



**BİRİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL
DENKLEMLERİNİN FARKLI DÖNÜŞÜM
METOTLARIYLA ÇÖZÜMÜ**

Furkan OĞUZHAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

2022

Her hakkı saklıdır.



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BİRİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN
FARKLI DÖNÜŞÜM METOTLARIYLA ÇÖZÜMÜ**

Furkan OĞUZHAN

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2022

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

14 / 09 / 2022

Furkan OĞUZHAN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BİRİNCİ TÜR LİNEER VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİNİN FARKLI DÖNÜŞÜM METOTLARIYLA ÇÖZÜMÜ

Furkan OĞUZHAN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER

Bu tezde, aynı tür ve derecelerden lineer Volterra integral denklemlerini çözmek için 4 metot sunulmuştur. 1.Tür Lineer Volterra İntegral Denklem çözümünde fark çekirdeği Laplace Dönüşüm Metodu, ZZ -Dönüşüm Metodu, Elzaki Dönüşüm Metodu ve Sumudu Dönüşüm Metotları kullanılmıştır. Laplace Dönüşümü, ZZ –Dönüşümü, Elzaki Dönüşümü ve Sumudu dönüşümleri için konvolüsyon teoremi kullanılmıştır. Ayrıca dönüşüm tablolarından faydalanılmıştır. Daha sonra birinci tür lineer Volterra integral denklemlerinin çözümleri dönüşümler üzerinden sağlanmıştır. 1.Tür Lineer Volterra integral denklemleri ele alınmıştır ve 4 farklı dönüşüm ile çözümleri sağlanmıştır. Laplace Dönüşüm Metodu, Elzaki Dönüşüm Metodu, ZZ –Dönüşüm Metodu ve Sumudu dönüşüm metotlarının birinci tür lineer Volterra integral denklemlerinin çözümü için etkili bir yöntem olduğu gözlemlenmiştir.

2022, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: İntegral Denklemler Volterra İntegral Denklemleri, Laplace Dönüşümü, Sumudu Dönüşümü, ZZ -Dönüşüm, Elzaki Dönüşüm, Konvolüsyon Teoremi

ABSTRACT

MS. Thesis

THE SOLUTION OF THE FIRST KIND LINEAR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS WITH DIFFERENT TRANSFORM METHODS

Furkan OĞUZHAN

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Muhammed YİĞİDER

In this thesis, 4 methods are presented to solve linear Volterra integral transform of the same type and order. In the solution of the first kind linear Volterra Integral Equation, difference kernel Laplace Transform Method, $\mathcal{ZZ}$ -Transform Method, Elzaki Transform Method and Sumudu Transform Methods were used. Convolution theorem is used for Laplace transform, $\mathcal{ZZ}$ -Transform, Elzaki Transform and Sumudu Transform. In addition, transform tables were used. Then, the solutions of the first kind linear Volterra integral equations are provided through transforms. The first kind linear Volterra integral equations are discussed and their solutions are provided with 4 different transform. It has been observed that Laplace Transform method, Elzaki Transform method, $\mathcal{ZZ}$ -Transform method and Sumudu Transform methods are an effective method for solving the first kind Volterra integral equations.

2022, 39 page

Keywords: Integral equations Volterra Integral equations, LaplaceTransform, Sumudu Transform, $\mathcal{ZZ}$ -Transform, Elzaki Transform, Convolution theorem

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tez sürecimin her aşamasında desteğini sürekli yanımda hissettiğim danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Muhammed YİĞİDER'e teşekkürlerimi borç bilirim.

Bu süreçte her anlamda yanımda olan, bana inanan ve beni destekleyen sevgili eşim Tuğba OĞUZHAN'a, her türlü maddi ve manevi desteklerini arkamda hissettiğim Babam Yılmaz OĞUZHAN'a ve annem Sevgi OĞUZHAN'a çok teşekkür ederim.

Furkan OĞUZHAN
Eylül 2022

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
1.1. İntegral Denklemlerin Tarihsel Gelişim Süreci	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	4
3.1. Materyal	4
3.2. Yöntem.....	10
3.2.1. Laplace dönüşümü:	10
3.2.2. Laplace dönüşümünün varlığı	11
3.2.3. Ters laplace dönüşümü.....	12
3.2.4. Sumudu dönüşümü.....	14
3.2.5. Ters Sumudu dönüşümü.....	14
3.2.6. Teorem 2 (Sumudu dönüşümü için konvolüsyon teoremi).....	15
3.2.7. Elzaki dönüşümü.....	16
3.2.8. Teorem (Elzaki dönüşümü için konvolüsyon teoremi).....	17
3.2.9. ZZ-dönüşümü.....	18
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	24
4.1. Test Problemi 1	24
4.1.1. Çözüm 1 (Laplace dönüşüm metodu)	24
4.1.2. Çözüm 2 (ZZ- dönüşüm metodu):	25
4.1.3. Çözüm 3 (Sumudu dönüşüm metodu)	25
4.1.4. Çözüm 4 (Elzaki dönüşüm metodu).....	26
4.2. Test Problemi 2	27
4.2.1. Çözüm 1 (Laplace dönüşüm metodu)	27
4.2.2. Çözüm 2 (ZZ- dönüşüm metodu)	28
4.2.3. Çözüm 3 (Sumudu dönüşüm metodu)	29
4.2.4. Çözüm 4 (Elzaki dönüşüm metodu):	30
4.3. Test Problemi 3	31

4.3.1. Çözüm 1 (Laplace dönüşüm metodu)	31
4.3.2. Çözüm 2 (ZZ- dönüşüm metodu)	32
4.3.3. Çözüm 3 (Sumudu dönüşüm metodu)	33
4.3.4. Çözüm 4 (Elzaki dönüşüm metodu).....	34
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	36
KAYNAKLAR	37



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
$E(f(t))$	Bir fonksiyonun Elzaki Dönüşümü
$E^{-1}(f(t))$	Bir fonksiyonun Ters Elzaki Dönüşümü
$f(s)$	Laplace Dönüşümü
$G(s)$	Sumudu Dönüşümü
$\mathcal{L}\{f(t)\}$	Bir fonksiyonun Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	Bir fonksiyonun Ters Laplace Dönüşümü
$\mathbb{R}$	Reel sayı
$S[f(t)]$	Bir fonksiyonun Sumudu Dönüşümü
$S^{-1}[f(t)]$	Bir fonksiyonun Ters Sumudu Dönüşümü
$T(u)$	Elzaki Dönüşümü
$Z(u,s)$	ZZ -Dönüşümü
$Z\{f(t)\}$	Bir fonksiyonun ZZ -Dönüşümü
$Z^{-1}\{f(t)\}$	Bir fonksiyonun Ters ZZ -Dönüşümü

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Laplace dönüşüm tablosu	13
Çizelge 3.2. Sumudu dönüşüm tablosu.....	15
Çizelge 3.3. Elzaki dönüşüm tablosu.....	17
Çizelge 3.4. ZZ -Dönüşüm Tablosu	20



1. GİRİŞ

1.1. İntegral Denklemlerin Tarihsel Gelişim Süreci

21. yüzyılın başlarında integral denklemlerle ilgili çalışmalar araştırılmaya başlanılmış olup, 1823'te Abel tarafından bir integral denkleme rastlanılmıştır. Daha sonra ise ilk kez integral denklem terimi De Bais Reymond tarafından 1888 yılında kullanılmıştır (Bocher 1913). Başlangıçta dağınık ve rastgele olarak yapılan çalışmalar, sonrasında düzenli ve bilimsel yöntemlerle uygulamaya konulmuş ve zamanla şuan ki düzeyine ulaşmıştır.

