), \quad j \geq 1, \quad n \geq (j+1)k \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\sum_{n=n_1+lk}^{\infty} p(n) \left[\left(\frac{k+1}{k} \right)^l q_l^{1/k+1}(n) - 1 \right] = \infty \quad (2.2.13)$$

olacak şekilde $n_1 \geq 0$ tamsayısı ve l pozitif tamsayısı mevcut ise (2.2.12) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Li ve Zhu 2002).

Diğer taraftan Györi ve Ladas (1991), $\tau(n) = n + \sigma$ olmak üzere aşağıda verilen ileri terimli birinci mertebeden lineer fark denklemini çalışmışlardır.

$$\Delta x(n) - p(n)x(n + \sigma) = 0, \quad n \geq 0, \quad (2.2.14)$$

burada Δ ileri fark operatörü olmak üzere $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$ eşitliği ile tanımlıdır.

Teorem 2.2.6 $\sigma \geq 2$ pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n+\sigma-1} p(i) > 1 \quad (2.2.15)$$

ya da

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{n+\sigma-1} p(i) > \left(\frac{\sigma-1}{\sigma} \right)^{\sigma}, \quad (2.2.16)$$

ise (2.2.14) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Györi ve Ladas 1991).

Öcalan ve Akın (2007) ise aşağıda verilen birinci mertebeden lineer fark denklemini çalışmışlardır.

$i = 1, 2, \dots, m$ için $p_i(n) \leq 0$ ve $k_i \leq -1$ olmak üzere

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^m p_i(n)x(n - k_i) = 0, \quad n \geq 0 \quad (2.2.17)$$

ileri fark denklemi için bazı sonuçlar elde etmişlerdir.

Ayrıca $i = 1, 2, \dots, m$ için $p_i(n) = p_i$ olduğunda

$$\Delta x(n) + \sum_{i=1}^m p_i x(n - k_i) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.18)$$

ve bu denklemin bir özel hali olan

$$\Delta x(n) + px(n - k) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.19)$$

ileri fark denklemi elde edilir.

Györi ve Ladas (1991) yılında, (2.2.18) ve (2.2.19) denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Teorem 2.2.7 $p \in \mathbb{R}$ ve $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere (2.2.19) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşullardan birinin sağlanmasıdır.

- (i) $k = -1$ ve $p \leq -1$;
- (ii) $k = 0$ ve $p \geq 1$;
- (iii) $k \in \{\dots, -3, -2\} \cup \{1, 2, \dots\}$ ve $p \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > 1$

(Györi ve Ladas 1991).

Teorem 2.2.8 $i = 1, 2, \dots, m$ için

$$p_i \in (0, \infty) \text{ ve } k_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$$

veya

$$p_i \in (-\infty, 0) \text{ ve } k_i \in \{\dots, -3, -2, -1\}$$

şartlarından biri sağlanmak üzere

$$\sum_{i=1}^m p_i \frac{(k_i + 1)^{k_i+1}}{k_i^{k_i}} > 1 \quad (2.2.20)$$

ise (2.2.18) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır (Györi ve Ladas 1991).

Chatzarakis ve Stavroulakis (2012) yılında aşağıdaki sonucu vermişlerdir.

Teorem 2.2.9 $\{\tau(n)\}$ azalmayan olmak üzere

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{\tau(n)} p(j) > 1, \quad (2.2.21)$$

ise (2.2.12) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlıdır (Chatzarakis ve Stavroulakis 2012).

Nor olarak belirtelim ki Chatzarakis ve Stavroulakis (2012) yılında yapmış oldukları bu çalışmada $\tau(n) \geq n + 1$, $n \geq 1$ olduğunu kabul etmişlerdir. Ancak $\tau(n) \geq n$, $n \geq 1$ alındığında da bu sonuçlar gerçekleşmektedir.

Örnek 2.2.3

$$\nabla x(n) - p(n)x(n^2 + 1) = 0, \quad n \geq 1 \quad (2.2.22)$$

ileri fark denklemini göz önüne alalım. Burada

$$p(n) = \frac{c}{(n+2)\ln(n+2)}, \quad n \geq 1, \quad c = \frac{e}{\ln 4}, \quad \tau(n) = n^2 + 1$$

olarak tanımlanmıştır. $\{p(n)\}$ pozitif reel sayıların bir dizisi ve $\{\tau(n)\}$ pozitif tam sayıların bir dizisi olmak üzere $n \geq 1$ için $\tau(n) \geq n$ şartı sağlanır. Ayrıca $\{\tau(n)\}$ azalmayandır. Diğer yandan $\frac{c}{(n+2)\ln(n+2)}$ artmayan olduğundan, $f(x)$ artmayan pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{b-1}^b f(x)dx \geq f(b) \geq \int_b^{b+1} f(x)dx$$

olma durumunu göz önünde bulundurursak

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \geq c \sum_{i=n}^{n^2+1} \int_i^{i+1} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} = c \int_n^{n^2+2} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)}$$

ya da

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \geq c \ln \frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)}$$

ve

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \leq c \sum_{i=n}^{n^2+1} \int_{i-1}^i \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)} = c \int_{n-1}^{n^2+1} \frac{ds}{(s+2)\ln(s+2)}$$

ya da

$$\sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2)\ln(i+2)} \leq c \ln \frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)}$$

elde edilir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \ln \frac{\ln(n^2+4)}{\ln(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} c \ln \frac{\ln(n^2+3)}{\ln(n+1)} = c \ln 2 = \frac{e}{\ln 4} \ln 2 = \frac{e}{2}$$

bulunur.

Böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n^2+1} p(i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n^2+1} \frac{c}{(i+2) \ln(i+2)} = \frac{e}{2}$$

olup

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{\tau(n)} p(i) = \frac{e}{2} > 1$$

olduğundan verilen denklemin tüm çözümleri salınımlı olur (Chatzarakis ve Stavroulakis 2012).

Öcalan ve Özkan (2016) yılında ise (2.2.12) denkleminin tüm çözümleri salınımlılığı için üst limit integral şartı olarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.10 Kabul edelim ki $\tau(n) \geq n$ sağlansın. Eğer $\{\tau(n)\}$ monotonon olması gerekmeyen bir dizi ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{h(n)} p(j) > 1 \quad (2.2.23)$$

ise (2.2.12) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $h(n) = \min_{n \leq s} \{\tau(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Öcalan ve Özkan 2016).

Öcalan v.d (2020) yılında (2.2.12) denkleminin tüm çözümleri salınımlılığı için alt limit integral şartı olarak aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Teorem 2.2.11 Kabul edelim ki $\tau(n) \geq n$ sağlansın. Eğer $\{\tau(n)\}$ monotonon olması gerekmeyen bir dizi ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} p(j) > \frac{1}{e} \quad (2.2.24)$$

ise (2.2.12) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır. Burada $h(n) = \min_{n \leq s} \{\tau(s)\}$ şeklinde tanımlanmıştır (Öcalan v.d 2020).

3 BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER İLERİ FARK DENKLEMİ İÇİN SALINIM KRİTERLERİ

Salımlılık teorisi ile ilgili çalışmalarda genellikle salımlı olmayan çözümün varlığı için yeter şartlar ve her çözümün salımlı olması için yeter şartlar elde etmek durumları üzerinde çalışılmaktadır. Bu durumlar için yapılan çalışmalar birbirinden farklıdır. İlk durum için sabit işaretli olan bir çözümün var olduğunu göstermek yeterlidir. Bu durumda çeşitli sabit nokta teoremleri uygulanabilir ya da salımlı olmayan bir çözüme yakınsak, monoton bir dizi tanımlanabilir. İkinci durumda ise denklemin bazı çözümleri için bu yöntemlerin kullanılması uygun değildir. Bu yüzden çelişki yöntemi kullanılarak ispat yapılır. Yani, verilen denkleme ait salımlı olmayan bir çözümün varlığı kabul edilir ve bu denklemin parametreleri için kabul edilen şartların sağlandığı gösterilerek çelişki elde edilir.

Birinci mertebeden lineer gecikmeli fark denklemlerinin salımlılık davranışı ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Ancak birinci mertebeden lineer ileri fark denklemlerinin salımlı üzerine çok sayıda çalışma bulunmamaktadır. Özellikle daha genel bir durum olan monoton olması gerekmeyen argümanları içeren denklemlerle ilgili yapılan çalışmalar neredeyse yok denecek kadar azdır.