Yöntemin gelişimine paralel olarak matematiksel gelişmelerin sağlanması, yeni ufuklar açması açısından adeta bu yüzyılın simgesi olmuştur. Birçok konunun farklı ihtiyaçlar sonucu ortaya konulması, zamanın problemlerine cevap verecek biçimde olgunlaştırılması ve bu konularla ilgili pek çok araştırmanın ve aynı zamanda eserin de ortaya çıkmasına öncülük etmiştir. İntegral Denklemlerin, gerek Diferansiyel Denklemlerle olan ilişkisi gerekse Diferansiyel Denklemlerin bilimsel araştırmalarda yaygın olarak kullanılması ile İntegral Denklemler gitgide yaygınlaşarak önemi her geçen gün gittikçe artmıştır. Ayrıca teknoloji ve özellikle de pek çok mühendislik dalında da yaygın bir şekilde kullanım alanı bulmasından dolayı ilgi alanı da o ölçüde genişlemiştir (Aksoy 1988).

Son zamanlarda Volterra-Fredholm integral denklemlerinden faydalanarak yeni çözüm yöntemleri çalışılmış ve adi ardışık yakınsama metodu ile sınır değer problemleri çözülmüştür. Elde edilen çözümler ise değişken katsayılı homojen girişin esneklik probleminin sayısal çözümlerinin tespitinde kullanılmıştır. Geciken argümentli bir diferansiyel denklemin sınır değer problemlerinin çözümü için ayrıca yeni bir yaklaşım önerilmiş (Çelik vd 2003) ve geciken argümentli bir diferansiyel denklemin sınır değer problemlerinin çözümü için etkili sayısal yöntemler sunulmuştur (Çelik vd 2002). Volterra integral denklemleri yıkım teoremi ya da risk teoremi olarak da anılmaktadır. İflas riski, yıkılma olasılığı gibi hesaplamalarda günümüzde sıklıkla kullanılır.

Mühendislik ve fizik alanlarında problemlerin birçoğu bir denklem ile ifade edilemez ve uygulamalı bilim dallarında böyle bir problemle sık karşılaşılır. Henüz bu sistemlerin genel bir çözümü yoktur. Bu durum; problemlerin çözümünde nümerik yöntemlerin kullanılmasının önünü açmıştır, nümerik yöntemlerden en sık kullanılanları: “Ortalama Değer Yöntemi”, “En Küçük Kareler Yöntemi”, “Bernstein Polinomu Yardımıyla Yaklaşık Yöntem”, “Taylor Serisi Kullanarak Yaklaşım Çözüm” dür. Değişken katsayılı ve yüksek mertebedeki integral denklemlerin analitik çözümlerinin de yok sayılması veya elde edilmesi çok zor olmaktadır. O yüzden böyle denklemlerin çözümünde yaklaşık çözümlerin kullanılması ve karşılaştırılması daha kullanışlıdır. Bu çözüm yollarından sık kullanılanları Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü, Sumudu Dönüşümü, Elzaki Dönüşümü, Tarık Dönüşümü, Doğal Dönüşüm ve Aboodh Dönüşümü gibi birçok integral dönüşümü vardır. Bu tez çalışmasındaki amaç farklı tür ve derecelerdeki integral denklemlerinin dört farklı dönüşüm yöntemi ile çözümlenmesidir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

İntegral denklemlerin bütün türleri için kullanılacak teoriyi kurmak mümkün olmayabilir. Bu nedenle birbirinden farklı integral denklemleri ayrı ayrı incelemek gerekmektedir. Bununla beraber integral denklemler için geniş bir araştırma sahası açılmış olur. İntegral denklemlerle ilgili çalışmalar 19. yüzyıla uzanmaktadır. Başlangıçta dağınık, rastgele ve kayıt altına alınamamış araştırmalar yapılmıştır. Sonrasında ise daha sistematik ve düzenli çalışmalar yapıp sonuçlar alınmıştır. Abel mekanik problemleri incelerken, 1823 tarihinde integral denklemlere rastlamış ve integral denklem terimi Du Bois Reymond tarafından 1888 tarihinde yayımlanan makalesinde kullanmıştır (Bocher 1913). İntegral denklemlerle ilgili Lovitt (1924), Petrovsky (1953) ve Tricomi (1955) e ait kaynaklarda mevcuttur. Doğrusal integral denklemlerle alakalı araştırma ise İtalyan bir matematikçi olan VitoVolterra (1860-1940) tarafından yayımlanmış olup, Fredholm de Volterra da 1884 yılında sunduğu benzer yaklaşım problemlerini araştırmış ve bu konuyla ilgili 1903' te bir makale yayımlamıştır.

İntegral denklemler evrensel ve çözülmesi bir o kadar zor denklemlerdir. Diferansiyel denklemler bazı problemleri çözmekte tek başlarına yeterli değildir. Bu nedenle diferansiyel denklemlere sınır şartlarının eklenmesi gereklidir. İntegral denklemler ise bir problemin tam tanımını verdiğiinden dolayı eklenmesi gereken şartlara gerek kalmadan çözüme gidilebilir. Temelde benzer olduklarından diferansiyel denklemler integral denklemler olarak da ifade edilebilir ve çözümünde integral denklemler kullanılabilir. Diferansiyel denklemler, matematik konularıyla iç içe değerlendirilip incelenmektedir. Fizik ve matematik dallarında birçok problem adi ve kısmi diferansiyel denklem olarak ifade edilebilmektedir. İntegral denklemler çeşitli şekillerde bulunur. Bu çeşitlilik genel bir çözümün bulunmasını zorlaştırır. Bundan dolayı çalışmalar her integral denklem için ayrı ayrı çözüm metotları geliştirmesi ile yürütülmektedir.

Bu tez çalışmasında ise ele alınan bir integral denklemin geliştirilen çözüm yöntemlerinden dört tanesi içinde aynı sonucu verdiği gözlemlenmektedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde Volterra integral denklemlerinin çözümü için kullanılan tanım, teorem ve dönüşümlere yer verilmiştir.

3.1. Materyal

Tanım 1 (Diferansiyel Denklem):

Bilinmeyen fonksiyon ve türevlerini ihtiva eden denkleme diferansiyel denklem adı verilir. Genel olarak y bilinmeyen fonksiyon olmak üzere, diferansiyel denklem

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir. Burada $y^{(n)}$, y 'nin x 'e göre n ' inci türevidir. (1) denklemi $y^{(n)}$ ye göre çözülebilirse;

$$y^{(n)} = g(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad (3.2)$$

formu elde edilir. Bu ise (1) ifadesinin açık formda yazılmış şeklidir.

Tanım 2 (Limit):

$D \subset R$, $f: D \rightarrow R$ bir fonksiyon ve c , D nin yığılma noktası olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $0 < |x - c| < \delta$ olduğunda $|f(x) - K| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa x, c ye yaklaşırken $f(x)$ fonksiyonunun limiti K dır ve $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = K$ olarak yazılır.

Bu tanımda $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = K$ olmasında $0 < |x - c| < \delta$ eşitliğini sağlayan $\forall x$ için $|f(x) - K| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanması gerektiğini vurgulanmaktadır. Ayrıca $\varepsilon > 0$ ne kadar küçük olursa, ona bağlı olan, δ da o kadar küçük olacaktır (Kadıoğlu 2005).

Tanım 3 (Değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem): x bir reel değişken olmak üzere

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{(n-1)}(x)y^{(n-1)} + \dots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x) \quad (3.1. 3)$$

şeklindeki denklemlere lineer diferansiyel denklem adı verilir. Burada, eşitliğin sağ tarafındaki $r(x)$ ve sol tarafta ki $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{(n-1)}(x), p_n(x)$ katsayıları x 'e bağlıdır. Eğer $p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{(n-1)}(x), p_n(x)$ katsayıları sabit ise denkleme sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem, en az biri değişken ise de değişken katsayılı lineer diferansiyel denklem adı verilir.

Tanım 4 (Süreklilik):

$D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $|x - c| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, c) > 0$ sayısı varsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir. Burada $\delta = \delta(\varepsilon, c)$, δ nın hem ε hem de c ye bağlı olarak değişeceğini gösterir. Sürekliliğin bu şekildeki tanımı ε, δ tekniği ile süreklilik tanımı olarak adlandırılır. $c \in D$, D nin yığılma noktası olması durumunda limitin tanımlanacağı bilinmektedir. O halde, $c \in D$, D nin yığılma noktası olması durumunda sürekliliğin tanımını şu şekilde verebiliriz. $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in D$ olsun. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ oluyorsa f fonksiyonu c noktasında süreklidir. Buna göre: $D \subset \mathbb{R}$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun verilen bir $c \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması için;

1. f fonksiyonunun c noktasında tanımlıdır.
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ mevcuttur.
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ şartlarını sağlaması gerekir.

Tanım 5 (Süreklilik Çeşitleri):

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında tanımlansın

i. $c \in [a, b)$ için $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = f(c)$ oluyor ise f fonksiyonuna c noktasında sağdan süreklidir.

ii. $c \in (a, b]$ için $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = f(c)$ oluyor ise f fonksiyonuna c noktasında soldan süreklidir.

Bir f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sürekliliğinden söz ettiğimiz zaman a noktasında sağdan , b noktasında soldan sürekli olduğu anlaşılabacaktır.

Tanım 6 (Süreksizlik ve Süreksizlik Çeşitleri):

i. Eğer f fonksiyonunun bir c noktasında limiti var ve süreksiz ise bu fonksiyon c noktasında $f(c) = \lim_{x \rightarrow c} f(x)$ olarak tanımlarsak, bu noktada, sürekli bir fonksiyon elde ederiz. Bu tip süreksizlere kaldırılabilir süreksizlik, şayet fonksiyonun süreksiz olduğu noktada limiti yoksa bu süreksizliklere de kaldırılamaz süreksizlik adı verilir.

ii. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ limitleri var ve birbirinden farklı ise f fonksiyonu c noktasında sıçramalı süreksizliğe sahiptir ve $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ sayısına f ninc noktasındaki sıçramasıdır.

iii. $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ ve $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ limitlerden en az biri $+\infty$ veya $-\infty$ ise ya da mevcut değilse, c noktasında sonsuz süreksizliğe sahiptir.

Tanım 7 (İntegral denklem):

Tek değişkenli fonksiyonlarda bir integral denklemin en genel hali,

$$\Psi(x). \varphi(x) = f(x) + \lambda \quad (3.1.4)$$

şeklinde olup burada a ve b sabitler; λ bir parametre, $\psi(x)$, $f(x)$, $K(x, t)$; tanım bölgesi $a \leq x$, $t \leq b$ üzerindeki bilinen fonksiyonlar; $\varphi(x)$ ise bilinmeyen fonksiyondur. $K(x, t)$ fonksiyonuna da çekirdek adı verilir.

Tanım 8 (Lineer integral denklem):

$\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.1.5)$$

şeklindeki integral denklemde $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonu lineer olduğundan integral denklem de lineer olur.

Tanım 9 (Lineer olmayan integral denklem):

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi^n(t) dt, n \neq 1 \quad (3.1.6)$$

ise bu integral denklemde $\varphi(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun n . kuvveti bulunduğundan lineer olmayan integral denklemdir.

Tanım 10 (Homojen integral denklem):

Bir integral denkleminde integralin dışında ve bilinmeyen φ fonksiyonu haricinde f gibi bir fonksiyon bulundurmeyen integral denklemlere homojen integral denklem denir.

$$\Phi(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.1.7)$$

denklemini genel homojen integral denklem görüntüsüdür.

Tanım 11 (Homojen olmayan integral denklem):

f fonksiyonunu bulunduran integral denklemlere homojen olmayan integral denklem adı verilir.

$$\Phi(x) = f(x) + \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (3.1.8)$$

denklemini genel homojen integral denklem görüntüsüdür.

Tanım 12 (Volterra integral denklemi):

λ sayısal bir parametre $f(x)$ ve $K(x, t)$ bilinen ve $U(t)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$\varphi(x) U(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (3.1.9)$$

denklemini Volterra integral denkleminin en genel halidir. Volterra integral denkleminin fredholm integral denkleminin tek farkı üst sınırının değişken olmasıdır (Aksoy 1983).

Tanım 13 (1. Tip volterra integral denklemi):

$\varphi(x)=0$ alınırsa;

$$F(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt = 0 \quad (3.1.10)$$

denklemini elde edilir. Buna 1. tip volterra integral denklemi denir.

Tanım 14 (2. Tip volterra integral denklemi):

$\varphi(x)=1$ alınırsa;

$$U(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) u(t) dt \quad (3.1.11)$$

denklemleri elde edilir. Buna 2. tip volterra integral denklemleri denir.

Tanım 15 (2. Tip lineer volterra integral denklemleri):

$u(t)$ bilinmeyen ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt \quad (3.1.12)$$

şeklindeki ifadeye 2. cins lineer volterra integral denklemleri adı verilir.

Tanım 16 (2. Tip lineer homojen volterra integral denklemleri):

$f(x) = 0$ ise;

$$u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t) u(t) dt \quad (3.1.13)$$

Bu tür denklemlere de 2. cins lineer homojen volterra integral denklemleri adı verilir.

Tanım 17 (Konvolüsyon integral denklemleri):

$K(x, y)$ çekirdeği sadece $x - y$ farkına bağlı yani $x - y$ 'yi değişken kabul eden bir değişkenli fonksiyon olmak üzere genel bir konvolüsyon integral denklemleri,

$$\Phi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y) \varphi(y) dy \quad (3.1.14)$$

şeklinde olup, tüm konvolüsyon integral denklemleri,

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x, x - y) \varphi(y) dy \text{ formundadır.}$$

3.2. Yöntem

İntegral dönüşümler, sırasıyla J. Fourier ve PS Laplace'ın dikkate değer çalışmalarından sonra üç yüzyıl boyunca diferansiyel ve integral denklemleri çözmek için matematiksel araçlar olarak kullanılmıştır. Ancak son zamanlarda birçok araştırmacı dikkatini bu çok eski alanın gelişimine çevirerek Sumudu dönüşümü (1993), Doğal dönüşüm (2008), Elzaki dönüşümü gibi yeni dönüşümlerin ortaya çıkmasına neden olmuştur.(2011) Aboodh transform (2013), Kashuri ve Fundo transform (2013), Srivastava transform (2015) ve ZZ Transform (2016) diğer dönüşümler arasındadır. Ayrıca, bu son dönüşümler arasındaki ilişkileri belirlemek için birçok araştırmacı tarafından bu konuda farklı çalışmalar yapılmıştır. Örneğin, Belgacem ve Karaballi'de Sumudu dönüşümünün temel özellikleri ve uygulamaları araştırılmıştır. Kili'cman arkadaşları Laplace ve Sumudu dönüşümü arasındaki bağlantıları, Laplace ve Elzaki dönüşümleri arasındaki bağlantıları incelemişlerdir. Khalaf ve Belgacem, Sumudu dönüşümünden Laplace, Fourier ve Mellin Dönüşümlerini çıkarırken, Natural dönüşümünden Laplace, Sumudu, Fourier ve Mellin Dönüşümü'nün çıkarılması Shah ve arkadaşları tarafından yapılmıştır. Bununla birlikte, bu bölümde Aboodh dönüşümü ve gösterildiği gibi sayısız uygulamaları nedeniyle bazı iyi bilinen integral dönüşümler arasında var olan bağlantılardan da söz edilmiştir.