Bu nedenle bu tez çalışmasında

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \quad (3.1)$$

şeklinde verilen birinci mertebeden lineer ileri fark denklemlerinin çözümlerinin salımlılık davranışı ele alınacaktır. Bu tezde (3.1) denkleminin çözümlerinin salımlılığını için yeni salımlılık kriterleri elde edilecektir. Burada $\{p(n)\}$ pozitif reel sayı dizileri ve $\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen ve

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \text{ için } \tau(n) \geq n \quad (3.2)$$

koşullarını sağlayan tamsayı dizileridir. Ayrıca çalışmamız boyunca $\prod_{i=k}^{k-1} A(i) = 1$ olduğunu kabul edeceğiz. Elde edilen sonuçlar tamamen orijinal olup aşağıdaki şekildedir.

İlk olarak (3.1) denkleminin çözümlerinin salımlılığını ile ilgili elde edilen sonuçları ele alalım.

$\{\tau(n)\}$ monoton olması gerekmeyen bir dizi olmak üzere

$$h(n) := \min_{n \leq s} \{\tau(s)\}, \quad s \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Açık olarak, her $n \geq 1$ için $\tau(n) \geq h(n)$ ve $\{h(n)\}$ dizisi azalmayan olur.

Aşağıdaki Lemma 2016 yılında Öcalan ve Özkan tarafından verilmiştir.

Lemma 3.1 (3.3) eşitliği sağlansın ve $m > 0$ olsun. Bu durumda

$$m = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} p(j) \quad (3.4)$$

eşitliği vardır (Öcalan ve Özkan 2016).

Lemma 3.2 (Discrete Grönwall Eşitsizliği) $p(n) \geq 0$ ve $\{x(n)\}$ (3.5) eşitsizliğinin pozitif bir çözümü olsun. Bu durumda

$$x(n) \geq \prod_{j=s+1}^n \frac{1}{(1-p(j))} x(s), \quad n \geq s \quad (3.5)$$

dir.

İspat Kabulümüzden dolayı $x(n), x(\tau(n)) > 0$ dır. Böylece, (3.1) denkleminde aşağıdakini elde ederiz

$$\nabla x(n) = p(n)x(\tau(n)) \geq 0, \quad \text{bütün } n \geq n_1 \text{ için.}$$

O halde $\{x(n)\}$ dizisi $n \geq n_1$ için azalmayandır. Elde edilen bu sonuçtan ve $\tau(n) \geq h(n) \geq n$ olduğundan, (3.1) denklemi aşağıdakini verir

$$\nabla x(n) - p(n)x(n) \geq 0, \quad n \geq n_1. \quad (3.6)$$

Dolayısıyla (3.6) eşitsizliğini $x(n)$ ile bölüp ve daha sonra $s+1$ den n e kadar çarpım uygularsak

$$\prod_{j=s+1}^n \frac{\nabla x(j)}{x(j)} \geq \prod_{j=s+1}^n p(j)$$

veya

$$\prod_{j=s+1}^n \frac{x(j) - x(j-1)}{x(j)} \geq \prod_{j=s+1}^n p(j)$$

veya

$$1 - \prod_{j=s+1}^n p(j) \geq \prod_{j=s+1}^n \frac{x(j-1)}{x(j)} = \frac{x(s)}{x(n)}$$

ve buradan

$$x(n) \geq \prod_{j=s+1}^n \frac{1}{(1-p(j))} x(s),$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem 2015 yılında Braverman v.d tarafından (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için bir **üst limit integral** yeter şartı olarak ispatı yapılmadan verilmiştir. Biz burada teoremin ispatını açık bir şekilde vereceğiz.

Teorem 3.1 Kabul edelim ki (3.2) ve (3.3) sağlansın. Eğer $\{\tau(n)\}$ monotonon olması gerekmeyen bir dizi ve

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(n)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} > 1 \quad (3.7)$$

sağlamıyor ise, bu durumda (3.1) denkleminin bütün çözümleri salınımlıdır.