3.2.1. Laplace Dönüşümü

Başlangıç sınır değer problemlerinin çözümünde Laplace dönüşümü, oldukça etkili bir metottur. Laplace dönüşümü bir integral dönüşümü olup; fizikten, mekaniğe mühendisliğe, telekomünikasyona, matematiğe ve diğer uygulamalı birçok bilim dallında kullanılan önemli bir yöntemdir. Ünlü bir matematikçi olan P. S. Laplace (1749-1827) tarafından tanımlanmıştır. Diferansiyel denklemlerin çözümünde oldukça büyük kolaylık sağlamasının yanı sıra, fiziğin matematiksel olarak çözümünde de faydalanılabilmektedir. Bu şekilde elde edilen denklemlerin başlangıç şartlarını da bulundurduğu görülmektedir (Aliyev 1995).

$f(t)$, $t \geq 0$ 'ın pozitif değerleri için tanımlı t reel değişkeninin bir fonksiyonu olsun.

($t < 0$ için $F(t) = 0$ kabul edilebilir);

$s > 0$ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere, t reel değişkeninin bir fonksiyonu

$$e^{-st} \text{ ise, } \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.2.1)$$

integrali var olacak şekilde s parametresi için bir değer bulmak mümkünse bu integrale $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü adı verilir ve $L\{f(t)\}$ veya $F(s)$ ile ifade edilir.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.2.2)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Sonuç s değişkenine bağlı olup, integral yakınsak olmalıdır (Sneddon 1972).

3.2.2. Laplace dönüşümünün varlığı

Tanım 1: $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığının sonlu sayıdaki alt aralıklarının her birinde sürekli ise ve sağdan ve soldan limitleri varsa da bu fonksiyona parçalı sürekli fonksiyon adı verilmekte olup, buradaki süreksizlik sonlu sıçramalar formundadır.

Tanım 2: $M > 0$ reel sabiti göstermek üzere ve bütün $t \geq T$ 'ler için ($T > 0$)

$$|e^{-at} \cdot f(t)| < M \text{ veya } |f(t)| < M \cdot e^{at}$$

olacak şekilde bir a sayısı ise, f fonksiyonuna $t \rightarrow \infty$ için " a üstel mertebededir" denir (Özer-Eser 2002).

Teorem 1: $f(t)$ fonksiyonu, her sonlu $0 \leq t \leq T$ aralığındaki parçalı sürekli ve $t > T$ için a 'ncı üstel mertebeden ise $s > a$ için $L\{f(t)\} = F(s)$ Laplace dönüşümü vardır ($a \geq 0, t \geq 0$) (Yaşar 1988).

İspat:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Laplace dönüşümünün tanımından elde edilir. Buradaki I_1 integrali $f(t)$ fonksiyonunun $0 \leq t \leq T$ aralığındaki parçalı sürekli olması sebebiyle belirli ve sınırlı olup, yakınsaktır. I_2 integrali ise $f(t)$ nin $t > T$ üstel mertebeden olduğu için mevcuttur.

$$|I_2| \leq \int_T^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} M \cdot e^{at} e^{-st} f(t) dt$$

$$= M \cdot \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = M \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^k e^{-(s-a)t} dt$$

$$= M \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} - \frac{1}{-(s-a)} \right) = \frac{M}{(s-a)}, (s > a)$$

olduğundan, $s > a$ için Laplace dönüşümü mevcuttur ve $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün olması için gerekli şart ise $f(t)$ 'nin üstel mertebeden olması ya da

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e^{-at} |f(t)| = 0, (a > 0) \text{ olmasıdır.}$$

$f(t) = e^{t^2}$, bir fonksiyon $t > a > 0$ için, grafiği herhangi bir pozitif kuvvetinden daha hızlı büyüdüğünden üstel mertebeden değildir ve dolayısıyla da Laplace dönüşümü bulunamaz.

3.2.3. Ters Laplace Dönüşümü

$f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünün integral tanımını kullanarak, s parametresine bağlı bir $F(s)$ fonksiyonu tanımlandığını ve $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$ şeklinde ifade edildiğini biliyoruz. Bilinmeyen bir $f(t)$ fonksiyonunun verilen Laplace dönüşümü $F(s)$ ise $f(t)$ fonksiyonu nasıl bulunabilir? Buradaki $f(t)$ fonksiyonuna $F(s)$ fonksiyonunun Ters Laplace Dönüşümü adı verilir ve

3. MATERYAL ve YÖNTEM

sembolik olarak $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ ile ifade edilir. Burada $\mathcal{L}^{-1}$ sembolüne Ters Laplace Dönüşüm Operatörü denir (Dyke 2001).

Genel olarak $s, a + ib$, bir parametre olmak üzere $F(s)$ belli iken $f(t)$ temel fonksiyonu $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(s) e^{st} dt$ integrali ile hesaplanabilir, ancak bu integralin hesaplanması zor olduğundan uygulamada pek fazla tercih edilmez (Dyke 2001).

Bu hesaplama kolay olması için Laplace dönüşüm tablosu kullanılır.

Çizelge 3.1. Laplace dönüşüm tablosu

$f(t)$ fonksiyon		$f(t)$ fonksiyonunun laplace dönüşümü	
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$		$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$	$D(F)$
1.	1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
2.	$t^n (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
3.	e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$
4.	$\cos(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$	$s > 0$
5.	$\sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$	$s > 0$
6.	$\cosh(\beta t)$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$	$s > \beta $
7.	$\sinh(\beta t)$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$	$s > \beta $

Çizelge 3.1. (Devam)

8.	$t^n e^{at} (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$s > a$
9.	$e^{at} \cos(\beta t)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \beta^2}$	$s > a$
10.	$e^{at} \sin(\beta t)$	$\frac{\beta}{(s-a)^2 + \beta^2}$	$s > a$

11.	$t \cos(\beta t)$	$\frac{s^2 - \beta^2}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$s > 0$
12.	$t \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta s}{(s^2 + \beta^2)^2}$	$s > 0$
13.	$t e^{at} \cos(\beta t)$	$\frac{(s - a)^2 - \beta^2}{((s - a)^2 + \beta^2)^2}$	$s > a$
14.	$t e^{at} \sin(\beta t)$	$\frac{2\beta(s - a)}{((s - a)^2 + \beta^2)^2}$	$s > a$

3.2.4. Sumudu Dönüşümü

Bir A fonksiyonlar kümesi;

$A = \{f(t) : \exists M, t_1, t_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{t_1}}, t \in (-1)^j x[0, \infty)\}$ şeklinde tanımlanmak üzere,

Sumudu dönüşümü:

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^\infty e^{-t} f(ut) dt, u \in (-t_1, -t_2),$$

$$S[f(t)] = F(u) = \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{-\frac{t}{u}} f(t) dt \text{ şeklinde tanımlanır (Watugala 1993).}$$

3.2.5. Ters Sumudu Dönüşümü

$A = \{f(t) : \exists M, t_1, t_2 > 0, |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{t_1}}, t \in (-1)^j x[0, \infty)\}$ eşitliği herhangi bir diferansiyel denkleme uygulanarak $F(u)$ Sumudu dönüşümü elde edilmiş olur. Bunun ters Sumudu dönüşümü $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F\left(\frac{1}{s}\right) e^{st} \frac{ds}{s}$ olarak tanımlanır (Watugala 1993). Bu integralin hesabı oldukça zor olduğundan dönüşüm tablosu kullanılır.

Teorem: $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümü,

$$S[af(t) + bf(t)] = aS[f(t)] + bS[f(t)], a, b \in \mathbb{R}, \text{şeklinde lineer özelliğe sahiptir.}$$

İspat:

$$\begin{aligned} S[af(t) + bf(t)] &= \int_0^\infty e^{-t} [af(ut) + bg(ut)] dt = \int_0^\infty [e^{-t} af(ut) + e^{-t} bg(ut)] dt \\ &= \int_0^\infty [e^{-t} af(ut) dt] + \int_0^\infty [e^{-t} bg(ut)] dt \\ &= a \cdot \int_0^\infty [e^{-t} f(ut) dt] + b \cdot \int_0^\infty [e^{-t} g(ut)] dt \\ &= a \cdot S[f(t)] + b \cdot S[f(t)] \end{aligned}$$

3.2.6. Teorem 2 (Sumudu dönüşümü için konvolüsyon teoremi)

$f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının Sumudu dönüşümü $F(s)$ ve $G(s)$ sırasıyla olsun.