İspat Aksini kabul edelim, yani (3.1) denklemi bir salınımlı olmayan çözüme sahip olsun. $-x(n)$ de (3.1) in bir çözümü olduğundan ispatı sadece $x(n)$ çözümünü belli bir yerden sonra pozitif kabul ederek yapabiliriz. Dolayısıyla, bir $n_1 > n_0 \geq 1$ tamsayısı vardır ki her $n \geq n_1$ için $x(n)$, $x(\tau(n)) > 0$ dır. Böylece, (3.1) denkleminden aşağıdakini elde ederiz

$$\nabla x(n) = p(n)x(\tau(n)) \geq 0, \quad \text{bütün } n \geq n_1 \text{ için.}$$

O halde $\{x(n)\}$ dizisi $n \geq n_1$ için azalmayıp azalmaz. Elde edilen bu sonuçtan ve $\tau(n) \geq h(n) \geq n$ olduğundan, (3.1) denklemi aşağıdakini verir

$$\nabla x(n) - p(n)x(n) \geq 0, \quad n \geq n_1. \quad (3.8)$$

Şimdi ise (3.8) eşitsizliğine Lemma 3.2 deki discrete grönwall eşitsizliğini uygularsak, elde ederiz ki

$$x(\tau(j)) \prod_{i=h(n)+1}^{\tau(j)} (1-p(i)) \geq x(h(n)), \quad \tau(j) \geq h(n) \geq n_1 \quad (3.9)$$

şeklindedir. Dolayısıyla, (3.1) denkleminde n den $h(n)$ e kadar toplam alır ve (3.9) eşitsizliğini kullanırsak, elde ederiz ki

$$x(h(n)) - x(n-1) - \sum_{j=n}^{h(n)} p(j)x(\tau(j)) = 0$$

veya

$$x(h(n)) \geq \sum_{j=n}^{h(n)} p(j)x(\tau(j)) \geq x(h(n)) \sum_{j=n}^{h(n)} p(j) \prod_{i=h(n)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{1-p(i)}$$

ve böylece, elde edilir ki

$$x(h(n)) \left[1 - \sum_{j=n}^{h(n)} p(j) \prod_{i=h(n)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{1-p(i)} \right] \geq 0 \quad (3.10)$$

dır. Sonuç olarak, (3.10) dan elde edilir ki

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{h(n)} p(j) \prod_{i=h(n)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{1-p(i)} \leq 1,$$

bu ise (3.7) kabulümüzle çelişmektedir. Böylece, teoremin ispatı tamamlanır.

Şimdi (3.1) denkleminin tüm çözümlerinin salınımlılığı için bir **alt limit integral** yeter şartı için aşağıdaki sonucu vereceğiz. Elde edeceğimiz bu sonuç orjinaldir ve (3.1) denkleminin Teorem 2.2.11 elde edilen (2.2.24) şartını daha da ilerletmektedir.

Teorem 3.2 Kabul edelim ki (3.2) ve (3.3) sağlansın. Eğer $\{\tau(n)\}$ monotonon olması gerekmeyen bir dizi ve

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{1-p(r)} > \frac{1}{e}, \quad (3.11)$$

ise (3.1) denkleminin tüm çözümleri salınımlıdır.

İspat Çelişki oluşturmak adına (3.1) denkleminin pozitif salınımsız bir $x(n)$ çözümünün varlığını kabul edelim. Ayrıca $-x(n)$ de (3.1) denkleminin bir çözümü olarak düşünülebilir ancak biz ispatımızı yalnızca $x(n)$ in pozitif olduğu durum için yapacağız. Böylece her $n \geq n_1$ için $x(n), x(\tau(n)) > 0$ olacak şekilde $n_1 > n_0 \geq 1$ mevcuttur. Yani, (3.1) denkleminde

$$\nabla x(n) = p(n)x(\tau(n)) \geq 0, \quad \forall n \geq n_1$$

elde edilir ki buradan $\{x(n)\}$ azalmayan bir dizi olur. Buradan ve $\tau(n) \geq h(n) \geq n$ olduğundan (3.1) denkleminde

$$\nabla x(n) - p(n)x(h(n)) \geq 0, \quad n \geq n_1 \quad (3.12)$$

ve

$$\nabla x(n) - p(n)x(n) \geq 0, \quad n \geq n_1 \quad (3.13)$$

bulunur. Böylece, (3.13) ü dikkate alırsak, Lemma 3.2 ye sahibiz. Diğer taraftan, Lemma 3.1 den biliyoruz ki

$$\begin{aligned} & \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{\tau(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))}. \end{aligned}$$