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t [f(T)g(t - T)] dT$$

$h(t)$ 'nin Sumudu dönüşümü;

$$S[h(t)] = u \cdot F(u) \cdot G(u) \text{ olur (Asiru 2010).}$$

Çizelge 3.2. Sumudu dönüşüm tablosu

	$f(t)$	$G(u)=s(f(t))$
1.	1	1
2.	t	u
3.	e^{at}	$\frac{1}{1 - au}$

4.	Cosat	$\frac{1}{1+a^2u^2}$
5.	Sinat	$\frac{au}{1+a^2u^2}$
6.	$\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!}, n=1,2,\dots$	$u^{(n-1)}$
7.	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1+a^2u^2}$
8.	$\frac{e^{at}\sin at}{a}$	$\frac{u}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
9.	$e^{bt}\cos at$	$\frac{1-bu}{(1-bu)^2+a^2u^2}$
10.	$\frac{\sin at}{a}$	$\frac{u}{1-a^2u^2}$
11.	cosat	$\frac{1}{1-a^2u^2}$

3.2.7. Elzaki Dönüşümü

$A = \{f(t) \mid \exists M, k_1, k_2 > 0 \text{ öyleki } |f(t)| < Me^{-k_1 t}, \text{ eğer } t \in (-1)^j \times [0, \infty)\}$ olmak üzere A sınıfına ait fonksiyonların Elzaki dönüşümü $E[f(t)] = f(u)$ olarak tanımlanır ve aşağıdaki gibi ifade edilir (Watugala 1993).

$$T(u) = u^2 \int_0^\infty f(u) e^{-\tau} d\tau, \quad k_1, k_2 > 0$$

eş değer olarak

$$E(f(t)) = T(u) = u \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau, \quad u \in (k_1, k_2) \text{ olarak ifade edilebilir.}$$

Çizelge 3.3. Elzaki dönüşüm tablosu

$f(t)$	$E[f(t)] = T(u)$
1	v^2
t	v^3
t^n	$n! v^{n+2}$
e^{at}	$\frac{v^2}{1-av}$
$\sin at$	$\frac{av^3}{1+a^2v^2}$
$\cos at$	$\frac{v^2}{1+a^2v^2}$

3.2.8. Teorem (Elzaki dönüşümü için konvolüsyon teoremi)

$E(f * g) = \frac{1}{u} E(f)E(g)$ için $E(f)$ in Elzaki dönüşümü f dir.

İspat: $E(f)E(g) = u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau \cdot \int_0^\infty g(v) e^{-\frac{v}{u}} dv$

$t = v + \tau$, $v = t - \tau$ olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
 (g) &= \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t-\tau}{u}} dt \\
 &= e^{\frac{\tau}{u}} \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t}{u}} dt
 \end{aligned}$$

Böylece;

$$\begin{aligned}
 E(f)E(g) &= u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau \cdot \int_0^\infty g(v) e^{-\frac{v}{u}} dv \\
 &= u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} d\tau \cdot \int_0^\infty g(v) e^{-\frac{v}{u}} dv \\
 &= u^2 \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{\tau}{u}} \cdot e^{\frac{\tau}{u}} \int_0^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t}{u}} dt d\tau \\
 &= u^2 \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{t}{u}} dt d\tau \\
 &= u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{u}} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt \\
 &= u^2 \int_0^\infty e^{-\frac{\tau}{u}} (f * g)(t) dt \\
 &= uE(f * g)
 \end{aligned}$$

elde edilmiş olur.

3.2.9. ZZ –Dönüşümü

$f(t)$, her $t \geq 0$ için tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$f(t)$ 'nin ZZ –Dönüşümü $Z(u, s)$ fonksiyonudur.

Böylece;

$$Z(u, s) = Z\{f(t)\} = s \int_0^\infty f(ut) e^{-st} dt$$

şeklinde tanımlanır. $f(t)$ fonksiyonu, $Z(u, s)$ dönüşümü ile gösterilir.

Uygun bir dönüşüm sonucunda;

$$Z\{f(t)\} = \frac{s}{u} \int_0^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

şeklinde de ifade edilebilir. Örneğin $f(t) = e^{at}$ olsun, burada $t \geq 0$, ve a bir sabittir, bu durumda bu fonksiyonun $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ –Dönüşümü

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\{e^{at}\} &= \frac{u}{s} \int_0^{\infty} e^{at} e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} e^{-(\frac{s}{u}-a)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s}{u} \int_0^b e^{-(\frac{s}{u}-a)t} dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{s}{u} \left(\frac{1}{-(\frac{s}{u}-a)} e^{-(\frac{s}{u}-a)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{-s+au} e^{-(\frac{s}{u}-a)t} \right) \Big|_0^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\frac{s}{-s+au} e^{-(\frac{s}{u}-a)b} + \frac{s}{s-ua} \right) \\ &= \frac{s}{s-ua}\end{aligned}$$

Yani,

$$\mathcal{Z}\{e^{at}\} = \frac{s}{s-ua} \text{ şeklindedir.}$$

Teorem ($\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ –Dönüşümünün Varlığı)

$f(t)$ her sonlu aralık $0 \leq t \leq K$ ve üstel mertebeden γ için parçalı sürekli ise $t > K$ olmak üzere $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ – dönüşümü $\mathcal{Z}(u, s)$ her $s > \gamma$, $u > \gamma$ için mevcuttur.

İspat: Her pozitif K sayısı için;

$$\mathcal{Z}(u, s) = \frac{s}{u} \int_0^{\infty} f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt = \frac{s}{u} \int_0^K f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt + \frac{s}{u} \int_K^{\infty} f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

olup $f(t)$ her sonlu $0 \leq t \leq K$ aralığında parçalı sürekli olduğu için, sağ kısımda birinci integral vardır. Ayrıca sağ taraftaki ikinci integral de vardır. $t > K$ için $f(t)\gamma$ üstel mertebeden olup ikinci integralinde var olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \left| \frac{s}{u} \int_K^\infty f(t) e^{-\frac{s}{u}t} dt \right| &\leq \frac{s}{u} \int_K^\infty |f(t) e^{-\frac{s}{u}t}| dt \\ &\leq \frac{s}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} |f(t)| dt \leq \frac{s}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} M e^{\gamma t} dt \\ &\leq \frac{sM}{u} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} e^{\gamma t} dt \leq \frac{sM}{u} \int_0^\infty e^{-(\frac{s}{u}-\gamma)t} dt \\ &= \frac{sM}{u} \left[\frac{e^{-(\frac{s}{u}-\gamma)t}}{-(\frac{s}{u}-\gamma)} \right]_0^\infty = \frac{sM}{s - \gamma u} \end{aligned}$$

Çizelge 3.4. ZZ-Dönüşüm Tablosu

1	1	1
2	t	$\frac{u}{s}$
3	e^{at}	$\frac{u}{s - au}$
4	$\sin at$	$\frac{aus}{s^2 + a^2u^2}$
5	$\cos at$	$\frac{s^2}{s^2 + a^2u^2}$
6	t^n	$n! \frac{u^n}{s^n}$
7	t^n	$\Gamma(n+1) \frac{u^n}{s^n}$
8	$e^{at} \sin bt$	$\frac{b \frac{s}{u}}{\left(\frac{s}{u} - a\right)^2 + b^2}$

Çizelge 3.4. (devam)

9	$e^{at} \cos bt$	$\frac{\frac{s^2}{u^2} - \frac{as}{u}}{\left(\frac{s}{u} - a\right)^2 + b^2}$
10	$t \cos at$	$\frac{\frac{s}{u} \left(\frac{s^2}{u^2} - a^2\right)}{\left(\frac{s^2}{u^2} + a^2\right)^2}$
11	$t \sin at$	$\frac{2a \frac{s^2}{u^2}}{\left(\frac{s^2}{u^2} + a^2\right)^2}$

Ters ZZ –Dönüşümü: Bir $F(s)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer $\mathcal{Z}\{f(x)\} = F(s)$ olacak biçimde bir $f(x)$ fonksiyonu var ise, f ye F nin *Ters ZZ – Dönüşümü* denir. F nin Ters ZZ-Dönüşümü

$$f = \mathcal{Z}^{-1}\{F\} \text{ veya } f(x) = \mathcal{Z}^{-1}\{F(s)\}$$

biçiminde gösterilir.