O halde, (3.11) den elde ederiz ki bir $c > 0$ sabiti vardır öyle ki

$$\sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq c > \frac{1}{e}, \quad n \geq n_2 > n_1 \quad (3.14)$$

elde edilir. Şimdi ise, (3.1) denklemini $x(n)$ ile bölersek, bu durumda aşağıdaki denklemi elde ederiz.

$$\frac{\nabla x(n)}{x(n)} - p(n) \frac{x(\tau(n))}{x(n)} = 0. \quad (3.15)$$

Böylece, (3.15) de $n+1$ den $h(n)$ e kadar toplam alıp, Lemma 3.2 deki discrete grönwall eşitsizliğini kullanırsak ve $\{x(n)\}$, $\{h(n)\}$ dizilerinin azalmayan oldukları gerçeğinden elde ederiz ki

$$\sum_{j=n+1}^{h(n)} \frac{\nabla x(j)}{x(j)} - \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) \frac{x(h(j))}{x(j)} \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq 0 \quad (3.16)$$

dır. Diğer taraftan, Öcalan v.d (2020) deki Lemma 2.2 nın ispatından biliyoruz ki

$$\sum_{j=n+1}^{h(n)} \frac{\nabla x(j)}{x(j)} \leq \ln \frac{x(h(n))}{x(n)} \quad (3.17)$$

dir. Ayrıca $\frac{x(h(n))}{x(n)} > 1$ olduğundan, (3.16) ve (3.17) den aşağıdakine sahibiz.

$$\ln \frac{x(h(n))}{x(n)} - \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq 0$$

ve

$$\frac{x(h(n))}{x(n)} \geq \exp \left\{ \sum_{j=n+1}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \right\}. \quad (3.18)$$

Böylece, (3.14) ve (3.18) ifadelerinden elde ederiz ki

$$\frac{x(h(n))}{x(n)} \geq e^c \quad (3.19)$$

şeklindedir. Ayrıca $x \in \mathbb{R}$ için $e^x \geq ex$ olduğundan, (3.19) dan kolayca görülür ki

$$x(h(n)) \geq e^c x(n) \geq (ec) x(n) \quad (3.20)$$

olur, burada $ec > 1$ dir. Elde edilen (3.20) ifadesini (3.12) eşitsizliğinde yerine yazarsak, elde ederiz ki

$$\nabla x(n) - p(n)(ec)x(n) \geq 0, \quad n \geq n_2$$

dir. Dolayısıyla, bu işlemi tümevarım kullanarak tekrarlırsak, herhangi bir pozitif l tamsayısı için

$$\frac{x(h(n))}{x(n)} \geq (ec)^l \text{ yeterince büyük } n \text{ ler için} \quad (3.21)$$

olduğunu elde ederiz. Diğer taraftan, (3.14) den, bütün $n \geq n_2$ ler için bir $n^* \in [n, h(n)]$ tamsayısı vardır öyle ki

$$\sum_{j=n+1}^{n^*} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq \frac{c}{2} \quad (3.22)$$

ve

$$\sum_{j=n^*}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq \frac{c}{2} \quad (3.23)$$

yazabiliriz. Şimdi ise (3.1) de, $n+1$ den n^* e kadar toplam alıp Lemma 3.2 yi kullanırsak, elde ederiz ki

$$x(n^*) - x(n) - \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j)x(\tau(j)) = 0$$

ve

$$x(n^*) - x(n) - \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j)x(h(j)) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq 0$$

veya

$$x(n^*) \geq x(h(n+1)) \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))}$$

veya

$$x(n^*) \geq x(h(n)) \sum_{j=n+1}^{n^*} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \quad (3.24)$$