Örneğin, $\mathcal{Z}(s) = \frac{s}{s-2u}$ fonksiyonunun Ters ZZ –Dönüşümü

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{s}{s-2u}\right\} = e^{2t} \text{ şeklindedir.}$$

Teorem (Ters ZZ –Dönüşümünün tekliği):

f ve g , $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve üstel mertebeden iki fonksiyon olsun. Eğer her $s > s_0$ lar için $\mathcal{Z}^{-1}\{f\} = \mathcal{Z}^{-1}\{g\}$ olacak şekilde bir s_0 sabiti mevcutsa bu takdirde sonlu sayıda süreksizlik noktaları hariç her $x > 0$ için $f(x) = g(x)$ dir.

Teorem ($\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ –Dönüşümü için Konvolüsyon Teoremi):

f ve g iki fonksiyon olsun. $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ –Dönüşümünün konvolüsyonu

$$\mathcal{Z}(f * g) = \frac{u}{s} \mathcal{Z}(f) \cdot \mathcal{Z}(g) \text{ dir.}$$

İspat:

$$\mathcal{Z}(f)\mathcal{Z}(g) = \frac{s}{u} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{u}\tau} d\tau \cdot \frac{s}{u} \int_0^\infty g(\vartheta) e^{-\frac{s}{u}\vartheta} d\vartheta$$

$$\mathcal{Z}(f)\mathcal{Z}(g) = \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{u}\tau} d\tau \cdot \int_0^\infty g(\vartheta) e^{-\frac{s}{u}\vartheta} d\vartheta$$

$t = \vartheta + \tau$ ve $\vartheta = t - \tau$ yerine yazılırsa;

$$\mathcal{Z}(g) = \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{s}{u}(t - \tau)} dt$$

$$= \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{s}{u}t} e^{\frac{s}{u}\tau} dt$$

$$= e^{\frac{s}{u}\tau} \int_\tau^\infty g(t - \tau) e^{-\frac{s}{u}t} dt$$

elde edilir.

Böylece;

$$= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty f(\tau) e^{-\frac{s}{u}\tau} d\tau \cdot e^{\frac{s}{u}\tau} \int_\tau^\infty e^{-\frac{s}{u}t} g(t - \tau) dt d\tau$$

$$= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty f(\tau) \int_\tau^\infty e^{-\frac{s}{u}t} g(t - \tau) dt d\tau$$

$$= \frac{s^2}{u^2} \int_0^\infty e^{-\frac{s}{u}t} \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau dt$$

$$\begin{aligned} &= \frac{s^2}{u^2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{u}t} \cdot (f * g)(t) dt \\ &= \frac{s}{u} Z(f * g) \end{aligned}$$

olur.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde 3 farklı Birinci Tür Volterra İntegral Denklemi ele alınıp Laplace Dönüşüm Metodu, $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ -Dönüşüm Metodu, Sumudu Dönüşüm Metodu ve Elzaki Dönüşüm Metodu olmak üzere dört farklı dönüşüm metoduyla çözülmüştür.

4.1.Test Problemi 1

$x^2 = \frac{1}{3} \int_0^x (x-t)u(t) dt$ Birinci Tür Volterra integral denklemini 4 farklı dönüşüm uygulayarak çözünüz.

4.1.1. Çözüm 1 (Laplace dönüşüm metodu)

$x^2 = \frac{1}{3} \int_0^x (x-t)u(t) dt$ denkleminin her iki tarafına Laplace Dönüşümü uygulanırsa ve konvolüsyon teoreminden yararlanılırsa;

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{3} \cdot \int_0^x (x-t)u(t) dt\right\}$$

$$\mathcal{L}\{x^2\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{3}\right\} \cdot \mathcal{L}\left\{\int_0^x (x-t)u(t) dt\right\}$$

$$\frac{2!}{s^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \mathcal{L}\{u(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{6}{u} \text{ elde edilir.}$$

Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{u(x)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6}{u}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{u(x)\}\} = 6 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{u}\right\}$$

$$u(x)=6 \text{ olur.}$$

4.1.2. Çözüm 2 (ZZ -dönüşüm metodu)

$x^2 = \frac{1}{3} \int_0^x (x-t)u(t)dt$ denkleminin her iki tarafına ZZ –Dönüşümü uygulanırsa

$$Z(x^2) = Z\left(\frac{1}{3} \int_0^x (x-t)u(t)dt\right)$$

ZZ –Dönüşümünün Konvolüsyon teoreminden;

$$Z(x^2) = \frac{u}{s} Z\left(\frac{1}{3}\right) Z(u(x))$$

$$2. \frac{u^2}{s^2} = \frac{u}{s} \cdot \frac{1}{3} \cdot Z(u(x))$$

$$Z(u(x)) = 6$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının Ters ZZ –Dönüşümü alınır;

$$Z^{-1}\left(Z(u(x))\right) = Z^{-1}(6)$$

$$u(x) = 6$$

olur.

4.1.3. Çözüm 3 (Sumudu dönüşüm metodu)

$x^2 = \frac{1}{3} \int_0^x (x-t)u(t)dt$ denkleminin her iki tarafına Sumudu Dönüşümü uygulanırsa;

$$S[x^2]=S[\frac{1}{3}\int_0^x(x-t)u(t)dt]$$

$$S[\frac{2x^2}{2}]=S[\frac{1.2}{3.2}\int_0^x(x-t)u(t)dt]$$

$$S(2).S(\frac{x^2}{2})=S(\frac{2}{6}).S[x*u(x)]$$

Konvolüsyon teoreminden;

$$2.v^2=\frac{2}{6}.v.v.H(v)$$

$$H(v)=6 \text{ olur.}$$

Ters Sumudu Dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x) = S^{-1}[H(v)] = S^{-1} (6)$$

$$u(x)=6 \text{ olur.}$$

4.1.4. Çözüm 4 (Elzaki dönüşüm metodu)

$x^2 = \frac{1}{3}\int_0^x(x-t)u(t)dt$ denkleminin her iki tarafına Elzaki Dönüşümü uygulanırsa;

$$E[x^2]=E[\frac{1}{3}\int_0^x(x-t)u(t)dt]$$

$$E[x^2]=E[\frac{1}{3}].E[\int_0^x(x-t)u(t)dt]$$

Konvolüsyon teoreminden;

$$2!v^4=\frac{1}{3}.\frac{1}{v}.v^3.u(v)$$

$$u(v)=6v^2 \text{ olur.}$$

Ters Elzaki Dönüşümü yapılırsa;

$$E^{-1}(u(v)) = E^{-1}(6v^2)$$

$$u(x) = 6$$

olur.

4.2. Test Problemi 2

$x(t) = 2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt$ Birinci Tür Volterra integral denklemini 4 farklı dönüşüm uygulayarak çözünüz.

4.2.1. Çözüm 1 (Laplace dönüşüm metodu)

$x(t) = 2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt$ denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa ve konvolüsyon teoreminden yararlanılırsa;

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{2t^3\} + \mathcal{L}\{x(t)\} \cdot \mathcal{L}\{\sin(x-t)\}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{2 \cdot 3!}{s^4} + \mathcal{L}\{x(t)\} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} \left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{12}{s^4}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{12}{s^4} \cdot \left(\frac{s^2+1}{s^2}\right)$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = \frac{12}{s^4} + \frac{1}{s^6}$$

elde edilir.

Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{s^4} + \frac{1}{s^6}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\mathcal{L}\{x(t)\}\} = 12 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} + 12 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^6}\right\} +$$

$$x(t) = 2t^3 + \frac{t^5}{10}$$

olur.

4.2.2. Çözüm 2 (ZZ -dönüşüm metodu)

$x(t) = 2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt$ Birinci Tür Volterra integral denkleminin her iki tarafına ZZ –Dönüşümü uygulanırsa,

$$Z(x(t)) = Z\left(2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt\right)$$

ZZ –Dönüşümünün Konvolüsyon teoreminden;

$$Z(x(t)) = \frac{u}{s} Z(2t^3) + Z\left(\int_0^x x(t) \sin(x-t) dt\right)$$

$$Z(x(t)) = 2.3! \frac{u^3}{s^3} + \frac{u}{s} \cdot Z(x(t)) \cdot \frac{u \cdot s}{s^2 + u^2}$$

$$Z(x(t)) = 12 \frac{u^3}{s^3} + Z(x(t)) \cdot \frac{u^2 \cdot s}{s^3 + s \cdot u^2}$$

$$Z(x(t)) \cdot \left(1 - \frac{u^2 \cdot s}{s^3 + s \cdot u^2}\right) = 12 \frac{u^3}{s^3}$$

$$Z(x(t)) = 12 \frac{u^3}{s^3} \cdot \frac{s^2 + u^2}{s^2} = 12 \cdot \frac{u^3 s^2}{s^5} + 12 \cdot \frac{u^5}{s^5}$$

$$Z(x(t)) = 12 \cdot \frac{u^3}{s^3} + 12 \cdot \frac{u^5}{s^5}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının Ters ZZ –Dönüşümü alınır;

$$Z^{-1}\left(Z(x(t))\right) = Z^{-1}\left(12 \cdot \frac{u^3}{s^3} + 12 \cdot \frac{u^5}{s^5}\right)$$

$$Z^{-1}\left(Z(x(t))\right) = 12 \cdot Z^{-1}\left(\frac{u^3}{s^3}\right) + 12 \cdot Z^{-1}\left(\frac{u^5}{s^5}\right)$$

$$x(t)=12.\frac{t^3}{6}+12.\frac{t^5}{120}$$

$$x(t)=2t^3 + \frac{t^5}{10}$$

olur.

4.2.3. Çözüm 3 (Sumudu dönüşüm metodu)

$x(t) = 2t^3 + \int_0^x x(t)\sin(x-t) dt$ Birinci Tür Volterra integral denkleminin her iki tarafına Sumudu Dönüşümü uygulanırsa;

$$S[x(t)]=S[2t^3 + \int_0^x x(t)\sin(x-t) dt]$$

$$S[x(t)]=S[2t^3] + S[\int_0^x x(t)\sin(x-t) dt]$$

$$S[x(t)]=S[2t^3.\frac{12}{12}] + S[\int_0^x x(t)\sin(x-t) dt]$$

$$S[x(t)]=12.S[\frac{t^3}{6}] + S[\int_0^x x(t)\sin(x-t) dt]$$

$$S[x(t)]=12.v^3 + S[v*x(t)]$$

Konvolüsyon teoreminden;

$$S[x(t)]=12.v^3 + S[x(t)].v.\frac{v}{1+v^2}$$

$$S[x(t)]\left(1 - \frac{v^2}{1-v^2}\right)=12.v^3$$

$$S[x(t)]= 12.v^3+12.v^5 \text{ olur.}$$

Ters Sumudu Dönüşümü uygulanırsa;

$$x(t) = S^{-1}[S[x(t)]] = S^{-1} (12.v^3 + 12.v^5)$$

$$x(t) = S^{-1}[S[x(t)]] = 12.S^{-1} (v^3) + 12.S^{-1} (v^5)$$

$$x(t) = 12 \cdot \frac{t^3}{3!} + 12 \cdot \frac{t^5}{5!}$$

$$x(t) = 2t^3 + \frac{t^5}{10} \text{ olur.}$$

4.2.4. Çözüm 4 (Elzaki dönüşüm metodu)

$x(t) = 2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt$ denkleminin her iki tarafına Elzaki Dönüşümü uygulanırsa;

$$E[x(t)] = E[2t^3 + \int_0^x x(t) \sin(x-t) dt]$$

$$E[x(t)] = E[2t^3] + E[\int_0^x x(t) \sin(x-t) dt]$$

$$E[x(t)] = 2.E[t^3] + E[\int_0^x x(t) \sin(x-t) dt]$$

Konvolüsyon teoreminden;

$$E[x(t)] = 2.3! \cdot \frac{v^3}{s^3} + \frac{v}{s} \cdot \frac{v.s}{s^2 + v^2} \cdot E[x(t)]$$

$$E[x(t)] \cdot \left(1 - \frac{v^2.s}{s^3 + v^2.s}\right) = 12 \cdot \frac{v^3}{s^3}$$

$$E[x(t)] = 12 \cdot \frac{v^3}{s^3} \cdot \frac{s^2 + v^2}{s^2} = 12 \cdot \frac{v^5}{s^5} + 12 \cdot \frac{v^3}{s^3}$$

Ters Elzaki Dönüşümü yapılırsa;

$$E^{-1} (E[x(t)]) = E^{-1} (12 \cdot \frac{v^5}{s^5} + 12 \cdot \frac{v^3}{s^3})$$

$$x(t) = 12 \frac{t^5}{5!} + 12 \frac{t^3}{3!}$$

$$x(t) = 2t^3 + \frac{t^5}{10}$$

olur.

4.3. Test Problemi 3

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$$

Birinci tür volterra integral denklemini 4 farklı dönüşüm uygulayarak çözünüz.

4.3.1. Çözüm 1 (Laplace dönüşüm metodu)

$\sin x = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$ denkleminin her iki tarafa Laplace dönüşüm uygulanırsa ve konvolüsyon teoreminden yararlanılırsa;

$$L(\sin x) = L\left(\int_0^x e^{x-t} u(t) dt\right)$$

$$\frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{s - 1} \cdot L(u(x))$$

$$L(u(x)) = \frac{s - 1}{s^2 + 1}$$

$$L(u(x)) = \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$L - 1 \left(\left(L(u(x)) \right) \right) = L^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + 1} \right) - L^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + 1} \right)$$

$$u(x) = \cos x - \sin x \text{ olur.}$$

4.3.2 Çözüm 2 (ZZ- dönüşüm metodu)

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$$

Birinci tür Volterra integral denkleminin her iki tarafına ZZ –dönüşümü uygulanırsa

$$z(\sin x) = z \left(\int_0^x e^{x-t} u(t) dt \right)$$

ZZ – Dönüşümünün konvolüsyon teoreminden;

$$z(\sin x) = \frac{u}{s - u} \cdot z(u(x))$$

$$\frac{us}{s^2 + u^2} = \frac{u}{s - u} \cdot z(u(x))$$

$$z(u(x)) = \frac{us}{s^2 + u^2} \cdot \frac{s - u}{u}$$

$$z(u(x)) = \frac{s^2 - us}{s^2 + u^2}$$

$$z(u(x)) = \frac{s^2}{s^2 + u^2} - \frac{us}{s^2 + u^2}$$

elde edilir.

Bu eşitliğin her iki tarafının ters ZZ -dönüşümü alınırsa;

$$z^{-1} \left(z(u(x)) \right) = z^{-1} \left(\frac{s^2}{s^2 + u^2} \right) - z^{-1} \left(\frac{us}{s^2 + u^2} \right)$$

$$u(x) = \cos x - \sin x$$

olur.