şeklindedir. Böylece, (3.23) ve (3.24) ifadelerinden elde edilir ki

$$x(n^*) \geq \frac{c}{2} x(h(n)). \quad (3.25)$$

Şimdi ise (3.1) de, n^* dan $h(n)$ e kadar toplam alır ve yukarıdaki işlemleri kullanırsak, kolayca elde ederiz ki

$$x(h(n)) - x(n^* - 1) - \sum_{j=n^*}^{h(n)} p(j) x(h(j)) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \geq 0$$

veya

$$x(h(n)) \geq x(h(n^*)) \sum_{j=n^*}^{h(n)} p(j) \prod_{r=h(j)+1}^{\tau(j)} \frac{1}{(1-p(r))} \quad (3.26)$$

dir. Böylece, (3.25) ve (3.26) ifadelerinden elde edilir ki

$$x(h(n)) \geq \frac{c}{2} x(h(n^*)) \quad (3.27)$$

olur. Sonuç olarak, (3.25) ve (3.27) eşitsizliklerini kullanırsak, elde ederiz ki

$$x(n^*) \geq \frac{c}{2} x(h(n)) \geq x(h(n^*)) \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

veya

$$\frac{x(h(n^*))}{x(n^*)} \leq \left(\frac{2}{c}\right)^2 < +\infty,$$

yani, $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{x(h(n))}{x(n)}$ vardır. Bu ise (3.21) ile çelişmektedir. Dolayısıyla, teoremin ispatı tamamlanır.

Örnek 3.1.1

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1 \quad (3.28)$$

ileri fark denklemini ele alalım. $p(n) = 0.3$ ve $\tau(n) = n + 2$ olsun. Böylece

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{n+2} p(j) = 0.9 \not\geq 1$$

olup Teorem 2.2.10 deki (2.2.23) şartı sağlanmaz. Ancak

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=n}^{n+2} p(j) \prod_{r=n+3}^{j+2} \frac{1}{(1-p(r))} \cong 1.3409 > 1$$

olup Teorem 3.1 deki (3.7) şartından dolayı (3.28) denkleminin tüm çözümleri salınımli olur.

4 TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında

$$\nabla x(n) - p(n)x(\tau(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 1$$

birinci mertebeden lineer ileri fark denkleminin tüm çözümlerinin salınımlı olması durumu çalışılmıştır. Bu denklemin tüm çözümlerinin salınımlı olması için yeni bir alt limit integral yeter şartı elde edilmiştir. Böylece, elde edilen yeni salınımlılık kriteri ile birlikte monoton olması gerekmeyen argumanları içeren birinci mertebeden lineer ileri fark denklemlerinin çözümlerinin salınımlılığı gösterildi.

Ayrıca tezimizde yer alan sonuçların ilerleyen zamanlarda bu konular üzerinde çalışacak olan araştırmacılara yol gösterici nitelikte olacağı düşünülmektedir.

5 KAYNAKLAR

- Agarwal R P, 2000, Difference Equations and Inequalities, Marcel Dekker, New York.
- Agarwal R P, Grace S R, O'Regan D, 2000, Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Braverman E, Chatzarakis G E, Stavroulakis I P, 2015, Iterative oscillation tests for difference equations with several non-monotone arguments, Journal of Difference Equations and Applications, 21(9), 854–874.
- Chatzarakis G E, Stavroulakis I P, 2012, Oscillations of Difference Equations with General Advanced Argument, Central Journal of European Mathematics, 10(2), 807–823.
- Chatzarakis G E, Pinelas S, Stavroulakis I P, 2014, Oscillations of Difference Equations with Several Deviated Arguments, Aequationes Mathematicae, 88, 105–123.
- Chatzarakis G E, Öcalan Ö, 2015, Oscillations of Differential Equations with Several Nonmonotone Arguments, Dynamical Systems, 30(3), 310–323.
- Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2017, Oscillations in Deviating Difference Equations Using an Iterative Technique, Journal of Inequalities and Applications, Paper No. 173, 24 pages.
- Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2017, Improved Iterative Oscillation Tests for First-order Deviating Difference Equations, International Journal of Difference Equations, 12(2), 185–210.
- Chatzarakis G E, Shaikhet L, 2017, Oscillation Criteria for Difference Equations with Nonmonotone Arguments, Advances in Difference Equations, Paper No. 62, 16 pages.
- Chatzarakis G E, Horvat-Dmitrovic L, Pasic M, 2018, Oscillation Tests for Difference Equations with Several Nonmonotone Deviating Arguments, Mathematica Slovaca,

68(5), 1083–1096.

- Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2018, Oscillations in Difference Equations with Several Arguments Using an Iterative Method, *Filomat*, 32(1), 255–273.
- Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2018, Difference Equations with Several Nonmonotone Deviating Arguments: Iterative oscillation tests, *Dynamic Systems and Applications*, 27(2), 271–298.
- Chatzarakis G E, Jadlovská I, 2019, Oscillations of Deviating Difference Equations Using an Iterative Method, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 16(1), Paper No. 16, 20 pages.
- Elaydi S, 2000, *An Introduction to Difference Equations Third Edition*, Springer, New York.
- Erbe L H, Zhang B G, 1989, Oscillation of Discrete Analogues of Delay Equations, *Differential Integral Equations*, 2(3), 300–309.
- Erbe L H, Kong Q, Zhang B G, 1995, *Oscillation Theory for Functional Differential Equations*, Marcel Dekker, New York.
- Fukagai N, Kusano T, 1984, Oscillation Theory of First Order Functional Differential Equations with Deviating Arguments, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 136, 95–117.
- Györi I, Ladas G, 1991, *Oscillation Theory of Delay Differential Equations with Applications*, Clarendon Press, Oxford.
- Koplatadze R G, Chanturiya T A, 1982, Oscillating and Monotone Solutions of First-order Differential Equations with Deviating Argument, *Differentsial 'nye Uravneniya*, 18(2), 1463–1465 (in Russian).
- Kulenovic M R, Gramatikopoulos M K, 1988, Some Comparison and Oscillation Results for First-order Differential Equations and Inequalities with a Deviating Argument, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 131(1), 67–84.

- Kulenovic M R S, Kalabusic S, 2000, Projects For The History of Difference Equations and Recursive Relations, University of Rhode Island.
- Kusano T, 1982, On Even-order Functional-Differential Equations with Advanced and Retarded Arguments, *Journal of Differential Equations*, 45(1), 75–84.
- Ladas G, Lakshmikantham V, Papadakis J S, 1972, Oscillation of High-order Retarded Differential Equations Generated by Retarded Arguments. Delay and Functional Differential Equations and Their Applications. Academic Press, New York, 219-231.
- Ladas G, Stavroulakis I P, 1982, Oscillation Caused by Several Retarded and Advanced Arguments. *Journal of Differential Equations*, 44, 134-152.
- Ladde G S, 1978, Oscillations Caused by Retarded Perturbations of First Order Linear Ordinary Differential Equations, *Atti Acad. Naz. Lincei Rendiconti*, 63, 351–359.
- Ladde G S, Lakshmikantham V, Zhang B G, 1987, Oscillation Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*, vol. 110, Marcel Dekker, Inc., New York.
- Ladas G, Philos Ch G, Sficas Y G, 1989, Sharp Condition for The Oscillation of Delay Difference Equations, *Journal of Applied Mathematics and Simulation*, 2, 101-112.
- Ladas G, 1990, Explicit Conditions for The Oscillation of Difference Equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 153, 276-287.
- Lakshmikantham V, Trigiante D, 2002. *Theory of Difference Equations: Numerical Methods and Applications*, Second Edition, Marcel Dekker, New York.
- Li X, Zhu D, 2002, Oscillation of Advanced Difference Equations with Variable Coefficients, *Annals of Differential Equations*, 18(3), 254–263.
- Li X, Zhu D, 2002, Oscillation and Nonoscillation of Advanced Differential Equations with Variable Coefficients, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 269, 462-488.
- Öcalan Ö, Akın Ö, 2007, Oscillation Properties for Advanced Difference Equations, *Novi Sad Journal of Mathematics*, 37(1), 39–47.

- Öcalan Ö, 2009, Linearized Oscillation of Nonlinear Difference Equations with Advanced Arguments, Archivum Mathematicum, 45(3), 203–212.
- Öcalan Ö, Özkan U M, 2016, Oscillations of Dynamic Equations on Time Scales with Advanced Arguments, International Journal of Dynamic Systems and Differential Equations, 6(4), 275–284.
- Öcalan Ş, Öcalan Ö, Yıldız M K, 2020, Oscillation Behaviour of Advanced Difference Equation with General Arguments, Filomat, 34(12), 4161–4169.