4.3.3 Çözüm 3 (Sumudu dönüşüm metodu)

$$\sin x = \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$$

Denkleminin her iki tarafına Sumudu dönüşümü uygulanırsa;

$$S(\sin x) = S \left(\int_0^x e^{x-t} u(t) dt \right)$$

$$S(\sin x) = S[e^{x*} u(x)]$$

Konvolüsyon teoreminden;

$$\frac{V}{1+V^2} = \frac{1}{1-V} \cdot V \cdot H(V)$$

$$H(V) = \frac{V}{1+V^2} \cdot \frac{1-V}{V}$$

$$H(V) = \frac{1}{1+V^2} - \frac{V}{1+V^2}$$

olur.

Ters Sumudu dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x) = S^{-1}[H(V)]$$

$$u(x) = S^{-1}\left[\frac{1}{1+V^2}\right] - S^{-1}\left[\frac{V}{1+V^2}\right]$$

$$u(x) = \text{Cos}x - \text{Sin}x$$

olur.

4.3.4. Çözüm 4 (Elzaki dönüşüm metodu)

$$\text{Sin}x = \int_0^x e^{x-t}u(t)dt$$

Denkleminin her iki tarafına Elzaki dönüşümü uygulanırsa;

$$E(\text{Sin}x) = E\left(\int_0^x e^{x-t}u(t)dt\right)$$

Konvolüsyon teoreminden;

$$\frac{V^3}{1+V^2} = \frac{V^2}{1-V} \cdot \frac{1}{V} \cdot u(V)$$

$$u(V) = \frac{V^3}{1+V^2} \cdot \frac{1-V}{V}$$

$$u(V) = \frac{V^2}{1+V^2} - \frac{V^3}{1+V^2}$$

olur.

Ters Elzaki dönüşümü yapılırsa;

$$E^{-1}(u(V)) = E^{-1}\left(\frac{V^2}{1+V^2}\right) - E\left(\frac{V^3}{1+V^2}\right)$$

$$u(x) = \text{Cos}x - \text{Sin}x \text{ olur.}$$



5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde Birinci tür lineer Volterra integral denklemleri verilerek çözümleri Laplace Dönüşüm Metodu, $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ Dönüşüm Metodu, Elzaki Dönüşüm Metodu ve Sumudu Dönüşüm Metotları ile yapıldı. Öncelikle Volterra integral denklemi ve türleri tanıtıldı. Laplace Dönüşümü, $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ dönüşümü, Elzaki Dönüşümü ve Sumudu dönüşümleri için konvolüsyon teoremi ispatlandı. Ayrıca dönüşüm tablolarından faydalanıldı. Daha sonra birinci tür lineer Volterra integral denklemleri ele alınarak bu dört farklı metot uygulandı. 4 farklı dönüşüm içinde her test problemi için aynı sonuca ulaşıldı.

Sonuç olarak Laplace Dönüşüm Metodu, $\mathcal{Z}\mathcal{Z}$ -Dönüşüm Metodu, Elzaki Dönüşüm Metodu ve Sumudu Dönüşüm Metotlarının Birinci Tür Lineer Volterra İntegral Denklemlerinin çözümleri için etkili yöntemler oldukları görüldü.

KAYNAKLAR

- Aksoy, Y. 1998. İntegral Denklemler. Y.T.Ü Yayınları, 156, İstanbul.
- Aliyev, R., 2010. Stokastik Süreçler Teorisine Giriş, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon, 135s.
- Asiru, M. A. 2010. Sumudu transform and the solution of integral equations of convolution type. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 906-910.
- Bayraktar, M. 2005. Fonksiyonel Analiz. Gazi Kitabevi, 181, Ankara.
- Bayram, M, Çelik, E. ve Aykut, A. 2002. The modified two sided approximations method and pade approximations for solving the differential equation with variant retarded argument. Applied Mathematics and Computation, 144(3), 475-482.
- Belgacem, F. B. M., Karaballi, A. A. ve Kalla, S. L. 2003. Analytical investigations of the sumudu transform and applications to integral production equations. Mathematical Problems in Engineering, 3, 103-118.
- Bocher M. (1913), An Introduction to the Study of Integral Equations.
- Çelik, E, Aykut, A. ve Bayram M. 2003. The modified successive approximations method and pade approximations for solving the differential equation with variant retarded argument. Applied Mathematics and Computation, 151, 393-400.
- Çelik, E, ve Bayram, M. 2003. The basic successive substitute approximations method and pade approximations to solve the elasticity problem of settled of the wronkler ground with variable coefficients. Applied Mathematics and Computation, 154, 495-505.
- Delves, L. M. ve Mohammed, J. L. 1992. Computational methods for integral equations. Cambridge University Press, Cambridge, 115-119.
- Dyke, P.P.G., 2001, An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series, Spring-Verlag London Limited
- Elzaki, T. M., Elzaki S. M. ve Elnour, E. A. 2012. On the new integral transform “Elzaki transform” fundamental properties investigations and applications. Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical, 4(1), 1-13.
- Elzaki, T. M. ve Elzaki, S. M. 2014. On the connections between Laplace and Elzaki transforms. Advances in Theoretical and Applied Mathematics, 6(1), 1-10.
- Elzaki, T. M. 2015. The solution of radial diffusivity and shock wave equations by Elzaki variational iteration method. International Journal of Mathematical Analysis, 9(22), 1065-1071.

- He, J. H. 1998. Approximate analytical solution for see page flow with fractional derivatives in porous media. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 167(1–2), 57-68.
- Krasnov, M., Kiselev, A. ve Makeronko, G. 1976. *İntegral Denklemler*. 155, İstanbul.
- Kythe, P. ve Puri, P. 2011. *Computational methods for linear integral equations*. Springer Science & Business Media, 99-105, New York.
- Lovitt, W. 1924. *Lineer Integral Equations*. McGraw-Hill, 501, New York.
- Ma, L. ve Korsunsky, A. M. 2004. A note on the Gauss-Jacobi quadrature formulae for singular integral equations of the second kind. *International Journal of Fracture*, 126, 399-405.
- Musayev, B. ve Alp, M. 2000. *Fonksiyonel Analiz*. Balcı Yayınları, 470, Kütahya.
- Özer, M.N. ve Eser D., 2002, *Diferensiyel Denklemler (Teori ve Uygulamaları)*, Osmangazi Üniversitesi, Birlik Ofset, Eskişehir
- Özdemir, E. 2021. ZZ – Dönüşüm metoduyla birinci tür lineer Volterra integral denklemlerin çözümü. Yüksek Lisans Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Ana bilim Dalı, 34, Erzurum.
- Petrovsky, I. 1953. *Lectures on the theory of integral equations*. Graylock Press, 220, Würzburg.
- Rahman, M. 2007. *Integral Equations and their Applications*. Witt Press, 386, Canada.
- Saberi-Nadjafi, J. ve Heidari, M. 2007. A quadrature method with variable step for solving linear Volterra integral equations of second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 188, 549-554.
- Sneddon, I.N., 1972, *The Use Of Integral Transforms*, Simson Profesör Of Mathematics, University Of Glasgow
- Tricomi, F. G. 1985. *Integral Equations*. Dover Publications, 238, New York.
- Yaşar, İ.B., 1988, *Uygulamalı Matematik (İntegral Dönüşümleri ve Uygulamaları)*, Gazi Üniversitesi, Yayın No:127, Ankara
- Watugala, G. 1993. Sumudu transform: a new integral transform to solve differential equations and control engineering problems. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1, 35-43.
- Wazwaz, A. M. 1997. *A first course in integral equations*, World Scientific, 220, Singapore.
- Wazwaz, A. 1999. Analytical approximations and pade approximants for Volterra's populations Model. *Applied Mathematics and Computation*, 100(1), 13-25.

Wazwaz, A. M. 2011. Linear and nonlinear integral equations Springer-Verlag, 567, Beijing.

